

Parte III

Estabilidade

6

Critérios de estabilidade para modelos LTI

“The cost of stability is often diminished opportunities for growth.”

– Sheryl Sandberg

Conforme visto anteriormente no Capítulo 3, um ponto de equilíbrio \mathbf{x}_E de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é dito ser estável se, dado $\delta \in \mathbb{R}$ arbitrário, existe $\varepsilon(\delta) \in \mathbb{R}$ tal que se $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_E\| < \delta$, então $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E\| < \varepsilon(\delta)$ para $\forall t \geq t_0$.

Sistemas lineares invariantes no tempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{6.1}$$

possuem um único ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_E = \mathbf{0}$ se \mathbf{A} é não singular, mas infinitos pontos $\{\mathbf{x}_E \in \text{Ker}(\mathbf{A})\}$ se $\det(\mathbf{A}) = 0$ e constituem um subespaço do espaço de estados.

Observação:

Sistemas não lineares podem ter múltiplos pontos de equilíbrio isolados.

Por exemplo, o sistema escalar

$$\dot{x} = x - x^3 \tag{6.2}$$

possui três pontos de equilíbrio: 0, -1 e +1.

A solução de modelos LTI

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{6.3}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{6.4}$$

é da forma

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k e^{\lambda_k t} \quad (6.5)$$

e são estáveis se os todos os autovalores λ_k possuem parte real negativa.

No domínio transformado, tal fato se traduz na condição que todos os polos da função de transferência estão localizados no semiplano esquerdo (SPE).

Uma vez que a obtenção das raízes de $\Delta(s)$ pode ser trabalhosa, principalmente quando são envolvidos parâmetros literais, é interessante que se disponha de métodos para verificar se todas as raízes do polinômio característico $\Delta(\lambda) = 0$ estão localizados no semiplano esquerdo (nesse caso, $\Delta(\lambda)$ é dito ser de Hurwitz).

Neste capítulo é tratado apenas o caso SISO (*single input single output*).

Observação

A pertinência das raízes de $\Delta(s)$ ao SPE não garante a estabilidade de sistemas variantes no tempo (sistemas não autônomos).

Considere o sistema cujo modelo é

$$\dot{x}_1 = -x_1 - e^{2t}x_2 \quad (6.6)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 \quad (6.7)$$

com a condição inicial $\mathbf{x} = [0 \quad 1]^T$

A solução de $\dot{x}_2 = -x_2$ é $x_2(t) = e^{-t}x_2(0)$, ou substituindo $x_2(0) = 1$

$$x_2(t) = e^{-t} \quad (6.8)$$

Portanto, usando esse resultado em 6.7,

$$\dot{x}_1 = -x_1 - e^{2t}x_2 \quad (6.9)$$

$$= -x_1 - e^{2t}e^{-t} \quad (6.10)$$

$$= -x_1 - e^t \uparrow \infty \quad (6.11)$$

6.0.1 Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

O critério de Routh-Hurwitz permite verificar se todas as raízes de um polinômio característico (ou os polos de uma função de transferência)

$$\Delta(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n \quad (6.12)$$

com $a_i > 0, \forall i = 0, \dots, n$ estão no semiplano esquerdo sem resolver a equação $\Delta(s) = 0$, bastando examinar uma tabela construída de modo sistemático.

Mais especificamente, basta verificar se não há troca de sinais na primeira coluna de

$$\begin{array}{rcccccccc}
 s^n & : & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \\
 s^{n-1} & : & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\
 s^{n-2} & : & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{\frac{n}{2}-1} & b_{\frac{n}{2}} & \\
 s^{n-3} & : & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{\frac{n}{2}-1} & & \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 s^3 & : & p_1 & p_2 & p_3 & & & & \\
 s^2 & : & q_1 & q_2 & & & & & \\
 s^1 & : & r_1 & & & & & & \\
 s^0 & : & s_1 & & & & & &
 \end{array} \tag{6.13}$$

em que

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad \dots \tag{6.14}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \quad \dots \tag{6.15}$$

e assim por diante. (6.16)

Este critério é conhecido como o de Routh-Hurwitz e demonstrações rigorosas do critério de Routh-Hurwitz podem ser encontradas em (SCHWARZ; FRIEDLAND, 1965), (CHAPELLAT; MANSUR; BHATTACHARYYA, 1990). Uma demonstração simples é apresentada no Apêndice D.

6.0.2 Exemplo

Seja um processo cuja relação entrada-saída é dada, no domínio transformado, por

$$T(s) = \frac{K}{s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 4s + K} \tag{6.17}$$

Para determinar para quais os valores K o sistema é estável, deve-se verificar quando o polinômio $\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 4s + K = 0$ tem todas as raízes no semiplano esquerdo (SPE), montando-se o arranjo de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{rcccc}
 s^4 & : & 1 & & 6 & & K \\
 s^3 & : & 2 & & 4 & & \\
 s^2 & : & 4 = \frac{2 \times 6 - 1 \times 4}{2} & & K = \frac{2 \times K - 1 \times 0}{2} & & \\
 s^1 & : & 4 - \frac{1}{2}K = \frac{4 \times 4 - 2 \times K}{4} & & & & \\
 s^0 & : & K & & & &
 \end{array} \tag{6.18}$$

Logo, o processo é estável se $0 < K < 8$.

6.0.3 Critério de Kharitonov

Este resultado é útil quando os coeficientes do polinômio característico $\Delta(s)$ possui incertezas.

Considere, então, uma família de polinômios característicos de grau n

$$\Delta[\overbrace{\{a_0, a_2, \dots\}}^P, \overbrace{\{a_1, a_3, \dots\}}^I](s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n \quad (6.19)$$

em que cada coeficiente a_i pode assumir valores constantes entre a_i^{\min} e a_i^{\max}

$$0 < a_i^{\min} \leq a_i \leq a_i^{\max} \quad (6.20)$$

para $i = 1, \dots, n$.

Sejam ainda os conjuntos de coeficientes organizados como a seguir

$$\overline{P} = \{a_0^{\max}, a_2^{\min}, a_4^{\max}, a_6^{\min}, \dots\} \quad (6.21)$$

$$\underline{P} = \{a_0^{\min}, a_2^{\max}, a_4^{\min}, a_6^{\max}, \dots\} \quad (6.22)$$

$$\overline{I} = \{a_1^{\max}, a_3^{\min}, a_5^{\max}, a_7^{\min}, \dots\} \quad (6.23)$$

$$\underline{I} = \{a_1^{\min}, a_3^{\max}, a_5^{\min}, a_7^{\max}, \dots\} \quad (6.24)$$

Critério de Kharitonov Todos os polinômios $\Delta[\{a_0, a_2, \dots\}, \{a_1, a_3, \dots\}](s)$ serão Hurwitz se os seguintes quatro polinômios forem Hurwitz

$$\Delta[\overline{P}, \overline{I}](s), \Delta[\overline{P}, \underline{I}](s), \Delta[\underline{P}, \overline{I}](s), \Delta[\underline{P}, \underline{I}](s) \quad (6.25)$$

A prova desse resultado pode ser encontrado no artigo original de ([KHARITONOV, 1978](#)), ou em ([YEUNG; WANG, 1987](#)).

6.0.4 Exemplo

Suponha que, em vista de incertezas nos valores dos componentes utilizados, tem-se que

$$\Delta(s) = (1 \pm 0.05)s^4 + (2 \pm 0.2)s^3 + (6 \pm 0.3)s^2 + (4 \pm 0.1)s + (5 \pm 0.4) \quad (6.26)$$

ou seja,

$$a_0 \in [0.95, 1.05] \quad (6.27)$$

$$a_1 \in [1.8, 2.2] \quad (6.28)$$

$$a_2 \in [5.7, 6.3] \quad (6.29)$$

$$a_3 \in [3.9, 4.1] \quad (6.30)$$

$$a_4 \in [4.6, 5.4] \quad (6.31)$$

Nesse caso, as raízes de $\Delta(s) = 0$ estarão todos no semiplano esquerdo se todos os polinômios

$$\bar{P} = 1.05s^2 + 5.7s + 5.4 \tag{6.32}$$

$$\underline{P} = 0.95s^2 + 6.3s + 4.6 \tag{6.33}$$

$$\bar{I} = 2.2s + 3.9 \tag{6.34}$$

$$\underline{I} = 1.8s + 4.1 \tag{6.35}$$

$$\tag{6.36}$$

forem Hurwitz.

6.0.5 Caso de tempo discreto

O modelo é estável se os autovalores (Raízes de $\Delta(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$) estiverem no círculo unitário ($Re[z]^2 + Im[z]^2 < 1$), já que $|\lambda(\mathbf{A})| < 1 \Rightarrow \mathbf{A}^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Existem testes análogos ao de Routh-Hurwitz no caso contínuo, porém significativamente mais trabalhosos de aplicar, por exemplo:

1. Jury, E. I. *Inners and stability of dynamic system*. Wiley, 1974.
2. Liénard, A. e Chipart, M. H. Sobre o sinal da parte real das raízes de uma equação algébrica (em francês). *J. Math. Pures Appl*, v.10, n.6, 1914, pp. 291-346.

Outra possibilidade é utilizar a transformação

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{6.37}$$

para mapear o círculo unitário para o semiplano esquerdo (SPE) e utilizar o critério de Routh-Hurwitz.

6.0.6 Exemplo

Considere o problema de determinar o valor de ganhos K de modo que o processo do diagrama de blocos da figura 6.1 seja estável.

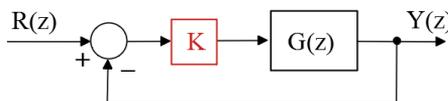


Figura 6.1: Estudo da estabilidade em função do ganho K .

em que

$$G(z) = \frac{z}{z^2 + 0.7z + 0.1}$$

Fazendo-se a substituição

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (6.38)$$

obtém-se no plano W que

$$\bar{G}(w) = \frac{5K(1-w^2)}{(2-5K)w^2 + 9w + 5K + 9} \quad (6.39)$$

Utilizando-se o critério de Routh-Hurwitz, obtém-se que há estabilidade se $-1.8 < K < 0.4$.

6.0.7 Critério de Nyquist

O critério de Nyquist é muito utilizado por permitir interpretação gráfica direta, por levar a definições importantes como a margem de fase e margem de ganho, bem como pela possibilidade de extensão ao caso multivariável.

Seja $G_a(s)$ uma função de transferência em malha aberta com P polos no semiplano direito e Γ o contorno de Nyquist, a ser percorrido por s no sentido horário \odot .

Nessas condições e de acordo com o critério de Nyquist, o número de polos da função de transferência de malha fechada $G_f(s) = \frac{G_a(s)}{1+G_a(s)}$, resultante da realimentação unitária de $G_a(s)$, é Z , dado por

$$Z = N[-1, \odot] + P \quad (6.40)$$

em que $N[-1, \odot]$ é o número de enlaçamentos do ponto -1 pela curva $\Lambda = G_a(\Gamma)$.

Este resultado encontra-se apresentado de modo mais rigoroso no apêndice D.

Verificação intuitiva do critério de Nyquist

Considere uma função $f(s)$ mapeando um contorno fechado Γ que contém P polos (se p é polo $f(\hat{p}) \rightarrow \infty, \hat{p} \rightarrow p$) e Z zeros (se z é um zero, $f(z) = 0$), conforme ilustrado na figura 6.2.

À medida que s percorre o contorno fechado Γ em que há Z zeros e P polos no seu interior, a sua imagem $f(\Gamma)$ circunda a origem $N = Z - P$ vezes, em que N é contado $+$ se os sentido de percurso forem coincidentes $-$ e no caso contrário.

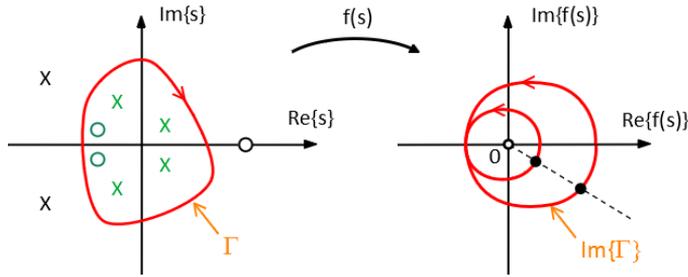


Figura 6.2: Verifica o intuitiva do Cr terio de Nyquist

Uma vez que a fun o de transferência de malha fechada G_f   dada por

$$G_f(s) = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)} \tag{6.41}$$

a condi o a ser testada   se o denominador de

$$f(s) = 1 + G_a(s) \tag{6.42}$$

possui zeros no SPE (lembrando que zeros de $1 + G_a(s)$ são os polos de $G_f(s)$). Na condi o representada por 6.40, verifica-se o enlaçamento do ponto -1 e tomando $f(s) = G_a(s)$ ao invés de se fazer $f(s) = 1 + G_a(s)$, que, em verdade,   uma simples transla o de 1.

Como s tais que $1 + G_a(s) = 0$ são os polos de malha fechada G_f , Z   associado ao polo de malha fechada, enquanto P   associado a polos de G_a , pois, se $G(s) \rightarrow \infty$, então $f(s) \rightarrow \infty$.

Como se deseja verificar se há polos de G_f no SPE, busca-se demarcar o SPD usando o contorno de Nyquist, ilustrado na figura 6.3.

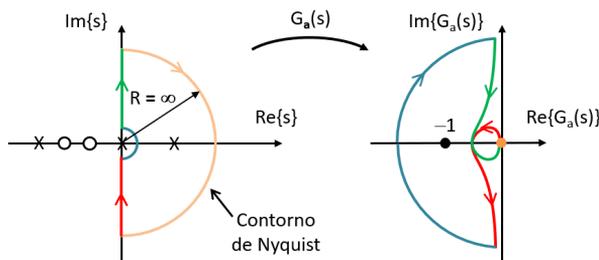


Figura 6.3: Mapeamento do contorno de Nyquist pela fun o de transferência de malha aberta $G_a(s)$, ilustrando os enla es do ponto crítico $(-1, 0)$.

No exemplo da figura 6.3, $P = 1$ (há um polo de malha aberta no SPD) e a imagem $G_a(\Gamma)$ está circundando o ponto crítico -1 uma vez no sentido concordante àquele do percurso do contorno de Nyquist.

Logo, $N[-1, \odot] = 1$.

Tem-se, portanto,

$$N = Z - P \quad (6.43)$$

$$1 = Z - 1 \quad (6.44)$$

e, conclui-se que Z (numero de polos de malha fechada) é 2 (ou, instável para ganhos K pequenos em $KG_a(s)$).

Por outro lado, se o ganho de malha (K) for aumentado, o ponto -1 será circundado 1 vez no sentido anti-horário, caso em que

$$N = Z - P \quad (6.45)$$

$$1 = Z - (-1) \quad (6.46)$$

resultando em $Z = 0$. (Fazendo-se uso das regras do método lugar geométrico das raízes, nota-se que, à medida de K aumenta, os zeros que estão no SPE atraem os ramos).

Caso a função de transferência de malha aberta possua polos imaginários puros ou polo na origem, o contorno deve ser acrescido de desvios infinitesimais, pois o contorno Γ não deve passar por singularidades.

Um método para o traçado da curva de Nyquist é esboçar antes as curvas de Bode, embora muitos prefiram um procedimento direto a partir das configurações de polos e zeros do processo. Além disso, é recomendável também verificar se o critério de estabilidade baseado na curva de Nyquist está compatível com o LGR (ou seja, o número de polos no semiplano direito informado pelo LGR é o mesmo daquele determinado pelo critério de Nyquist).

A seguir são apresentados alguns casos didáticos de aplicação do critério de Nyquist.

Exemplo - Caso simples de primeira ordem

A função de transferência, nesse caso, é da forma

$$G(s) = K \frac{1}{s + a} \quad (6.47)$$

e, portanto, considerando $s = j\omega$, um ramo começa para $\omega = 0$ no ponto $\frac{1}{a}$ e tende para a origem à medida que $\omega \rightarrow \infty$, aproximando com ângulo de -90°

(intuitivamente $\frac{1}{jM} \simeq -j\epsilon$, se M for muito grande, já que $jM + a \simeq jM$). Note-se que, para qualquer valor de $K > 0$, a imagem do contorno de Nyquist não enlaça o ponto crítico -1 , sendo, portanto, estável.

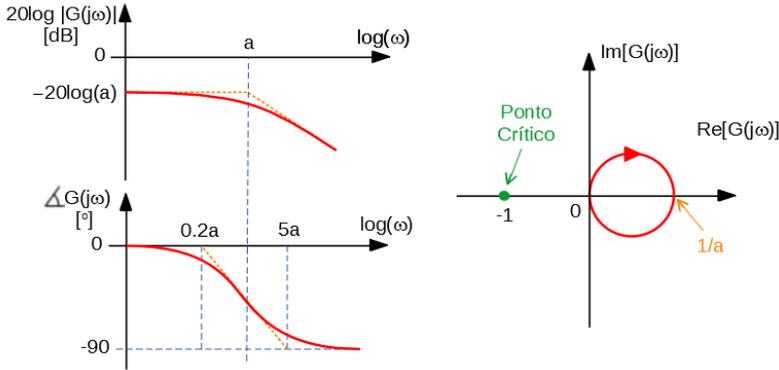


Figura 6.4: Curva de Nyquist correspondendo a um sistema de primeira ordem.

Exemplo - Polo na origem

Se a função de transferência possui um polo na origem $s = 0$, então o contorno de Nyquist deve incluir um pequeno desvio de modo que não inclua singularidades, já que na apresentação formal que utiliza o teorema de Cauchy não deve haver singularidades no contorno.

O contorno adaptado pode ser visto à esquerda da figura 6.5. No exemplo, a função de transferência é

$$G(s) = K \frac{1}{s(s + 1)(s + 2)} \tag{6.48}$$

e, portanto, se $s = j\omega = j\epsilon$, então $G(j\omega)$ tem como seu denominador, $j\epsilon(j\epsilon + 1)(j\epsilon + 2) \simeq 2j\epsilon$.

Ou seja, $|G(j\omega)| \simeq -jM$ com M “muito grande”.

Na figura à direita de 6.5, esse fato é representado pelo início do ramo no ponto A .

Para $\omega \rightarrow \infty$ tem-se que $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ aproximando-se da origem pelo ângulo de -270° , correspondendo a $\frac{1}{j^3}$.

Note-se que se o ganho K for aumentado, vai haver, eventualmente, o enlaçamento do ponto crítico -1 , significando que a partir de um certo valor de K o sistema será instável.

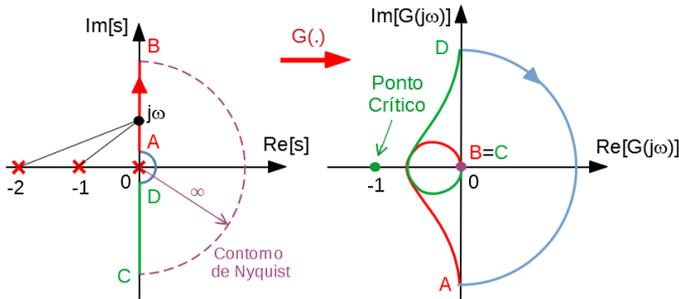


Figura 6.5: Curva de Nyquist correspondendo a um sistema de terceira ordem com um polo na origem.

Exemplo - Polo no semiplano direito

Considere o processo cuja função de transferência é

$$G(s) = K \frac{1}{s - 1} \tag{6.49}$$

que possui um polo no SPD em malha fechada para ganhos K pequenos.

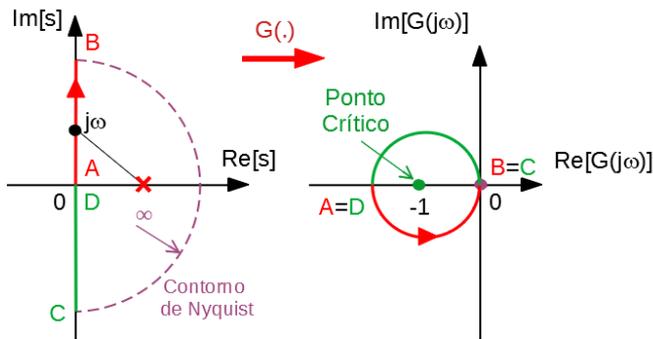


Figura 6.6: Curva de Nyquist correspondendo a um sistema com um polo no SPD.

Exemplo - Polos imaginários puros

Como o contorno de Nyquist não deve conter singularidades, é necessário que sejam introduzidos desvios em torno dos polos imaginários puros, conforme visto à esquerda da figura 6.7.

Uma das características desse tipo de sistema é que a imagem do contorno de

Nyquist pode apresentar assíntotas com ângulos diferentes de $k 90^\circ$, como   o caso na 6.7.

As letras A , B , C e D indicam a associa o entre os pontos notáveis no plano s e no plano $G(j\omega)$. Nota-se na figura 6.7 que o contorno de Nyquist foi

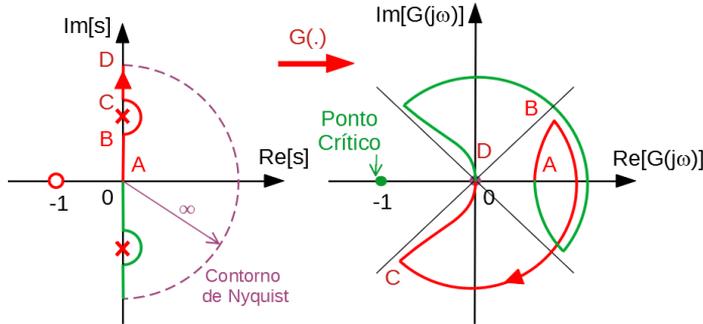


Figura 6.7: Curva de Nyquist correspondendo a um sistema que possui um par de polos no eixo imaginário.

modificado de modo a não conter singularidades.

Exemplo - Polo duplo na origem

Como visto anteriormente, quando se percorre k vezes um contorno Γ ao redor de p polos, a sua imagem através de $G(j\omega)$, às vezes denotado $G(\Gamma)$, percorre a origem de kp vezes (no sentido contrário).

Portanto, ao se percorrer o desvio com a forma de semicírculo (180°) em torno do polo duplo na origem, verifica-se que a sua imagem deve descrever 360° .

Tal situa o   ilustrada na figura 6.8, em que o semicírculo $D \rightarrow A$   mapeado no círculo $D \rightarrow A$.

6.0.8 Margens de fase e de ganho

Considerando-se a conveniência de trabalhar com a resposta em frequência, pode-se invocar o critério de Nyquist para incorporar especifica es de robustez quanto   perda de estabilidade, expresso por dois indicadores: margem de fase e margem de ganho.

Margem de ganho:   o inverso da magnitude do número complexo $G_{MA}(j\omega_0)$ quando ω_0   tal que $\angle G(j\omega_0) = -180^\circ$.

A margem de ganho representa o ganho adicional que ainda mant m o sistema estável, quando a malha for fechada com realimenta o unitária.

Margem de fase:   a quantidade de atraso de fase que pode ser introduzido na

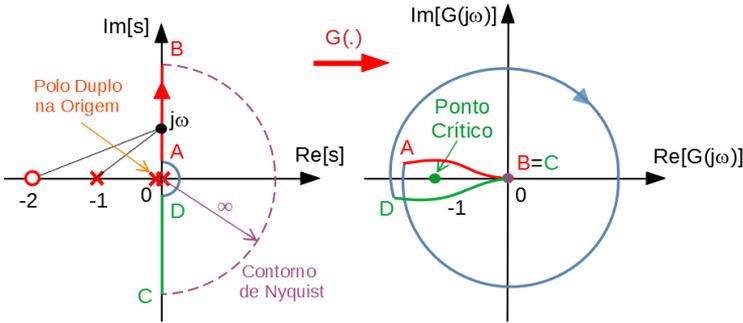


Figura 6.8: Curva de Nyquist correspondendo a um sistema que possui polo na origem de multiplicidade 2.

situação $|G_{MA}(j\omega_0)| = 1$, de modo que o sistema continua estável, quando a malha for fechada com realimentação unitária.

As margens de ganho e de fase podem ser obtidas graficamente das curvas de Nyquist, Bode e na carta de Nichols, como visto na figura 6.9.

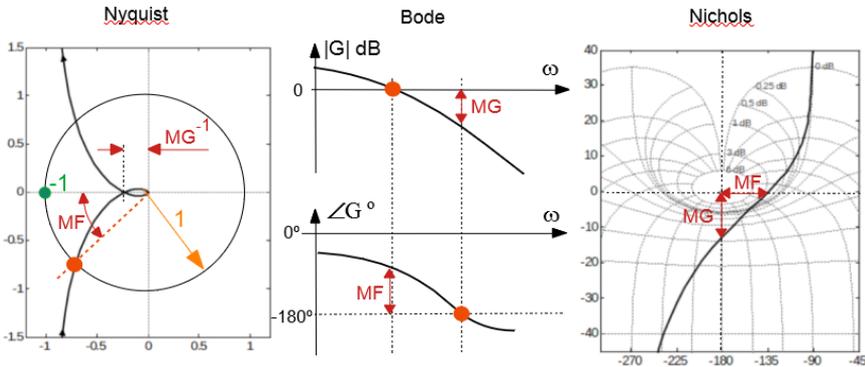


Figura 6.9: Leitura direta das margens de ganho e de fase das curvas de Nyquist, Bode e da carta de Nichols.

No caso de um sistema de segunda ordem caracterizado por (ξ, ω_n) , a condição $|G_{MA}(j\omega_0)| = 1$ ocorre para

$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\xi^4} - 2\xi^2} \tag{6.50}$$

e a margem de fase γ é dada por

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi^4} - 2\xi^2}} \tag{6.51}$$

Uma aproximação útil para γ (em graus) que vale para ξ pequeno é

$$\gamma = 100 \times \xi \tag{6.52}$$

6.1 BIBO - Estabilidade

Por simplicidade, admite-se aqui que o sistema é SISO (*Single Input, Single Output*), ou seja, C é $1 \times n$ e B é $n \times 1$, na equação de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{6.53}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{6.54}$$

Como visto anteriormente, a solução do sistema de equações diferenciais 6.54, para a condição $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, é dada por

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \tag{6.55}$$

No caso de ser ter uma entrada não nula mas limitada, ou seja,

$$|u(t)| \leq U_{\max} < \infty \tag{6.56}$$

tem-se que

$$y(t) = \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \tag{6.57}$$

Em cada instante de tempo t , nota-se que

$$|y(t)| = \left| \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \right| \tag{6.58}$$

$$\leq \int_0^t \left| \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau) \right| d\tau \tag{6.59}$$

$$\leq \int_0^t \left| \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}U_{\max} \right| d\tau \tag{6.60}$$

$$\leq \int_0^t \left| \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B} \right| d\tau U_{\max} \tag{6.61}$$

e, portanto, se

$$\int_0^t \left| \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B} \right| d\tau < M ; \forall t \geq 0 \tag{6.62}$$

a saída y será limitada

$$|y(t)| \leq M U_{\max} < \infty ; \forall t \geq 0 \tag{6.63}$$

Diz-se, nesse caso, que o sistema é BIBO estável (*Bounded Input Bounded Output*).

Lembrando que a resposta impulso é dada por $y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$, depreende-se de 6.62 que o sistema é BIBO estável se a resposta impulso é limitada, o que acontece se todos os autovalores de A estiverem no semiplano esquerdo.

A pertinência dos polos da função de transferência (ou os autovalores da matriz de sistema A) ao SPE é critério de estabilidade apenas para modelos LTI.

Se o sistema é linear mas variante no tempo (ou seja, não autônomo), esse critério não é aplicável. Embora seja simples obter através de métodos numéricos as raízes de um polinômio cujos coeficientes são numéricos, tal não acontece quando estes são literais.

Os métodos baseados em resposta em frequência (curvas de Bode, critério de Nyquist e cartas de Nichols) permitem a determinação das margens de ganho e de fase que se relacionam com o “grau” de estabilidade.

6.2 Algumas personalidades ilustres

1868 James Clerk Maxwell FRSE FRS (1831 Edimburgo-1879 Cambridge) apresenta o primeiro artigo com uma análise matemática rigorosa de um sistema de controle realimentado.

1877 Ivan Alekseevich Vyshnegradsky (1831-1895) publicou “O regulatoryakh pryamogo deystiva” (“On Direct-Action Regulators”), envolvendo condições de estabilidade para uma máquina a vapor com regulador centrífugo. A sua análise da estabilidade de reguladores utiliza enfoque de equações diferenciais e foi realizada independentemente de J. C. Maxwell.

1877 Edward John Routh (1831-1907) recebeu o Prêmio Adams pelo seu trabalho *A treatise on the stability of a given state of motion, particularly steady motion*, editado pela McMillan, London. Routh foi *Senior Wrangler* no *Mathematical Tripos* em que Maxwell ficou em segundo lugar. Routh orientou cerca de 700 alunos, dos quais 480 foram *Wranglers* dentre os 900 *Wranglers* dos 30 anos de sua carreira.

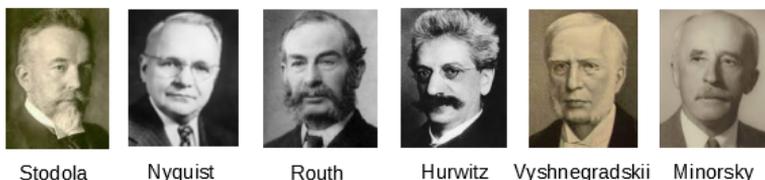
1895 Adolf Hurwitz (1859-1919) publica a obra *Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt*. *Mathematische Annalen*, v. 46, 1895, pp. 273-284.

1922 Nikolai Fyodorovich Minorsky (1885-1970) introduz o controlador de três termos, mais tarde popularizados como controladores PID. Resultados sobre

controle não linear estão contidos em *Introduction to non-linear mechanics: Topological methods, analytical methods, non-linear resonance, relaxation oscillations*, J.W. Edwards, 1947.

Aurel Boleslaw Stodola (1859-1942) estudou o problema de regula o de turbinas de água em Stodola, A. B. Über die Regulierung von Turbinen. *Schweizerische Bauzeitung*, v. 2, n. 17, 1893, pp. 113-117.

1932 Harry Nyquist (1889-1976) propõe a teoria da regenera o e apresenta o critério de estabilidade de Nyquist. Os conceitos de margem de fase de ganho decorrem desse critério de estabilidade.



6.3 Exercícios

6.3.1 Exercício: Critério de Routh-Hurwitz

Estudar o comportamento quanto   estabilidade, em fun o do parâmetro $K \in (0, \infty)$:

1.

$$G(s) = \frac{Ks}{s^2 - 2s + 2} \tag{6.64}$$

2.

$$G(s) = K \frac{(s + 1)(s + \sqrt{3})}{(s - 1)(s^2 + 1)} \tag{6.65}$$

3.

$$G(s) = K \frac{(s + 1)(s + 2)}{s(s - 1)(s + 3)} \tag{6.66}$$

4.

$$G(s) = K \frac{s + 2}{s^2 - 1} \tag{6.67}$$

5.

$$G(s) = \frac{Ks}{s^2 + 2s + 2} \tag{6.68}$$

6.

$$G(s) = K \frac{s+1}{s^2+1} \quad (6.69)$$

7.

$$G(s) = K \frac{(s+1) [(s+1)^2+1]}{s(s-1)(s^2+1)} \quad (6.70)$$

8.

$$G(s) = K \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s^2+2)} \quad (6.71)$$

9.

$$G(s) = K \frac{(s+a)}{s^2(s+b)} \quad (6.72)$$

para os casos $a > b > 0$, $b > a > 0$ e $ab < 0$

10.

$$G(s) = K \frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(s^2+1)^2} \quad (6.73)$$

11.

$$G(s) = K \frac{(s+2)^2}{s(s-1)} \quad (6.74)$$

12.

$$G(s) = K \frac{(s+1)^2}{s^4} \quad (6.75)$$

13.

$$G(s) = K \frac{(s+1)^2}{s^3} \quad (6.76)$$

14.

$$G(s) = K \frac{(1-s)}{(s+1)(s+10)} \quad (6.77)$$

15.

$$G(s) = K \frac{(s+1)^2}{s(s^2-2s+2)} \quad (6.78)$$

16.

$$G(s) = K \frac{(s+5)(s+40)}{s^3(s+100)(s+200)} \quad (6.79)$$

17.

$$G(s) = K \frac{(s^2 + 2s + 5)}{s(s+4)(s+5)(s+1)^2} \quad (6.80)$$

18.

$$\frac{K(s+1)^2}{s^3(s+6)^2} \quad (6.81)$$

19.

$$G(s) = K \frac{(5-s)}{(s+1)(0.2s+1)} \quad (6.82)$$

20.

$$G(s) = \frac{K(s+1)^2}{s^3} \quad (6.83)$$

21.

$$G(s) = \frac{K(1-s)}{(s+1)(s+2)} \quad (6.84)$$

22.

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^3 + 3s^2 + 12s - 16)} \quad (6.85)$$

23.

$$G(s) = \frac{K}{s(s-1)} \quad (6.86)$$

24.

$$G(s) = \frac{K(1-s)e^{-0.1s}}{s(s+1)} \quad (6.87)$$

6.3.2 Exercício: Polinômios de Hurwitz

Determinar os valores de K para que as equações possuam raízes com a parte real negativa

a)

$$s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \quad (6.88)$$

b)

$$s^3 + (5+K)s^2 + 7s + 18 + 9K = 0 \quad (6.89)$$

c)

$$s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 4 = 0 \quad (6.90)$$

6.3.3 Exercício: Sistema realimentado PD

Considere um sistema descrito pela equação diferencial ordinária

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = u \quad (6.91)$$

a ser controlado segundo

$$u = -K_P y - K_D \frac{dy}{dt} \quad (6.92)$$

Usando o critério de Routh-Hurwitz, indicar graficamente a região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de modo que o sistema realimentado seja estável para $(K_P, K_T) \in \Omega$. Observação: Esse sistema se refere a uma estrutura de controle de uma planta com realimentação tacométrica)

6.3.4 Exercício: Estudo de estabilidade

Verificar se a função de transferência em malha aberta dada em 6.93 é estável, em malha fechada com realimentação unitária, para algum valor de $K \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{Z}$.

$$G(s) = K \frac{\prod_{\ell=1}^{2N} (s + \ell)}{s \prod_{k=1}^N [(s + k)^2 + k^2]} \quad (6.93)$$

6.3.5 Exercício: Estabilidade em malha fechada

Determinar quais são os valores do ganho $K > 0$ tais que o processo descrito por $G(s)$ seja estável quando operado em malha fechada com ganho unitário na realimentação:

(a)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^3 + Ks^2 + 2Ks + K} \quad (6.94)$$

(b)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5(1-s)}{s^4 + 2s^3 + Ks^2 + 4Ks - 5K} \quad (6.95)$$

(c)

$$G(s) = K \frac{(s^2 + 2s + 5)}{s(s+4)(s+5)(s+1)^2} \quad (6.96)$$

6.3.6 Exercício: Critério de Nyquist

Assumindo que o sistema será operado em malha fechada com realimentação unitária ($H(s) = 1$), analisar a estabilidade utilizando o critério de Nyquist:

1.

$$G(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+1)} \quad (6.97)$$

2.

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 10} \quad (6.98)$$

3.

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s^2+4)} \quad (6.99)$$

4.

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s-1)} \quad (6.100)$$

5.

$$G(s) = \frac{K(s+1)^2}{s^3(s+4)^2} \quad (6.101)$$

6.

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+2)(s^2+4)} \quad (6.102)$$

7.

$$G(s) = \frac{K(s^2+1)}{s(s+1)(s+2)} \quad (6.103)$$

6.3.7 Exercício: Critério de Kharitonov

Considere a família de modelos descritos por

$$\Delta(s) = s^5 + a_1s^4 + a_2s^3 + a_3s^2 + a_4s + a_5 \quad (6.104)$$

Verificar se todos os membros dessa família de modelos incertos são estáveis:

1. $\Delta(s) = s^5 + a_1s^4 + a_2s^3 + a_3s^2 + a_4s + a_5$ em que

$$a_1 = [1; 1.1] \quad (6.105)$$

$$a_2 = [8; 8] \quad (6.106)$$

$$a_3 = [24; 24] \quad (6.107)$$

$$a_4 = [32; 32] \quad (6.108)$$

$$a_5 = [20; 20] \quad (6.109)$$

$$a_6 = [4; 4] \quad (6.110)$$

6.3.8 Exercício: Critério de Kharitonov

Considere a família de modelos descritos por

$$\Delta(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \quad (6.111)$$

Qual o maior valor da incerteza α admissível para que essa família de modelos permaneça estável?

$$a_1 = 6 \quad (6.112)$$

$$a_2 = 11 \quad (6.113)$$

$$a_3 = 6 \pm \alpha \quad (6.114)$$

$$(6.115)$$

6.3.9 Exercício: Margens de Fase e de Ganho

Determinar os valores das margens de ganho e de fase:

1.

$$G(s) = 12 \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

2.

$$G(s) = 12 \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

3.

$$G(s) = 12 \frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+4)(s+5)}$$

6.3.10 Exercício: Estabilidade de sistema com atraso

Considere um sistema com atraso de transporte descrito por

$$G(s) = \frac{e^{-Ts}}{s+1} \quad (6.116)$$

Qual é o máximo valor admissível para T de modo que o sistema, ao ser realimentado unitariamente, ainda seja estável?
