

# 7

## Métodos de Lyapunov

*“It is a truth universally acknowledged that stability requires far more effort to restore than to disrupt..”*

– Simon Spurrier

Esta seção busca apresentar duas classes de métodos para análise da estabilidade proposta por Alexandr Mikhailovich Lyapunov, cujo trabalho foi publicado em 1892 e possui diversas traduções ([LYAPUNOV, 1992](#)).

Aqui serão tratados apenas os casos de sistemas de tempo contínuo, embora existam adaptações para os casos de tempo discreto.

Os métodos de Lyapunov permitem a investigação da estabilidade de sistemas não lineares não autônomos (invariantes no tempo) ou não.

Em particular, sistemas lineares não autônomos são também tratáveis pelos métodos de Lyapunov, o que não é possível com métodos baseados na localização dos polos.

Os métodos de Lyapunov são também úteis para mitigar os problemas de incertezas na modelagem, mesmo quando o processo controlado é modelado por sistemas LTI, como o caso da utilização de controle adaptativo.

Um aspecto teórico interessante, nesse enfoque, é a validade do método de aproximação utilizando a expansão em série de Taylor de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  para o estudo da estabilidade, bem como para o projeto de controladores.

### 7.1 Primeiro método de Lyapunov

O primeiro método de Lyapunov, também conhecido como o método *indireto* ou método da *linearização*, permite investigar a estabilidade local de um sistema não linear através do seu modelo linearizado obtido pelo truncamento

da expansão em série de Taylor.

Como visto anteriormente, sob adequadas condições sobre  $\mathbf{f}$  de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , o teorema de Hartman-Grobman garante que algumas conclusões obtidas usando o modelo linearizado pode ser transferido para o modelo não linear original.

Trata-se de um resultado de grande relevância prática, pois serve de base para projetos de controladores, utilizando modelos linearizados em torno do ponto de operação nominal.

Considere um sistema do tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (7.1)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) = \mathbf{0} \quad (7.2)$$

em que  $\mathbf{u}_E$  é uma função constante, ou seja, um sistema com ponto de equilíbrio em  $(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E)$ .

O modelo linearizado em torno deste ponto de equilíbrio  $(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E)$ , em termos de perturbações  $\Delta\mathbf{x}$  e  $\Delta\mathbf{u}$ , é dado por

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E)}}_{\mathbf{A}} \Delta\mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E)}}_{\mathbf{B}} \Delta\mathbf{u} + o(\|\Delta\mathbf{x}\|, \|\Delta\mathbf{u}\|) \quad (7.3)$$

conforme visto anteriormente, fazendo-se  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_E + \Delta\mathbf{u}$  e  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_E + \Delta\mathbf{x}$ .

Tendo-se obtido o modelo linearizado do sistema representado por 7.1 em torno do ponto de equilíbrio  $(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E)$ ,

1. Se o modelo linearizado 7.3 é assintoticamente estável (os autovalores de  $\mathbf{A}$  estão no interior do semiplano esquerdo), então o sistema original 7.1 é assintoticamente estável na vizinhança de  $(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E)$ .
2. Se o modelo linearizado 7.3 é instável (os autovalores de  $\mathbf{A}$  estão no interior do semiplano direito), então o sistema original 7.1 é instável na vizinhança de  $(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E)$ .
3. Se algum autovalor de  $\mathbf{A}$  está localizado sobre o eixo imaginário, nada se pode afirmar sobre a estabilidade do sistema original 7.1 usando esse método. Nesse caso, pode-se tentar utilizar o conceito de variedade central (vide, por exemplo, (KHALIL, 1992) ou (SASTRY, 1999)).

A prova do primeiro método de Lyapunov é um corolário imediato do teorema de Hartman-Grobman (ver, por exemplo, (KREYSZIG, 1978), (ARNOLD, 1973), (BALAKRISHNAN, 1981)).

**Exemplo: Pêndulo simples**

Seja um pêndulo com haste rígida, massa  $m$  e comprimento  $L$ , sob efeito de aceleração de gravidade  $g$ , uniforme na direção vertical, ilustrado na figura 7.1 e descrito, na ausência de atrito, pelo sistema de equações diferenciais não lineares

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7.4)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin(x_1) \quad (7.5)$$

Os pontos de equilíbrio são da forma  $(k\pi, 0)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  e a matriz  $\mathbf{A}$  indicado em 7.3 é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}_{x_1=k\pi} \quad (7.6)$$

Em torno de  $\mathbf{x}_E = (0, 0)$  tem-se que os autovalores são

$$\left| \lambda \mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + \frac{g}{L} = 0 \quad (7.7)$$

Logo os autovalores são  $\lambda = \pm j\sqrt{\frac{g}{L}}$  e a parte real é nula (não hiperbólica).

Portanto, o primeiro método de Lyapunov não permite garantir a estabilidade do sistema original.

Em torno do outro ponto de equilíbrio (correspondendo ao pêndulo invertido),  $\mathbf{x}_E = (\pi, 0)$ , tem-se que

$$\left| \lambda \mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 - \frac{g}{L} = 0 \implies \lambda = \pm \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (7.8)$$

e, portanto, há um autovalor no semiplano direito e, de fato, o ponto de equilíbrio  $(\pi, 0)$  é instável (pêndulo invertido).

**7.2 Segundo método de Lyapunov**

O segundo método de Lyapunov, também conhecido como o Método Direto, é baseado em um conceito análogo ao de “energia”.

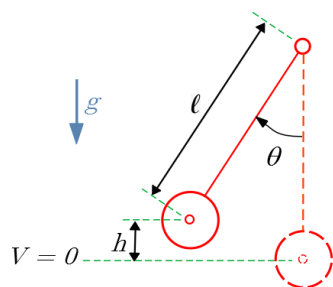


Figura 7.1: Um pêndulo simples de haste rígida.

**Exemplo preliminar**

Considere, para efeito de ilustração preliminar, o mesmo pêndulo visto anteriormente, mas agora com um coeficiente de atrito viscoso  $b > 0$ ,

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg \sin \theta = 0 \quad (7.9)$$

em que  $\theta$  é o ângulo entre a haste do pêndulo e a vertical.

As energias cinética e potencial são dadas, respectivamente, por

$$E_c = \frac{1}{2} mL^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (7.10)$$

$$E_p = mgh \quad (7.11)$$

$$= mgL(1 - \cos \theta) \quad (7.12)$$

A energia total é a soma das energias potencial e cinética,

$$E_T = E_c + E_p \quad (7.13)$$

e se verifica por cálculos simples que a sua variação no tempo é

$$\frac{dE_T}{dt} = -L \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 b \leq 0 \quad (7.14)$$

e, se o atrito é nulo,

$$-L \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 b = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (7.15)$$

Portanto, a energia do pêndulo decresce sempre que  $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$ , tendendo a  $E_T$  mínimo que, no caso ocorre para  $(\theta, \frac{d\theta}{dt}) = (0, 0)$ , e também  $\frac{dE_T}{dt} = 0$ .

Pode-se verificar, utilizando o 1º método, que os autovalores estarão localizados no semiplano esquerdo, se  $b > 0$

**7.2.1 Funções positivo definidas**

Para que se apresente o Segundo Método de Lyapunov de modo mais rigoroso, são necessárias algumas definições sobre propriedades das funções que serão utilizadas para realizar a analogia com a expressão de energia (embora não seja sempre adequado fazer tal associação, por exemplo, em sistemas econômicos e populacionais).

- Uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser **positivo definida** em uma vizinhança  $B(\mathbf{0}, \rho)$  da origem com raio  $\rho$  se  $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \rho), V(\mathbf{x}) \geq 0$  e  $V(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- Uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser **positivo semidefinida** em uma vizinhança  $B(\mathbf{0}, \rho)$  da origem com raio  $\rho$  se  $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \rho), V(\mathbf{x}) \geq 0$  mas  $V(\mathbf{x}) = 0 \nRightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- Uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser **globalmente positivo definida** se é positivo definida em  $B(\mathbf{0}, \rho)$  com  $\rho \uparrow \infty$ .
- Uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser **negativo definida** em uma vizinhança  $B(\mathbf{0}, \rho)$  da origem com raio  $\rho$  se  $-V$  é positivo definida.

em que a ou vizinhança (ou *bola*) de raio  $\rho$  em torno de um ponto  $\mathbf{x}$  é caracterizado formalmente por  $B(\mathbf{x}, \rho) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| < \rho\}$ .

Uma das escolhas mais populares para  $V$  na utilização do critério de Lyapunov é a forma quadrática

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (7.16)$$

em que  $\mathbf{Q}_{n \times n}$  é uma matriz simétrica.

Se essa expressão resultar em uma função  $V$  positivo definida, então  $\mathbf{Q}$  é dita ser positivo definida e denotada  $\mathbf{Q} \succ 0$ .

Um teste útil para verificar a positividade de uma matriz é que todos os menores principais de  $\mathbf{Q}$  sejam positivos (*critério de Sylvester*)

$$q_{11} > 0 \quad (7.17)$$

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad (7.18)$$

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad (7.19)$$

...

Outras definições podem ser obtidas combinando os qualificativos *positivo*, *negativo*, *globalmente* e prefixo *semi*, por exemplo, a matriz  $\mathbf{Q}$  é *globalmente negativo definida*

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

uma vez que  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = -(x_1^2 + x_2^2) < 0$  para  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ .

A notação  $\mathbf{M} \succ \mathbf{0}$  é usada para indicar que uma matriz  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é positivo definida, ao invés de  $\mathbf{M} > \mathbf{0}$ , uma vez que  $\mathbb{R}^{n \times n}$  é apenas parcialmente ordenado, diferentemente de  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \in \mathbb{R}$ .

A notação  $\mathbf{M} \succ \mathbf{N}$  é usada para indicar que  $\mathbf{M} - \mathbf{N} \succ \mathbf{0}$ .

### 7.2.2 Caso de sistemas autônomos (invariantes no tempo)

Considere um sistema de ordem  $n$  (ou seja,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ), descrito pela EDO

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{7.21}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{7.22}$$

Não há perda de generalidade em assumir  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  porque é possível realizar uma translação dos eixos do sistema de coordenadas obtendo-se a função  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_E)$  com a propriedade que  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{0}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_E) = \mathbf{0}$ .

#### Segundo método de Lyapunov

A origem do sistema representado por 7.22 é estável em uma vizinhança  $B(\mathbf{0}, \rho)$ , se existe uma função contínua  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- $V$  é positivo definida em  $B(\mathbf{0}, \rho)$
- contínua em relação a  $t$
- $\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} = V_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}$  é negativo semidefinida em  $B(\mathbf{0}, \rho)$

#### Esboço da prova

Por definição, um ponto de equilíbrio  $\mathbf{0}$  é estável se dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário,  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$  tal que  $\mathbf{x}(t_0) \in B(\mathbf{0}, \delta) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ .

Assuma que é dado um  $\varepsilon > 0$  e seja  $\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)$  a fronteira de  $\overline{B(\mathbf{0}, \varepsilon)}$ , como ilustrada na figura 7.2.

Seja  $V_{\min}$  o mínimo de  $V(\mathbf{x})$  para  $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)$  e note que  $V(\mathbf{x}) < V_{\min} \Rightarrow \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ .

Seja  $\delta$  tal que  $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \delta), V(\mathbf{x}) < V_{\min}$ . Se  $\mathbf{x}(t_0) \in B(\mathbf{0}, \delta)$ , então  $V(\mathbf{x}(t)) < V_{\min}$  para  $t \geq t_0$ , pois  $\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \leq 0$  e  $V(\mathbf{x}(t_0)) \leq V(\mathbf{x}(t))$  para  $t \geq t_0$ .

Portanto  $\mathbf{x}(t) \in B(\mathbf{0}, \varepsilon), \forall t \geq t_0$ .

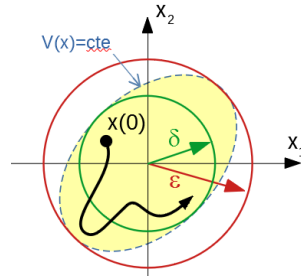


Figura 7.2: Relação entre a curva de nível de  $V$  e as vizinhanças envolvidas na prova do 2º método de Lyapunov.

### Observações

- Uma função  $V$  que satisfaz as condições (i) a (iii) é chamada de *função de Lyapunov*.
- Se na condição em 7.2.2 a função  $\dot{V}(\mathbf{x}(t))$  é negativo *definida* em  $B(\mathbf{0}, \rho)$ , então a estabilidade é assintótica. Às vezes, quando  $\dot{V}(\mathbf{x}(t))$  é apenas semidefinida, o resultado pode ser aprimorado mediante o uso do lema de Barbalat, Apêndice F.
- Se a função  $V$  é *radialmente ilimitada* (*radially unbounded*), ou seja, se  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  para  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ , então a origem é globalmente estável.
- Situações em que  $V(\mathbf{x}) = 0$  em uma certa região podem, às vezes, serem tratadas pelo princípio de La Salle (vide, por exemplo, (SLOTINE; LI, 1991), (KHALIL, 1992)).

### Exemplo: Sistema unidimensional

Considere o sistema unidimensional ( $x \in \mathbb{R}$ )

$$\dot{x} = -\sigma(x) \quad (7.23)$$

em que a função  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $\xi \sigma(\xi) > 0, \forall \xi \neq 0$

Utilizando como a função candidata de Lyapunov,

$$V(x) = x^2 \quad (7.24)$$

que é positivo definida, obtém-se que

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = 2x(t) \frac{dx}{dt} \quad (7.25)$$

$$= -2x(t) \sigma(x(t)) \leq 0 \quad (7.26)$$

ou seja, o sistema é assintoticamente estável.

### Exemplo: Sistema massa + mola não linear + amortecedor não linear

Considere o modelo de sistema massa + mola + amortecedor e, ao invés de uma característica linear da mola, seja  $f_m = kx$  e do amortecedor  $f_a = b\dot{x}$ , em que ambas são funções não necessariamente lineares

$$f_m = g(x) \quad (7.27)$$

$$f_a = h(\dot{x}) \quad (7.28)$$

tais que  $h$  e  $g$  são contínuas,  $h(0) = 0$ ,  $g(0) = 0$ ,  $xh(x) \geq 0$  e  $xg(x) \geq 0$ . O movimento da massa é descrito por

$$\ddot{x} + h(\dot{x}) + g(x) = 0 \quad (7.29)$$

Usando a notação  $x_1 = x$  e  $x_2 = \dot{x}$ , obtém-se a representação no espaço de estados

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7.30)$$

$$\dot{x}_2 = -g(x_1) - h(x_2) \quad (7.31)$$

Lembrando que a expressão da energia total (cinética+potencial) pode ser usada como a função candidata de Lyapunov, seja

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(\xi)d\xi \quad (7.32)$$

Pode-se verificar que  $V$  assim definida é positivo definida e, também, constata-se que  $(0, 0)$  é ponto de equilíbrio.

Aplicando-se o segundo método de Lyapunov, tem-se que

$$\dot{V} = x_2\dot{x}_2 + g(x_1)\dot{x}_1 \quad (7.33)$$

$$= x_2(-g(x_1) - h(x_2)) + g(x_1)(x_2) \quad (7.34)$$

$$= -x_2h(x_2) \quad (7.35)$$

que é negativo semidefinida.

A expressão 7.35 indica que  $V(x_1(t), x_2(t))$  diminui, sempre que componente  $x_2$  não for nulo, ou seja, o amortecedor está dissipando energia para o meio ambiente.

### Exemplo: Utilização do primeiro e segundo métodos de Lyapunov

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^3 \quad (7.36)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \quad (7.37)$$

O ponto  $(0, 0)$  é de equilíbrio e o problema é verificar se este é estável.

Pelo primeiro método de Lyapunov, tem-se que o modelo linearizado é

$$\dot{\Delta \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & -3x_2^2 \\ 1 & -3x_1^2 \end{bmatrix}_{(x_1, x_2)=(0,0)} \Delta \mathbf{x} \quad (7.38)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{x} \quad (7.39)$$



Os autovalores de  $\mathbf{A}$  são obtidos de  $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$  ou seja,  $\lambda = 0$  multiplicidade 2.

Como os autovalores de  $\mathbf{A}$  estão sobre o eixo imaginário no plano  $s$ , *nada se pode afirmar* sobre a estabilidade do ponto  $(0, 0)$  baseado no primeiro método de Lyapunov.

Porém, a expressão 7.39 pode ser reescrita como

$$\dot{\Delta x}_1 = 0 \quad (7.40)$$

$$\dot{\Delta x}_2 = \Delta x_1 \quad (7.41)$$

e, se a condição inicial for  $(\Delta x_1(0), \Delta x_2(0)) = (1, 0)$ , resulta de 7.40 que  $\Delta x_1 = 1$  para  $\forall t \geq 0$ .

Logo, de 7.41, tem-se que

$$\Delta x_2(t) = t \quad (7.42)$$

que tende a  $\infty$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ .

Em outras palavras, usando o modelo linearizado, concluir-se-ia (esquecendo que há um autovalor em cima do eixo imaginário) que a origem é instável.

Porém, pelo segundo método de Lyapunov, utilizando as equações de estado originais (não lineares) 7.36 e 7.37 e propondo a função candidata

$$V(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^4 \quad (7.43)$$

tem-se que

$$\dot{V} = 4x_1\dot{x}_1 + 4x_2^3\dot{x}_2 \quad (7.44)$$

$$= 4x_1(-x_1^3 - x_2^3) + 4x_2^3(x_1 - x_2^3) \quad (7.45)$$

$$= -4x_1^4 - 4x_1x_2^3 + 4x_1x_2^3 - 4x_2^6 \quad (7.46)$$

$$= -4(x_1^4 - x_2^6) \quad (7.47)$$

que é negativo definida.

Logo, o ponto de equilíbrio é, de fato, assintoticamente estável, contrastando com o comportamento do modelo linearizado.

Sistemas não lineares podem apresentar vários pontos de equilíbrio isolados um do outro e frases do tipo “o sistema é estável” devem ser reservadas apenas para os casos em que todos os seus pontos de equilíbrio são estáveis. É conveniente lembrar que é necessário fazer translações de modo que o ponto de equilíbrio esteja em  $\mathbf{0}$  no novo sistema de coordenadas. O insucesso em encontrar uma função candidata  $V$  não significa que o sistema é instável, pois o critério de Lyapunov, se satisfeito, é condição suficiente para a estabilidade

### 7.2.3 Estabilidade de sistemas não autônomos (variantes com o tempo)

A seleção do instante inicial  $t_0$  pode influenciar a resposta de sistemas variantes no tempo e, conseqüentemente, fazem-se necessárias definições adicionais.

Um ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_E$  é dito ser uniformemente estável se dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário,  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$  (independente de  $t_0$ ) tal que, para qualquer  $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_E\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (7.48)$$

Novamente é possível admitir  $\mathbf{x}_E = \mathbf{0}$

Uma função  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser localmente positivo definida se  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  e  $\exists V_L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  positivo definida, de modo que

$$V(\mathbf{x}, t) \geq V_L(\mathbf{x}), \forall t \geq t_0 \quad (7.49)$$

Uma função  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser decrescente se  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  e  $\exists V_H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  positivo definida, de modo que

$$V(\mathbf{x}, t) \leq V_H(\mathbf{x}), \forall t \geq 0 \quad (7.50)$$

Nessas condições, o sistema de ordem  $n$  (ou seja,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ )

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad (7.51)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, 0) = \mathbf{0} \quad (7.52)$$

é uniformemente estável em uma vizinhança  $B(\mathbf{0}, \rho)$  se existe uma função contínua  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- $V$  é localmente positivo definida em  $B(\mathbf{0}, \rho)$
- $V$  é decrescente
- $V(\mathbf{x}(t))$  possui derivadas contínuas em relação a  $t$
- $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t))$  é negativo semidefinida em  $B(\mathbf{0}, \rho)$

A demonstração no caso de sistemas não autônomos é bastante intrincada e pode ser encontrada em livros tais como (KHALIL, 1992), (SLOTINE; LI, 1991), (VIDYASAGAR, 1985) e (SASTRY, 1999), entre outras obras.

## 7.3 Identificação de modelos de tempo contínuo

O segundo método de Lyapunov pode ser utilizado para identificação de sistemas de tempo contínuo no espaço de estados.

### 7.3.1 Mínimos quadrados de tempo contínuo

#### Identificação de sistemas estáticos

Considere o sistema estático linear, escalar ( $y \in \mathbb{R}$ ) descrito por

$$y(t) = \theta u(t) \quad (7.53)$$

em que  $\theta \in \mathbb{R}$  é uma constante e  $t \in [t_0, t_f]$ .

O problema é obter uma estimativa  $\hat{\theta}$  de  $\theta$ , minimizando o erro quadrático

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [y(t) - \theta u(t)]^2 dt \quad (7.54)$$

Uma condição necessária para que  $\hat{\theta}$  seja um ponto estacionário é

$$\left. \frac{dJ}{d\theta} \right|_{\hat{\theta}} = 0. \quad (7.55)$$

Essa condição se torna, no presente problema,

$$\frac{dJ}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [y(t) - \theta u(t)]^2 dt \quad (7.56)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{d\theta} [y^2(t) - 2\theta y(t)u(t) + \theta^2 u^2(t)] dt \quad (7.57)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [-2y(t)u(t) + 2\theta u^2(t)] dt \quad (7.58)$$

$$= 0 \quad (7.59)$$

e a estimativa de  $\theta$  é dada por

$$\hat{\theta} = \frac{\int_{t_0}^{t_f} y(\tau)u(\tau)d\tau}{\int_{t_0}^{t_f} u^2(\tau)d\tau} \quad (7.60)$$

#### Identificação recursiva

Técnicas de estimação que utilizam todos os dados  $\{u(\tau), y(\tau)\}_{\tau \in [t_0, t_f]}$  de uma vez só são conhecidas como de “batelada”, em contraste as “recursivas” que utilizam em cada instante  $t \geq 0$ , os dados  $\{u(\tau), y(\tau)\}_{\tau \leq t}$ .

Se o instante presente é  $t = t_f$ , em vista de 7.60, tem-se que  $\hat{\theta}(t)$  é dado por

$$\hat{\theta}(t) \int_{t_0}^t u^2(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t y(\tau)u(\tau)d\tau \quad (7.61)$$

que derivado em  $t$ , leva à EDO que descreve a dinâmica de  $\widehat{\theta}(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \widehat{\theta}(t) \int_{t_0}^t u^2(\tau) d\tau \right) = \frac{d}{dt} \left( \int_{t_0}^t y(\tau) u(\tau) d\tau \right) \quad (7.62)$$

$$\frac{d}{dt} \widehat{\theta}(t) = \left( \int_{t_0}^t u^2(\tau) d\tau \right)^{-1} \left( -\widehat{\theta}(t) u^2(t) + y(t) u(t) \right) \quad (7.63)$$

### Persistência da excitação

Se o sinal  $u(t)$  for identicamente nulo, tem-se na equação que descreve a dinâmica de  $\widehat{\theta}(t)$  a situação  $\frac{0}{0}$ , o que não é permitido.

Logo, a entrada  $u(t)$  deve afetar suficientemente o sistema de forma que possam ser estabelecidas relações entre as entradas  $u$  e as saídas  $y$ .

Uma entrada  $u$  com tais características é chamada de persistentemente excitante.

Um exemplo de sinal persistentemente excitante é,  $u(t) = \delta(t - t_0)$ ,

$$\int_{t_0}^t u^2(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \delta^2(\tau - t_0) d\tau = 1 \quad (7.64)$$

e a equação para  $\widehat{\theta}(t)$  se torna

$$\frac{d}{dt} \widehat{\theta}(t) = -\widehat{\theta}(t) u^2(t) + y(t) u(t) \quad (7.65)$$

### Conceito de consistência

O ponto de equilíbrio da equação para  $\widehat{\theta}$  é obtido de

$$-u^2(t) \widehat{\theta}(t) + y(t) u(t) = 0 \quad (7.66)$$

$$-u^2(t) \widehat{\theta}(t) + \theta u(t) u(t) = 0 \quad (7.67)$$

$$\widehat{\theta}(t) = \theta \quad (7.68)$$

Em vista de  $\theta$  ser constante, se  $\phi(t)$  é definido como  $\phi(t) = \widehat{\theta}(t) - \theta$ , tem-se que

$$\dot{\phi} = \dot{\widehat{\theta}} \quad (7.69)$$

e, lembrando que  $y = \theta u$ , obtém-se uma EDO para  $\phi$

$$\dot{\phi} = \dot{\widehat{\theta}} \quad (7.70)$$

$$= -\widehat{\theta} u^2 + y u \quad (7.71)$$

$$= -\widehat{\theta} u^2 + \theta u^2 \quad (7.72)$$

$$= -\phi u^2 \quad (7.73)$$

**Convergência da estimativa**

Para estudar a estabilidade de  $\dot{\phi}(t) = -\phi u^2$ , adote a função candidata de Lyapunov

$$V = \phi^2 \quad (7.74)$$

Derivando-se  $V$  em relação a  $t$ , resulta

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}\phi^2 \quad (7.75)$$

$$= 2\phi\dot{\phi} \quad (7.76)$$

$$= -2\phi^2 u^2 \quad (7.77)$$

Constata-se pelo lema de Barbalat que (neste caso)  $\phi(t) \rightarrow 0$ , ou  $\hat{\theta}(t) \rightarrow \theta$  (valor verdadeiro) para  $t \rightarrow \infty$ .

Como  $\hat{\theta}$  converge para o valor verdadeiro  $\theta$ , diz-se que a identificação (estimação) é consistente. Mas, em princípio, *convergência*  $\neq$  *consistência*.

**Identificação de sistemas dinâmicos: caso escalar**

Considere um processo com modelo escalar linear,  $x \in \mathbf{R}, u \in \mathbb{R}, |u(t)| < M$  para  $\forall t$ ,

$$\dot{x} = ax + bu \quad (7.78)$$

em que  $a < 0$  e  $b$  são constantes desconhecidas.

Tanto o estado  $x$  quanto a entrada  $u$  são assumidos disponíveis (medidos).

Seja a proposta de dinâmica para a estimativa

$$\dot{\hat{x}} = \hat{a}\hat{x} + \hat{b}u \quad (7.79)$$

e tome-se como meta fazer  $\hat{a}(t) \rightarrow a$  e  $\hat{b}(t) \rightarrow b$ , para  $t \rightarrow \infty$ .

Nessas condições, o erro  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  satisfaz

$$\dot{e} = (ax + bu) - (\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u) \quad (7.80)$$

Somando e subtraindo o termo  $a\hat{x}$  na equação de  $e$ , obtém-se

$$\dot{e} = a(x - \hat{x}) + (a - \hat{a})\hat{x} + (b - \hat{b})u \quad (7.81)$$

Por conveniência, sejam as variáveis auxiliares

$$\phi(t) = a - \hat{a}(t) \quad (7.82)$$

$$\psi(t) = b - \hat{b}(t) \quad (7.83)$$

que permite escrever

$$\dot{e} = ae + \phi(t)\hat{x} + \psi(t)u \quad (7.84)$$

A partir dos sinais conhecidos  $e(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  e  $u(t)$ , deseja-se obter as leis de adaptação ( $F_a$  e  $F_b$ ):

$$\dot{\hat{a}} = \dot{\phi} = F_a(e, \hat{x}, u, \hat{a}) \quad (7.85)$$

$$\dot{\hat{b}} = \dot{\psi} = F_b(e, \hat{x}, u, \hat{b}) \quad (7.86)$$

O sistema de equações descrevendo  $(e, \phi, \psi)$  se torna

$$\dot{e} = ae + \phi\hat{x} + \psi u \quad (7.87)$$

$$\dot{\phi} = F_a(e, \hat{x}, u, \hat{a}) \quad (7.88)$$

$$\dot{\psi} = F_b(e, \hat{x}, u, \hat{b}) \quad (7.89)$$

Para que o ponto  $(e, \phi, \psi) = (0, 0, 0)$  seja de equilíbrio,  $F_a$  e  $F_b$  devem se anular para  $e = 0$  (a ser verificado *a posteriori*).

Seja a função candidata de Lyapunov

$$V(e, \phi, \psi) = \frac{1}{2} (e^2 + \phi^2 + \psi^2) \quad (7.90)$$

Derivando-se  $V$  em relação a  $t$ , tem-se que

$$\dot{V} = e\dot{e} + \phi\dot{\phi} + \psi\dot{\psi} \quad (7.91)$$

$$= e(ae + \phi\hat{x} + \psi u) + \phi F_a(e, \hat{x}, u, \hat{a}) + \psi F_b(e, \hat{x}, u, \hat{b}) \quad (7.92)$$

$$= ae^2 + \left[ \phi(e\hat{x} + F_a(e, \hat{x}, u, \hat{a})) \right] + \left[ \psi(eu + F_b(e, \hat{x}, u, \hat{b})) \right] \quad (7.93)$$

Propondo  $F_a(\cdot)$  e  $F_b(\cdot)$  da forma

$$F_a(e, \hat{x}, u, \hat{a}) = -e(t)\hat{x}(t) \quad (7.94)$$

$$F_b(e, \hat{x}, u, \hat{b}) = -e(t)u(t) \quad (7.95)$$

tem-se que

$$\dot{V} = ae^2 \leq 0 \quad (7.96)$$

Com a utilização do lema de Barbalat é possível estabelecer que

$$e \xrightarrow{t \uparrow \infty} 0 \quad (7.97)$$

De fato, derivando-se  $\dot{V}$ , obtém-se

$$\ddot{V} = 2ae\dot{e} \quad (7.98)$$

$$= 2ae(ae + \phi\hat{x} + \psi u) \quad (7.99)$$

que é limitado, pois

1. No instante inicial,  $V(e(0), \phi(0), \psi(0)) < N$  para algum  $N > 0$ . Como  $\dot{V} \leq 0$ , decorre que as funções  $e(t)$ ,  $\phi(t)$  e  $\psi(t)$  são limitadas.
2.  $|u(t)| < M$  por hipótese.
3.  $e = x - \hat{x}$  é limitada e, como  $a < 0$ ,  $x$  é também limitada, permitindo concluir que  $\hat{x}$  é limitada.

Uma vez que  $\dot{V}$  é limitada,  $\dot{V}$  é uniformemente contínua e, pelo lema de Barbalat,  $\dot{V} = -ae^2 \rightarrow 0$ , ou  $e(t) \rightarrow 0$ .

### Identificação de sistemas dinâmicos: caso vetorial

Considere o sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{7.100}$$

em que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são matrizes constantes desconhecidas e  $|u| < M$ .

Assume-se, ainda, que  $Re\{\lambda\{\mathbf{A}\}\} < 0$

Como no caso escalar, seja a proposta de dinâmica para a estimativa

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}u \tag{7.101}$$

com a meta de fazer  $\hat{\mathbf{A}}(t) \rightarrow \mathbf{A}$  e  $\hat{\mathbf{B}}(t) \rightarrow \mathbf{B}$ , para  $t \rightarrow \infty$ .

Como antes, defina o erro

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \tag{7.102}$$

A equação da dinâmica de  $\mathbf{e}(t)$  é

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u) - (\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}u) \tag{7.103}$$

$$= \mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}})u \tag{7.104}$$

Por conveniência, são introduzidas as notações

$$\Phi(t) = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}} \tag{7.105}$$

$$\Psi(t) = \mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}} \tag{7.106}$$

A equação do erro é reescrita, portanto, na forma

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \Phi(t)\hat{\mathbf{x}} + \Psi(t)u \tag{7.107}$$

Analogamente ao caso escalar, são buscadas as leis de adaptação

$$\dot{\hat{\mathbf{A}}} = \dot{\Phi} \tag{7.108}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{B}}} = \dot{\Psi} \tag{7.109}$$

Propõe-se como a função candidata de Lyapunov

$$V(\mathbf{e}, \Phi, \Psi) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \text{tr}\{\dot{\Phi}^T \Phi + \dot{\Psi}^T \Psi\} \quad (7.110)$$

com  $\mathbf{P} \succ \mathbf{0}$ , sendo que deve ser feita, *a posteriori*, a verificação de que  $\mathbf{0}$  é ponto de equilíbrio.

A derivada temporal de  $V$  é dada por

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}} + 2\text{tr}\{\dot{\Phi}^T \Phi + \dot{\Psi}^T \Psi\} \quad (7.111)$$

$$= (\mathbf{A}\mathbf{e} + \Phi \hat{\mathbf{x}} + \Psi u)^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{e} + \Phi \hat{\mathbf{x}} + \Psi u) + 2\text{tr}\{\dot{\Phi}^T \Phi + \dot{\Psi}^T \Psi\} \quad (7.112)$$

$$= \mathbf{e}^T \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A})}_{-\mathbf{Q}} \mathbf{e} + 2(\Phi \hat{\mathbf{x}} + \Psi u)^T \mathbf{P} \mathbf{e} + 2\text{tr}\{\dot{\Phi}^T \Phi + \dot{\Psi}^T \Psi\} \quad (7.113)$$

$$= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + 2 \left[ \mathbf{e}^T \mathbf{P} \Phi \hat{\mathbf{x}} + \text{tr}\{\dot{\Phi}^T \Phi\} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \Psi u + \text{tr}\{\dot{\Psi}^T \Psi\} \right] \quad (7.114)$$

A matriz  $\mathbf{P}$  pode ser obtida resolvendo-se

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (7.115)$$

para algum  $\mathbf{Q} \prec \mathbf{0}$ .

A solução  $\mathbf{P}$  de 7.115 é única e positivo definida pois, por hipótese,  $\mathbf{A}$  possui todos os autovalores no semiplano esquerdo.

Os termos indesejados em 7.114 são eliminados adotando-se as leis de adaptação

$$\dot{\Phi} = -\mathbf{P} \mathbf{e} \hat{\mathbf{x}}^T \quad (7.116)$$

$$\dot{\Psi} = -\mathbf{P} \mathbf{e} u^T \quad (7.117)$$

uma vez que

$$\text{tr}\{\dot{\Phi}^T \Phi\} = -\text{tr}\{(\mathbf{P} \mathbf{e} \hat{\mathbf{x}}^T)^T \Phi\} \quad (7.118)$$

$$= -\text{tr}\{\hat{\mathbf{x}} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \Phi\} \quad (7.119)$$

e, notando que para  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\text{tr}\{\alpha_{n \times 1} \beta_{1 \times n}\} = \beta \alpha \quad (7.120)$$

pode-se escrever que

$$\text{tr}\{(\hat{\mathbf{x}})_{n \times 1} (\mathbf{e}^T \mathbf{P} \Phi)_{1 \times n}\} = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \Phi \hat{\mathbf{x}} \quad (7.121)$$



Analogamente, obtém-se que  $tr\{\dot{\Psi}^T \Psi\} = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \Psi u$ .

Substituindo-se  $tr\{\dot{\Phi}^T \Phi\} = -\mathbf{e}^T \mathbf{P} \Phi \mathbf{x}$  e  $tr\{\dot{\Psi}^T \Psi\} = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \Psi u$  na expressão de  $\dot{V}$  em 7.114,

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + 2 \left[ \mathbf{e}^T \mathbf{P} \Phi \mathbf{x} + tr\{\dot{\Phi}^T \Phi\} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \Psi u + tr\{\dot{\Psi}^T \Psi\} \right] \quad (7.122)$$

$$= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + 2 \left[ \mathbf{e}^T \mathbf{P} \Phi \mathbf{x} - \mathbf{e}^T \mathbf{P} \Phi \mathbf{x} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \Psi u - \mathbf{e}^T \mathbf{P} \Psi u \right] \quad (7.123)$$

$$= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \quad (7.124)$$

que é negativo semidefinida.

Considerando, ainda, que  $(\mathbf{e}, \Phi, \Psi) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  é ponto de equilíbrio, pelo critério de Lyapunov, o sistema é estável, utilizando a lei de adaptação 7.116 e 7.117.

### Exemplo de identificação paramétrica

Seja o modelo

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (7.125)$$

$$(7.126)$$

considerado desconhecido a menos do fato de que é linear de segunda ordem, invariante no tempo, com uma entrada  $u_{1 \times 1}$  e o estado  $\mathbf{x}$  é mensurado a todo o instante.

Utilizando-se a lei de adaptação 7.116 e 7.117, obteve-se o resultado apresentado graficamente em 7.3.

De fato, as estimativas da matriz  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  tendem para os valores verdadeiros  $a_{11} = 0$ ,  $a_{12} = 1$ ,  $a_{21} = -2$  e  $a_{22} = -3$ , bem como as da matriz  $\mathbf{B} = [b_i]$  para os valores  $b_1 = b_2 = 1$ .

## 7.4 Backstepping

Embora o *backstepping* tenha sido estudado de modo implícito em alguns artigos anteriores, a formulação típica vista hoje em dia é devida a

- Sussmann, H. J. e Kokotovic, P. V. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 36, n. 4, p. 424-440, 1991.

Para se ter uma boa perspectiva sobre o tema, recomenda-se o artigo

- Kokotovic, P. V. (1992). The joy of feedback: nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 12, n. 3, p. 7-17, 1992.

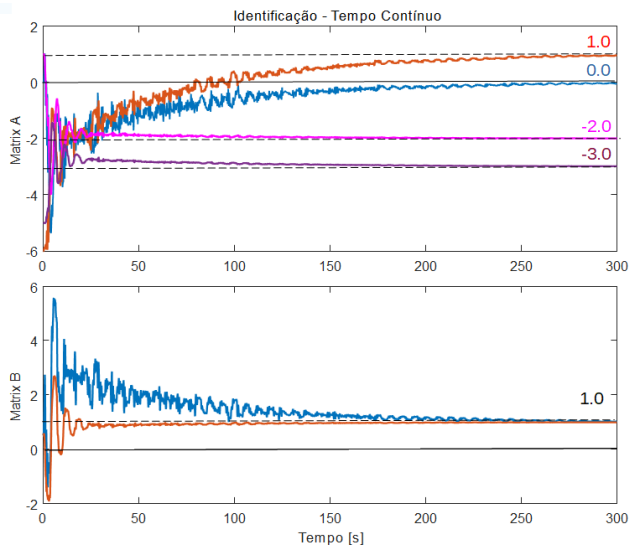


Figura 7.3: Exemplo de Identificação de um sistema LTI.

#### 7.4.1 Exemplo introdutório de *backstepping*

Considere o modelo não linear de dimensão 2 descrito por

$$\dot{x}_1 = x_1^3 x_2 \quad (7.127)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (7.128)$$

No caso de sistemas de segunda ordem são necessárias duas fases.

Em uma primeira fase, um pseudocontrole  $v$  é utilizado no lugar de  $x_2$  da primeira equação.

O pseudocontrole  $v$  é escolhido de modo que o ponto de equilíbrio da primeira equação modificada (com  $v$  no lugar de  $x_2$ ) seja estabilizada.

##### Fase 1:

Assume nesta fase que  $x_2$  pode ser visto como um controle virtual  $v$ , ou seja,

$$\dot{x}_1 = x_1^3 v$$

Com o intuito de estudar a estabilidade, adote-se a função candidata de Lyapunov

$$V_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2}$$

Derivando-se  $V \circ x_1(t)$  em relação a  $t$ , resulta que

$$\frac{d}{dt}V_1(x_1(t)) = x_1\dot{x}_1 \quad (7.129)$$

$$= x_1^4 v \quad (7.130)$$

Escolhendo  $v = -x_1^2$ , obtém-se que

$$\frac{d}{dt}V_1(x_1(t)) = -x_1^6 < 0$$

### Fase 2:

Pela Fase 1, sabe-se que, se  $v = -x_1^2$ , então o sistema representado pela primeira linha de 7.127 seria estável.

Idealmente deseja-se que, através da manipulação de  $u$ ,  $x_2$  se aproxime de  $v$ , cuja expressão será denotada por  $q(x_1) = -x_1^2$ .

Em outras palavras, deseja-se fazer  $x_2$  tender a  $q(x_1)$  através da escolha de  $u$ .

Defina o erro  $e$  como a diferença  $e = x_2 - q(x_1)$  e note que

$$e = x_2 - q(x_1) \quad (7.131)$$

$$x_2 = e + q(x_1) \quad (7.132)$$

O modelo original é, portanto,

$$\dot{x}_1 = x_1^3 x_2 \quad (7.133)$$

$$= x_1^3 (e + q(x_1)) \quad (7.134)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (7.135)$$

Por outro lado, como  $\dot{x}_2 = u$ , pode-se escrever a partir de 7.131 que

$$\dot{e} = u - \dot{q}(x_1) \quad (7.136)$$

Nas variáveis  $\{x_1, e\}$  a dinâmica é descrita por

$$\dot{x}_1 = x_1^3 (e + q(x_1)) \quad (7.137)$$

$$\dot{e} = u - \dot{q}(x_1) \quad (7.138)$$

A função candidata de Lyapunov é escolhida de modo que aproveita a parte referente a  $x_1$  já obtida anteriormente ( $V_1(x_1)$ ), ou seja,

$$V_2(x_1, e) = V_1(x_1) + \frac{e^2}{2} \quad (7.139)$$

$$= \frac{x_1^2}{2} + \frac{e^2}{2} > 0 \quad (7.140)$$

e a sua derivada é dada por

$$\frac{d}{dt}V_2(x_1, e) = x_1\dot{x}_1 + e\dot{e} \quad (7.141)$$

Substituindo-se  $\dot{x}_1$  e  $\dot{e}$ , tem-se

$$\frac{d}{dt}V_2(x_1, e) = x_1 \left( x_1^3 (e + q(x_1)) \right) + e (u - \dot{q}(x_1)) \quad (7.142)$$

$$= x_1^4 e + x_1^4 q(x_1) + eu - e\dot{q}(x_1) \quad (7.143)$$

Da Fase 1,  $q(x_1) = -x_1^2$ , de modo que

$$\frac{d}{dt}V_2(x_1, e) = x_1^4 e + x_1^4 (-x_1^2) + eu - e\dot{q}(x_1) \quad (7.144)$$

$$= -x_1^6 + (x_1^4 + u - \dot{q}(x_1)) e \quad (7.145)$$

Fazendo-se

$$u = \dot{q}(x_1) - x_1^4 - e$$

obtém-se que

$$\frac{d}{dt}V_2(x_1, e) = -x_1^6 + (x_1^4 + u - \dot{q}(x_1)) e \quad (7.146)$$

$$= -x_1^6 - e^2 < 0 \quad (7.147)$$

e o modelo original foi estabilizado com o controle

$$u = \dot{q}(x_1) - x_1^4 - e \quad (7.148)$$

$$= \dot{q}(x_1) - x_1^4 - x_2 + q(x_1) \quad (7.149)$$

$$= -2x_1\dot{x}_1 - x_1^4 - x_2 - x_1^2 \quad (7.150)$$

$$= -x_1^4 - 2x_1^4 x_2 - x_1^2 - x_2 \quad (7.151)$$

### 7.4.2 Caso geral

Considere um modelo na forma

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)x_2 \quad (7.152)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (7.153)$$

Assuma que existe  $q(x_1)$  tal que  $q(0) = 0$  e para algum  $V_1(x_1) > 0$ , diferenciável e radialmente ilimitada, é satisfeita a condição

$$\frac{dV_1(x_1(t))}{dt} = \frac{dV_1}{dx_1}\dot{x}_1 \quad (7.154)$$

$$= \frac{dV_1}{dx_1} [f(x_1) + g(x_1)q(x_1)] < 0 \quad (7.155)$$

Assim como no Exemplo Introdutório, deseja-se usar  $x_2$  como um controle virtual, ou seja, manipular  $u$  de modo que  $x_2 \rightarrow q(x_1)$ .

Definindo  $e = x_2 - q(x_1)$ , obtém-se a mesma equação do Exemplo Introdutório,

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)(e + q(x_1)) \quad (7.156)$$

$$\dot{e} = u - \dot{q}(x_1) \quad (7.157)$$

Aproveitando a função  $V_1$  fornecida, seja  $V_2(x_1, e) = V_1(x_1) + \frac{e^2}{2}$ , e note que

$$\frac{d}{dt}V_2(x_1, e) = \frac{dV_1}{dx_1}\dot{x}_1 + e\dot{e} \quad (7.158)$$

$$= \frac{dV_1}{dx_1} [f(x_1) + g(x_1)(e + q(x_1))] + e(u - \dot{q}(x_1)) \quad (7.159)$$

$$= \underbrace{\frac{dV_1}{dx_1}f(x_1) + \frac{dV_1}{dx_1}g(x_1)q(x_1)}_{\dot{V}_1 < 0} + \underbrace{\left[ \frac{dV_1}{dt}g(x_1) + u - \dot{q}(x_1) \right]}_B e \quad (7.160)$$

Fazendo-se

$$u = -\frac{dV_1}{dx_1}g(x_1) + \dot{q}(x_1) - e$$

obtém-se que

$$V_2(x_1, e) = \dot{V}_1 - e^2 < 0$$

Expandindo o controle estabilizante  $u$ , obtém-se a fórmula

$$u = -\frac{dV_1}{dx_1}g(x_1) + \dot{q}(x_1) - e \quad (7.161)$$

$$= -\frac{dV_1}{dx_1}g(x_1) + \frac{dq}{dx_1}\dot{x}_1 - x_2 + q(x_1) \quad (7.162)$$

$$= -\frac{dV_1}{dx_1}g(x_1) + \frac{dq}{dx_1} [f(x_1) + g(x_1)x_2] - x_2 + q(x_1) \quad (7.163)$$

$$= -\frac{dV_1}{dx_1}g(x_1) + \frac{dq}{dx_1}f(x_1) + \frac{dq}{dx_1}g(x_1)x_2 - x_2 + q(x_1) \quad (7.164)$$

**Exemplo:** Considere o mesmo modelo utilizado anteriormente

$$\dot{x}_1 = x_1^3 x_2 \quad (7.165)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (7.166)$$

ou seja,  $f(x_1) = 0$  e  $g(x_1) = x_1^3$ , e tome-se a mesma função candidata de Lyapunov,

$$V_1 = \frac{1}{2}x_1^2$$

Verifica-se que  $q(x_1) = -x_1^2$  é adequado e pela fórmula obtida anteriormente

$$u = -\frac{dV_1}{dx_1}g(x_1) + \frac{dq}{dx_1}f(x_1) + \frac{dq}{dx_1}g(x_1)x_2 - x_2 + q(x_1) \quad (7.167)$$

$$= -x_1x_1^3 - 2x_1 \times x_1x_1^3x_2 - x_2 - x_1^2 \quad (7.168)$$

$$= -x_1^4 - 2x_1^4x_2 - x_1^2 - x_2 \quad (7.169)$$

que é igual ao obtido anteriormente em 7.151.

### 7.4.3 Caso de realimentação estrita

O método do *backstepping* é também aplicável a sistemas da forma

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (7.170)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \quad (7.171)$$

$$\vdots \quad (7.172)$$

$$\dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})x_n \quad (7.173)$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)u \quad (7.174)$$

Os termos  $g_k(x_1, \dots, x_k)$  não devem se anular pois a solução envolve termos  $g_k^{-1}(x_1, \dots, x_k)$ .

#### Exemplo de ordem 2

Considere o problema de estabilizar o sistema modelado por

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (7.175)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \quad (7.176)$$

Pela Fase 1, assumamos que existe  $q(x_1)$  e  $V_1(x_1)$ , tal que

$$\frac{dV_1}{dx_1} [f_1(x_1) + g_1(x_1)q_1(x_1)] < 0$$

Definindo  $e = x_2 - q(x_1)$  obtém-se uma equação similar ao dos casos anteriores, com a única diferença do termo entre colchetes.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)(e + q(x_1)) \quad (7.177)$$

$$\dot{e} = [f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u] - \dot{q}(x_1) \quad (7.178)$$

Tomando-se como a função candidata de Lyapunov, novamente aproveitando a disponibilidade de  $V_1(x_1)$

$$V_2(x_1, e) = V_1(x_1) + \frac{e^2}{2} \tag{7.179}$$

obtém-se que (omitindo-se os argumentos de  $f_1, f_2, g_1$  e  $g_2$ )

$$\frac{d}{dt} V_2(x_1, e) = \frac{dV_1}{dx_1} \dot{x}_1 + e\dot{e} \tag{7.180}$$

$$= \frac{dV_1}{dx_1} [f_1 + g_1(e + q(x_1))] + e[f_2 + g_2u - \dot{q}(x_1)] \tag{7.181}$$

$$= \underbrace{\frac{dV_1}{dx_1} [f_1 + g_1q(x_1)]}_{\dot{V}_1 < 0} + e\left[\frac{dV_1}{dx_1}g_1 + f_2 + g_2u - \dot{q}(x_1)\right] \tag{7.182}$$

De modo similar aos casos anteriores, propõe-se a lei de controle

$$u = -\frac{1}{g_2} \left( \frac{dV_1}{dx_1}g_1 + f_2 - \dot{q}(x_1) + e \right) \tag{7.183}$$

$$= -\frac{1}{g_2} \left( \frac{dV_1}{dx_1}g_1 + f_2 - \frac{dq_1}{dx_1}f_1 - \frac{dq_1}{dx_1}g_1x_2 + x_2 - q(x_1) \right) \tag{7.184}$$

que, substituído na equação de  $\dot{V}_2$ , leva a

$$\frac{d}{dt} V_2(x_1, e) = \dot{V}_1 - e^2 < 0$$

e o modelo é estabilizado.

OBS: Note que a lei de controle 7.184 apresenta certa complexidade.

### 7.4.4 Controle adaptativo com *backstepping*

O método *backstepping* pode ser utilizado para projeto de controladores adaptativos.

Aqui, um procedimento simples é ilustrado através de um exemplo.

Considere o modelo

$$\dot{x}_1 = \theta f(x_1) + x_2 \tag{7.185}$$

$$\dot{x}_2 = u \tag{7.186}$$

em que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e  $\theta$  é um parâmetro real desconhecido.

A mesma metodologia anterior é aplicável e toma-se inicialmente um pseudocontrole  $v$  no lugar de  $x_2$ .

$$\dot{x}_1 = \theta f(x_1) + v$$

Seja agora uma função candidata de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2}x_1^2$$

Derivando-se  $V$  no tempo e propondo  $v = -\theta f(x_1) - x_1$ , tem-se que

$$\dot{V}_1 = x_1 \dot{x}_1 \quad (7.187)$$

$$= x_1 (\theta f(x_1) + v) \quad (7.188)$$

$$= -x_1^2 \leq 0 \quad (7.189)$$

Deseja-se agora que  $x_2$  se aproxime de  $v$  mediante manipulação de  $u$  (já que  $v$  foi usado como um pseudocontrole no lugar de  $x_2$ ).

Denotando  $v = q_1(x_1)$ , pode-se definir o erro

$$e = x_2 - q_1(x_1) \quad (7.190)$$

$$x_2 = e + q_1(x_1) \quad (7.191)$$

e obtém-se o sistema

$$\dot{x}_1 = \theta f(x_1) + e + q_1(x_1) \quad (7.192)$$

$$\dot{e} = u - \dot{q}_1(x_1) \quad (7.193)$$

lembrando que  $\dot{x}_2 = u$ .

Propondo-se a função candidata de Lyapunov

$$V_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}e^2$$

e derivando-se  $V_2$  em relação a  $t$ ,

$$\dot{V}_2 = x_1 \dot{x}_1 + e \dot{e} \quad (7.194)$$

$$= x_1 (\theta f(x_1) + e + q_1(x_1)) + e (u - \dot{q}_1(x_1)) \quad (7.195)$$

$$= x_1 (\theta f(x_1) + q_1(x_1)) + e (x_1 + u - \dot{q}_1(x_1)) \quad (7.196)$$

Substituindo-se  $q(x_1) = -x_1 - \theta f(x_1)$  e adotando-se  $u = -x_1 + \dot{q}(x_1) - e$  resulta que

$$\dot{V}_2 = -x_1^2 - e^2 \leq 0 \quad (7.197)$$



Porém,  $\theta$  não é conhecido e, portanto, pelo princípio da equivalência à certeza, substitui-se  $\theta$  por uma estimativa  $\hat{\theta}$  na expressão  $q(x_1) = -x_1 - \theta f(x_1)$

$$\hat{q}_1(x_1) = -x_1 - \hat{\theta}f(x_1)$$

A nova expressão para  $(\dot{x}_1)$  é

$$\dot{x}_1 = \theta f(x_1) + x_2 \quad (7.198)$$

$$= \theta f(x_1) + e + \hat{q}_1(x_1) \quad (7.199)$$

e para  $(\dot{e})$  é

$$\dot{e} = u - \dot{\hat{q}}_1(x_1)$$

Seja,  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  e note que  $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$ , já que  $\theta$  é constante.

Uma expressão para  $\dot{\tilde{\theta}}$  será obtida através do critério de Lyapunov.

Para analisar a estabilidade de

$$\dot{x}_1 = \theta f(x_1) + e + \hat{q}_1(x_1) \quad (7.200)$$

$$\dot{e} = u - \dot{\hat{q}}_1(x_1) \quad (7.201)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = \text{a ser definido} \quad (7.202)$$

adote-se a função candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + e^2 + \tilde{\theta}^2)$$

Calculando-se a derivada de  $V$  em relação ao tempo,

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + e \dot{e} + \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \quad (7.203)$$

tem-se que

$$\dot{V} = x_1 (\theta f(x_1) + e + \hat{q}_1(x_1)) + e (u - \dot{\hat{q}}_1(x_1)) + \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \quad (7.204)$$

$$= x_1 (\theta f(x_1) + e - x_1 - \hat{\theta}f(x_1)) + e (u - \dot{\hat{q}}_1(x_1)) + \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \quad (7.205)$$

$$= -x_1^2 + \left[ \underbrace{(\theta - \hat{\theta})f(x_1)}_{\tilde{\theta}} + \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \right] + e [x_1 + u - \dot{\hat{q}}_1(x_1)] \quad (7.206)$$

$$= -x_1^2 - (f(x_1) + \dot{\tilde{\theta}}) \tilde{\theta} + e [x_1 + u - \dot{\hat{q}}_1(x_1)] \quad (7.207)$$

Seja

$$\dot{\tilde{\theta}} = -f(x_1) \quad (7.208)$$

$$u = -x_1 + \dot{\hat{q}}_1(x_1) - e \quad (7.209)$$

Com essas escolhas para  $\dot{\hat{\theta}}$  e  $u$ , resulta que

$$\dot{V} = -x_1^2 - e^2 \leq 0$$

Portanto, com a lei de adaptação

$$\dot{\hat{\theta}} = -f(x_1)$$

e com o controle

$$u = -x_1 + \dot{\hat{q}}_1(x_1) - e \quad (7.210)$$

$$(7.211)$$

e a estabilidade é verificada, uma vez que  $(0, 0, 0)$  é ponto de equilíbrio.

**Nesta seção, o critério de Lyapunov foi utilizado para obter uma lei de adaptação tal que  $\dot{V} \leq 0$ . Ou seja, a função candidata  $V$  envolvia funções ainda não determinadas (no exemplo,  $Phi$  e  $Psi$ , respectivamente) que, posteriormente, foram escolhidas de modo que tornassem  $V$  semidefinida negativa.**

## 7.5 Observações Complementares

1. Existem alguns métodos sistemáticos para construir funções candidatas de Lyapunov, tais como o método de Zubov e o de Gradiente Variável (vide (CASTRUCCI; CURTI, 1981)).
2. Segundo o Teorema Recíproco de Lyapunov, se um modelo é sabidamente estável, então é possível construir uma função candidata de Lyapunov.
3. Embora existam critérios de instabilidade como a de Četaev, são pouco utilizados em projeto de controladores.
4. Quando a função  $\dot{V}$  é apenas semi-definida negativa, pode-se, às vezes, utilizar o princípio de conjuntos invariantes de LaSalle (LaSalle, J.P. Some extensions of Liapunov's second method, *IRE Transactions on Circuit Theory*, CT-7, pp. 520–527, 1960).
5. Mais adiante é apresentado o Lema de Barbalat que permite concluir que  $\dot{V} \rightarrow 0$  se  $\ddot{V}$  é limitada.
6. Quando ocorrem autovalores no eixo imaginário ao se aplicar o primeiro método de Lyapunov (pontos fixos não hiperbólicos), pode-se, às vezes, utilizar o Teorema da Variedade Central.

## 7.6 Observações sobre pontos de equilíbrio

Em se tratando de sistemas não lineares, um ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_E$  para o qual as trajetórias convergem pode não satisfazer a definição de estabilidade, ou seja, a trajetória  $\mathbf{x}(t)$  não deve “sair” da vizinhança  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_E)$  (em termos formais, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E| \leq \varepsilon$  se  $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_E| \leq \delta$ ).

Considere o sistema descrito por

$$\dot{x}_1 = x_1 \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) - x_2 \left(1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \quad (7.212)$$

$$\dot{x}_2 = x_2 \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) + x_1 \left(1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \quad (7.213)$$

O ponto  $(1, 0)$  é um ponto de equilíbrio para o qual as trajetórias convergem, mas após percorrer trechos de uma circunferência de raio 1, como visto no plano de fase A da figura 7.4.

O plano de fase B da figura 7.4 apresenta trajetórias típicas percorridas pela solução da equação de Vinograd (Vinograd, R. E. Inapplicability of the method of characteristic exponents to the study of non-linear differential equations. *Matematicheskii Sbornik*, v. 41, n. 4, p. 431-438, 1957)

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2))^2} \quad (7.214)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2))^2} \quad (7.215)$$

Aqui, embora o ponto  $(0, 0)$  seja atrator, esse não é um ponto de equilíbrio.

**Existem várias extensões do critério de Lyapunov que permitem analisar processos híbridos, processos com atraso puro, processos com ordem fracionária e muitos outros. Sob uma perspectiva diferente o método de Lyapunov é utilizado para projeto de controladores adaptativos e para identificação de sistemas.**

## 7.7 Notas históricas sobre o critério de Lyapunov

Alguns resultados notáveis que estendem o critério de Lyapunov.

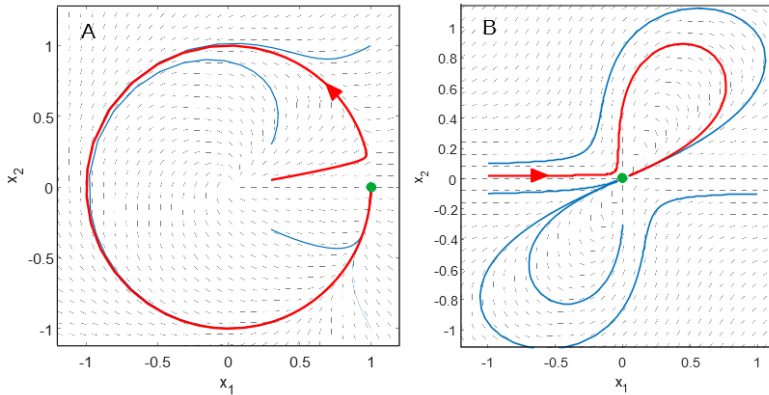


Figura 7.4: Planos de fase de modelos que apresentam dificuldades na definição de pontos de equilíbrio estáveis.

- Vasile Mihai Popov (1928-) estudou o problema de Lur'e-Postnikov (Lur'e, A. I. e Postnikov, V. N. On the theory of stability of control systems (em russo). *Prikladnaya Matematika I Mekhanika*, v. 8, n. 3, p.246-248, 1944) e propôs, mais tarde em 1966, a teoria de hiperestabilidade de sistemas dinâmicos.
- Em 1945, Mark Aronovich Aizerman (1913-1992) e Felix Ruvimovich Gantmacher (1908- 1964) analisam o problema de estabilidade absoluta. (Aizerman, M. A. e Gantmacher, F. R. Die absolute Stabilität von Regelsystemen (republicado como suplemento: Die absolute Stabilität von Regelsystemen. Beiheft zur Zeitschrift Regelungstechnik, 1965).
- O princípio de Barbashin-Krasovskii-LaSalle foi proposto, de modo independente, por Nikolay Nikolayevich Krasovskiy (1924-2012) e Joseph Pierre (Joe) LaSalle (1916-1983), respectivamente em 1959 e 1960. Um caso especial já havia sido apresentado em 1952 por Barbashin e Krasovskii. Barbashin, E. A. e Krasovskii, N. N. On the stability of motion as a whole (em russo). *Doklady Akademii Nauk SSSR*, v. 86, p. 453-445, 1952. LaSalle, J. P. Some extensions of Liapunov's second method. *IRE Transactions on Circuit Theory*, v. 7, p. 520-527, 1960. Krasovskii, N. N. Problems of the Theory of Stability of Motion (em russo), 1959. Tradução para o inglês: Stanford University Press, Stanford, CA, 1963. (2))
- Em torno de 1990, vários autores, incluindo Petar V. Kokotovic (1934-), desenvolvem a teoria de *backstepping control*, que permite, entre outras

possibilidades, um projeto recursivo sistemático de controladores não lineares.



Lyapunov

Krasovski

Popov

LaSalle

Kokotovic

## 7.8 Exercícios

### 7.8.1 Exercício: Estabilidade de pontos de equilíbrio

Investigar a estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação de Van der Pol

$$\dot{x}_1 = -x_2 \quad (7.216)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \quad (7.217)$$

### 7.8.2 Primeiro método de Lyapunov

Investigar a estabilidade dos pontos de equilíbrio utilizando o primeiro método de Lyapunov.

1.

$$\dot{x}_1 = x_2(1 + x_1 - x_2^2) \quad (7.218)$$

$$\dot{x}_2 = x_1(1 + x_2 - x_1^2) \quad (7.219)$$

2.

$$\dot{x}_1 = x_1^3 - x_2 \quad (7.220)$$

$$\dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2 - 2)x_2 \quad (7.221)$$

3.

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^3 \quad (7.222)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1(x_1^2 - x_2) \quad (7.223)$$

4. Assumindo que  $\alpha > 0$ .

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1^2 - \alpha x_1 x_2 \quad (7.224)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2 - x_2^2 - \alpha x_1 x_2 \quad (7.225)$$

### 7.8.3 Exercício: Segundo método de Lyapunov

Considere um processo descrito por

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7.226)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 \quad (7.227)$$

(i) Investigar a estabilidade da origem utilizando o primeiro método de Lyapunov.

(ii) Investigar a estabilidade da origem utilizando o segundo método de Lyapunov.

Observação: Uma função candidata de Lyapunov pode ser encontrada escolhendo-se convenientemente os coeficientes de um polinômio.

### 7.8.4 Exercício: Segundo método de Lyapunov

Investigar a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema descrito por

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7.228)$$

$$\dot{x}_2 = -g(x_1) - h(x_2) \quad (7.229)$$

em que

$$g(0) = 0 \quad (7.230)$$

$$h(0) = 0 \quad (7.231)$$

$$\xi g(\xi) > 0; -1 < \xi < 1; \forall \xi \neq 0 \quad (7.232)$$

$$\xi h(\xi) > 0; -1 < \xi < 1; \forall \xi \neq 0 \quad (7.233)$$

Observação: Uma função candidata de Lyapunov é

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (7.234)$$

### 7.8.5 Exercício: Critérios de estabilidade de Lyapunov

Considere o processo

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7.235)$$

$$\dot{x}_2 = -\sin(x_1) - x_2 \quad (7.236)$$

Estudar a estabilidade desse processo utilizando:

- (i) o primeiro método de Lyapunov
-

$$V(x_1, x_2) = [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (7.237)$$

(ii) o segundo método de Lyapunov com a função candidata

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (7.238)$$

para uma escolha adequada de  $\mathbf{P}$ .

### 7.8.6 Exercício: Polos do eixo imaginário

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^3 \quad (7.239)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \quad (7.240)$$

- (i) Estudar a estabilidade da origem pelo primeiro método de Lyapunov
- (ii) Obter a solução fechada da equação linearizada para uma condição inicial não nula
- (iii) Estudar a estabilidade da origem pelo primeiro método de Lyapunov
- (iv) Comentar os resultados obtidos.

### 7.8.7 Exercício: Estabilidade de sistemas não autônomos

O coeficiente de atrito viscoso de um sistema mecânico pode variar devido às alterações no lubrificante. Considere, então, um pêndulo em que o sistema de pivô é lubrificado com uma graxa que degrada com o tempo segundo descrito pelo coeficiente  $g(t)$ , tal que

$$0 < a < \alpha < g(t) < \beta < \infty ; \forall t \in [0, \infty) \quad (7.241)$$

$$\frac{dg}{dt}(t) < \gamma < 2 \quad (7.242)$$

em que  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes positivas. Investigar a estabilidade desse pêndulo, modelado por

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7.243)$$

$$\dot{x}_2 = -\sin(x_1) - g(t)x_2 \quad (7.244)$$

utilizando a função candidata de Lyapunov

$$V(t, x) = \frac{1}{2}(a \sin(x_1) + x_2)^2 + (1 + ag(t) - a^2)(1 - \cos(x_1)) \quad (7.245)$$

### 7.8.8 Exercício: Lema de Barbalat

Sabendo-se que  $a > 0$ , mostrar, se for o caso, que  $e(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$

$$\dot{\theta} = w \quad (7.246)$$

$$\dot{w} = -\sin(\theta) - aw \quad (7.247)$$

e as condições iniciais são

$$\theta(0) = 1 \quad (7.248)$$

$$w(0) = 1 \quad (7.249)$$

Observação: Sugere-se como a função candidata de Lyapunov

$$V(\theta, w) = (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}w^2 \quad (7.250)$$

### 7.8.9 Exercício: Utilização do lema de Barbalat

Considere o processo descrito por

$$\dot{x}_1 = -\text{sign}(k) x_2(t) r(t) \quad (7.251)$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha x_2(t) + k x_1(t) r(t) \quad (7.252)$$

em que  $\alpha > 0$ ,  $k$  é uma constante real e  $|r(t)| < M < \infty$  para  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Verificar se é possível concluir que  $x_2(t) \rightarrow 0$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ , utilizando a função candidata

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left( x_2^2 + k \text{sign}(k) x_1^2 \right) \quad (7.253)$$

### 7.8.10 Exercício: Identificação com termos não lineares

Considere um processo descrito por

$$\dot{x} = ax + \alpha f(x) + \beta g(u) \quad (7.254)$$

em que  $a < 0$  e os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes mas desconhecidos. Assume-se que as funções  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  e  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  são conhecidas e diferenciáveis, com  $f(0) = 0$  e  $g(0) = 0$ . Como mostrado no texto, obter uma lei de adaptação para  $\hat{a}$ ,  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  usando a proposta

$$\dot{\hat{x}} = \hat{a}\hat{x} + \hat{\alpha}f(x) + \hat{\beta}g(u) \quad (7.255)$$

Definir  $e = x - \hat{x}$ ,  $\phi = a - \hat{a}$ ,  $\psi = \alpha - \hat{\alpha}$ ,  $\chi = \beta - \hat{\beta}$  e utilizar a função candidata

$$V = \frac{1}{2} \left( e^2 + \phi^2 + \psi^2 + \chi^2 \right) \quad (7.256)$$