

Parte IV

Métodos adicionais

11

Alguns Métodos Adicionais

“He who seeks for methods without having a definite problem in mind seeks in the most part in vain.”

– David Hilbert

Neste capítulo são apresentados alguns métodos para projeto de controle de sistemas dinâmicos que têm recebido atenção recente.

Foram selecionados os seguintes enfoques promissores entre aqueles disponíveis no momento:

1. **Linearização por realimentação do estado ou da saída**

Quando um modelo não linear é acurado, pode-se obter, em certos casos, uma transformação que o torna linear, mediante uma realimentação de estados ou, às vezes, mesmo da saída.

2. **Controle utilizando modos deslizantes**

Trata-se de um tipo de controlador que oferece robustez a erros no modelo e perturbações exógenas, mas à custa de maior consumo de energia, geração de vibrações e possível aumento na velocidade de degradação dos atuadores.

3. **Controle adaptativo com modelo de referência (MRAC)**

Aqui é feita apenas uma apresentação limitada do tema para ilustrar como as incertezas podem ser mitigadas pela adaptação do controlador às incertezas, em contraponto aos métodos baseados em robustez.

4. **Controle preditivo baseado em modelos (MPC)**

Esse enfoque tem se popularizado por permitir a inclusão de restrições sobre a entrada, o estado e a saída, bem como por ser aplicável a sistemas multivariáveis.

5. Controle de processos que apresentam planicidade

Embora ainda não sejam conhecidos critérios simples para verificar se um dado modelo é plano, o projeto do controlador é significativamente simplificado nesse caso.

6. Controladores baseados em conhecimento

A popularização de ferramentas de inteligência artificial (IA) tem permitido o desenvolvimento de controladores que incorporam capacidades como a de aprendizado, decisões baseadas em realidade aumentada, comportamento autônomo, sensoriamento através de imagens e muitas outras. Aqui ilustra-se o potencial das ferramentas de IA apresentando controladores baseados em conhecimento expressos como regras de produção fuzzy (Se *<antecedente>* então *<consequente>*).

11.1 Linearização via realimentação de estados

O método apresentado nesta seção é aplicável a sistemas da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) u \quad (11.1)$$

que são controláveis (novamente, $u(t) \in \mathbb{R}$ para t fixo).

Um teste de controlabilidade para tais modelos pode ser encontrada em (ISIDORI, 1985) e (NIJMEIJER; SHAFT, 1990), entre outras referências.

Suponha, inicialmente, que a representação de um processo esteja descrito por uma EDO na forma especial

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\beta^{-1}(\bar{\mathbf{z}}) [u - \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}})] \quad (11.2)$$

Nesse caso, a lei de controle

$$u = \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}}) + \beta(\bar{\mathbf{z}})\bar{v} \quad (11.3)$$

torna linear o modelo da combinação controlador + processo

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\beta^{-1}(\bar{\mathbf{z}}) [u - \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}})] \quad (11.4)$$

$$= \mathbf{A}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\beta^{-1}(\bar{\mathbf{z}}) [\bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}}) + \beta(\bar{\mathbf{z}})\bar{v} - \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}})] \quad (11.5)$$

$$= \mathbf{A}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\bar{v} \quad (11.6)$$

Ainda mais, se (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável, então $\exists \mathbf{P}$ não singular, tal que a transformação similar

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{z}} \quad (11.7)$$

leva a uma representação na forma canônica controlável

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{PAP}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{PB}\bar{v} \tag{11.8}$$

$$= \mathbf{A}_c\mathbf{z} + \mathbf{B}_c\bar{v} \tag{11.9}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{v} \tag{11.10}$$

Utilizando-se uma realimentação de estados $\bar{v} = -\mathbf{Kz} + v$ é possível alocar todos os polos em 0

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_B} \mathbf{z} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_B} v \tag{11.11}$$

Esta representação $(\mathbf{A}_B, \mathbf{B}_B)$ recebe o nome de forma canônica de Brunovsky e corresponde a se ter uma cadeia de integradores

$$\dot{z}_1 = z_2 \tag{11.12}$$

$$\dot{z}_2 = z_3 \tag{11.13}$$

$$\vdots \tag{11.14}$$

$$\dot{z}_n = v \tag{11.15}$$

Utilizando-se $\bar{v} = -\mathbf{Kz} + v$ e $\mathbf{z} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{z}}$, obtém-se que

$$u = \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}}) + \beta(\bar{\mathbf{z}})\bar{v} \tag{11.16}$$

$$= \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}}) + \beta(\bar{\mathbf{z}})(-\mathbf{Kz} + v) \tag{11.17}$$

$$= \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}}) + \beta(\bar{\mathbf{z}})(-\mathbf{KP}\bar{\mathbf{z}} + v) \tag{11.18}$$

$$= \overbrace{(\bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}}) - \beta(\bar{\mathbf{z}})\mathbf{KP}\bar{\mathbf{z}})}^{\alpha(\bar{\mathbf{z}})} + \beta(\bar{\mathbf{z}})v \tag{11.19}$$

$$= \alpha(\bar{\mathbf{z}}) + \beta(\bar{\mathbf{z}})v \tag{11.20}$$

Portanto, a representação desejada é

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}_B\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B}_B\beta^{-1}(\bar{\mathbf{z}}) [u - \alpha(\bar{\mathbf{z}})] \tag{11.21}$$

Assim, busca-se um mapeamento homeomórfico $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (11.22)$$

de modo que um modelo não linear (de forma muito comum na prática)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (11.23)$$

seja transformado em 11.21.

Utilizando-se a regra da cadeia na 11.23, pode-se escrever

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \mathbf{T}_x(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (11.24)$$

$$= \mathbf{T}_x(\mathbf{x}) [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u] \quad (11.25)$$

$$= \mathbf{T}_x(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}_x(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (11.26)$$

A ideia é obter $\mathbf{T}(\cdot)$ de modo que a expressão 11.26 se torne idêntico àquela desejada, ou seja, a expressão 11.21, mas com \mathbf{A} e \mathbf{B} já na forma de Brunovsky

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}_B \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B}_B \beta^{-1}(\bar{\mathbf{z}}) [u - \alpha(\bar{\mathbf{z}})] \quad (11.27)$$

$$= \mathbf{A}_B \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_B \beta^{-1}(\mathbf{T}(\mathbf{x})) [u - \alpha(\mathbf{T}(\mathbf{x}))] \quad (11.28)$$

$$= \mathbf{A}_B \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_B \tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) [u - \tilde{\alpha}(\mathbf{x})] \quad (11.29)$$

em que $\tilde{\alpha}(\mathbf{x}) = \alpha \circ \mathbf{T}(\mathbf{x})$ e $\tilde{\beta}(\mathbf{x}) = \beta \circ \mathbf{T}(\mathbf{x})$.

Portanto, igualando-se os termos correspondentes de 11.26 e 11.29, tem-se que a transformação $\mathbf{T}(\cdot)$ deve ser tal que

$$\mathbf{T}_x(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_B \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_B \tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (11.30)$$

$$\mathbf{T}_x(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_B \tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (11.31)$$

Denotando por $T_i(\mathbf{x})$ os componentes de $\mathbf{T}(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} T_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ T_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (11.32)$$

os termos à direita de 11.30 e 11.31 são, respectivamente,

$$\mathbf{A}_B \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_B \tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} T_2(\mathbf{x}) \\ T_3(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ T_n(\mathbf{x}) \\ -\tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (11.33)$$

e

$$\mathbf{B}_B \tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ \tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (11.34)$$

já que \mathbf{A}_B possui uma forma especial

$$\mathbf{A}_B \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ T_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2(\mathbf{x}) \\ T_3(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ T_n(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.35)$$

bem como \mathbf{B}_B ,

$$-\mathbf{B}_B \tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (11.36)$$

Assim, a transformação buscada \mathbf{T} deve satisfazer

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}) \quad (11.37)$$

\vdots

$$\frac{\partial T_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = T_n(\mathbf{x}) \quad (11.38)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (11.39)$$

e

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad (11.40)$$

\vdots

$$\frac{\partial T_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad (11.41)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \beta^{-1}(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (11.42)$$

Tendo-se obtido $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, o controle linearizante é $u(\mathbf{x}) = \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) + \tilde{\beta}(\mathbf{x}) v$, em que

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{x}) = - \frac{\frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})} \quad (11.43)$$

$$\tilde{\beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})} \quad (11.44)$$

Em princípio, uma vez que o sistema é tornado linear por uma malha interna, pode-se conceber uma malha externa para alocar arbitrariamente os polos. Uma dificuldade do enfoque é a necessidade de se dispor de um modelo acurado.

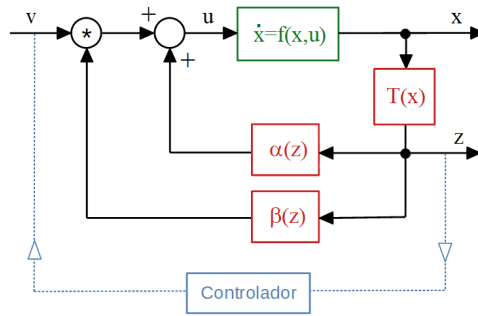


Figura 11.1: Linearização exata por realimentação de estado.

11.1.1 Exemplo

Considere o sistema descrito por

$$\dot{x}_1 = a \sin(x_2) \quad (11.45)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u \quad (11.46)$$

em que se pode fazer a associação, denotando $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a \sin(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix} \quad (11.47)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11.48)$$

As condições requeridas para $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ são

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0 \quad (11.49)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}) \Rightarrow T_2(\mathbf{x}) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} a \sin(x_2) \quad (11.50)$$

e, também,

$$\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial T_2}{\partial x_2} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} a \cos(x_2) \neq 0 \quad (11.51)$$

Arbitrando-se $T_1(\mathbf{x}) = x_1$, resulta $T_2(\mathbf{x}) = a \sin(x_2)$, donde

$$\tilde{\alpha}(x_1, x_2) = -\frac{\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}}{\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}} = x_1^2 \tag{11.52}$$

$$\tilde{\beta}(x_1, x_2) = \frac{1}{\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}} = \frac{1}{a \cos(x_2)} \tag{11.53}$$

e o controle linearizante é

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos(x_2)} v \tag{11.54}$$

válido para $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$.

De fato, utilizando-se o controle $u(x_1, x_2, v)$ que foi calculado, tem-se que o sistema, nas novas coordenadas $\{z_1, z_2\}$, possui a sua dinâmica descrita por

$$\dot{\bar{z}}_1 = \dot{T}_1(\mathbf{x}) \tag{11.55}$$

$$= \dot{\mathbf{x}}_1 \tag{11.56}$$

$$= a \sin(x_2) \tag{11.57}$$

$$= T_2(\mathbf{x}) \tag{11.58}$$

$$= z_2 \tag{11.59}$$

e

$$\dot{\bar{z}}_2 = \dot{T}_2(\mathbf{x}) \tag{11.60}$$

$$= a \frac{d}{dt} \sin(x_2) \tag{11.61}$$

$$= a \cos(x_2) \dot{x}_2 \tag{11.62}$$

$$= a \cos(x_2) (-x_1^2 + u) \tag{11.63}$$

$$= a \cos(x_2) \left(-x_1^2 + x_1^2 + \frac{1}{a \cos(x_2)} v \right) \tag{11.64}$$

$$= v \tag{11.65}$$

ou seja, o modelo está na forma de Brunovski

$$\dot{\bar{z}}_1 = \bar{z}_2 \tag{11.66}$$

$$\dot{\bar{z}}_2 = v \tag{11.67}$$

como desejado.

11.2 Linearização por realimentação da saída

Seja o modelo SISO da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (11.68)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (11.69)$$

Na linearização por realimentação de estados, necessitava-se de $T(\mathbf{x})$ tal que

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}) \quad (11.70)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial T_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = T_n(\mathbf{x}) \quad (11.71)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (11.72)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad (11.73)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial T_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad (11.74)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \beta^{-1}(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (11.75)$$

Caso favorável:

Em alguns casos, a própria função $h(\mathbf{x})$ pode ser usada no lugar de $T_1(\mathbf{x})$

$$y = h(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) \quad (11.76)$$

Derivando y , tem-se que

$$\dot{y} = \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \quad (11.77)$$

$$= \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u] \quad (11.78)$$

$$= \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (11.79)$$

e, eventualmente,

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad (11.80)$$

Defina-se $T_2(\mathbf{x})$ a partir da expressão anterior de \dot{y}

$$T_2(\mathbf{x}) = \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{11.81}$$

$$= \dot{y} \tag{11.82}$$

Derivando-se $\dot{y} = T_2(\mathbf{x})$, obtém-se que

$$\ddot{y} = \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \tag{11.83}$$

$$= \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})u \tag{11.84}$$

e, se $\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$, então faz-se

$$T_3(\mathbf{x}) = \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{11.85}$$

$$= \ddot{y} \tag{11.86}$$

Prosegue-se desta forma até

$$y^{(n)} = \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})u \tag{11.87}$$

Caso seja satisfeita a condição

$$\frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0 \tag{11.88}$$

o controle linearizante é

$$u = \frac{1}{\frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})} \left[-\frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + v \right] \tag{11.89}$$

A saída correspondente y é tal que

$$y^{(n)} = v \tag{11.90}$$

Fazendo-se $z_1 = y$, $z_2 = \dot{y}$, ... , $z_n = y^{(n-1)}$, obtém-se a forma de Brunovsky

$$\dot{z}_1 = z_2 \tag{11.91}$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{n-1} = z_n \tag{11.92}$$

$$\dot{z}_n = v \tag{11.93}$$

Exemplo: Equação de Van der Pol

Considere o seguinte modelo conhecido como o de Van der Pol controlado

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11.94)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 + u \quad (11.95)$$

$$y = x_1 \quad (11.96)$$

Deriva-se, agora, y , até que apareça explicitamente a grandeza u

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 \quad (11.97)$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 + u \quad (11.98)$$

Logo, o controle linearizante é

$$u = x_1 - \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 + v \quad (11.99)$$

de modo que

$$\ddot{y} = -x_1 + \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 + u \quad (11.100)$$

$$= -x_1 + \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 + x_1 - \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 + v \quad (11.101)$$

$$= v \quad (11.102)$$

De fato, fazendo-se a associação $z_1 = y$ e $z_2 = \dot{y}$

$$z_1 = y \Rightarrow \dot{z}_1 = \dot{y} = z_2 \quad (11.103)$$

$$z_2 = \dot{y} \Rightarrow \dot{z}_2 = \ddot{y} = v \quad (11.104)$$

Caso geral

Suponha que o modelo é de ordem n ($\mathbf{x}[t] \in \mathbb{R}^n$) e assuma que, nas derivações sucessivas de y , a variável u apareceu na r -ésima derivada ou, em outras palavras,

$$y^{(r)} = \frac{\partial T_r}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \underbrace{\frac{\partial T_r}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})}_{\neq 0} u \quad (11.105)$$

para $r < n$.

Um modelo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (11.106)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (11.107)$$

é dito ser de grau relativo r se

$$T_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \tag{11.108}$$

$$T_{k+1}(\mathbf{x}) = \frac{\partial T_k}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{11.109}$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 ; k = 1, 2, \dots, r - 1 \tag{11.110}$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0 \tag{11.111}$$

ou, equivalentemente, se u aparece explicitamente apenas em y^r . Nesse caso, fazendo-se

$$u = \frac{1}{\frac{\partial T_r}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})} \left[-\frac{\partial T_r}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + v \right] \tag{11.112}$$

pode-se obter o modelo linearizado na forma de Brunovsky

$$\dot{z}_1 = z_2 \tag{11.113}$$

\vdots

$$\dot{z}_{r-1} = z_r \tag{11.114}$$

$$\dot{z}_r = v \tag{11.115}$$

$$y = z_1 \tag{11.116}$$

Note que o modelo original é ordem n , há $n - r$ componentes adicionais do estado, doravante denotados $w_{r+1}, w_{r+2}, \dots, w_n$.

A saída y não é afetada por esses componentes $w_{r+1}, w_{r+2}, \dots, w_n$ e, logo, são não observáveis.

Uma análise simplificada desses componentes não observáveis é apresentada no Apêndice I (Dinâmica Zero), tomando-se o caso de sistemas lineares.

A linearização por realimentação de estado consiste essencialmente em obter uma transformação de coordenadas $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$, eventualmente não linear, e remete ao conceito de conjugação topológica. Para tal, a função $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ necessita satisfazer certas condições de regularidade. Em princípio, se o modelo fornecido é acurado e se dispõe da transformação \mathbf{T} , o projeto do controlador demandaria apenas técnicas lineares. No caso de realimentação da saída, deve-se tomar o cuidado de verificar se os componentes não observáveis são “estáveis”.

11.3 Controle utilizando movimentos deslizantes

Ao invés de apresentar o método de controle utilizando movimentos deslizantes em uma forma mais geral, este capítulo limita a atenção a sistemas lineares, em conformidade com a filosofia apresentada no capítulo de Introdução.

Considere o controle de posição em apenas um eixo de um satélite, utilizando *thrusters*, que é um exemplo já visto no capítulo sobre controle liga-desliga. A figura ao lado ilustra o plano de movimentação em que o binário produzido pelos jatos de gás dos *thrusters* constituem a entrada u .

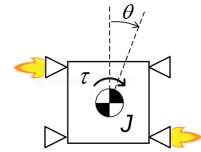


Figura 11.2: Controle de satélite em um eixo utilizando jatos de gás.

Assumindo ausência de arrasto, o modelo é dado por

$$J\ddot{\theta} = \tau \tag{11.117}$$

$$\mathcal{L}[\theta] = \frac{1}{Js^2}\mathcal{L}[\tau] \tag{11.118}$$

em que $J = 1$, $U(s) = \mathcal{L}[\tau(t)]$ é uma lei de controle liga-desliga e $Y(s) = \mathcal{L}[\theta(t)]$ é a direção de apontamento do satélite:

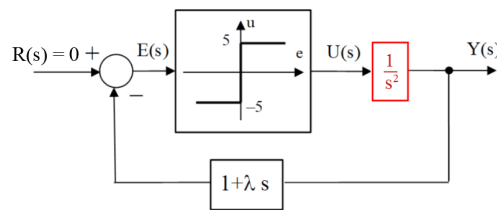


Figura 11.3: Controle de satélite com jatos intermitentes.

Esse sistema apresenta movimento deslizante, conforme visto na figura 11.4, em que propositalmente o passo de integração foi aumentado para que se pudesse observar o chaveamento dos jatos de gás.

Como esse chaveamento é de elevada frequência, o comportamento observado devido à filtragem do componente de alta frequência é o de um sistema linear tipo $\dot{\mathbf{x}} = -\lambda \mathbf{x}$.

Esse fenômeno pode ser interpretado como um movimento de “escorregamento” do estado sobre uma superfície (*sliding motion*).

Neste texto, além de se limitar apenas a superfícies de deslizamento lineares passando pela origem, trabalha-se com um modelo de ordem 3 para evitar o emprego de numerosos índices e subíndices (a generalização para uma ordem

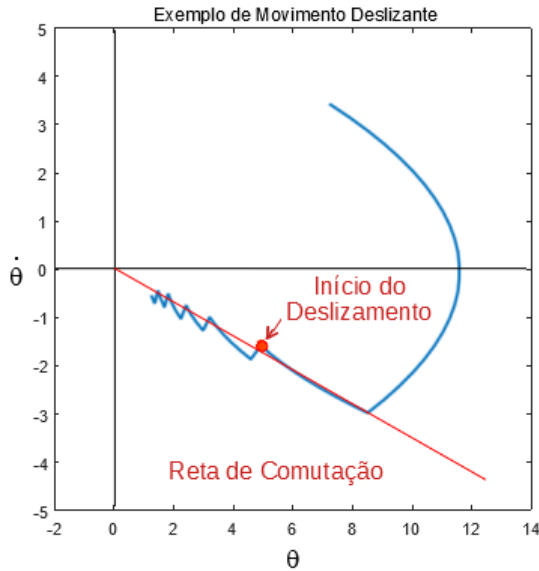


Figura 11.4: Movimento deslizante apresentado pelo modelo de controle liga-desliga do satélite.

qualquer é imediata, porém envolvendo uma notação mais trabalhosa).

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a_1 \frac{d^2y}{dt^2} + a_2 \frac{dy}{dt} + a_3y = bu + d \tag{11.119}$$

em que d é uma perturbação desconhecida a menos do seu módulo máximo $|d| \leq d_{max}$

Fazendo-se $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ e $x_3 = \ddot{y}$, obtém-se uma realização na forma controlável

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d \tag{11.120}$$

em que $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$

Dado um sinal de referência $y_r(t)$ suave, deseja-se conceber um sinal de controle $u(t)$ tal que $y(t) \rightarrow y_r(t)$ para $t \rightarrow \infty$.

Defina o erro e por

$$e = y_r - y \tag{11.121}$$

e componha o vetor $\mathbf{e} = [e \ \dot{e} \ \ddot{e}]^T$ em que

$$e = y_r - y = y_r - x_1 \quad (11.122)$$

$$\dot{e} = \dot{y}_r - \dot{y} = \dot{y}_r - x_2 \quad (11.123)$$

$$\ddot{e} = \ddot{y}_r - \ddot{y} = \ddot{y}_r - x_3 \quad (11.124)$$

Seja também a função s definida por

$$s(\mathbf{e}) = c_1 e + c_2 \dot{e} + c_3 \ddot{e} \quad (11.125)$$

$$= \mathbf{c}^T \mathbf{e} \quad (11.126)$$

para alguma escolha dos coeficientes c_i .

A superfície de deslizamento \mathcal{S} no espaço (e, \dot{e}, \ddot{e}) que se adota aqui é um plano caracterizado por

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 \mid s(\mathbf{e}) = 0 \} \quad (11.127)$$

Se os coeficientes (c_1, c_2, c_3) forem escolhidos de modo que as raízes de

$$c_3 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_1 = 0 \quad (11.128)$$

tenham parte real negativa, então $\mathbf{e}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ para $t \rightarrow \infty$ (com desempenho específico de acordo com a escolha desses coeficientes).

Pode-se fazer uma interpretação geométrica, lembrando a expressão do produto escalar

$$s(\mathbf{e}) = \mathbf{c}^T \mathbf{e} \quad (11.129)$$

$$= \langle \mathbf{c} \mid \mathbf{e} \rangle \quad (11.130)$$

$$= \|\mathbf{c}\| \|\mathbf{e}\| \cos(\angle\{\mathbf{c}, \mathbf{e}\}) \quad (11.131)$$

Portanto, $s(\mathbf{e}) = 0$ significa que $\mathbf{c} \perp \mathbf{e}$ e \mathbf{c} é um vetor ortogonal ao plano \mathcal{S} .

O sinal de controle u deve ser projetado de modo que o sistema se aproxime de \mathcal{S} .

A diminuição ou o aumento de $s(\mathbf{e})$ com o tempo é indicado por

$$\frac{d}{dt} s^2(\mathbf{e}) = 2s \dot{s} \quad (11.132)$$

$$= 2s \langle \mathbf{c} \mid \dot{\mathbf{e}} \rangle \quad (11.133)$$

já que \mathbf{c} é constante.

Se $s(\mathbf{e}) > 0$, então deve-se escolher u tal que $\langle \mathbf{c} \mid \dot{\mathbf{e}} \rangle < 0$ (ou seja, movimentar na direção de decréscimo de $s(\mathbf{e})$)

Explicitando em termos dos componentes de \dot{e} , resulta que

$$\dot{s}(\mathbf{e}) = \frac{d}{dt}s(\mathbf{e}) \tag{11.134}$$

$$= c_1\dot{e} + c_2\ddot{e} + c_3\ddot{\ddot{e}} \tag{11.135}$$

$$= c_1(\dot{y}_r - x_2) + c_2(\ddot{y}_r - x_3) + c_3(\ddot{\ddot{y}}_r - \dot{x}_3) \tag{11.136}$$

$$= c_1\dot{y}_r + c_2\ddot{y}_r + c_3\ddot{\ddot{y}}_r + a_3c_3x_1 + (a_2c_3 - c_1)x_2 \tag{11.137}$$

$$+ (a_1c_3 - c_2)x_3 + bc_3u + dc_3 \tag{11.138}$$

Note que $\dot{s}(\mathbf{e})$ depende de $\{x_1, x_2, x_3, \dot{y}_r, \ddot{y}_r, \ddot{\ddot{y}}_r\}$.

Denote u_{fdbk} a parte de u que é uma realimentação de estados, visto em 11.138

$$u_{fdbk} = - [a_3c_3 \quad a_2c_3 - c_1 \quad a_1c_3 - c_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{11.139}$$

e por u_{ref} a parte correspondente ao sinal de referência y_r

$$u_{ref} = - [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \begin{bmatrix} \dot{y}_r \\ \ddot{y}_r \\ \ddot{\ddot{y}}_r \end{bmatrix} \tag{11.140}$$

Inicialmente, assumindo $d = 0$, é obtido um controle u_{eq} que anula $\dot{s}(\mathbf{e})$

$$u_{eq} = \frac{1}{bc_3} (u_{ref} + u_{fdbk}) \tag{11.141}$$

Para obter $\dot{s}(\mathbf{e}) < 0$ quando $s(\mathbf{e}) > 0$ e $\dot{s}(\mathbf{e}) > 0$ quando $s(\mathbf{e}) < 0$, mesmo na presença de d não nulo, adiciona-se um termo de suficiente magnitude para mascará-lo

$$u_{slide} = -M \text{sign} [s(\mathbf{e})] \tag{11.142}$$

com $M > |d|$.

A lei de controle é dada, portanto, por

$$u = u_{eq} - M \text{sign} [s(\mathbf{e})] \tag{11.143}$$

Observações

- Fase de atingimento (*reaching phase*): é aquela em que a evolução do processo ocorre distante da superfície de deslizamento, mas tentando atingi-la.

- Fase de deslizamento (*sliding phase*): é aquela em que a evolução do processo ocorre sobre $s = 0$, ou nas proximidades, quando se adota uma pequena tolerância para reduzir o número de comutações.
- Em aplicações práticas, utiliza-se uma tolerância ε da proximidade de \mathbf{e} de \mathcal{S} , ou seja,

$$u_{slide} = \begin{cases} -M & \text{se } s(\mathbf{e}) > \varepsilon \\ +M & \text{se } s(\mathbf{e}) < -\varepsilon \end{cases} \quad (11.144)$$

- A lei de controle $u_{slide} = -M \operatorname{sign}[s(\mathbf{e})]$, embora mantenha $s(\mathbf{e}) = 0$ durante o escorregamento, leva a infinitas comutações que ocorrem a cada instante. Equações diferenciais com infinitos pontos de descontinuidade podem ser tratados com o enfoque em (FILIPPOV, 1964).

Exemplo numérico

Considere o sistema descrito por

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6y = u + d \quad (11.145)$$

Seja $y_r(t) = \sin(t)$ e adote a superfície de deslizamento \mathcal{S} caracterizado por $s = 1e_1 + 2e_2 + 1e_3$.

A expressão $\lambda^2 + 2s + 1 = 0$ possui uma raiz dupla em -1 .

A perturbação d é assumida ser $1 + 0.2y$.

Nessas condições, tem-se que

$$\mathbf{a} = [6 \ 11 \ 6] \quad (11.146)$$

$$\mathbf{c} = [1 \ 2 \ 1] \quad (11.147)$$

O termo de realimentação u_{fdk} é

$$u_{fdk} = -[a_3c_3 \ (a_2c_3 - c_1) \ (a_1c_3 - c_2)]x \quad (11.148)$$

$$= -6x_1 - 10x_2 - 4x_3 \quad (11.149)$$

O termo correspondente às derivadas da referência y_r é dado por

$$u_{ref} = -[1 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} \dot{y}_r \\ \ddot{y}_r \\ \dddot{y}_r \end{bmatrix} \quad (11.150)$$

$$= -\dot{y}_r - 2\ddot{y}_r - \dddot{y}_r \quad (11.151)$$

A lei de controle é simplesmente

$$u = u_{fdk} + u_{fdk} - M \operatorname{sign} [s(\mathbf{e})] \tag{11.152}$$

e, no caso, se y estiver rastreando y_r , então $|y(t)_{max}|$ é próximo de 1. Como $d = 1 + 0.2y$, por segurança, escolheu-se $M = 10$.

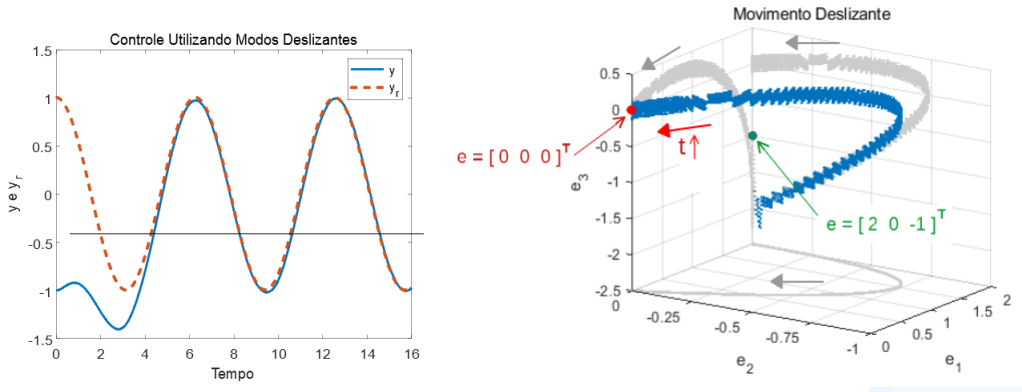


Figura 11.5: Resposta temporal ilustrando o bom rastreamento e a respectiva trajetória no espaço de erros de rastreamento

11.3.1 Caso geral

Para um modelo da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \tag{11.153}$$

a ideia central para obter um modo deslizante é a mesma.

Suponha que dada uma superfície desejada de deslizamento caracterizada por $s(\mathbf{e}) = 0$ tal que

- se $s(\mathbf{x}) > 0$, então existe $u = u^+$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u^+)$ aponta na direção de decréscimo de $s(\mathbf{x})$
- se $s(\mathbf{x}) < 0$, então existe $u = u^-$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u^-)$ aponta na direção de aumento de $s(\mathbf{x})$

Nessas condições, desde que se possa conceber um controle u_{reach} que conduza o sinal de erro \mathbf{e} para uma proximidade adequada de S , o projeto de controlador deslizante é similar ao apresentado anteriormente.

Vantagens e desvantagens

- Vantagens do controle utilizando movimentos deslizantes:
 - Redução de ordem do modelo
 - Facilidade de ajuste do desempenho
 - Robustez a incertezas
- Desvantagens do controle utilizando movimentos deslizantes:
 - Consumo de energia (termo $M \operatorname{sign} [s(\mathbf{e})]$ sempre com a amplitude $M, \forall t$)
 - Desgaste do atuador (chaveamentos bruscos)
 - Ressonância e vibração (chaveamento pode ocorrer em frequências indesejáveis)
 - Dificuldade na simulação (chaveamentos de alta frequência dificultam a integração numérica).

O controlador baseado em movimentos deslizantes pode ser projetado de modo a apresentar robustez, mas a comutação frequente pode diminuir a vida útil dos atuadores ou gerar vibrações que podem afetar o sistema. Caso a operação seja do tipo $u(t) = \pm M$, o atuador é de baixo custo. Quando a condição inicial não se encontra nas proximidades da superfície de comutação, necessita-se de uma fase de movimento de aproximação

11.4 Controle adaptativo

Os modelos matemáticos podem apresentar várias incertezas que podem advir de hipóteses simplificadoras, dispersão estatística dos parâmetros, ruídos, entradas exógenas negligenciadas, dinâmicas não modeladas e muitos outros fatores.

Para mitigar os problemas de incertezas, os enfoques principais são de dotar a malha de controle com mecanismos

1. que confirmam robustez ao sistema de modo que, mesmo na presença de incertezas, o desempenho seja satisfatório;
 2. de adaptação para que o sistema seja modificado automaticamente para acomodar os desvios em relação aos dados nominais ou fazer frente a novas condições de operação.
-

Nesta seção é tratado o enfoque de controle adaptativo e o controle robusto no capítulo 9.

Em termos gerais, os mecanismos de controle adaptativo podem ser do tipo:

1. Direto, em que o controlador é ajustado a partir de indicadores específicos e sem a necessidade de se obter os valores dos parâmetros do modelo do processo.
2. Indireto, em que os parâmetros do modelo do processo são identificados e os valores obtidos são inseridos em um controlador parametrizados em relação a esses.
3. Programado, em que algum sinal relevante altera o comportamento do controlador de modo definido. Por exemplo, o controlador pode ser alterado de acordo com a intensidade da iluminação natural (noite,dia), de acordo com a altitude como no caso do aeroplano ou de acordo com o nível de glicemia de um paciente diabético, entre outros exemplos.

Aqui é apresentado apenas o esquema MRAC (*model reference adaptive control*), embora existam várias alternativas, como pode ser visto em (LANDAU, 1979), (ASTROM; WITTENMARK, 1995), (NARENDRA; ANNASWAMY, 1989) (SASTRY; BODSON, 1991) e (IOANNOU; SUN, 1996), entre outros.

11.4.1 Controle adaptativo MRAC - Direto

Seja a estrutura geral de um enfoque MRAC ilustrada na figura 11.6, em que o objetivo é ajustar dinamicamente o controlador de modo que $e(t) \rightarrow 0$. Para

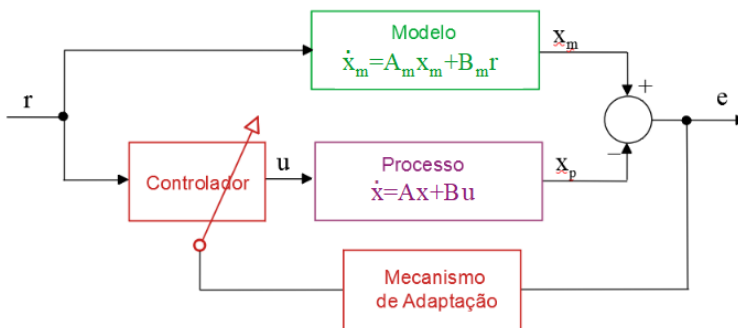


Figura 11.6: Diagrama de blocos de uma estrutura típica de MRAC.

simplicar a apresentação, é assumido que os modelos utilizados nesta seção

estão na forma canônica controlável e todos os componentes do estado \mathbf{x} estão disponíveis para utilização nas leis de controle e de adaptação.

O modelo considerado é, portanto,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (11.154)$$

em que as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} são da forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11.155)$$

As matrizes $\mathbf{A}_{n \times n}$ e $\mathbf{B}_{n \times 1}$ são consideradas constantes, porém os valores dos elementos são desconhecidos.

O modelo de referência adotado, de mesmas dimensões, é expresso por

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m r \quad (11.156)$$

em que se assume que \mathbf{A}_m possui autovalores no semiplano esquerdo e o par $(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m)$ é controlável.

A estrutura mais simples para o controlador é a linear

$$u(t) = \theta_1 r(t) + \theta_1 \theta_2 \mathbf{x}(t) \quad (11.157)$$

em que $\theta_1 \in \mathbf{R}$ e θ_2 é $1 \times n$.

O casamento perfeito entre o processo controlado e o modelo ocorre se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (11.158)$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\theta_1 r + \theta_1 \theta_2 \mathbf{x}) \quad (11.159)$$

$$= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\theta_1 \theta_2) \mathbf{x} + \mathbf{B}\theta_1 r \quad (11.160)$$

for idêntico a

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m r \quad (11.161)$$

ou seja, para os valores θ_1^* e θ_2^* dos parâmetros da estrutura de controle, atinge-se o casamento perfeito se

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{A} + \mathbf{B}\theta_1^* \theta_2^* \quad (11.162)$$

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B}\theta_1^* \quad (11.163)$$

Definindo-se o sinal de erro $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, somando e subtraindo o termo $\mathbf{A}_m \mathbf{x}$ e levando em conta que $\mathbf{B}_m = \mathbf{B}\theta_1^*$, pode-se escrever

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_m \tag{11.164}$$

$$= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\theta_1\theta_2) \mathbf{x} + \mathbf{B}\theta_1 r - \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m - \mathbf{B}_m r \tag{11.165}$$

$$= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\theta_1\theta_2) \mathbf{x} + \mathbf{B}\theta_1 r - \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m - \mathbf{B}_m r + [\mathbf{A}_m \mathbf{x} - \mathbf{A}_m \mathbf{x}]$$

$$= \mathbf{A}_m \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)}_{\mathbf{e}} - (\mathbf{A} - \mathbf{A}_m) \mathbf{x} + \mathbf{B}\theta_1\theta_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}\theta_1 r - \mathbf{B}_m r \tag{11.166}$$

De 11.162, $\mathbf{A} - \mathbf{A}_m = -\mathbf{B}\theta_1^* \theta_2^*$ e, logo,

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_m \mathbf{e} - \mathbf{B}\theta_1^* \theta_2^* \mathbf{x} + \mathbf{B}\theta_1\theta_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}\theta_1 r - \mathbf{B}_m r \tag{11.167}$$

De 11.163, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_m \theta_1^*$, e pode-se escrever

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_m \mathbf{e} - \mathbf{B}_m (\theta_1^*)^{-1} \theta_1^* \theta_2^* \mathbf{x} + \mathbf{B}_m (\theta_1^*)^{-1} \theta_1 \theta_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_m (\theta_1^*)^{-1} \theta_1 r - \mathbf{B}_m r$$

$$= \mathbf{A}_m \mathbf{e} - \mathbf{B}_m \theta_2^* \mathbf{x} + \mathbf{B}_m (\theta_1^*)^{-1} \theta_1 \theta_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_m (\theta_1^*)^{-1} \theta_1 r - \mathbf{B}_m r \tag{11.168}$$

De 11.157, tem-se que $u = \theta_1 \theta_2 \mathbf{x} + \theta_1 r$ e também $r = \theta_1^{-1} u - \theta_2 \mathbf{x}$ e, portanto,

$$\mathbf{B}_m (\theta_1^*)^{-1} [\theta_1 \theta_2 \mathbf{x} + \theta_1 r] = \mathbf{B}_m (\theta_1^*)^{-1} u \tag{11.169}$$

$$\mathbf{B}_m r = \mathbf{B}_m (\theta_1)^{-1} u - \mathbf{B}_m \theta_2 \mathbf{x} \tag{11.170}$$

e, substituindo-se esses termos na equação do erro, obtém-se

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_m \mathbf{e} - \mathbf{B}_m \theta_2^* \mathbf{x} + \mathbf{B}_m (\theta_1^*)^{-1} u - \mathbf{B}_m (\theta_1)^{-1} u + \mathbf{B}_m \theta_2 \mathbf{x} \tag{11.171}$$

$$= \mathbf{A}_m \mathbf{e} + \mathbf{B}_m \underbrace{\left((\theta_1^*)^{-1} - (\theta_1)^{-1} \right) u}_{\Psi} + \mathbf{B}_m \underbrace{(\theta_2 - \theta_2^*) \mathbf{x}}_{\Phi} \tag{11.172}$$

$$= \mathbf{A}_m \mathbf{e} + \mathbf{B}_m \Psi u + \mathbf{B}_m \Phi \mathbf{x} \tag{11.173}$$

Para garantir que $\mathbf{e}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, propõe-se obter as leis de adaptação Ψ e Φ utilizando a função candidata de Lyapunov

$$V(\mathbf{e}, \Psi, \Phi) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + tr\{\Psi^T \Psi\} + tr\{\Phi^T \Phi\} \tag{11.174}$$

A expressão de \dot{V} é

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}} + 2tr\{\dot{\Phi}^T \Phi\} + 2tr\{\dot{\Psi}^T \Psi\} \tag{11.175}$$

$$= \left(\mathbf{e}^T \mathbf{A}_m^T + u^T \Psi^T \mathbf{B}_m^T + \mathbf{x}^T \Phi^T \mathbf{B}_m^T \right) \mathbf{P} \mathbf{e} +$$

$$+ \mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_m \mathbf{e} + \mathbf{B}_m \Psi u + \mathbf{B}_m \Phi \mathbf{x}) +$$

$$+ 2tr\{\dot{\Phi}^T \Phi\} + 2tr\{\dot{\Psi}^T \Psi\} \tag{11.176}$$

$$= \mathbf{e}^T \underbrace{(\mathbf{A}_m^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_m)}_{-\mathbf{Q}} \mathbf{e} + 2 \left[\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_m \Psi u + tr\{\dot{\Psi}^T \Psi\} \right] \tag{11.177}$$

$$+ 2 \left[\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_m \Phi \mathbf{x} + tr\{\dot{\Phi}^T \Phi\} \right] \tag{11.178}$$

Uma vez que, por hipótese, \mathbf{A}_m possui os seus autovalores no SPE, a equação $\mathbf{A}_m^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_m = -\mathbf{Q}$ com $\mathbf{Q} \succ \mathbf{0}$ possui uma única solução $\mathbf{P} \succ \mathbf{0}$, como visto anteriormente.

Propondo-se a lei de adaptação

$$\dot{\Phi} = -\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e} \mathbf{x}^T \quad (11.179)$$

$$\dot{\Psi} = -\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e} u \quad (11.180)$$

e notando que a dimensão do termo $\mathbf{e}_{1 \times n}^T \mathbf{P}_{n \times n} (\mathbf{B}_m)_{n \times 1} \Phi_{1 \times n}$ é $1 \times n$, a propriedade $\text{tr}\{\alpha_{n \times 1} \beta_{1 \times n}\} = \beta \alpha$, permite escrever

$$\text{tr}\{\dot{\Phi}^T \Phi\} = -\text{tr}\{(\mathbf{x})_{n \times 1} (\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_m \Phi)_{1 \times n}\} \quad (11.181)$$

$$= \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_m^T \Phi \mathbf{x} \quad (11.182)$$

De modo análogo ao que foi feito para Φ , obtém-se para Ψ que

$$\text{tr}\{\dot{\Psi}^T \Psi\} = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_m^T \Psi u \quad (11.183)$$

Substituindo-se as expressões 11.182 e 11.183 em 11.178, constata-se que resulta

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \quad (11.184)$$

negativo semidefinida e, portanto, a origem $(\mathbf{e}, \Psi, \Phi) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ é estável.

Nota-se, porém, que \dot{V} é apenas negativo semidefinida. Assim, para garantir que $e \rightarrow 0$, necessita-se fazer uso do lema de Barbalat.

Lema de Barbalat

Segundo o lema de Barbalat (mais detalhes no Apêndice F), “dada uma função $f(t) \in C^1[a, \infty)$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \alpha$, com $\alpha < \infty$, se $\dot{f}(t)$ for uniformemente contínua, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$ ”.

O lema de Barbalat é muito útil para obter resultados adicionais quando a função \dot{V} é apenas semi-definida.

De fato, se a função $\dot{V}(t)$ é utilizada no lugar da função $f(t)$ do lema de Barbalat, então caso $\dot{V}(t)$ seja uniformemente contínua, ter-se-á que $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0$.

A função \dot{V} , por sua vez, será uniformemente contínua se for possível verificar que \ddot{V} é limitada, pois uma função $f(t)$ diferenciável e com derivada limitada (ou seja, $\dot{f} < M$ para algum M) é uniformemente contínua.

O lema de Barbalat e a verificação da continuidade uniforme de \dot{V} é tratada

no Apêndice D.

No presente caso, a derivada temporal de \dot{V} é dada por

$$\ddot{V}(t) = -\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{e}} \tag{11.185}$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{A}_m \mathbf{e} + \mathbf{B}_m \Psi u + \mathbf{B}_m \Phi \mathbf{x})^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e}^T \mathbf{Q} (\mathbf{A}_m \mathbf{e} + \\ &\quad + \mathbf{B}_m \Psi u + \mathbf{B}_m \Phi \mathbf{x} u) \end{aligned} \tag{11.186}$$

A condição inicial $(\mathbf{e}(0), \Phi(0), \Psi(0))$ é finita e, portanto, V é finita no instante inicial.

Como \dot{V} é negativo semidefinida, \dot{V} é não crescente, e, pela estrutura de V , $(\mathbf{e}(t), \Phi(t), \Psi(t))$ é finita para $\forall t \geq 0$. A função $|u(t)|$ é limitada, e, uma vez que A possui autovalores no semiplano esquerdo, o sistema de BIBO limitada, significando que \mathbf{x} é limitado.

Pelo lema de Barbalat, tem-se que $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ e, como \dot{V} é uma quadrática, $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$.

Exemplo de controle adaptativo MRAC - Direto

Seja o modelo do processo, considerado desconhecido, dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_m + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{11.187}$$

Através de um controlador adaptativo tipo MRAC, deseja-se casar o modelo de referência

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{11.188}$$

A entrada é $u(t) = 5 \sin(0.2t)$ e o processo é inicializado com a condição inicial $x(0) = [2 \ 0]^T$, também assumido desconhecido.

Verifica-se na figura 11.7 que a lei de controle adaptativo faz o processo se comportar como o modelo de referência no rastreamento do sinal de entrada.

11.4.2 Algumas notas históricas

- A Regra do MIT é um dos primeiros mecanismos de adaptação, apresentado em Osburn, P. V. Whitaker J.P. e Kezer, A. New developments in the design of model reference adaptive control systems. *Institute of the Aerospace Sciences*, MIT, artigo 61-39, jan. 1961.

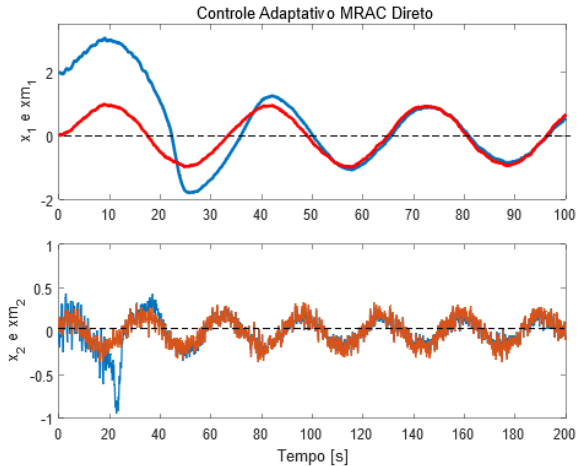


Figura 11.7: Exemplo de controle adaptativo tipo MRAC. A resposta do processo controlado (linhas tracejadas) aproxima-se daquela do modelo (linhas cheias)

- SOAS (textitself oscillating adaptive systems) utilizava uma estrutura de osciladores com relés, para construir um controlador adaptativo em que um processo G_p *casa* um modelo de referência G_m . Este enfoque foi utilizado no avião-foguete X-15.
- Um enfoque muito famoso aplicado a sistemas com ruídos aleatórios é o regulador autossintonizado (*self-tuning regulator*), que combina um identificador com uma lei de controle de variação mínima. (Aström, K. J. e Wittenmark, B. On self-tuning regulators. *Automatica*, v. 9, n. 2, p. 185-199, 1973.)
- Uma excelente revisão histórica pode ser encontrada em Annaswamy, A. M. e Fradkov, A. L. *A Historical perspective of adaptive control and learning*, arXiv.2108.11336, Cornell University, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.11336>

Os dois enfoques principais para mitigar o problema de incertezas empregam os conceitos de robustez ou adaptação. Nesta seção apresentou-se apenas um método de controle adaptativo, focando leis de adaptação baseadas no critério de estabilidade de Lyapunov. Ressalta-se, porém, que existe uma grande variedade de outros enfoques, por exemplo utilizando métodos de inteligência artificial, baseados em filtragem estocástica, utilizando *backstepping* etc.

11.5 Controle baseado em planicidade

A teoria sobre planicidade (*flatness*) é recente e envolve certa sofisticação do ponto de vista matemático (M. Fliess, J. L. Lévine, P. Martin and P. Rouchon: Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *International Journal of Control*, v. 61, n. 6, p. 1327-1361, 1995).

Em termos gerais, quando se consegue descrever o modelo do processo na forma especial,

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^\alpha) \tag{11.189}$$

$$\mathbf{u} = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^\alpha) \tag{11.190}$$

então é imediato obter \mathbf{u} a partir de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}$, etc...

Um modelo de sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{11.191}$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, é dito ser diferencialmente plano se existe $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ (saída plana) tal que

- $\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots$ são independentes
- $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^r)$
- \mathbf{x} e \mathbf{u} podem ser expressos, para algum $\alpha > 0$, na forma

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^\alpha) \tag{11.192}$$

$$\mathbf{u} = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^\alpha) \tag{11.193}$$

e

$$\dot{\phi} = \mathbf{f}(\phi, \psi) \tag{11.194}$$

Exemplo preliminar: robô móvel com tração diferencial

Considere um robô móvel cuja velocidade linear e a direção de movimento é controlado pela diferença da velocidade de rotação de duas rodas, conforme ilustrado na figura 11.8.

O raio de cada roda é r e as velocidades de rotação das rodas esquerda L e direita R são, respectivamente, Ω_L e Ω_R .

O vetor velocidade é v e a velocidade angular de rotação em torno do centro de massa é ω .

$$v = (v_R + v_L)/2 \quad (11.195)$$

$$\omega = (v_R - v_L)/L \quad (11.196)$$

$$v_R = r \Omega_R \quad (11.197)$$

$$v_L = r \Omega_L \quad (11.198)$$

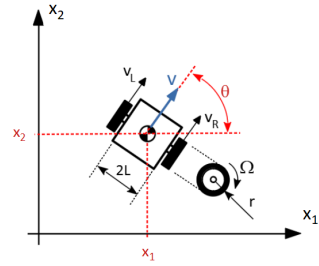


Figura 11.8: Robô móvel controlado por tração diferencial

Fazendo-se a associação $u_1 = v$ e $u_2 = \omega$, as equações cinemáticas do movimento são

$$\dot{x}_1 = \cos(x_3) u_1 \quad (11.199)$$

$$\dot{x}_2 = \sin(x_3) u_1 \quad (11.200)$$

$$\dot{x}_3 = u_2 \quad (11.201)$$

Notando que

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = (\cos(x_3)^2 + \sin(x_3)^2) u_1^2 \quad (11.202)$$

obtém-se que

$$u_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \quad (11.203)$$

$$= \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \quad (11.204)$$

Por outro lado,

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{\sin(x_3) u_1}{\cos(x_3) u_1} \quad (11.205)$$

$$= \tan(x_3) \quad (11.206)$$

Como $u_2 = \dot{x}_3$, de

$$x_3 = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} \right) \quad (11.207)$$

tem-se que

$$u_2 = \frac{d}{dt} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} \right) \right] \quad (11.208)$$

$$= \frac{1}{1 + \left[\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} \right]^2} \frac{\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \ddot{x}_2}{\dot{x}_1^2} \quad (11.209)$$

Definindo-se como saída, $y_1 = x_1$ e $y_2 = x_2$, tem-se que

$$u_2 = \frac{\ddot{y}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_1 \ddot{y}_2}{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \quad (11.210)$$

Conclui-se que o modelo do robô móvel é plano, sendo que tanto u quanto x podem ser descritos funções de $\{y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots\}$

$$u_1 = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} = \psi_1(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2) \quad (11.211)$$

$$u_2 = \frac{\ddot{y}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_1 \ddot{y}_2}{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} = \psi_2(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2) \quad (11.212)$$

e

$$x_1 = y_1 = \phi_1(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2) \quad (11.213)$$

$$x_2 = y_2 = \phi_2(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2) \quad (11.214)$$

$$x_3 = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} \right) = \phi_3(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2) \quad (11.215)$$

Classes de sistemas com modelos planos

Algumas classes de modelos já são sabidos serem planares:

- Sistemas de apenas uma entrada
- Sistemas linearizáveis por realimentação estática
- Sistemas afins de codimensão 1 (1 entrada a menos que a dimensão do \mathbf{x}):

$$\dot{\mathbf{x}}_{n \times 1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^n \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) u_k \quad (11.216)$$

- Sistemas mecânicos com uma entrada a menos do que as variáveis de configuração.

Detalhes em: Martin P.; Murray R. M.; Rouchon P. *Flat systems*, HAL-00472051, 1997. [<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00472051>]

Exemplo de método de projeto de controlador

Considere um motor DC, acionado pela armadura, cujo comportamento é descrito pelas equações

$$L \frac{di}{dt} = -Ri - K_1 \omega + u \quad (11.217)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = K_2 i - B\omega \quad (11.218)$$

Adotando-se como saída $y = \omega$, verifica-se que i é função de $\{y, \dot{y}\}$:

$$J \frac{d\omega}{dt} = K_2 i - B\omega \quad (11.219)$$

$$i = \frac{1}{K_2} \left(J \frac{d\omega}{dt} + B\omega \right) \quad (11.220)$$

$$i = \frac{1}{K_2} (J\dot{y} + By) \quad (11.221)$$

O sistema é plano e o sinal de controle u pode ser escrito em função de y, \dot{y}, \ddot{y}

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri + K_1 \omega \quad (11.222)$$

$$= \frac{L}{K_2} \frac{d}{dt} (J\dot{y} + By) + \frac{R}{K_2} (J\dot{y} + By) + K_1 \omega \quad (11.223)$$

$$= \frac{LJ}{K_2} \ddot{y} + \frac{BL + RJ}{K_2} \dot{y} + \frac{RB + K_1 K_2}{K_2} y \quad (11.224)$$

$$= a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y \quad (11.225)$$

em que

$$a_1 = \frac{LJ}{K_2} \quad ; \quad a_2 = \frac{BL + RJ}{K_2} \quad ; \quad a_3 = \frac{RB + K_1 K_2}{K_2} \quad (11.226)$$

Portanto, especificando-se um $y_{ref}(t)$ desejado, pode-se determinar o sinal de controle $u(t)$ requerido para que $y(t)$ rastreie $y_{ref}(t)$.

a) Design empregando planicidade

Adota-se para a trajetória desejada $y_{ref}(t)$, tal que de $\omega(t) = 0$ no instante $t = 0$ atinja-se $\omega(t) = \omega_f$ dado no instante $t = t_f$ especificado. Para a forma da resposta, escolheu-se uma curva sigmoide:

$$y_{ref} = \omega_{ref}(t) \quad (11.227)$$

$$= \omega_f \left(\frac{t}{t_f} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{t}{t_f} \right) \quad (11.228)$$

$$= \omega_f \frac{3t_f t^2 - 2t^3}{t_f^3} \quad (11.229)$$

Para escrever a expressão para u ,

$$u = a_1 \ddot{y}_{ref} + a_2 \dot{y}_{ref} + a_3 y_{ref} \quad (11.230)$$

necessita-se de \dot{y}_{ref} e de \ddot{y}

$$\dot{y}_{ref} = \frac{d}{dt} \left(\omega_f \frac{3t_f t^2 - 2t^3}{t_f^3} \right) \quad (11.231)$$

$$= 6\omega_f \frac{t_f t - t^2}{t_f^3} \quad (11.232)$$

e

$$\ddot{y}_{ref} = \frac{d}{dt} \left(6\omega_f \frac{t_f t - t^2}{t_f^3} \right) \quad (11.233)$$

$$= 6\omega_f \frac{t_f - 2t}{t_f^3} \quad (11.234)$$

O sistema é plano e o sinal de controle que faz $y(t)$ rastrear $y(t)_{ref}$ é dado por

$$u_{ref} = \frac{LJ}{K_2} \ddot{y}_{ref} + \frac{BL + RJ}{K_2} \dot{y}_{ref} + \frac{RB + K_1 K_2}{K_2} y_{ref} \quad (11.235)$$

$$= \frac{LJ}{K_2} 6\omega_f \frac{t_f - 2t}{t_f^3} + \frac{BL + RJ}{K_2} 6\omega_f \frac{t_f t - t^2}{t_f^3} + \frac{RB + K_1 K_2}{K_2} \omega_f \frac{3t_f t^2 - 2t^3}{t_f^3} \quad (11.236)$$

$$= -2 \frac{RB + K_1 K_2}{K_2 t_f^3} \omega_f t^3 + \left(3 \frac{RB + K_1 K_2}{K_2 t_f^2} - 6 \frac{BL + RJ}{K_2 t_f^3} \right) \omega_f t^2 + \left(6 \frac{BL + RJ}{K_2 t_f^2} - 12 \frac{LJ}{K_2 t_f^3} \right) \omega_f t + 6 \frac{LJ}{K_2 t_f^2} \omega_f \quad (11.237)$$

A lei de controle u_{ref} obtida é de malha aberta e susceptível a incertezas de modelagem.

Para correções em torno da resposta desejada y_{ref} (nominal), pode-se utilizar um controlador PID:

$$u = u_{ref} - K_P(y_{ref} - \omega) - K_D \dot{y}_{ref} - K_I \int_0^t (y_{ref} - \omega) d\tau \quad (11.238)$$

b) Design empregando controle PID clássico

Ao invés de utilizar o controlador PID para fazer correções em torno da trajetória desejada obtida usando o conceito de planicidade, projeta-se aqui um controlador PID clássico para rastrear uma entrada degrau.

Seja a referência uma função do tipo degrau com $\omega_r(t) = \omega_f 1(t)$ e defina o sinal de erro

$$e = y - y_r \quad (11.239)$$

$$= \omega_r - \omega \quad (11.240)$$

O valor de u correspondente a $\omega = \omega_f$, em regime estacionário, é obtido a partir da equação de estados fazendo-se $dx/dt = 0$,

$$0 = -Ri - K_1\omega + u_{reg} \quad (11.241)$$

$$0 = K_2i - B\omega \quad (11.242)$$

A solução para esse sistema de equações é

$$u_{reg} = \frac{RB + K_1K_2}{K_2}\omega_f \quad (11.243)$$

Uma lei de controle tipo PID é da forma

$$u = u_{reg} - K_P(\omega_r - \omega) - K_D\dot{\omega} - K_I \int_0^t (\omega_r - \omega)d\tau \quad (11.244)$$

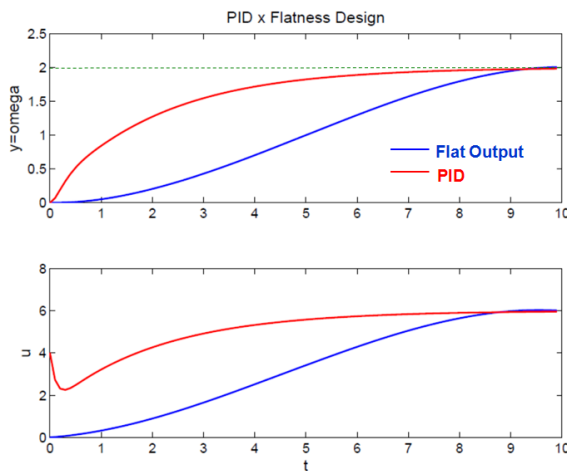


Figura 11.9: Comparação entre controladores PID usando ou não planicidade.

A teoria que fundamenta o conceito de planicidade é matematicamente intrincada e pode ser encontrado em (FLIESS et al., 1995). A vantagem é a possibilidade de escolher a função de saída $y(t)$ para depois obter $u(t)$. Porém, a obtenção do modelo plano pode não ser trivial e nem sempre é possível.

11.6 Controle preditivo MPC

As saídas esperadas ao se propor, no instante k , uma sequência de sinais de controle

$$\{u[k + i|k]\}_{i=0,1,2,\dots,n_u} = (u[k], u[k + 1], u[k + 2], \dots, u[k + n_u]) \quad (11.245)$$

podem ser calculadas, caso se disponha de um modelo matemático.

A ideia no controle preditivo baseado em modelos (*model based predictive control* - MPC) é escolher, em cada instante k , a sequência $\{u[k + i|k]\}_{i=1,2,\dots,n_u}$ de acordo com um índice de desempenho definido *a priori*.

Tipicamente, busca-se conciliar o erro entre uma referência desejada y_r e as saídas esperadas \hat{y} , em contraposição ao dispêndio de esforço de controle u , valendo-se, por exemplo, de um critério quadrático.

$$J = \sum_{j=1}^{n_y} q_j (\hat{y}[k + j|k] - y_r)^2 + \sum_{i=1}^{n_u} r_i u[k + i - 1|k]^2 \quad (11.246)$$

em que os pesos q_j e r_i são escolhidos pelo projetista e, usualmente, $1 \leq n_u \leq n_y$, $q_j > 0$, $r_i > 0$.

Entre os trabalhos pioneiros em MPC estão o de Richalet et al. (1978), *Model Predictive Heuristic Control* (posteriormente chamado de *Model Algorithmic Control* (MAC)) e o de Cutler and Ramaker (1980), que se tornou conhecido como *Dynamic Matrix Control* (DMC).

Novamente, para simplificar os detalhes da apresentação, assume-se que o modelo é SISO.

Considere um modelo no espaço de estados dado por

$$\mathbf{x}[k + 1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}u[k] \quad (11.247)$$

$$y[k + 1] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k + 1] \quad (11.248)$$

Se, no instante k , $\mathbf{x}[k|k] = \mathbf{x}[k]$ é conhecido e forem fornecidos os valores $u[k|k]$, $u[k + 1|k]$, \dots , $u[k + j - 1|k]$, os valores futuros denotados $\hat{x}[k + 1|k]$,

$\hat{\mathbf{x}}[k+2|k], \dots, \hat{\mathbf{x}}[k+j|k]$ podem ser obtidos recursivamente

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k|k] + \mathbf{B}u[k|k] \quad (11.249)$$

$$\hat{\mathbf{x}}[k+2|k] = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] + \mathbf{B}u[k+1|k] \quad (11.250)$$

$$= \mathbf{A}^2\mathbf{x}[k|k] + \mathbf{A}\mathbf{B}u[k|k] + \mathbf{B}u[k+1|k] \quad (11.251)$$

\vdots

$$\hat{\mathbf{x}}[k+j|k] = \mathbf{A}^j\mathbf{x}[k|k] + \mathbf{A}^{j-1}\mathbf{B}u[k|k] + \mathbf{A}^{j-2}\mathbf{B}u[k+1|k] + \dots + \mathbf{B}u[k+j-1|k] \quad (11.252)$$

e, portanto, as predições até j passos à frente são dadas por

$$\hat{y}[k+1|k] = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}[k|k] + \mathbf{C}\mathbf{B}u[k|k] \quad (11.253)$$

$$\hat{y}[k+2|k] = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}[k|k] + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}u[k|k] + \mathbf{C}\mathbf{B}u[k+1|k] \quad (11.254)$$

\vdots

$$\hat{y}[k+j|k] = \mathbf{C}\mathbf{A}^j\mathbf{x}[k|k] + \mathbf{C}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{B}u[k|k] + \dots + \mathbf{C}\mathbf{B}u[k+j-1|k] \quad (11.255)$$

Colocando na forma matricial e denotando o horizonte de predição por n_y , tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}[k+1|k] \\ \hat{y}[k+2|k] \\ \vdots \\ \hat{y}[k+n_y|k] \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{Y}}[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}[k]} \mathbf{x}[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_y-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_y-2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} u[k|k] \\ u[k+1|k] \\ \vdots \\ u[k+n_y-1|k] \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}[k]} \quad (11.256)$$

Assumindo a referência y_r , adota-se a notação

$$\mathbf{Y}_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{1 \times n_y}^T y_r \quad (11.257)$$

$$\mathbf{Q} = \text{diag}\{q_1, q_2, \dots, q_{n_y}\} \quad (11.258)$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_{n_u}\} \quad (11.259)$$

a função custo

$$J[k] = \sum_{j=1}^{n_y} q_j (\hat{y}[k+j|k] - y_r)^2 + \sum_{i=1}^{n_u} r_i u[k+i-1|k]^2 \quad (11.260)$$

pode ser reescrita na forma compacta

$$J[k] = (\hat{\mathbf{Y}}[k] - \mathbf{Y}_r)^T \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{Y}}[k] - \mathbf{Y}_r) + \mathbf{U}[k]^T \mathbf{R} \mathbf{U}[k] \quad (11.261)$$

Uma possível restrição a ser exigida no controle é

$$\|u[\ell|k]\| < u_{\max} \quad ; \ell \geq k \quad (11.262)$$

e, se $n_u < n_y$, então é usual adotar $\Delta u[k+\ell|k] = 0$ para $n_u < \ell \leq n_y - 1$.

Substituindo

$$\hat{\mathbf{Y}}[k] = \mathbf{G} \mathbf{U}[k] + \mathbf{F}[k] \quad (11.263)$$

na expressão de $J[k]$, resulta que

$$J[k] = (\mathbf{G} \mathbf{U}[k] + \mathbf{F}[k] - \mathbf{Y}_r)^T \mathbf{Q} (\mathbf{G} \mathbf{U}[k] + \mathbf{F}[k] - \mathbf{Y}_r) + \mathbf{U}[k]^T \mathbf{R} \mathbf{U}[k] \quad (11.264)$$

que deve ser minimizado obedecendo a restrição

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_u \times n_u} \\ -\mathbf{I}_{n_u \times n_u} \end{bmatrix} \mathbf{U}[k] \leq \mathbf{1}_{2n_u \times 1} u_{\max} \quad (11.265)$$

em que $\mathbf{1}_{2n_u \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{2n_u \times 1}^T$

Esse problema pode ser resolvido numericamente utilizando variados algoritmos de programação quadrática (vários algoritmos são apresentados em, por exemplo, (IZMAILOV; SOLODOV, 2005), (HIMMELBLAU, 1972), (LUENBERGER, 1973), (FLETCHER, 1986) e (BAZARAA; SHERALI; SHETTY, 1979), entre outros)

Embora o MPC utilize um modelo para fazer previsões do comportamento para uma proposta de entradas futuras, o mecanismo de horizonte retrocedente permite correções em malha fechada, uma vez que a cada passo os resultados são recalculados. Logo, são amenizados os problemas de imprecisões no modelo e perturbações exógenas. Uma vantagem do MPC é poder tratar restrições tais como $|\mathbf{u}(t)| \leq u_{\max}$, $|\mathbf{x}(t)| \leq x_{\max}$, $|\mathbf{y}(t)| \leq y_{\max}$, mas ao custo da necessidade de resolver um problema de otimização a cada passo. Apresentou-se aqui apenas a versão de tempo discreto, uma vez que a versão de tempo contínuo corresponde à necessidade de resolver problemas de controle ótimo.

11.7 Controladores inteligentes

As ferramentas de inteligência artificial, tais como sistemas especialistas, redes neurais, computação evolutiva e lógica nebulosa, podem ser utilizadas para dotar sistemas de controle automático de novas capacidades, como aprendizado autônomo, decisão na presença de incertezas e adaptação a situações inéditas, entre outras possibilidades.

Aqui serão abordados apenas os controladores baseados em conhecimento tipo sistemas especialistas, com ou sem o uso de lógica nebulosa (*fuzzy*).

As redes neurais artificiais são também muito utilizados em controle, por exemplo, em problemas de aprendizado por reforço, classificação de padrões, predição de séries temporais e identificação de modelos, entre outras aplicações (vide, por exemplo, (HAYKIN, 1994), (ZURADA, 1992), (CHARNIAK; MC-DERMOTT, 1985) e (NASCIMENTO; YONEYAMA, 2000), entre outros).

11.7.1 Controladores baseados em conhecimento

Muitas vezes, embora não se disponha de um modelo matemático para o processo, operadores humanos são capazes de realizar controle manual, com base em conhecimentos adquiridos com a sua experiência.

Nestes casos, pode ser viável a representação destes conhecimentos através de ferramentas próprias de inteligência artificial, de modo que os operadores humanos sejam liberados de tarefas insalubres, cansativas, repetitivas ou longas.

Além disso, os seus conhecimentos podem ser reproduzidos, armazenados e distribuídos a outros operadores.

Uma forma de representar conhecimentos faz uso de regras de produção do tipo

$$\text{Se } \{\text{condições}\} \text{ Então } \{\text{ações}\} \quad (11.266)$$

Exemplos

- Se $(Temp > 150^\circ)$ e $(Pressão > 3 atm)$ Então $(válvula A = 40\%)$
- Se $(Temp > 200^\circ)$ ou $(Pressão > 5 atm)$ Então $(chave1 = OFF)$
- Se $(Temp < 150^\circ)$ e $(Pressão < 2 atm)$ Então $(alarme = ON)$

Um sistema de inferência baseado em conhecimento possui, em geral, uma estrutura como a da figura 11.10, que, além da máquina de inferência propriamente dita, possui facilidades como interface homem máquina (H/M), editor

de novas regras (conhecimento) e sistema de explicação para justificar as conclusões obtidas.

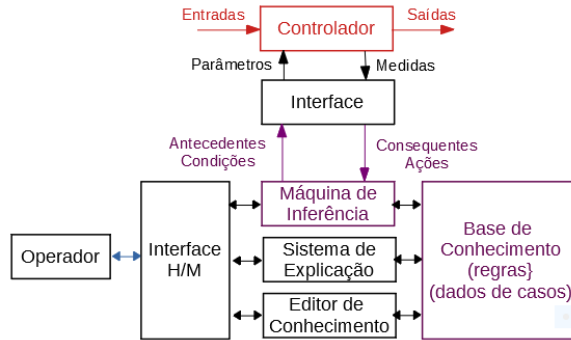


Figura 11.10: Arquitetura básica de um controlador baseado em conhecimento.

11.7.2 Controladores nebulosos

Muitas tarefas executadas por operadores humanos utilizam regras em que as condições e as ações são expressas de forma simbólica, através de valores baseados em senso comum.

Por exemplo, um instrutor de autoescola pode sugerir ações como *mais um pouco à direita, pise forte no freio, ande mais lento* etc...

Por outro lado, um controlador convencional estaria trabalhando com informações do tipo *posição do veículo = -0.3 m, pressão nos cilindros do freio = 1200 psi* ou *velocidade < 25 km/h*, etc...

Uma vez que não parece ser adequado considerar como *lenta* apenas uma velocidade menor que 24.9 km/h e *rápida* uma de 25.01 km/h, define-se o conjunto nebuloso de valores de velocidade considerados lentos através de uma função de pertinência.

A figura 11.11 mostra, à esquerda, um conjunto clássico (*crisp*) A_{crisp} , caracterizado pela função indicadora I_A , definida por

$$I_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (11.267)$$

e, à direita, um conjunto nebuloso (*fuzzy*) $A_{nebuloso}$ caracterizado graficamente pela função de pertinência $\mu_A(x)$.

No caso de conjuntos nebulosos, utiliza-se uma função $\mu_A(\mathbf{x})$ que atribui o grau de pertinência do ponto x ao conjunto A , como ilustrado à direita da figura 11.11.

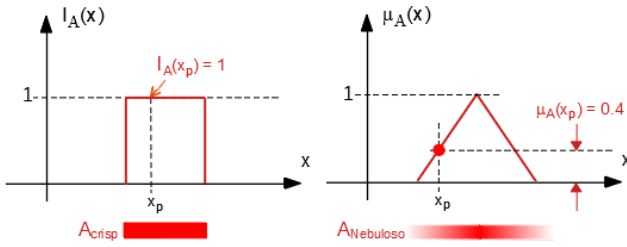


Figura 11.11: À esquerda um conjunto *crisp* com a função indicadora $I_A(x)$ e à direita um conjunto *fuzzy* com a função de pertinência $\mu_A(x)$.

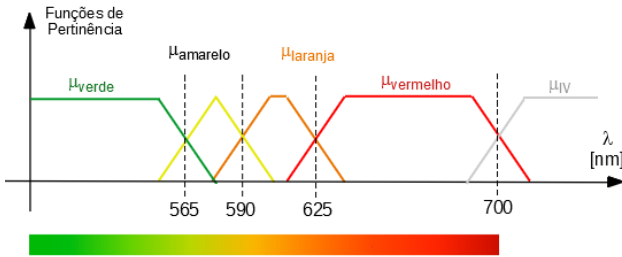


Figura 11.12: Exemplo de conjuntos nebulosos em que as cores adjacentes não são claramente diferenciadas.

Utilizando-se os conjuntos nebulosos, podem ser caracterizadas expressões como erro-grande-negativo (EG-), erro-mediano-negativo (EM-), erro-pequeno (EP), erro-mediano-positivo (EM+) e erro-grande-positivo (EG+). As regras envolvem, usualmente, condições que devem ser satisfeitas simultaneamente, tais como (*Temperatura ALTA*) **E** (*Pressão ALTA*) para ajustar a posição de uma válvula v .

Na forma de regra, seria

$$\text{Se } (\theta \text{ é } ALTA) \text{ E } (p \text{ é } ALTA) \text{ Então } (v \text{ é } PEQUENA)$$

correspondendo a $\mu_{Temp=ALTA}(\theta)$, $\mu_{Press=ALTA}(p)$ e $v = defuzificar(v = PEQUENA)$.

A operação *defuzificar* significa atribuir um valor numérico correspondente ao conjunto nebuloso $v = PEQUENA$.

Uma operação típica de defuzificação encontrada com frequência é escolher a abscissa do centroide da área abaixo da função de pertinência $\mu_{v=PEQUENA}$.

As outras operações seriam **OU** e **NÃO**.

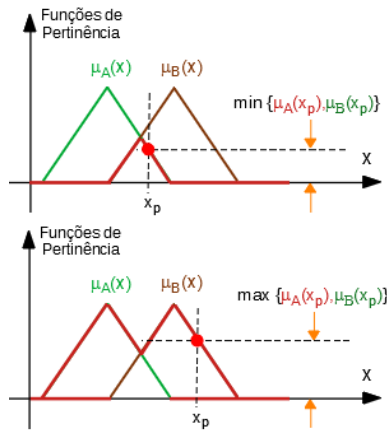


Figura 11.13: Ilustração das operações intersecção (E) e união (OR) de conjuntos nebulosos.

Por exemplo, se V é uma tensão e ω é uma rotação, uma regra poderia ser

Se (V é *BAIXA*) **OU** (ω é *NOT ALTA*) Então (f é *MEDIA*)

em que f poderia ser a intensidade da frenagem.

Muitas vezes são utilizados os símbolos \wedge para *E*, \vee para *OU* e \neg para *NOT*.

A figura 11.13 mostra como são definidas as operações

1. $A \wedge B$ representado por $\mu_{A \wedge B} = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
2. $A \vee B$ representado por $\mu_{A \vee B} = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
3. $\neg A$ representado por $\mu_{\neg A} = 1 - \mu_A(x)$

Para mais detalhes sobre inteligência artificial, especialmente sobre sistemas especialistas e conjuntos nebulosos, podem ser consultados livros como (RUSSEL; NORVIG, 1995), (NILSSON, 1998), (KNIGHT; RICH., 2010) e (WINSTON, 1992), entre os livros didáticos bem conhecidos da área.

Inferência nebulosa

Uma forma de inferência nebulosa com estrutura dita de Mamdani encontra-se ilustrada na figura 11.14 (Mamdani, E. H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. *Proc. of the IEE*, v. 121, n. 12, p. 1585–1588, 1974).

Ao invés de uma apresentação geral, optou-se aqui por ilustrar o processo utilizando um exemplo com apenas três regras, R1, R2 e R3 que permite uma visualização gráfica simples e objetiva.

O exemplo possui duas entradas e uma saída e as regras envolvem os conectivos *E* e *OU*.

As entradas são os sinais *Temperatura* e *Pressão* e a saída é a *Abertura da Válvula*. A *Temperatura* pode ser negativa (NEG), quase nula (0) e positiva (POS). A *Pressão* também podem assumir esses valores. A *Abertura da Válvula* pode ser FECHADA, MÉDIA ou ABERTA.

O valor numérico da *Abertura da Válvula* (por exemplo, 40% são obtidos como a abscissa do centroide da área colorida da figura 11.14). Ressalta-se que exist-

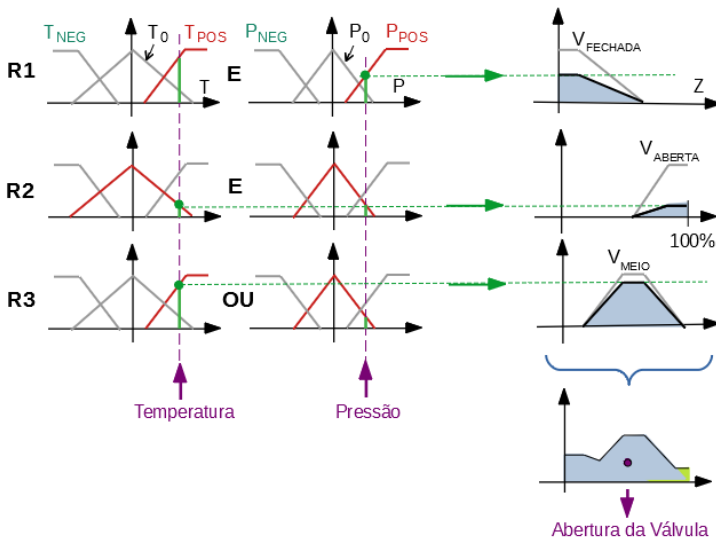


Figura 11.14: Ilustração do mecanismo de inferência com duas entradas e três regras.

tem outras estruturas para inferência nebulosa, sendo bem conhecida a de Takagi-Sugeno-Kang (vide, por exemplo, (SUGENO, 1985)).

Controlador nebuloso

O esquema de inferência nebulosa pode ser utilizado para implementação de controladores dinâmicos fazendo-se

$$u[k] = F(u[k-1], \dots, u[k-p], e[k], \dots, e[k-q]) \quad (11.268)$$

A figura 11.15 apresenta um caso simples em que $u[k] = F(e[k], e[k-1])$.

À direita da figura 11.15 podem ser vistas as nove regras com conectivo E , ou seja, por exemplo, se $e[k]$ é Médio (μ_{eM}) **E** $e[k - 1]$ é Grande ($\mu_{(e-1)G}$), então a abertura da válvula $u[k]$ é Média (μ_{uG}).

Para completar a descrição do controlador, deve-se ainda especificar as funções de pertinência μ .

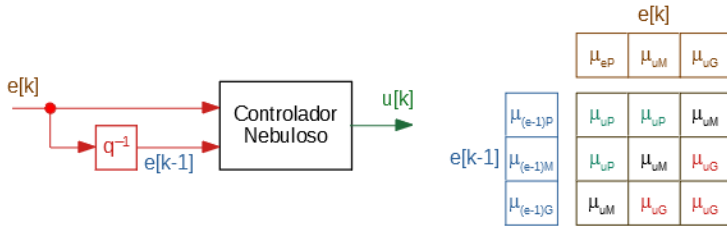


Figura 11.15: Ilustração de um controlador nebuloso simples.

A inteligência artificial poderá permitir dotar máquinas de algumas capacidades que o operador humano possui. Entre essas habilidades estão a capacidade de aprender, desenvolver novos conceitos através do raciocínio, manifestar proatividade nas suas tarefas, ser adaptável a situações antes não vistas e, enfim, possuir autonomia e poder de decisão. No momento atual a maioria dos sistemas dispõem de mecanismos automáticos de resposta ou capacidade de evolução programada, mas as expectativas para o futuro são grandes.

11.8 Algumas personalidades famosas

Roger Ware Brockett (1938-) lançou as bases para o problema de linearização exata por realimentação de estado (Brockett, R. W. Feedback invariants for nonlinear systems. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Helsinki, 1978, p. 1357-1368). Os procedimentos específicos foram propostos em JAKUBCZYK, B. e RESPONDEK, W. On linearization of control systems, *Bull. Acad. Polonaise, Sci., Ser. Sci. Math.* v. 28, p. 517-522, 1980.

Vadim Ivanovich Utkin (1937-) é um pioneiro na área de sistemas de estrutura variável e controle por modos deslizantes (Utkin, V. IO. *Sliding modes and their applications in variable structure systems*. Mir, Moscow, 1978. O problema de equações diferenciais com discontinuidades foi tratado por Aleksei Fedorovich Filippov (1923-2006) (Filippov, A. F. Differential equations with

discontinuous right-hand side (em russo). *Matematicheskii Sbornik*, v. 21,n.1, p.99-128, 1960.

O controle adaptativo já possui uma história relativamente longa (Control system with automatic response adjustment, William I. Caldwell - US Patent 2,517,081, 1950). Mesmo o enfoque MRAC em que se busca a lei de adaptação utilizando a teoria de Lyapunov, remota à década de 1960 (Parks, P. C. - Lyapunov redesign of model reference adaptive control systems. *IEEE TAC*, 1966, v. 11, pp. 362-7.).

Um dos primeiros artigos mais extensos sobre sistemas planos e planicidade é Fließ, M.; Lévine, J.; Martin, P.; Rouchon, P. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C. R. Acad. Sci.*, v. 315, n. I, p. 619-624, 1992.

Os trabalhos pioneiros em MPC são: Richalet, J.; Rault, T. A.; Testud, J. L. e Papon, J. Model predictive heuristic control: applications to industrial processes. *Automatica*, v. 14, p. 413-428, 1978; e Cutler, C. R. e Ramaker, B. L. Dynamic matrix control - a computer control algorithm, *Proc. Joint American Control Conference - IEEE*, San Francisco. v. WP5-13, 1980.

Sistemas especialistas foram introduzidos em torno de 1965 no âmbito do *Stanford Heuristic Programming Project*, liderado por Edward Feigenbaum, reconhecido como o “pai de sistemas especialistas. Os sistemas especialistas pioneiros são o MYCIN, de 1975, voltado para o diagnóstico de moléstias infecciosas relacionadas ao sangue, INTERNIST-I de 1982 voltado a medicina interna geral e CADUCEUS de 1984 para diagnóstico médico (vide, por exemplo, (NILSSON, 1998)). A lógica nebulosa (*fuzzy logic*) foi introduzida por Lotfi Aliasker Zadeh em 1965 (Zadeh, L. A. Fuzzy sets, *Information and Control*, San Diego, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965), que posteriormente cunhou o termo *linguistic variables*. Em 1985, Seiji Yasunobu e Soji Miyamoto da Hitachi apresentaram simulações que mostravam a possibilidade de aplicar no metrô de Sendai. Em 1987, Takeshi Yamakawa utilizou a lógica nebulosa para controlar um pêndulo invertido.



Utkin



Phillipov



Fließ



Mamdani

Brockett

11.9 Exercícios

11.9.1 Exercício: Linearização exata por realimentação de estados

Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{11.269}$$

$$\dot{x}_2 = x_2 \sin(x_1) - u \cos(x_2) \tag{11.270}$$

em que o estado $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ é mensurado por instrumentos precisos. Obter, se possível, uma lei de controle da forma

$$u(t) = a(x_1, x_2) + b(x_1, x_2) v$$

e funções $T_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, i = 1, 2$, de modo que, fazendo-se

$$\dot{z}_1 = T_1(x_1, x_2) \tag{11.271}$$

$$\dot{z}_2 = T_2(x_1, x_2) \tag{11.272}$$

obtem-se que

$$\dot{z}_1 = z_2 \tag{11.273}$$

$$\dot{z}_2 = v \tag{11.274}$$

11.9.2 Exercício: Linearização exata por realimentação de estados

Considere um sistema de dois tanques em cascata, conforme ilustrado à direita (figura 11.16) e cujas equações que descrevem as alturas x_1 e x_2 dos níveis de líquido dos tanques superior e inferior

$$\dot{x}_1 = 1 - \sqrt{1 + x_1} + u \tag{11.275}$$

$$\dot{x}_2 = \sqrt{1 + x_1} - \sqrt{1 + x_2} \tag{11.276}$$

$$y = x_2 \tag{11.277}$$

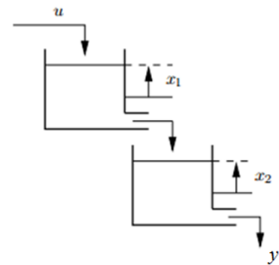


Figura 11.16: Sistema de tanques em cascata.

Obter uma transformação de variáveis $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ de modo que a representação no novo sistema de coordenadas seja

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \tag{11.278}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} \tag{11.279}$$

11.9.3 Exercício: Linearização exata por realimentação de estados

Obter uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e uma lei de controle $u(t)$, de modo que o processo

$$\dot{x}_1 = -x_2 + \sin(x_1) \quad (11.280)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 \cos(x_1) + u \cos(2x_1) \quad (11.281)$$

seja colocada na forma canônica de Brunovsky.

11.9.4 Exercício: Linearização exata por realimentação de estados - Manipulador

Um manipulador de único elo com acoplamento flexível é descrito por

$$I\ddot{q}_1 + mgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \quad (11.282)$$

$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau \quad (11.283)$$

em que I, J, m, L, k e g são constantes e τ é a variável manipulada.

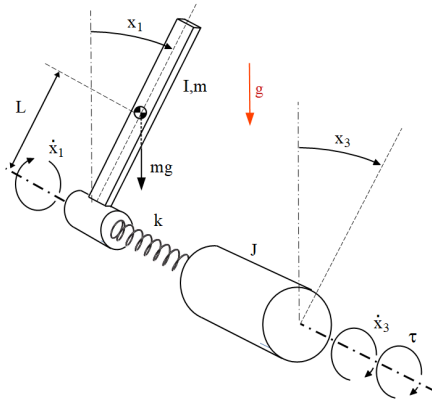


Figura 11.17: Haste controlada por junta elástica.

Fazendo-se a associação usual $x_1 = q_1$, $x_2 = \dot{x}_1$, $x_3 = q_2$ e $x_4 = \dot{x}_3$

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{1}{I} (mgL \sin x_1 + k(x_1 - x_3)) \\ x_4 \\ -\frac{1}{J} (k(x_1 - x_3) + \tau) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{J_2} (x_1 - x_3) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(x)} \tau$$

obter o modelo linearizado na forma de Brunovski.

11.9.5 Exercício: Linearização exata por realimentação de estados - Corpo rígido

O movimento rotacional 3D de um corpo rígido em relação a um sistema de coordenadas solidário a esse é dado por

$$J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 + \tau_1 \quad (11.284)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 + \tau_2 \quad (11.285)$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 + \tau_3 \quad (11.286)$$

em que ω_i , $i = 1, 2, 3$ são velocidades angulares.

Obter o modelo linearizado na forma de Brunovski.

11.9.6 Exercício: Linearização exata por realimentação da saída

Estudar a linearização por realimentação da saída e a dinâmica zero dos seguintes modelos:

1.

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + x_2 + u \quad (11.287)$$

$$\dot{x}_2 = -u \quad (11.288)$$

$$y = x_1 \quad (11.289)$$

2.

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \quad (11.290)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_4^2 - \sin(x_3) \quad (11.291)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (11.292)$$

$$\dot{x}_4 = u \quad (11.293)$$

$$y = x_1 \quad (11.294)$$

3.

$$\dot{x}_1 = (1 + x_2) x_3 + \sin(x_2) \quad (11.295)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3 - x_3 \quad (11.296)$$

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + u \quad (11.297)$$

$$\dot{x}_4 = u \quad (11.298)$$

$$y = x_1 \quad (11.299)$$

11.9.7 Exercício: Controle utilizando modos deslizantes

Para o processo abaixo, obter uma lei de controle que faça $e(t) = y_r(t) - y(t)$ tender a 0, à medida que $t \rightarrow \infty$, deslizando sobre a superfície $e + \alpha \dot{e} = 0$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11.300)$$

$$\dot{x}_2 = a \sin(x_1) \cos(x_2) + u \quad (11.301)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (11.302)$$

sabendo-se que $y_{ref}(t) = \cos(t)$ e o parâmetro constante mas desconhecido a é tal que $a \in [0.8; 1.2]$.

11.9.8 Exercício: Controle utilizando movimentos deslizantes

Considere o sistema descrito por

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11.303)$$

$$\dot{x}_2 = a(t) x_1^2 \cos(x_2) + \frac{1}{2} u \quad (11.304)$$

$$y = x_1 \quad (11.305)$$

em que $|a(t)| \leq 5$ e o problema é rastrear um sinal y^D , ou seja, obter $u(t)$ de forma que $y \rightarrow y^D$ quando $t \rightarrow \infty$.

11.9.9 Exercício: Controle robusto utilizando modos deslizantes

Considere um processo representado no espaço de estados por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sin(x_1) + x_2 \\ a x_1^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + b \end{bmatrix} u \quad (11.306)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (11.307)$$

em que os coeficientes são desconhecidos, mas tais que $|a| \leq 2$ e $|b| \leq \frac{1}{2}$. Dada uma função suave y^D , projetar um controlador utilizando modos deslizantes, de modo que $y \rightarrow y^D$.

11.9.10 Exercício: Controle utilizando movimentos deslizantes

Considere o sistema descrito por

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11.308)$$

$$\dot{x}_2 = a(t) x_1 - x_2 + u \quad (11.309)$$

$$y = x_1 \quad (11.310)$$

em que o parâmetro $a(t)$ é desconhecido porém limitado $|a(t)| < 1, \forall t \in \mathbb{R}$. Para o sinal de referência $y^D(t) = 2 \sin(t)$, obter uma lei de controle $u(t)$ que $y \rightarrow y^D$ quando $t \rightarrow \infty$.

11.9.11 Exercício: Argumento utilizado na obtenção de MRAC

Esse exercício revisita as técnicas utilizadas para a obtenção da expressão para $\dot{\Phi}$ do esquema MRAC conforme apresentado no corpo do texto. Considere a equação diferencial

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}}_{\Phi} r$$

em que $|r(t)| < r_{\max}, \forall t \geq 0$.

Seja \mathbf{P} uma matriz que satisfaz a equação algébrica

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I}_{2 \times 2}$$

em que $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ é a matriz identidade 2×2 .

Utilizando a função candidata

$$V(\mathbf{e}, \Phi) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + tr \{ \Phi^T \Phi \}$$

obter uma lei de adaptação tipo

$$\dot{\Phi} = \mathbf{F}(\mathbf{e}, \Phi)$$

de modo que a origem seja estável e, ainda, $\mathbf{e} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

11.9.12 Exercício: Controle adaptativo de Modelo SISO

Considere um processo unidimensional ($x \in \mathbb{R}$) descrito por

$$\dot{x} = ax + bu \tag{11.311}$$

em que $a < 0$ é desconhecido e $b \neq 0$ é também desconhecido a menos do seu sinal (se $b > 0$ ou $b < 0$).

Deseja-se obter U de modo que o processo controlado case o modelo

$$\dot{x}_m = a_m x_m + b_m r \tag{11.312}$$

Adota-se um controlador da forma

$$u = \theta_1 x + \theta_2 r \quad (11.313)$$

em que θ_1 e θ_2 devem ser ajustados através de uma lei de adaptação.

Definindo-se

$$e = x - x_m \quad (11.314)$$

$$\phi = \theta_1 - \theta_1^* \quad (11.315)$$

$$\psi = \theta_2 - \theta_2^*, \quad (11.316)$$

e sabendo-se que o sinal externo r é limitado, verificar se a seguinte proposta para a lei de adaptação é satisfatória:

$$\dot{\phi} = -\lambda_1 \text{sign}(b) ex \quad (11.317)$$

$$\dot{\psi} = -\lambda_2 \text{sign}(b) er \quad (11.318)$$

$$V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{|b|}{2}(\phi^2 + \psi^2) \quad (11.319)$$

em que λ_1 e λ_2 são parâmetros (taxa de aprendizado ou *learning rate*) a serem ajustados pelo projetista.

Observação: $\theta_1^* = \frac{b_m}{b}$ e $\theta_2^* = \frac{a-a_m}{b}$

11.9.13 Exercício: Planicidade

Considere o modelo de predador-presa (por exemplo, x_1 pode representar amebas e o x_2 as arqueobactérias), também conhecido como o de Lotka-Volterra. Aqui o modelo foi modificado para incluir uma variável de controle u .

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2 \quad (11.320)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2 + u \quad (11.321)$$

Considerando a saída plana $y = x_1$, verificar que o modelo pode ser escrito na forma

$$x_1 = y \quad (11.322)$$

$$x_2 = \frac{y = \dot{y}}{y} \quad (11.323)$$

$$u = -\frac{\ddot{y}}{y} + \frac{\dot{y}^2}{y^2} - \frac{\dot{y}}{y} + \dot{y} - y + 1 \quad (11.324)$$

11.9.14 Exercício: Planicidade

Considere a equação de Chua modificada (a equação original utiliza $f(x_1)$ não diferenciável que deve ser substituída por $f(x_1) = -\sqrt[3]{x_1}$).

$$\dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1 - f(x_1)) \quad (11.325)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \quad (11.326)$$

$$\dot{x}_3 = -\beta x_2 + u \quad (11.327)$$

Considerando a saída plana $y = x_1$, verificar que o modelo pode ser escrito na forma

$$x_1 = y \quad (11.328)$$

$$x_2 = \frac{\dot{y}}{\alpha} + y + f \quad (11.329)$$

$$x_3 = \frac{\ddot{y}}{\alpha} + \frac{\dot{y}}{\alpha} + \dot{y} + f + \dot{f} \quad (11.330)$$

$$u = -\frac{\ddot{y}}{\alpha} + \frac{\ddot{y}}{\alpha} + \ddot{y} + \dot{f} + \ddot{f} + \beta \left(\frac{\dot{y}}{\alpha} + y + f \right) \quad (11.331)$$

11.9.15 Exercício: Planicidade

Considere uma haste com base rotativa atuada através de um elo elástico tipo mola, ilustrada na figura 11.17 modelada por

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11.332)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{mgL}{I} \sin(x_1) - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \quad (11.333)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (11.334)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{k}{J}(x_1 - x_3) + \frac{1}{J}\tau \quad (11.335)$$

Obter a expressão para $u(t)$, adotando-se como o candidato à saída plana o sinal $Y(t) = x_1(t)$.

11.9.16 Exercício: Controlador MPC de 1 passo à frente

Considere o processo unidimensional ($x \in \mathbb{R}$) inicialmente em repouso, descrito por

$$x[k+1] = 0.7x[k] + 0.8u[k] \quad (11.336)$$

$$y[k] = x[k] \quad (11.337)$$

e o índice de desempenho a ser minimizado

$$J = q (y_r[k+1] - y[k+1])^2 + r u[k]^2 \quad (11.338)$$

em que a referência $y_r[k] = 1$ para $\forall k \geq 0$ e

$$-1 \leq u[k] \leq 1$$

Fixando $q = 1$ determinar a solução $u^*[k]$ para $r = 0.1, 1$ e 10 .

11.9.17 Exercício: Controlador MPC sem restrições

Considere o processo unidimensional ($x \in \mathbb{R}$) inicialmente em repouso, descrito por

$$x[k+1] = 0.7x[k] + 0.8u[k] \quad (11.339)$$

$$y[k] = x[k] \quad (11.340)$$

e o índice de desempenho a ser minimizado

$$J = \sum_{i=1}^N q (y_r[k+i] - y[k+i])^2 + r u[+i-1]^2 \quad (11.341)$$

em que a referência $y_r[k] = 10$ para $\forall k \geq 0$, $N = 3$, $q = 1$ e $r = 1$.

11.9.18 Exercício: Controlador MPC incremental, sem restrições

Considere o processo unidimensional ($x \in \mathbb{R}$) inicialmente em repouso, descrito por

$$x[k+1] = 0.7x[k] + 0.8u[k] \quad (11.342)$$

$$y[k] = x[k] \quad (11.343)$$

e o índice de desempenho a ser minimizado utilizando controle incremental, ou seja, $u[k+1] = u[k] + \Delta u[k]$

$$J = \sum_{i=1}^N q (y_r[k+i] - y[k+i])^2 + r \Delta u[+i-1]^2 \quad (11.344)$$

em que a referência $y_r[k] = 10$ para $\forall k \geq 0$, $N = 3$, $q = 1$ e $r = 1$.

Esta estratégia penaliza $\Delta u[k]$ elevados (que pode desgastar mais rapidamente o atuador).

11.9.19 Exercício: Regras para inferência

Verifique se as seguintes frases estão corretas:

1. O sistema de aquisição de dados está operando normalmente. Logo, ou o computador *master* ou o seu *backup* está ativo.
2. Se faltar energia elétrica o equipamento para. Como o equipamento está parado, está havendo falta de energia.
3. Se faltar energia elétrica o equipamento para. Como o equipamento está operando normalmente, não há falta de energia.
4. Pão com manteiga é melhor que nada. Nada é melhor do que férias. Conclui-se, portanto, que Pão com manteiga é melhor que férias.
5. Para entrar na festa, o convidado deve comprar um ingresso ou trazer 1 kg de alimento não perecível. Rasputin está na festa mas não comprou um ingresso. Pode-se concluir que Rasputin trouxe 1 kg de alimento não perecível.

11.9.20 Exercício: Lógica elementar

Sejam as afirmações A e B .

Seja ainda a notação

- $\neg A =$ não A
- $A \wedge B = A$ e B
- $A \vee B$ A ou B
- $A \rightarrow B =$ se A então B
- $A \leftrightarrow B = A$ se e somente se B

cujo significado pode ser encontrado na Internet ou livros de lógica elementar.

Verificar se as seguintes proposições são verdadeiras

1. $A \vee (\neg A)$
 2. $(A \rightarrow B) \vee (\neg B)$
 3. $\neg(\neg A) \rightarrow A$
 4. $A \wedge B \rightarrow B$
-

5. $A \wedge (\neg B) \vee A$
6. $\neg(A \wedge B) \rightarrow A \vee B$

11.9.21 Exercício: Ganho não linear

Um controlador *fuzzy* estático possui as seguintes funções de pertinência para a entrada e e saída u . As regras utilizadas são:

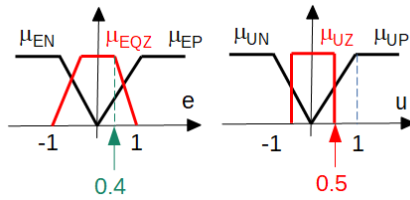


Figura 11.18: Ganho modelado utilizando lógica *fuzzy*.

1. Se (e[t] é EQZ) Então (u[t] é UZ)
2. Se (e[t] é EN) Então (u[t] é UN)
3. Se (e[t] é EP) Então (u[t] é UP)

Lembrar que várias regras poderão estar ativas ao mesmo tempo. Esboçar a função $u=f(e)$.

11.9.22 Exercício: Controlador *fuzzy*

Denota-se por μ_{EN} , μ_{EZ} e μ_{EP} as funções de pertinência correspondentes às condições “e[k] negativo”, “e[k] zero” e “e[k] positivo”. Para “e[k-1]” tem-se de modo análogo, μ_{EdotN} , μ_{EdotZ} e μ_{EdotP} . A saída “u[k]” possui funções de pertinência conforme a figura 11.19. A saída “u[k]” para cada entrada “e[k]” e “e[k-1]” é apresentada na tabela. Esboce gráficos “(e[k],e[k-1])” versus “u[k]” para os casos de conectivos E e OU.

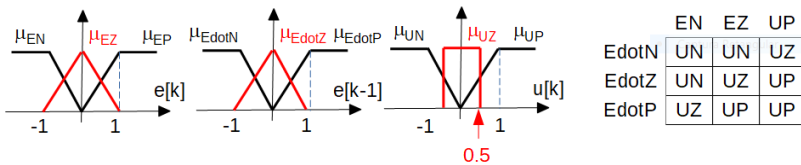


Figura 11.19: Exercício sobre controladores *fuzzy*.