

4

Modelos de tempo discreto

“The events in our lives happen in a sequence in time, but in their significance to ourselves they find their own order the continuous thread of revelation.”

– Eudora Welty

Um exemplo típico de sistemas de tempo discreto, doravante referido apenas como *sistemas discretos*, é a caderneta de poupança.

Seja $p[k]$ o recurso que um poupador possui em um certo banco, no mês k .

A dinâmica de $p[k]$ pode ser representada por

$$p[k + 1] = (1 + \rho) p[k] + d[k] - r[k]$$

em que ρ é a taxa de juros + correção monetária, $d[k]$ são os depósitos e $r[k]$ os resgates.

Ainda que os sistemas discretos sejam utilizados em uma ampla gama de aplicações, aqui o foco será o controle por computador.

4.1 Equações a diferenças

Um sistema discreto pode ser modelado por uma equação a diferenças com recorrência, ou seja, os valores presentes da grandeza de interesse ($y[k]$) dependem dos seus valores anteriores e das excitações (entradas) $u[k]$

$$y[k] = f(y[k - 1], y[k - 2], \dots, y[k - n], u[k], u[k - 1], u[k - 2], \dots, u[k - m], k) \quad (4.1)$$

O maior atraso em y é a ordem da equação a diferenças, no caso, n .

Um exemplo de um sistema discreto (não linear) é

$$y[k] = y[k-1]^3 y[k-2] + k \sin(2\pi y[k-1]) \quad (4.2)$$

Assim como no caso de EDO, o modelo é dito linear e invariante no tempo (LTI) se f é linear e não depende de k , ou seja, é da forma

$$y[k] = \underbrace{-a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] - \dots - a_n y[k-n]}_{\text{AR}} + \underbrace{+b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + b_2 u[k-2] + \dots + b_m u[k-m]}_{\text{MA}} \quad (4.3)$$

em que $a_i \in R$ e $b_j \in R$ são constantes, $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

Na expressão do modelo, uma parte do valor de $y[k]$ é a combinação dos valores anteriores de $y[\cdot]$ (autorregressão, *auto-regression* - AR), enquanto uma outra é a combinação dos valores recentes de $u[\cdot]$ em uma janela de tempo (média móvel dos últimos valores de $u[i]$, *moving-average* - MA).

Modelos nessa forma são muitas vezes referidas como *ARMA* (*Auto-Regressive Moving Average*).

Denotando o operador atrasador por q^{-1} , o modelo pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} y[k] &+ a_1 q^{-1} y[k] + a_2 q^{-2} y[k] + \dots + a_n q^{-n} y[k] \\ &= b_0 u[k] + b_1 q^{-1} u[k] + \dots + b_m q^{-m} u[k] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Definindo-se os polinômios

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_n q^{-n} \quad (4.5)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_m q^{-m} \quad (4.6)$$

o modelo de um sistema discreto pode ser expresso de modo compacto

$$A(q^{-1})y[k] = B(q^{-1})u[k] \quad (4.7)$$

4.1.1 Modelos no espaço de estados

Uma equação a diferenças de ordem n pode ser reescrita como n equações de ordem 1.

Para ilustrar o processo, considere o caso particular de $n = 4$ e $b_0 = 0$

$$\begin{aligned} y[k] &= -a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] - a_3 y[k-3] - a_4 y[k-4] + \\ &+ b_1 u[k-1] \end{aligned} \quad (4.8)$$

A condição $b_0 = 0$ significa que não há resposta instantânea $y[k]$ a uma excitação $u[k]$.

Seja o vetor $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1[k] & \mathbf{x}_2[k] & \mathbf{x}_3[k] & \mathbf{x}_4[k] \end{bmatrix}^T$, obtido mediante a associação

$$\mathbf{x}_1[k] = y[k-3]; \mathbf{x}_2[k] = y[k-2]; \mathbf{x}_3[k] = y[k-1]; \mathbf{x}_4[k] = y[k] \quad (4.9)$$

Por inspeção, constata-se que

$$\mathbf{x}_1[k] = y[k-3] = \mathbf{x}_2[k-1] \quad (4.10)$$

$$\mathbf{x}_2[k] = y[k-2] = \mathbf{x}_3[k-1] \quad (4.11)$$

$$\mathbf{x}_3[k] = y[k-1] = \mathbf{x}_4[k-1] \quad (4.12)$$

$$\mathbf{x}_4[k] = y[k] \quad (4.13)$$

$$= -a_1y[k-1] - a_2y[k-2] - a_3y[k-3] - a_4y[k-4] + b_1u[k-1] \quad (4.14)$$

em que a última linha pode ser reescrita substituindo-se y por x ou

$$\mathbf{x}_4[k] = -a_1\mathbf{x}_4[k-1] - a_2\mathbf{x}_3[k-1] - a_3\mathbf{x}_2[k-1] - a_4\mathbf{x}_1[k-1] + b_1u[k-1] \quad (4.15)$$

Em notação matricial, tem-se que

$$\mathbf{x}[k] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}[k-1] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u[k-1] \quad (4.16)$$

$$y[k] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}[k] \quad (4.17)$$

Observação: Caso $b_0 \neq 0$, adiciona-se $b_0u[k]$ na expressão da saída $y[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + b_0u[k]$ ou $y[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}u[k]$.

A equação de estado é de recorrência,

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}u[k] \quad (4.18)$$

e dadas

1. a condição inicial $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$ e

2. a sequência de entradas $\{u[0], \dots, u[k-1]\}$

é imediato obter a expressão para um termo genérico $\mathbf{x}[k]$ na forma fechada

$$\mathbf{x}[1] = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}u[0] \quad (4.19)$$

$$\mathbf{x}[2] = \mathbf{A}\mathbf{x}[1] + \mathbf{B}u[1] = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}u[0] + \mathbf{B}u[1] \quad (4.20)$$

$$\mathbf{x}[3] = \mathbf{A}\mathbf{x}[2] + \mathbf{B}u[2] = \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^2\mathbf{B}u[0] + \mathbf{A}\mathbf{B}u[1] + \mathbf{B}u[2] \quad (4.21)$$

⋮

$$\mathbf{x}[4] = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i}\mathbf{B}u[i] \quad (4.22)$$

Exemplo de resposta a uma sequência degrau

Considere o modelo de tempo discreto

$$\mathbf{x}[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.6 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k] \quad (4.23)$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] \quad (4.24)$$

A resposta à sequência $u[k] = 1 \forall k$ encontra-se ilustrada na figura 4.1.

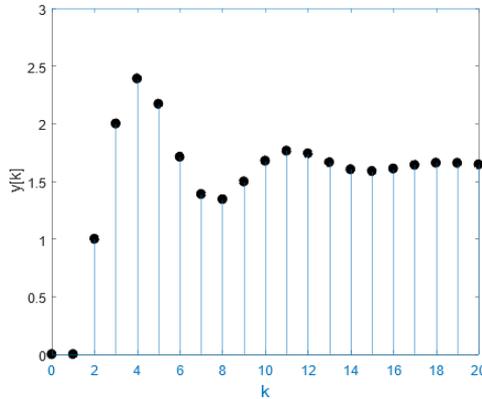


Figura 4.1: Exemplo de resposta degrau de um sistema discreto. O Eixo da abscissa é o conjunto de números naturais.

4.1.2 Estabilidade de modelos discretos

Em vista de se ter

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 \quad (4.25)$$

o modelo será estável se $|\lambda_i(\mathbf{A}_{n \times n})| < 1$; $i = 1, 2, \dots, n$ ou, em outras palavras, se todos os autovalores de \mathbf{A} estiverem contidos no círculo unitário no plano complexo.

Se a saída de interesse é dada por $y[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k]$, então

$$y[k] = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B}u[i] \quad (4.26)$$

e, para $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ e entrada tipo pulso unitário (delta de Kronecker),

$$u[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

tem-se que a resposta é

$$y[k] \Big|_{u[k]} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \quad (4.28)$$

Pode-se verificar que o modelo é BIBO estável se a resposta a pulso é limitada.

Seja entrada limitada $|u[k]| < M_1$, $0 < M_1 < \infty$. A saída correspondente é

$$\left| y[k] \right| = \left| \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B}u_i \right| \quad (4.29)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left| \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B} \right| M_1 \quad (4.30)$$

Se a resposta impulso é limitada, $\left| \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B} \right| < M_2$, $0 < M_2 < \infty$, então

$$\left| y[k] \right| \leq \sum_{i=0}^{k-1} M_2 M_1 = k M_2 M_1 < \infty \quad (4.31)$$

4.1.3 Controlabilidade de modelos discretos

A verificação da controlabilidade é imediata, pois se a ordem do modelo é n e são dados \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_f , respectivamente o ponto inicial e o final desejados,

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}u[0] + \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{B}u[1] + \dots + \mathbf{A} \mathbf{B}u[n-2] + \mathbf{B}u[n-1] \quad (4.32)$$

de modo que se

$$\rho \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{array} \right] = n \quad (4.33)$$

pode-se determinar a lei de controle desejada $\{u[0], u[1], \dots, u[n-1]\}$.

Porém, deve se ter cuidado, pois, por definição, controlabilidade se refere à capacidade de levar qualquer estado \mathbf{x}_0 à origem.

O modelo, $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{0}_{n \times n} \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_{n \times 1} u[k]$, segundo essa definição é controlável (logo, o termo atingibilidade é preferível em alguns casos).

4.1.4 Observabilidade

A verificação da observabilidade (capacidade de determinar \mathbf{x}_0 a partir de medidas $y[i]$, $i = 1, 2, \dots, n$) também é imediata.

Por simplicidade, seja $\{u[i]\} \equiv 0$ e assuma que são fornecidas n medições,

$$y[0] = \mathbf{C}\mathbf{x}_0 \quad (4.34)$$

$$y[1] = \mathbf{C}\mathbf{x}[1] = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \quad (4.35)$$

$$\vdots$$

$$y[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}_0 \quad (4.36)$$

Assuma que o posto

$$\rho \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Nesse caso, imediatamente,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[n-1] \end{bmatrix}$$

Em princípio, para obter o valor de $\mathbf{x}[k]$ de um modelo de ordem n , observável, basta que se disponha de n medições da saída, $\{y[k], \dots, y[k+n-1]\}$.

Porém, uma forma mais prática de se obter uma estimativa do estado é através do uso de *observadores de estados*.

Observadores de estados são também conhecidos como Estimadores de Estado ou ainda como Observadores de Luenberger.

Nota-se que os modelos de estados no tempo contínuo e no tempo discreto são muito semelhantes. Enquanto no tempo contínuo tem-se e^{At} , no caso discreto tem-se A^k . O efeito da excitação u continua sendo via convolução com integração \int no caso contínuo e somatória \sum no caso discreto. A região de estabilidade é o semiplano esquerdo no caso contínuo e o círculo unitário no caso discreto. Os testes de controlabilidade e de observabilidade são idênticos.

4.2 Transformadas Z

A solução de equações diferenciais ordinárias invariantes no tempo que modelam processos LTI pode ser estudada com o uso de transformada de Laplace.

No caso de processos de tempo discreto, modelado por equações a diferenças, utiliza-se a transformada \mathcal{Z} .

Dada uma sequência $\{f[k]\}_{k=0,1,2,\dots}$ a transformada \mathcal{Z} (convencionou-se, usualmente, denotar $\mathcal{Z}[f[k]]$ por $F(z)$) é definida por

$$\mathcal{Z}[f[k]] = \sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k} \quad (4.37)$$

O conceito de funções geradoras era conhecido há longa data (de Moivre, 1730) e foi reintroduzido em 1947 por Witold Hurewicz, sendo batizado de transformada \mathcal{Z} por Ragazzini, J.R. e Zadeh, L.A. da Universidade de Columbia em 1952.

Exemplo: Transformada de degrau discreto

$$u[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Diretamente da definição de transformada \mathcal{Z}

$$U(z) = 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \dots \quad (4.39)$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (4.40)$$

$$= \frac{z}{z - 1} \quad (4.41)$$

Os modos mais simples para obter a transformada inversa de $F(z)$ é a divisão longa e expansão em frações parciais, embora exista a fórmula de inversão.

4.2.1 Propriedades da transformada Z

Embora existam muitas propriedades da transformada Z, restringe-se aqui àquelas mais utilizadas na Teoria de Controle.

- **Linearidade:** $\mathcal{Z}[\alpha f[k] + \beta g[k]] = \alpha F(z) + \beta G(z)$
- **Deslocamento no tempo:** $\mathcal{Z}[f[k+1]u[k]] = zF(z) - zf[0]$.

Em geral, propriedades de transformada Z são facilmente verificadas diretamente.

No caso, considere as sequências

$$f[k] = f[0], f[1], f[2], \dots \quad (4.42)$$

$$\hat{f}[k] = f[1], f[2], f[3], \dots \quad (4.43)$$

Constata-se imediatamente que

$$F(z) = \mathcal{Z}[f[k]] \quad (4.44)$$

$$= f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + f[3]z^{-3} \dots \quad (4.45)$$

$$zF(z) = zf[0] + f[1] + f[2]z^{-1} + f[3]z^{-2} \dots \quad (4.46)$$

$$\hat{F}(z) = \mathcal{Z}[\hat{f}[k]] \quad (4.47)$$

$$= f[1] + f[2]z^{-1} + f[3]z^{-2} \dots \quad (4.48)$$

e, logo por inspeção, $\hat{F}(z) = zF(z) - zf[0]$.

- **Transformada da potenciação:**

$$\mathcal{Z}[a^k] = a^0 z^{-0} + a^1 z^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \quad (4.49)$$

$$= 1 + (az^{-1}) + (az^{-1})^2 + \dots \quad (4.50)$$

$$= \frac{z}{z-a} \quad (4.51)$$

- **Teorema do valor final:**

$$f_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

- **Transformada da convolução:** $(f * g)[k] = F(z)G(z)$

Mais detalhes, outras propriedades e tabela de transformadas Z podem ser encontradas, por exemplo, em (HEMERLY, 1996), (CADZOW; MARTENS, 1970), (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1986) e muitos outros textos.

4.3 Modelo no domínio z

Considere um modelo no espaço de estados

$$\mathbf{x}[k + 1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}u[k] \quad ; \quad y[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] \quad (4.52)$$

Aplicando-se a transformada \mathcal{Z} , tem-se que

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x}[k]] = \mathcal{Z}[\mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}u[k]] \quad (4.53)$$

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}U(z) \quad (4.54)$$

ou seja,

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(z) \quad (4.55)$$

Lembrando que $y = \mathbf{C}\mathbf{x}$, tem-se que $Y(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z)$ e o modelo é descrito no domínio transformado por

$$Y(z) = \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + \underbrace{\mathbf{C} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}}_{G(z)} U(z) \quad (4.56)$$

obtendo-se, como no caso de tempo contínuo, a função de transferência $G(z)$

$$G(z) = \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (4.57)$$

Exemplo de função de transferência

Considere o modelo de tempo discreto

$$\mathbf{x}[k + 1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & 0.9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u[k] \quad (4.58)$$

$$y[k] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}[k] \quad (4.59)$$

Tem-se imediatamente que

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (4.60)$$

$$= \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (4.61)$$

$$= \frac{z + 1}{z^2 - 0.9z + 0.2} \quad (4.62)$$

4.4 Transformada inversa de Z

Dadas a função de transferência $G(z)$ e uma entrada $U(z)$, tem-se imediatamente que a saída, no domínio transformado, é dada por

$$Y(z) = G(z)U(z) \quad (4.63)$$

assumindo condições iniciais nulas.

Para obter a sequência de saída $y[k] = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$, pode-se utilizar o mesmo método apresentado no caso de tempo contínuo, ou seja, expansão em frações parciais com termos típicos:

- $\mathcal{Z}^{-1}[\delta[k]] = 1$ (delta de Kronecker)
- $\mathcal{Z}^{-1}[u[k]] = \frac{1}{1-z^{-1}}$ (degrau unitário)
- $\mathcal{Z}^{-1}[a^k u[k]] = \frac{1}{1-az^{-1}}$
- $\mathcal{Z}^{-1}[ka^k u[k]] = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
- $\mathcal{Z}^{-1}[\cos(k\omega)u[k]] = \frac{1-z^{-1}\cos(\omega)}{1-2z^{-1}\cos(\omega)+z^{-2}}$
- $\mathcal{Z}^{-1}[\sin(k\omega)u[k]] = \frac{z^{-1}\sin(\omega)}{1-2z^{-1}\cos(\omega)+z^{-2}}$

Exemplo

Seja um processo cuja função de transferência é $G(z) = \frac{1}{z^2 - 0.3z - 0.1}$ e a entrada $u[k]$ é um degrau unitário.

Lembrando que $\mathcal{Z}[u[k]] = \frac{z}{z-1}$, tem-se que

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 - 0.3z - 0.1} \frac{z}{z-1} \quad (4.64)$$

$$= \frac{z}{(z-0.5)(z+0.2)(z-1)} \quad (4.65)$$

$$= \frac{-1.4286}{z-0.5} + \frac{-0.2381}{z+0.2} + \frac{1.6667}{z-1} \quad (4.66)$$

Pela tabela, $\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z-a}$, de modo que

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] \quad (4.67)$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{-1.4286}{z-0.5} + \frac{-0.2381}{z+0.2} + \frac{1.6667}{z-1}\right] \quad (4.68)$$

$$= -1.4286z(0.5)^{k-1} - 0.2381z(-0.2)^{k-1} + 1.6667 \quad k \geq 1 \quad (4.69)$$

Pausa para relembrar conceitos importantes: No caso contínuo, utilizava-se a transformada de Laplace e no caso discreto a transformada z. Nota-se que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} d\tau$ enquanto $\mathcal{Z}\{f[k]\} = \sum_{i=0}^\infty f[i]z^i$, de modo que se observa, novamente, exponenciação e integração no caso contínuo e potenciação e somatória no caso discreto.

4.5 Alguns textos históricos

John Ralph Ragazzini (1912-1988) é considerado o pioneiro na área de sistemas de controle para modelos de tempo discreto.

Junto com Lotfi Aliasker Zadeh (1921-2017), apresentado mais à frente na seção que trata de conjuntos nebulosos, propôs, em 1952, a transformada \mathcal{Z} .

Entre os livros mais antigos sobre controle de modelos discretos estão:

- Ragazzini, J. R. e Zadeh, L. A. The analysis of sampled-data system. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry*, v. 71, n. 5, p. 225-234, 1952.
- Jury E. I. *Theory and Application of the Z-Transform Method*. John Wiley and Sons, 1964.



Figura 4.2: J. R. Ragazzini.

4.6 Exercícios

4.6.1 Exercício: Sequência de Fibonacci

Considere a equação a diferenças (que gera a sequência de Fibonacci)

$$u[k] = u[k-1] + u[k-2] \quad (4.70)$$

$$u[0] = 0 \quad (4.71)$$

$$u[1] = 1 \quad (4.72)$$

Escrever o termo geral na forma

$$u[k] = \alpha_1 \lambda_1^k + \alpha_2 \lambda_2^k \quad (4.73)$$

4.6.2 Exercício: Resposta à condição inicial

Obter uma expressão para o termo genérico $y[k]$

$$y[k] + 0.3y[k-1] - 0.4y[k-2] = 0 \quad (4.74)$$

$$y[0] = 1 \quad (4.75)$$

$$y[1] = -1 \quad (4.76)$$

4.6.3 Exercício: Resposta à entrada delta de Kronecker

Obter uma expressão para o termo genérico $y[k]$ de

$$y[k] + 0.3y[k-1] - 0.4y[k-2] = u[k-1] \quad (4.77)$$

$$y[0] = 0 \quad (4.78)$$

$$y[1] = 0 \quad (4.79)$$

sabendo-se que a excitação é caracterizada por

$$u[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (4.80)$$

4.6.4 Exercício: Resposta à excitação degrau

Obter uma expressão para o termo genérico $y[k]$, sabendo-se que $u[k] = 1, \forall k \geq 0$

$$y[k] + 0.3y[k-1] - 0.4y[k-2] = u[k-1] \quad (4.81)$$

$$y[0] = 0 \quad (4.82)$$

$$y[1] = -0 \quad (4.83)$$

4.6.5 Exercício: Resposta à excitação rampa

Obter uma expressão para o termo genérico $y[k]$, sabendo-se que $u[k] = k, \forall k \geq 0$ (Entrada u tipo rampa)

$$y[k] + 0.3y[k-1] - 0.4y[k-2] = u[k-1] \quad (4.84)$$

$$y[0] = 1 \quad (4.85)$$

$$y[1] = -1 \quad (4.86)$$

4.6.6 Exercício: Resposta à condição inicial

Obter uma expressão para o termo genérico $y[k]$

$$y[k] + y[k-1] + 0.5y[k-2] = 0 \quad (4.87)$$

$$y[0] = 1 \quad (4.88)$$

$$y[1] = -1 \quad (4.89)$$

4.6.7 Exercício: Transformada inversa em Z

Obter $e[k]$ aplicando a transformada inversa em Z

1.

$$E(z) = \frac{z(z-1)}{z^2 - 1.25z + 0.25}$$

2.

$$E(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 1}$$

3.

$$E(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$$

4.

$$E(z) = \frac{0.5z}{(z-1)(z-0.5)}$$

5.

$$E(z) = \frac{0.5}{(z-1)(z-0.5)}$$

6.

$$E(z) = \frac{0.5(z+2)}{(z-1)(z-0.5)}$$

7.

$$E(z) = \frac{0.5}{(z+0.5)(z-0.5)^2}$$

8.

$$E(z) = \frac{0.5(z+0.5)}{(z-0.5)^3}$$

4.6.8 Exercício: Espaço de estados

Colocar na forma de espaço de estados,

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}u[k] \quad (4.90)$$

$$y[k] = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (4.91)$$

as seguintes equações a diferenças

$$1. y[k] - 1.5y[k-1] + 0.56y[k-2] = u[k-1]$$

$$2. y[k] + y[k-1] + y[k-2] + y[k-3] = 5u[k-1]$$

$$3. y[k] - 1.5y[k-1] + 0.56y[k-2] = u[k-1] + 0.2u[k-2]$$

4.6.9 Exercício: Função de transferência discreta

Obter a função de transferência $Y(z)/U(z)$ a partir da equação a diferenças

$$1. y[k] - 3y[k-1] + 2y[k-2] = 2u[k-1]$$

$$2. y[k] - 1.5y[k-1] - 0.56y[k-2] = 2u[k-1] - 1.12u[k-2]$$

4.6.10 Exercício: Função de transferência discreta

Obter a função de transferência $T(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$:

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & -0.4 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k-1] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u[k-1] \quad (4.92)$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] \quad (4.93)$$

4.6.11 Exercício: Estabilidade

Indicar para que valores de α os seguintes modelos são estáveis:

$$1. G(z) = \frac{z}{z^2 - \alpha^2}$$

$$2. G(z) = \frac{z - \alpha}{z + \alpha}$$

$$3. y[k] - 0.7y[k-1] + \alpha y[k-2] = u[k-1]$$

$$4. y[k] - 0.7y[k-1] + \alpha y[k-2] = u[k-1] - 2u[k-2]$$