

# 10

## Controle por computador

*“The human spirit must prevail over technology.”*

– Albert Einstein

Em muitas aplicações, os sinais de entrada ou de saída são modificados apenas em instantes discretos.

São algumas circunstâncias em que se utiliza amostragem de sinais contínuos:

- Tratamento digital de sinais, uma vez que se necessita de processamento elaborado, armazenamento de informação e atualização periódica de software, entre outras vantagens.
- Transmissão de dados via sinais digitais, quer seja para ter maior imunidade a ruídos ou por razões de segurança via criptografia.
- Multiplexação dos canais de comunicação e no controle remoto, separando sinais que requerem elevada frequência daquelas relativamente lentas.
- Inconveniência (ou inexistência) de sensores de tempo contínuo. Por exemplo, medidas que requerem auxílio de laboratório de amostras (contagem de leucócitos no sangue, medida de propriedades de materiais que requerem reagentes químicos, ensaios destrutivos).

Um arranjo típico de uma arquitetura de controlador empregando um dispositivo digital para sistemas de tempo contínuo (destacando-se a presença de conversores A/D (Analogico → Digital) e D/A (Digital → Analogico).

A grande maioria dos processadores digitais utilizados na prática são do tipo síncrono (ou seja, as tarefas são organizadas temporalmente pelo sinal do relógio), como destacado na figura [10.1](#).

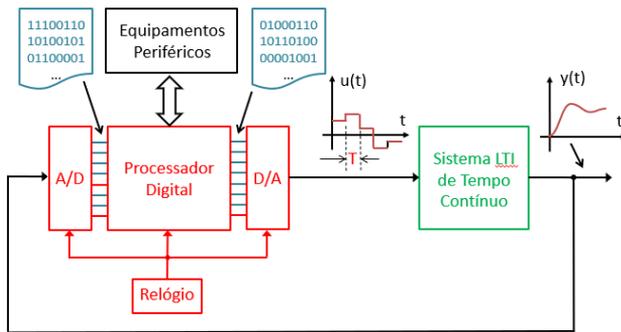


Figura 10.1: Estrutura típica de controle utilizando processador digital

Uma vez que neste texto o foco é a utilização do computador executando controladores digitais obtidos pela discretização de controladores analógicos, a entrada é preferencialmente associada ao sinal de erro  $e$  e a saída ao sinal de atuação  $u$ .

Na prática, o tratamento de modelos de tempo contínuo tende a ser mais simples que os de tempo discreto, exceto em casos como os de controle baseado em modelos (MPC), controle GPC, STC ou MV (*Generalized Predictive Control*, *Self-Tuning Control* e *Minimum Variance Control*), bem como na utilização de Filtros de Kalman (ou similar) e controladores derivados de otimização direta.

## 10.1 Amostrador-segurador

Em geral o sinal contínuo é primeiramente amostrado e mantido constante por um certo tempo (pelo segurador) até que seja completada a conversão A/D.

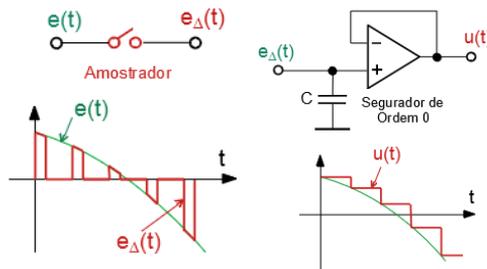


Figura 10.2: Associação de amostrador e de segurador

Uma forma conveniente de modelar o efeito do amostrador tipo liga-desliga é utilizar em seu lugar o amostrador impulsivo.

O amostrador impulsivo é um dispositivo *idealizado* que produz na sua saída um impulso cuja “área” é igual ao valor da sua entrada. Por exemplo, se  $e(t) = 2$ , então a saída é  $e^* = 2\delta(t)$ .

A figura 10.3 mostra que os sinais  $e(t)$  e  $u(t)$  dos dois arranjos mostrados à esquerda são os mesmos, apesar de  $e_{\Delta}(t)$  e  $e^*(t)$  serem diferentes.

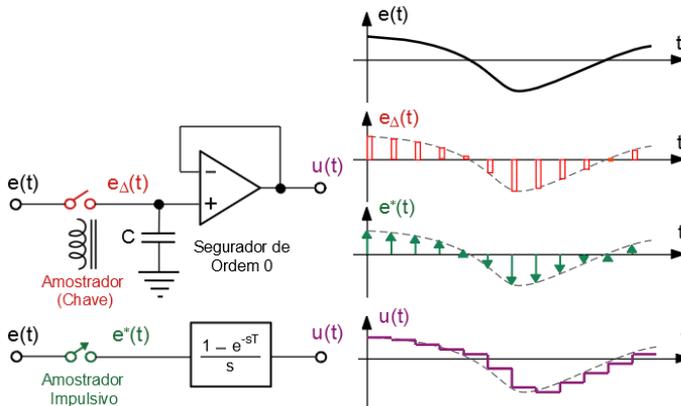


Figura 10.3: Modelagem de amostrador real (relé) com segurador por um amostrador impulsivo seguido de função de transferência  $\frac{1 - e^{-sT}}{s}$ .

Nota-se que, quanto menor o tempo em que a chave  $\Delta$  fica ligada, menor é a energia contida no sinal amostrado  $e_{\Delta}$ .

Necessita-se, assim, de um dispositivo denominado de segurador (ou retentor), que mantém o valor do sinal amostrado entre os instantes de amostragem.

## 10.2 Discretização de modelos de tempo contínuo

Um enfoque muito utilizado na prática, hoje em dia, é realizar o projeto do controlador no domínio de tempo contínuo e implementar a lei de controle com o auxílio de microcontroladores digitais.

Nesse contexto, esta seção foca primordialmente a discretização de controladores, ou seja, dada uma relação entre sinais contínuos de entrada  $u$  e saída  $y$ , obter relações equivalentes de tempo discreto.

$$U(s) = G_c(s)E(s) \quad \rightarrow \quad U(z) = G_d(z)E(z) \quad (10.1)$$

ou

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{B}_c e \\ u = \mathbf{C}_c \mathbf{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d e[k] \\ u[k] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[k] \end{cases} \quad (10.2)$$

### 10.2.1 Discretização no domínio do tempo

Considere o problema de obter um modelo de tempo discreto de um controlador com instantes de discretização  $kT$ , assumindo-se que o segurador é de ordem 0 e

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{B}_c e \quad (10.3)$$

$$u = \mathbf{C}_c \mathbf{x} \quad (10.4)$$

Então, dado  $\mathbf{x}(kT)$ , tem-se que

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}_c T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}_c((k+1)T-\tau)} \mathbf{B}_c e(\tau) d\tau \quad (10.5)$$

Lembrando que  $u(t)$  é constante entre  $kT$  e  $(k+1)T$ , tem-se que

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}_c T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}_c((k+1)T-\tau)} d\tau \mathbf{B}_c e(kT) \quad (10.6)$$

A mudança de variáveis  $\zeta = ((k+1)T - \tau)$ , leva a  $d\zeta = -d\tau$ , e pode-se escrever

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}_c((k+1)T-\tau)} d\tau = - \int_T^0 e^{\mathbf{A}_c \zeta} d\zeta = \int_0^T e^{\mathbf{A}_c \zeta} d\zeta \quad (10.7)$$

Substituindo-se este resultado na expressão de  $x((k+1)T)$ , obtém-se o modelo

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \underbrace{e^{\mathbf{A}_c T}}_{\mathbf{A}_d} \mathbf{x}(kT) + \underbrace{\int_0^T e^{\mathbf{A}_c \zeta} d\zeta \mathbf{B}_c}_{\mathbf{B}_d} e(kT) \quad (10.8)$$

ou, usando notação para sequência,  $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}([k+1]T)$  e  $e[k+1] = e([k+1]T)$ , tem-se

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d e[k] \quad (10.9)$$

$$u[k] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[k] \quad (10.10)$$

**Exemplo: Discretização no espaço de estados**

Seja o modelo a ser discretizado com período de amostragem  $T = 1$  s

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e \tag{10.11}$$

Aplicando o método que foi apresentado,

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 0.6004 & 0.2325 \\ -0.4651 & -0.0972 \end{bmatrix} \tag{10.12}$$

$$\mathbf{B}_d = \int_0^T e^{\mathbf{A}\zeta} d\zeta = \begin{bmatrix} 0.1998 \\ 0.2325 \end{bmatrix} \tag{10.13}$$

e, logo, o modelo 10.11 discretizado é dado por

$$\mathbf{x}[k + 1] = \begin{bmatrix} 0.6004 & 0.2325 \\ -0.4651 & -0.0972 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + \begin{bmatrix} 0.1998 \\ 0.2325 \end{bmatrix} e[k] \tag{10.14}$$

**10.2.2 Discretização no domínio transformado**

Considere  $G(s)$  em cascata com o modelo matemático para o amostrador-segurador

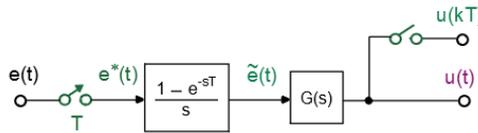


Figura 10.4: Conjunto amostrador + processo a ser controlado.

A saída  $\tilde{E}(s)$  do segurador pode ser expressa por

$$\tilde{E}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} E^*(s) \tag{10.15}$$

$$= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \mathcal{L}[e^*(t)] \tag{10.16}$$

Notando que

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)\delta(t - kT) \tag{10.17}$$

tem-se, pela definição de transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}[e^*(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \sum_0^{\infty} e(kT)\delta(t - kT) \right] dt \quad (10.18)$$

$$= \sum_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} e(kT)\delta(t - kT) dt \quad (10.19)$$

$$= \sum_0^{\infty} e^{-skT} e(kT) \quad (10.20)$$

Logo, a expressão para  $\tilde{E}(s)$ , e usando o fato  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ , é

$$\tilde{E}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} e(kT) \quad (10.21)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \frac{1}{s} \left( e^{-skT} - e^{-s(k+1)T} \right) \quad (10.22)$$

Como  $\frac{1}{s}$  representa degrau unitário, enquanto  $e^{-skT}$  e  $e^{-s(k+1)T}$  representam atrasos de  $kT$  e  $(k+1)T$ , respectivamente,

$$e(kT) \frac{1}{s} \left( e^{-skT} - e^{-s(k+1)T} \right)$$

corresponde a um pulso retangular de largura  $T$  e altura  $e(kT)$ , iniciando no instante  $t = kT$ .

Logo  $\tilde{e}(t)$  possui a forma de “escada”, como ilustrado anteriormente na figura 10.3.

Seja agora o problema de obter uma expressão para  $u(t)$  e denote por  $H(s)$  a composição cascata

$$\frac{U(s)}{E^*(s)} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \quad (10.23)$$

$$= H(s) \quad (10.24)$$

e note que a sua entrada é um trem de impulsos.

Como  $H(s)$  é transformada de Laplace de resposta a impulso  $h(t)$ , e pela linearidade (ou seja, vale a superposição), a saída  $u$  é uma combinação de  $e(kT)h(kT)$  correspondente a cada elemento do trem de impulsos  $e(kT)\delta(kT)$ , ou seja,

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)h(t - kT) \quad (10.25)$$

Amostrando-se o sinal  $u(t)$ , obtém-se que

$$u(\ell T) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)h(\ell T - kT) \tag{10.26}$$

Aplicando-se a transformada  $\mathcal{Z}$  e usando a propriedade da convolução, resulta

$$U(z) = H(z)E(z)$$

que é a relação entre  $e_k = e(kT)$  e  $u_k = u(kT)$  desejada.

A função de transferência  $H(z)$  é dada, portanto, por

$$H(z) = \mathcal{Z} \left[ \overbrace{\left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ \underbrace{\frac{1 - e^{sT}}{s} G(s)}_{H(s)} \right] \right]}^{h(t)} \right]_{t=kT}$$

Como  $e^{-sT}$  corresponde a um atraso de 1 período de amostragem ( $z^{-1}$ ) e por abuso de notação (lembrar que  $\mathcal{Z}$  é para ser aplicado a seqüências)

$$H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[ \frac{G(s)}{s} \right]$$

As expressões  $\left[ \frac{G(s)}{s} \right]$  estão tabeladas e podem ser encontradas em vários livros didáticos, como (CÁDZOW; MARTENS, 1970), (OGATA, 1970), (ASTROM; WITTENMARK, 1984) e (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1990).

**Exercício:**

Obter um modelo discretizado para  $G(s)$ , supondo que é utilizado um segurador de ordem 0 e o período de amostragem é  $T$

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

Então, pela fórmula apresentada

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[ \frac{G(s)}{s} \right]$$


---

Consultando as tabelas disponíveis na literatura,

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{a}{s(s+a)} \right] = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

e, portanto,

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})} \quad (10.27)$$

$$= \frac{(1 - e^{-aT})}{(z - e^{-aT})} \quad (10.28)$$

### 10.2.3 Modelos discretos de segunda ordem

No domínio de tempo contínuo, modelos de segunda ordem são caracterizados por  $\xi$  e  $\omega_n$ .

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Em particular, considerando a resposta degrau, dados  $M_p$  e  $t_r$  desejados, podem ser obtidos os valores de  $\xi$  e  $\omega_n$  tais que as especificações seja atendidas.

Os polos desejados (no plano  $s$ ) seriam, nesse caso,

$$\lambda = -\xi\omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (10.29)$$

Lembrando a relação (avanço de 1 período de amostragem, versões discreta e contínua no tempo)

$$z = e^{sT}$$

é possível especificar as localizações dos polos desejados no círculo unitário.

Os lugares geométricos de  $\xi$  e de  $\omega_n$  constantes (respectivamente, linhas vermelha e verde) podem ser representados no círculo unitário, conforme visto na figura 10.5.

Por exemplo, se o par de polos complexos estiverem na posição  $P$  da figura 10.5, então

$$\xi = 0.5 \rightarrow M_p = 16.3 \quad (10.30)$$

$$\omega_n = \frac{0.2\pi}{T} \quad (10.31)$$

Se  $T = 0.5 \text{ s}$ , tem-se  $\omega_n \approx 1.25 \text{ rad/s}$  que corresponde a aproximadamente  $1.9 \text{ s}$ . Os polos podem ser alocados por métodos análogos ao caso de tempo contínuo, por exemplo, LGR.

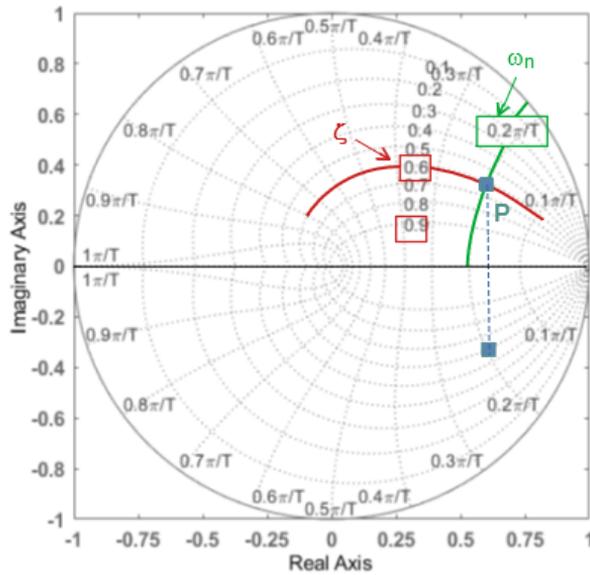


Figura 10.5: Círculo unitário com lugares geométricos para  $\zeta$  e  $\omega_n$  constantes.

### 10.2.4 Discretização Aproximada

Uma forma de discretizar um modelo (não necessariamente linear)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \tag{10.32}$$

é aproximar a derivada (por exemplo, até a primeira ordem),

$$\dot{\mathbf{x}} \simeq \frac{\mathbf{x}((k+1)T) - \mathbf{x}(kT)}{T} \tag{10.33}$$

que leva a

$$\frac{\mathbf{x}((k+1)T) - \mathbf{x}(kT)}{T} \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}(kT), u(kT)) \tag{10.34}$$

ou, por abuso de notação,  $\mathbf{x}(kT) = \mathbf{x}[k]$

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[k] + T \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], u[k]) \tag{10.35}$$

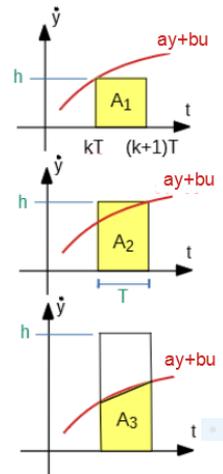


Figura 10.6: Métodos de discretização aproximada

**Caso de processos LTI**

Considere um sistema escalar ( $x \in R$ ) descrito por

$$\dot{y} = ay + bu \equiv G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s - a} \quad (10.36)$$

Utilizando-se a aproximação

$$\dot{y} \approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T}$$

para a derivada de  $y(t)$  obtém-se que

$$y((k+1)T) = y(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} [a(\tau)y + b(\tau)u] d\tau \quad (10.37)$$

$$= y(kT) + A_i \quad (10.38)$$

em que  $A_i$  são as áreas coloridas em amarelo na figura 10.6.

- Aproximação  $A_1$ :  $h = ay(kT) + bu(kT)$

A área  $A_1 = hT$  é dada por

$$y((k+1)T) = y(kT) + [ay(kT) + bu(kT)]T \quad (10.39)$$

$$zY(z) = Y(z)(1 + aT) + bT \quad (10.40)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b}{\frac{z-1}{T} - a} \quad (10.41)$$

$$= \frac{b}{s - a} \Big|_{s = \frac{z-1}{T}} \quad (= G(z)) \quad (10.42)$$

Essa aproximação é conhecida como **forward Euler** e consiste em fazer a substituição  $s \leftarrow \frac{z-1}{T}$

- Aproximação  $A_2$ :  $h = ay((k+1)T) + b((k+1)T)$

A área  $A_2 = hT$  é dada por

$$y((k+1)T) = y(kT) + [ay((k+1)T) + b(u(k+1))] T \quad (10.43)$$

$$= \frac{b}{s - a} \Big|_{s = \frac{z-1}{zT}} \quad (10.44)$$

Essa aproximação é conhecida como **backward Euler**.

- Aproximação  $A_3$ :

A área  $A_3 = hT$  é dada por

$$A_3 = \frac{[ay(kT) + bu(kT) + ay((k+1)T) + b(u(k+1)T)] T}{2}$$

e, de modo similar aos casos anteriores,

$$G(z) = \left. \frac{b}{s-a} \right|_{s=\frac{1}{2} \frac{z-1}{z+1}}$$

Esse método de aproximação é chamado de **método do trapézio** ou de **Tustin**.

**Observações:**

1. No domínio  $s$ , a região de estabilidade é o semiplano esquerdo (SPE), enquanto no domínio  $Z$ , é o círculo unitário.
2. Note que o método “*forward Euler*” ( $s = \frac{z-1}{T}$ ) mapeia alguns  $s \in$  SPE para  $z$  fora do círculo unitário.
3. Como  $G(z, T)$ , é imediato obter a função de transferência quando  $T$  é modificado.
4. O método de Tustin altera a escala de frequências, de modo que é necessário que se faça a correção mediante *pre-warping* ((LATHI, 1992), (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1986)).
5. Embora não se tenha mostrado a validade do método de substituir  $s$  por  $\frac{z-1}{T}$ ,  $\frac{z-1}{zT}$  ou  $\frac{1}{2} \frac{z-1}{z+1}$  para casos de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , o procedimento pode ser estendido.

**Exemplo: Discretização de controlador**

Dado um problema de projeto de compensador avançador-atrasador de fase, realizado no domínio de tempo contínuo, deseja-se implementá-lo usando um microcontrolador.

Seja então o compensador

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \tag{10.45}$$

$$= 20 \frac{s + 0.01}{s + 0.1} \frac{s + 5}{s + 10} \tag{10.46}$$

$$= \frac{20s^2 + 100.2s + 1}{s^2 + 10.1s + 1} \tag{10.47}$$

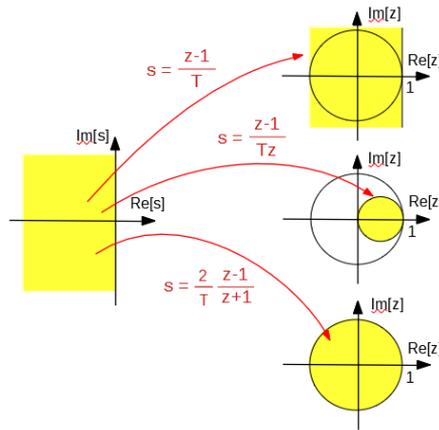


Figura 10.7: Mapeamento do SPE para diferentes círculos correspondentes aos métodos *backward* Euler, *forward* Euler e Tustin.

ou

$$G_C(s) = -\frac{101.8s + 19}{s^2 + 10.1s + 1} + 20 \tag{10.48}$$

Seja  $V(s)$  um termo auxiliar conforme indicado

$$U(s) = \underbrace{-\frac{101.8s + 19}{s^2 + 10.1s + 1} E(s)}_{V(s)} + 20E(s) \tag{10.49}$$

O termo auxiliar  $V(s)$  pode ser representado no espaço de estados por

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10.1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_C} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_C} e \tag{10.50}$$

$$u = \underbrace{\begin{bmatrix} -19 & -101.8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_C} \mathbf{x} \tag{10.51}$$

Aplicando-se as expressões apresentadas para discretização no espaço de estados,

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0.9963 & 0.0628 \\ -0.0628 & 0.2016 \end{bmatrix} \tag{10.52}$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.00366 \\ 0.06285 \end{bmatrix} \tag{10.53}$$

$$\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} -19 & -101.8 \end{bmatrix} \tag{10.54}$$

e, portanto, a dinâmica do controlador é descrita por  $u[k] = v[k] + e[k]$  dados por

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} 0.9963 & 0.0625 \\ -0.0628 & 0.2016 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k-1] + \begin{bmatrix} 0.0036 \\ 0.0628 \end{bmatrix} e[k-1] \quad (10.55)$$

$$u[k] = \begin{bmatrix} -19 & -101.8 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + 20 e[k] \quad (10.56)$$

### 10.3 Escolha do período de amostragem

A escolha do período de amostragem requer cuidados de natureza teórica e prática.

Será visto na sequência que, do ponto de vista teórico, a frequência de amostragem deve ser pelo menos duas vezes maior que a máxima frequência presente nos sinais envolvidos.

Porém, em aplicações práticas, a frequência de amostragem deve ser significativamente maior, uma vez que os filtros utilizados na reconstrução dos sinais não possuem corte abrupto e a presença de ruídos pode ser exacerbado devido ao fenômeno do dobramento (*aliasing*).

Na figura 10.8, nos casos **A** e **B**, o sinal senoidal (linha vermelha) é adequadamente reconstruído por ter sido amostrado com suficiente frequência.

Em **C** a reconstituição do sinal é errônea devido à subamostragem.

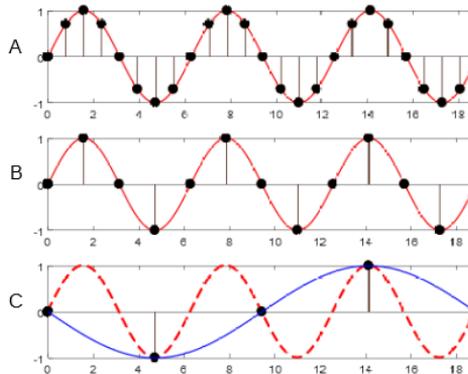


Figura 10.8: Ilustração do efeito da subamostragem.

#### Recomendações:

1. A taxa de amostragem deve ser suficiente grande para que informações não sejam perdidas.

Segundo o teorema de Shannon (Shannon, C. E. *A Mathematical theory of communication. Bell System Technical Journal*, v. 27, n. p. 623-666, 1958), a taxa de amostragem deve ser pelo menos *duas* vezes maior do que a maior frequência do componente constituinte do sinal original. Essa frequência é conhecida como a de Nyquist.

2. Não é verdade que quanto maior a frequência de amostragem melhor. Frequências muito altas tendem a aumentar o erro de quantização (por exemplo, devido ao conversor D/A). Intuitivamente, isso ocorre porque muitas amostras são obtidas com o mesmo arredondamento/truncamento.

## 10.4 Erros de Quantização

Conversores A/D e D/A utilizam o código binário para representar os valores digitais.

Assim, por exemplo, com 10 bits, a tensão de saída de um conversor D/A teria resolução de  $1/1024$  da tensão de referência.

Se a tensão de referência é 10 V, a resolução seria de aproximadamente 0.01 V.

Os erros devidos à quantização podem ser assumidos possuir distribuição uniforme, conforme ilustrado na figura 10.9, em que um sinal senoidal  $1 \sin(\omega t)$  foi quantizado em 100 níveis (ou seja,  $\Delta = 0.01$ ).

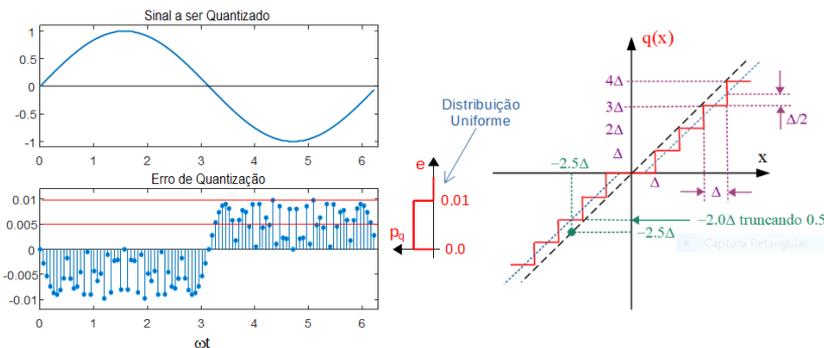


Figura 10.9: Efeito da quantização.

O tipo de aproximação ilustrado na figura 10.9 é de truncamento com manutenção do sinal  $\pm$ .

Por exemplo, se o valor da grandeza fosse  $+0.565$ , o truncamento resulta em  $+0.56$  (erro =  $+0.565 - 0.56 = +0.005$ ), enquanto, se fosse  $-0.565$ , ter-se-ia  $-0.56$  (erro =  $-0.565 - (-0.56) = -0.005$ ).

Para  $e$  com distribuição uniforme entre  $[0, \Delta]$ , tem-se que a média  $\langle e \rangle = \Delta/2$  e  $var(e) = \Delta^2/2$ .

Ou seja, o sinal quantizado pode ser considerado como um ruído aditivo de distribuição uniforme de probabilidade,  $U(\Delta/2, \Delta^2/2)$ .

**Tendo-se projetado uma lei de controle no domínio do tempo contínuo, é comum, hoje em dia, que se utilizem controladores digitais, com a consequente necessidade de discretização. Conforme indicado ao longo deste capítulo, é de grande importância a escolha do período de amostragem, que deve ser pequeno o suficiente. Porém, é interessante notar que uma frequência excessivamente alta não é conveniente, uma vez que exacerba o efeito da quantização.**

## 10.5 Vantagens do controle por computador

Computadores digitais têm sido empregados em tarefas de controle automático por apresentarem diversas vantagens em relação a sistemas baseados em alavancas e cames, ou circuitos elétricos, pneumáticos ou hidráulicos.

São algumas das vantagens:

- Possibilidade de realizar funções complexas, como tolerância a falhas, tratamento de sinais, decisões baseadas em inteligência artificial, supervisão e otimização, funções lógicas e módulos de IA, entre outras.
  - Facilidade de atualização, de diagnóstico, de comunicação remota, de registro de dados, conexão em redes, monitoração à distância, telecomando e outros.
  - Portabilidade, uma vez que as interfaces dos computadores com a instrumentação de campo têm sido progressivamente padronizadas.
  - Melhoria da confiabilidade através do uso de cães de guarda (*watch dogs*), redundância de máquina, rotinas de autodiagnóstico, códigos corretores de erros.
  - Possibilidade de “endurecer” o hardware, através da eliminação de partes móveis (SSD ao invés de discos rígidos), gabinetes selados com resfriamento por trocador de calor, películas anticorrosivas, blindagem eletrostática, seleção de componentes de melhor qualidade, proteção contra surtos e curtos, entre outros.
-

- Possibilidade de usar o processo de *burn-in* para reduzir falhas precoces.
- Possibilidade de aliar o processamento simbólico com o numérico (por exemplo, combinando *expert systems* com otimizadores numéricos), bem como aproveitando conhecimentos heurísticos do operador humano.
- Eficácia na interação homem-máquina, através de técnicas de comunicação visual, interfaces multimídia e outras.

**Modelo do computador atuando como controlador**

A figura 10.10 apresenta como as técnicas mostradas anteriormente permitem relacionar o computador digital dotado de conversores A/D e D/A ao formato  $D(z)U(z)$ .

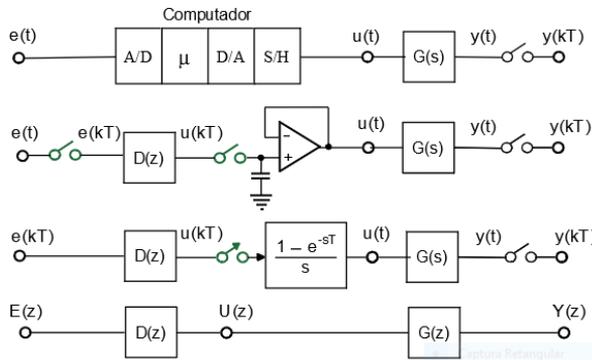


Figura 10.10: Esquema básico de controle digital.

**Exemplo de Controlador Digital:**

Considere o problema de obter  $D(z)$  para controlar o processo representado por

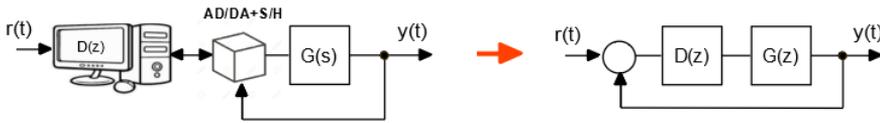
$$G(s) = \frac{0.1}{s(s + 0.1)}$$

de modo que  $M_p = 16.3\%$ ,  $t_r < 2.5 s$ , sabendo-se que  $T = 1 s$

**Método I: Projetar D(s) e discretizar**

No domínio de tempo contínuo, um controlador adequado é

$$D(s) = 10 \frac{s + 0.1}{s + 1}$$

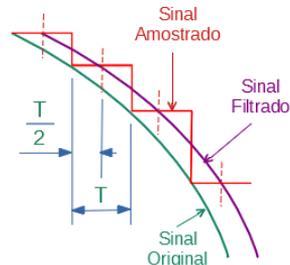


Aplicando-se a fórmula  $D(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[\frac{D(s)}{s}]$  ao  $D(s)$  obtido com  $T = 1 s$ , resulta a lei de controle  $D(z)$  desejada

$$D(s) = 10 \frac{s + 0.1}{s + 1} \rightarrow D(z) = 10 \frac{z - 0.94}{z - 0.37}$$

**Método I aprimorado**

Note que o sinal amostrado e segurado, quando filtrado eliminando as altas frequências, assemelha-se ao sinal original, exceto por um atraso de  $\frac{T}{2}$ .



Portanto, a ideia é utilizar como o modelo do processo

$$\bar{G}(s) = e^{-0.5s} \frac{0.1}{s(s + 0.1)}$$

Com o auxílio do MATLAB®, obteve-se o controlador projetado no domínio de tempo contínuo

Figura 10.11: Efeito de atraso provocado pelo processo de amostragem

$$D(s) = 409 \frac{(s + 1.11)(s + 1.25)}{(s + 10)^2} \quad (10.57)$$

cujas versão discretizada é

$$D(z) = 409 \frac{(z - 0.986)(z - 4 \times 10^{-4})}{(z - 0.45 \times 10^{-4})^2} \quad (10.58)$$

**Método II: Discretizar primeiro o processo e trabalhar no domínio z**

Pelas especificações,  $\zeta = 0.5$  e  $\omega_n = 1 rad/s$ . Logo,  $z = e^{sT}$  é dado por

$$z = e^{\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (10.59)$$

$$= 0.40 \pm j0.46 \quad (10.60)$$

Utilizando-se a ferramenta gráfica *rltool* do MATLAB®, obteve-se a solução

$$D(z) = 15.2 \frac{z - 0.565}{z + 0.5}$$

## 10.6 *Script* típico de controlador

- Passo 0: Inicializações e leitura dos parâmetros  $x_C[0], T, r$ . Fazer  $k = 0$ .
- Passo 1: Verificar se alguma condição de parada do algoritmo está atendida. Se *SIM*, então *FIM*.
- Passo 2: Ler o conversor A/D, obtendo  $y[k] = y(t = kT)$ .
- Passo 3: Fazer  $e[k] = r[k] - y[k]$ .
- Passo 4: Calcular  $x_C[k + 1] = A_d x_C[k] + B_d e[k]$  ou  $x_C[k + 1] = f(x_C[k], e[k])$ .
- Passo 5: Calcular  $u[k + 1] = C_d x_C[k + 1]$  ou  $u[k + 1] = h(x_C[k + 1])$ .
- Passo 5: Aguardar o instante  $(k + 1)T$ .
- Passo 6: Aplicar  $u[k]$ .
- Passo 7: Atualizar  $x_C[k] \leftarrow x_C[k + 1]$
- Fazer  $k \leftarrow k + 1$ .
- Passo 8: Retornar ao Passo 1.

## 10.7 Mini-histórico de DDC

O projeto do primeiro controle direto digital (*direct digital control*) é atribuído ao Imperial Chemical Industries (ICI), de Lancashire, para automatizar uma unidade de processamento de carbonato de sódio em 1959. O sistema de controle foi utilizado efetivamente em produção a partir de 1962 e operou por três anos. Em 1962 a unidade da Monsanto em Texas utilizando DDC entrou em operação antes do sistema da ICI, mas foi apenas uma avaliação por três meses.

---

## 10.8 Exercícios

### 10.8.1 Exercícios: Discretização

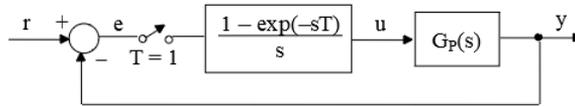
Obter o modelo de tempo discreto no espaço de estados, assumindo que o período de amostragem é  $T_s = 0.1$  s:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (10.61)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (10.62)$$

### 10.8.2 Exercícios: Discretização

Considere a seguinte estrutura de um sistema amostrado. Obter a função de



transferência de malha fechada  $Y(z)/R(z)$  para os seguintes casos

1.

$$G_P(s) = \frac{1}{s + 1}$$

2.

$$G_P(s) = \frac{s + 2}{s + 1}$$

3.

$$G_P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

4.

$$G_P(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

5.

$$G_P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

6.

$$G_P(s) = \frac{1}{s^3 + 2.5s^2 + 4s + 1.5}$$

7.

$$G_P(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$$

8.

$$G_P(s) = \frac{e^{-t}}{s^2 + 3s + 2}$$

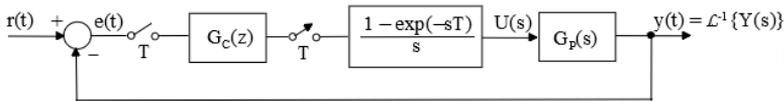
**10.8.3 Exercícios: Discretização aproximada**

Obter aproximações *forward* Euler, *backward* Euler e Tustin das seguintes funções de transferência

- |     |                                 |     |                                 |
|-----|---------------------------------|-----|---------------------------------|
| (a) | $G_P(s) = \frac{1}{s + 1}$      | (d) | $G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$ |
| (b) | $G(s) = \frac{s + 2}{s + 1}$    | (e) | $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$ |
| (c) | $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$ | (f) | $G_P(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$   |

**10.8.4 Exercícios: Projeto de controlador**

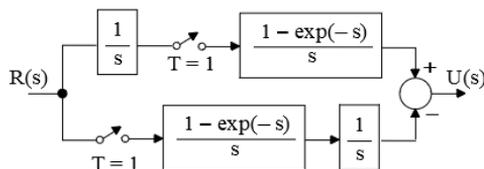
Considere a estrutura de malha fechada em que  $G_C(z)$  será implementada usando um microcontrolador digital. Escolher um período de amostragem  $T_s$



e projetar um controlador  $G_C(z)$  de modo que o sobressinal seja de 16.6% e o tempo de subida  $t_r$  menor que 1 s.

**10.8.5 Exercícios: Posições relativas do amostrador/segurador**

Obtenha a relação entre  $R(s)$  e  $U(s)$



**10.8.6 Exercícios: Controle híbrido contínuo-discreto**

Onde havia um controlador proporcional  $K$ , instalou-se um integrador digital para operação em paralelo, com o intuito de melhorar o desempenho do processo, conforme a figura 10.12.

Estudar a relação entre o sinal  $E(s)$  e  $U(s)$

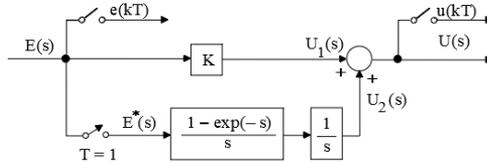


Figura 10.12: Instalação de um controlador digital sem desativar o controlador analógico utilizado anteriormente

**10.8.7 Miniprojeto de controlador digital**

Um certo processo industrial tem a sua dinâmica modelada pela equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{10.63}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x \tag{10.64}$$

e, no presente momento, encontra-se controlado em malha fechada por um PID analógico. No contexto da modernização da fábrica, a equipe de engenharia responsável por operar e manter este processo está propondo a instalação de um controlador digital, no lugar do controlador analógico, sem alterar os sensores e atuadores.

Nesse contexto, a tarefa consiste de:

1. Cite pelos menos cinco argumentos que poderiam ser utilizados pela equipe de engenharia para convencer a Diretoria de que esta modernização seria um bom investimento.
2. Escolha  $T$ , o período de amostragem, a ser utilizado pelo controlador digital.
3. Assumindo que o algoritmo de controle é da forma  $u[kT] = K_P e[kT]$ ,  $k \in \mathcal{Z}$ , calcule  $K_P$  de modo que, a partir do repouso e para entrada de referência ( $r$ ) do tipo degrau, tenha-se um sobressinal de 16.3 % ( $M_p = 0.163$ ).

4. Calcule o tempo de subida ( $t_r$ ), supondo que se utiliza o algoritmo de controle do item (3). Doravante, o valor numérico deste tempo de subida será denotado ( $t_r^{ORIG}$ ).
  5. Calcule o erro de regime para entrada degrau, quando se utiliza o controlador do item (3).
  6. Calcule, se possível, os ganhos ( $K_P$  e  $K_I$ ) de um controlador PI de modo que satisfaça, segundo a sequência de prioridades, as seguintes especificações de desempenho:
    - (a) erro nulo de regime para entrada degrau
    - (b) sobressinal de 16.3%
    - (c) tempo de subida de  $t_r^{ORIG}/2$
    - (d) erro nulo de regime para entrada rampa.
  7. Projete um compensador cascata e ajuste os ganhos ( $K_P$  e  $K_I$ ) do controlador PI de modo que satisfaça, segundo a sequência de prioridades, as seguintes especificações de desempenho:
    - (a) erro nulo de regime para entrada degrau
    - (b) sobressinal de 16.3 %
    - (c) tempo de subida de  $t_r^{ORIG}/2$
    - (d) erro nulo de regime para entrada rampa.
  8. Apresentar, utilizando pseudocódigo, um *script* para o controlador PI do item (6), supondo que são disponíveis as rotinas
    - **ON\_TIMER\_GO(tempo,'minha-subrotina')**, que, quando chamado com o argumento **tempo** = [integer], gera uma interrupção após o tempo em *ms* (mili-segundos) a ser tratado pela rotina de atendimento **minha-subrotina**,
    - **AD\_IN(e)**, que permite armazenar em **e** = [byte] o valor da tensão na entrada do conversor análogo digital no formato 8 bits (00000000  $\equiv$   $-5,0V$  e 11111111  $\equiv$   $+5,0V$ ); e
    - **DA\_OUT(u)**, que permite converter em tensão na faixa de  $-5,0$  a  $+5,0V$  o valor armazenado em **u** = [byte].
-