

## **Parte II**

# **Modelos de sistemas dinâmicos**

# 3

## Modelos dinâmicos

*“All models are wrong, but some are useful.”*

– George Box

Modelos são representações das características essenciais do fenômeno em estudo. Por exemplo, maquetes podem ser utilizadas por arquitetos para estudar uma nova obra. Um farmacologista pode usar o camundongo como modelo para estudar os efeitos de um novo medicamento. Um pintor pode utilizar bonecos articulados como modelo para compor um novo quadro.

Considerando o objetivo deste livro de tratar a análise e o projeto de sistemas de controle de modo quantitativo, os modelos requeridos são do tipo matemático.

Os modelos matemáticos utilizados aqui são predominantemente aqueles constituídos por equações diferenciais ordinárias determinísticas de dimensão finita e invariantes com o tempo.

Porém, na prática, os sistemas físicos podem apresentar fenômenos tais como não linearidades, variações espacialmente distribuídas, atrasos nas respostas, perturbações aleatórias e parâmetros que variam com o tempo, entre outras possibilidades.

Logo, algumas simplificações podem ser necessárias:

1. Sistemas em que as grandezas de interesse dependem simultaneamente do tempo e a posição no espaço, modeladas por equações diferenciais parciais, são aproximados por modelos com *parâmetros concentrados*. Por exemplo, as tensões  $v(t, x)$  e correntes  $i(t, x)$  para cada posição  $x$  ao

longo de uma linha de transmissão em cada instante  $t$  são dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x}v(t, x) = -L\frac{\partial}{\partial t}i(t, x) - Ri(t, x) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}i(t, x) = -C\frac{\partial}{\partial t}v(t, x) - Gv(t, x) \quad (3.2)$$

em que  $R$  [ $\Omega/km$ ],  $L$  [ $mH/km$ ],  $C$  [ $nF/km$ ], e  $G$  [ $\mu S/km$ ] são respectivamente a resistência, indutância, capacitância e condutância por comprimento do segmento da linha. Uma aproximação seria cascatear vários módulos ( $R, L, C, G$ ) de parâmetros concentrados, cada uma modelando, por exemplo,  $1 km$  da linha.

Quando as frequências envolvidas de  $v$  e  $i$  são baixas, o comprimento de onda pode ser muito maior que o comprimento da linha, caso em que  $v$  e  $i$  seriam iguais em qualquer trecho da linha.

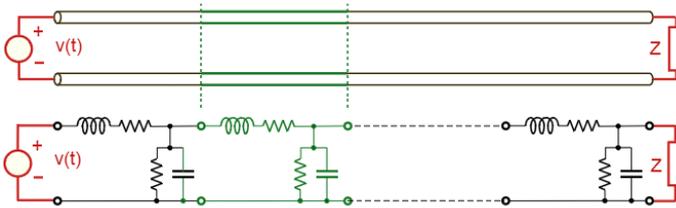


Figura 3.1: Aproximação por um modelo de parâmetros concentrados.

Em casos de processos que envolvem vibração, é frequente o uso do método de decomposição em modos.

No caso mais simples de uma viga homogênea engastada em um extremo e livre no outro, o movimento é descrito por

$$EI\frac{\partial^4 y(t, x)}{\partial x^4} = -\rho A\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade,  $I$  o momento de inércia,  $\rho$  a densidade do material da viga e  $A$  a área da seção transversal. Os modos de vibração, nesse caso, podem ser vistos na figura 3.2.

- Quando o modelo do sistema varia com o tempo, os parâmetros da equação diferencial também variam com o tempo. Se a variação é periódica e de frequência elevada, poderá ser utilizado o modelo médio. Um exemplo é o caso de fontes chaveadas, em que a frequência de chaveamento é muito maior do que as constantes de tempo do restante do circuito. Em um outro processo, a variação pode ser muito lenta em comparação

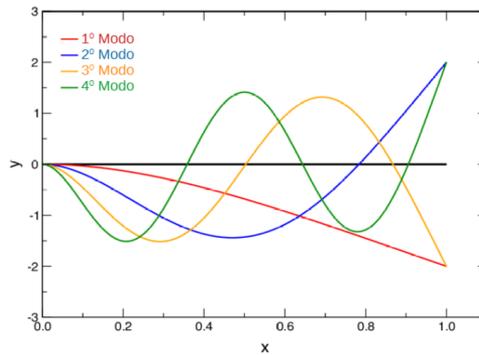


Figura 3.2: Estudo de modelos a parâmetros distribuídos mediante decomposição de modos. No caso, modos de vibração de uma viga engastada

com a dinâmica das variáveis de interesse, podendo-se utilizar um modelo *congelado*. Por exemplo, o atrito em mancais de máquinas rotativas tende a crescer com o tempo, mas esse processo é, em geral, muito mais lento do que a dinâmica do eixo do rotor.

3. Atrasos no tempo levam a equações diferenciais do tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - T)) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0(\tau) \quad \tau \in [-T, 0] \quad (3.5)$$

que significa dimensão infinita (deve-se fornecer  $\mathbf{x}_0(\tau)$  em infinitos valores de  $\tau$ ). Quando for possível utilizar a transformada de Laplace (sistemas lineares invariantes no tempo), tem-se que  $\mathcal{L}[\mathbf{f}(t - T)] = e^{-sT} F(s)$ , que pode ser tratado de modo relativamente simples.

## 3.1 Modelos de tempo contínuo

Uma vez que os sistemas físicos de interesse envolvem grandezas que variam com o tempo, os modelos buscam expressar essa característica de modo direto ou indireto através da utilização de parâmetros que representam o tempo.

Na prática são utilizadas as equações diferenciais no caso de modelos de tempo contínuo ( $y(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ) e equações a diferenças no caso de tempo discreto ( $y[k]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ) em que  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ .

### 3.1.1 Equações diferenciais ordinárias

Os modelos de tempo contínuo estudados neste livro são representações baseadas em equações diferenciais ordinárias (EDO), ou seja, as grandezas de

interesse evoluem no tempo  $t$  conforme

$$F\left(\frac{d^n y}{dt^n}, \dots, \frac{dy}{dt}, y, u, t\right) = 0, \quad (3.6)$$

em que  $y$  é a saída,  $u$  é a entrada,  $t$  é o tempo e  $F$  alguma função que busca descrever o comportamento do sistema. (OBS: Para simplificar a notação,  $y$  e  $u$  são assumidas pertencerem a  $\mathbb{R}$ ) nesta Seção.

O sistema é dito ser linear se a função  $F$  assume a forma particular

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + a_n(t)y - b_0(t)u(t) = 0 \quad (3.7)$$

ou seja,  $d^k y/dt^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  não estão multiplicados entre si e nem participam como argumento de funções que não sejam da forma  $f(\xi) = \alpha\xi + \beta$ , com  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ . Por exemplo  $f(\xi) = \sin(\xi)$ ,  $f(\xi) = \log(\xi)$  e  $f(\xi) = \xi^q$  com  $q \neq 1$ .

Caso os parâmetros  $a_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  não dependam explicitamente de  $t$ , ou seja,  $a_1, \dots, a_n$  são números reais, os sistemas são denominados LTI (*Linear Time Invariant*).

Às vezes, sistemas invariantes no tempo são referidos como sendo sistemas autônomos.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t) \quad (3.8)$$

Ressalta-se que a equação 3.8 poderia incluir também termos do tipo  $\frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m}$ , caso em que se teria um novo  $u(t)$  constituído da combinação desses.

Uma notação muito usada para simplificar a escrita é usar  $\dot{y}$  no lugar de  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\ddot{y}$  no lugar de  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  e  $y^{(n)}$  no lugar de  $\frac{d^n y}{dt^n}$ , ou seja,

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad ; \quad \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \quad ; \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n} \quad (3.9)$$

de modo que a expressão 3.8 pode ser reescrita mais compactamente

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-3} y^{(3)} + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad (3.10)$$

Os modelos, tanto os de tempo contínuo quanto os de tempo discreto, podem ser obtidos através de dois enfoques principais:

- o de caixa branca (ou transparente); e
- o de caixa preta (ou caixa opaca).

No caso de enfoque caixa branca, admite-se que são conhecidas as leis físicas que regem o comportamento do sistema que se encontra no seu interior (por exemplo, Leis de Kirchhoff, Lei de Newton, princípio da mínima ação, equação de continuidade, conservação da energia etc.)

No caso de enfoque caixa preta, busca-se obter o modelo a partir dos registros dos sinais de entrada e da saída do sistema (caixa) (por exemplo, uma sequência de pares entrada-saída  $\{u[k], y[k]\}_{k=1,2,\dots}$  obtidas com a utilização de um equipamento digital para aquisição de dados).

O procedimento para obter modelos utilizando o enfoque caixa preta é chamado, usualmente, de identificação. Na prática é comum o emprego de méto-



Figura 3.3: Enfoques para obtenção de modelos matemáticos.

dos híbridos, em que se combinam os enfoques de caixa preta e de caixa preta, às vezes chamado de caixa cinza (ou translúcida). Por exemplo, à luz dos conhecimentos das leis físicas, pode-se conhecer a estrutura do modelo buscado, mas os seus parâmetros são determinados a partir de registros de entrada e saída (no caso, mediante identificação paramétrica).

Antes de apresentar alguns métodos de modelagem, é interessante mencionar duas frases encontradas no livro Luyben, W.L. *Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers*. McGraw Hill, 1989:

1. *The simplest control system that will do the job is the best.*
2. *You must understand the process before you can control it.*

**Este livro busca tratar o problema de projeto de controlados utilizando métodos quantitativos, de modo que é imprescindível a disponibilidade de modelos matemáticos. Os modelos matemáticos predominantes nesta obra são do tipo Equações Diferenciais Ordinárias lineares e invariantes no tempo, obtidos eventualmente por aproximações de modelos mais gerais.**

## 3.2 Modelagem usando leis físicas

Nessa seção serão explorados alguns métodos de modelagem utilizando o enfoque “caixa branca” utilizando leis físicas bem conhecidas.

### 3.2.1 Leis de Kirchhoff

**Exemplo:** Circuito de Sallen-Key

Considere o circuito apresentado na figura 3.4, que possui dois armazenadores de energia (2 capacitores) e cujo modelo pode ser obtido utilizando-se as Leis de Kirchhoff (vide, por exemplo, (DESOER, 1969)).

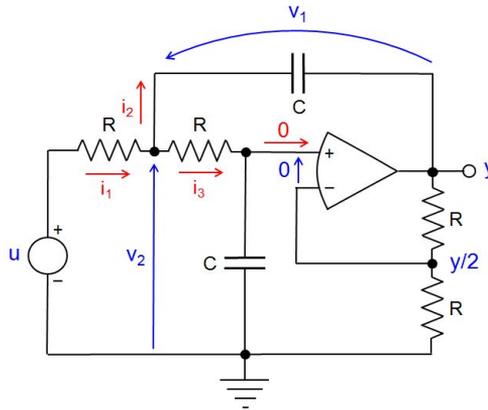


Figura 3.4: Circuito de Sallen-Key.

Segundo a Lei de Kirchhoff para correntes, tem-se que

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (3.11)$$

Pela Lei de Kirchhoff para tensões, e lembrando que a entrada de corrente em um OpAmp (Amplificador Operacional) é quase zero, em face de sua impedância elevada de entrada, e também que a diferença de potencial entre os seus terminais + e - é negligenciável em face do seu elevado ganho, obtém-se o conjunto de equações

$$-u + Ri_1 + Ri_3 + \frac{1}{2}y = 0 \quad (3.12)$$

$$-v_2 + v_1 + y = 0 \quad (3.13)$$

$$-v_2 + Ri_3 + \frac{1}{2}y = 0 \quad (3.14)$$

O comportamento tensão-corrente dos elementos do circuito é descrito por

$$i_2 = C\dot{v}_1 \quad (3.15)$$

$$i_3 = C\frac{\dot{y}}{2} \quad (3.16)$$

e, portanto, combinando as equações 3.12 e 3.11, obtém-se

$$Ri_1 + Ri_3 + \frac{1}{2}y = u \quad (3.17)$$

$$R(i_2 + i_3) + Ri_3 + \frac{1}{2}y = u \quad (3.18)$$

$$RC\dot{v}_1 + RC\dot{y} + \frac{1}{2}y = u \quad (3.19)$$

Combinando-se as equações 3.11 a 3.19, pode-se escrever

$$R \left( CRC\frac{\ddot{y}}{2} - \frac{C}{2}\dot{y} \right) + RC\dot{y} + \frac{1}{2}y = u \quad (3.20)$$

e a equação diferencial que descreve o circuito da figura 3.4 pode ser colocada na forma padrão

$$R^2C^2\ddot{y} + RC\dot{y} + y = 2u \quad (3.21)$$

Esse circuito é um filtro de segunda ordem muito utilizado na prática e cujo comportamento poderá ser mais bem estudado após o capítulo sobre resposta em frequência.

Um fato importante na obtenção desse modelo é que não foi considerada a possível saturação do OpAmp. Por exemplo, se a alimentação do OpAmp for de  $\pm 15V$ , não é conveniente que a saída  $y$  se aproxime desses valores.

### 3.2.2 Modelagem usando o conceito de Lagrangiano

A modelagem baseada no conceito de Lagrangiano é muito frequente em várias áreas da Engenharia e tratamentos formais do método podem ser encontrados em livros como (GOLDSTEIN, 1980).

Esse método de modelagem é baseado no *princípio da mínima ação* ou de *Hamilton*, segundo o qual fenômenos físicos cuja evolução é representada por coordenadas  $\mathbf{q}$  minimizam a expressão

$$A[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt \quad (3.22)$$

em que o Lagrangiano  $\mathcal{L}$  é a diferença entre as energias cinética  $T$  e potencial  $U$ ,

$$\mathcal{L} = T - U \quad (3.23)$$

Uma condição necessária para que uma função  $\mathbf{q}(t)$  seja solução do problema de minimização de  $A(\mathbf{q})$  é que satisfaça a equação de Euler-Lagrange (no sentido estendido em relação ao Apêndice A)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = Q \quad (3.24)$$

O termo  $\mathcal{R}$  (termo de Rayleigh) estará presente se houver dissipação de energia para o meio ambiente, usualmente como metade da potência dissipada e  $Q$  são forças externas (forças, torques, tensão, corrente, pressão, vazão etc.).

**Observação:** Apresenta-se no *Apêndice A* uma condição necessária para que uma função  $\mathbf{x}(t)$  seja um ponto estacionário para o problema de minimização de

$$J[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_f} c(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt \quad (3.25)$$

A condição necessária para otimalidade de  $\mathbf{x}^*$  é conhecida como a equação de Euler-Lagrange

$$\left. \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial c}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial c}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

Para a modelagem de sistemas, faz-se a associação

$$\mathbf{x} \rightsquigarrow \mathbf{q} \quad (3.27)$$

$$c \rightsquigarrow \mathcal{L} \quad (3.28)$$

$$J(\mathbf{x}) \rightsquigarrow A(\mathbf{q}) \quad (3.29)$$

Um tratamento mais rigoroso desse problema pode ser encontrado, por exemplo, em (BLISS, 1980), (GOLDSTEIN, 1980), (YOUNG, 1969), entre outros.

A formulação mais geral que inclui os termos  $\mathcal{R}$  e  $Q$  pode ser encontrado em (WELLSTEAD, 1979).

### Exemplo: Máquina de Atwood

Para ilustrar o procedimento, considere o sistema de polias ilustrado na figura 3.5, em que a corda que une as massas  $m_1$  e  $m_2$  possui comprimento  $L$ .

Utilizando-se conceitos básicos de física, pode-se escrever as expressões para as energias cinética  $T$  e potencial  $U$  para esse sistema:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}^2 \quad (3.30)$$

$$U = -m_1gq - m_2g(L - q) \quad (3.31)$$

em que  $q$  é o deslocamento e  $\dot{q}$  é a velocidade.

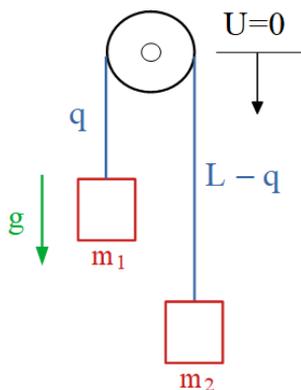


Figura 3.5: Máquina de Atwood.

A expressão do Lagrangiano para a máquina de Atwood é

$$\mathcal{L} = T - U \quad (3.32)$$

$$= \frac{1}{2}m_1\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}^2 + m_1gq + m_2g(L - q) \quad (3.33)$$

e, portanto, fazendo-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (3.34)$$

em que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = m_1g - m_2g \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m_1\dot{q} - m_2\dot{q} \quad (3.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = m_1\ddot{q} + m_2\ddot{q} \quad (3.37)$$

obtém-se a equação diferencial que descreve o seu comportamento

$$(m_1 + m_2) \ddot{q} - m_1 g + m_2 g = 0 \quad (3.38)$$

$$\ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad (3.39)$$

### Exemplo: Pêndulo Simples

Seja um pêndulo simples com haste rígida, conforme ilustrado na figura 3.6.

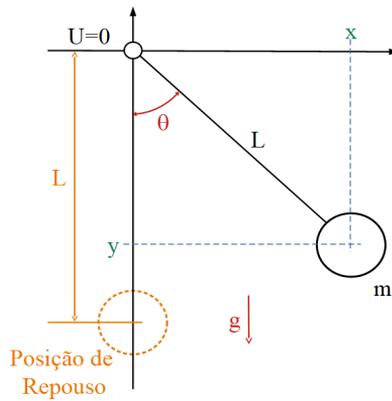


Figura 3.6: Pêndulo simples.

Verifica-se pela figura 3.6 que

$$x = L \sin(\theta) \quad (3.40)$$

$$y = -L \cos(\theta) \quad (3.41)$$

em que  $L$  é o comprimento da haste,  $m$  é a massa da esfera,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\theta$  é o ângulo da haste com a vertical.

As expressões para a energia cinética  $T$  e a potencial  $U$  são

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 \quad (3.42)$$

$$U = -mgL \cos(\theta) \quad (3.43)$$

Logo o Lagrangiano é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + mgL \cos(\theta) \quad (3.44)$$

Os termos necessários para aplicar a condição de Euler-Lagrange são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgL \sin(\theta) \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \dot{\theta} \quad (3.46)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = mL^2 \ddot{\theta} \quad (3.47)$$

Tem-se, portanto, que o modelo do pêndulo simples é

$$mL^2 \ddot{\theta} + mgL \sin(\theta) = 0 \quad (3.48)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \quad (3.49)$$

subsubsectionExemplo: Pêndulo com Haste Elástica De modo análogo ao exemplo anterior (Pêndulo Simples), seja agora o caso em que a haste é elástica

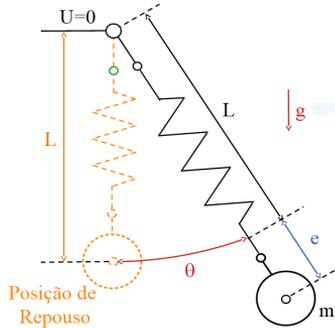


Figura 3.7: Pêndulo com haste elástica.

As expressões para  $T$  e  $U$  são

$$T = \frac{1}{2}m \left( \dot{e}^2 + (L + e)^2 \dot{\theta}^2 \right) \quad (3.50)$$

$$U = -mg(L + e) \cos(\theta) + \frac{1}{2}ke^2 \quad (3.51)$$

Logo, o Lagrangiano é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left( \dot{e}^2 + (L + e)^2 \dot{\theta}^2 \right) + mg(L + e) \cos(\theta) - \frac{1}{2}ke^2 \quad (3.52)$$

Os termos necessários para aplicar a condição de Euler-Lagrange são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e} = mg \cos(\theta) - ke + m(L + e)\dot{\theta}^2 \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mg(L + e) \sin(\theta) \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}} = m\dot{e} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m(L + e)^2 \dot{\theta} \quad (3.56)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}} \right) = m\ddot{e} \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = m(L + e)\dot{e}\dot{\theta} + m(L + e)^2\ddot{\theta} \quad (3.58)$$

Substituindo-se esses termos na equação de Euler-Lagrange, obtém-se que

$$m\ddot{e} - mg \cos(\theta) + ke - m(L + e)\dot{\theta}^2 = 0 \quad (3.59)$$

$$m(L + e)\dot{e}\dot{\theta} + m(L + e)^2\ddot{\theta} + mg(L + e) \sin(\theta) = 0 \quad (3.60)$$

O modelo pode ser colocado na forma de espaço de estados definindo-se, por exemplo,  $\mathbf{x} = [e \ \dot{e} \ \theta \ \dot{\theta}]$ .

### Exemplo: Pêndulo Duplo

Considere agora um pêndulo duplo como a ilustrada na figura 3.8 Considere

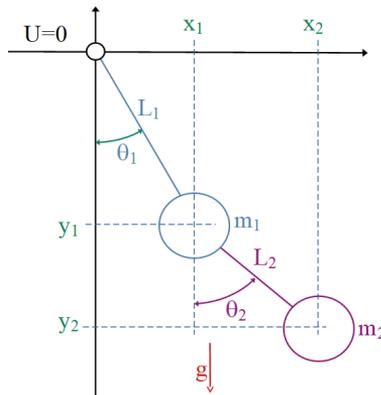


Figura 3.8: Pêndulo duplo.

o pêndulo duplo ilustrado na figura 3.8, em que se verifica que

$$x_1 = L_1 \sin(\theta_1) \quad (3.61)$$

$$x_2 = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2) \quad (3.62)$$

$$y_1 = -L_1 \cos(\theta_1) \quad (3.63)$$

$$y_2 = -L_1 \cos(\theta_1) - L_2 \cos(\theta_2) \quad (3.64)$$

As expressões para a energia cinética  $T$  e a potencial  $U$  são

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (3.65)$$

$$= \frac{1}{2}m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 [L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2] \quad (3.66)$$

$$+ 2L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \quad (3.67)$$

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \quad (3.68)$$

$$= -(m_1 + m_2) g L_1 \cos(\theta_1) \quad (3.69)$$

$$- m_2 g L_2 \cos(\theta_2) \quad (3.70)$$

Calculando-se os termos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1}; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2}; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}; \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right); \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) \quad (3.71)$$

e utilizando-se as equações de Euler-Lagrange, obtém-se o modelo do pêndulo duplo

$$0 = (m_1 + m_2)L_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \quad (3.72)$$

$$+ m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin(\theta_1) \quad (3.73)$$

$$0 = L_2 \ddot{\theta}_2 + L_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin(\theta_2) \quad (3.74)$$

### Exemplo: Massa + Mola + Amortecedor

Embora o modelo para um sistema massa+mola+amortecedor possa ser obtido facilmente pela utilização das Leis de Newton, apresenta-se aqui a versão baseada no Lagrangiano.

As expressões para a energia cinética  $T$  e a potencial  $U$  são

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \quad (3.75)$$

$$U = \frac{1}{2}kq^2 \quad (3.76)$$

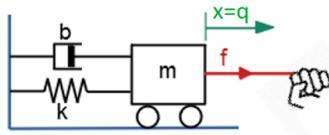


Figura 3.9: Sistema massa, mola e amortecedor.

Como existe um amortecedor, há dissipação de energia e

$$R = \frac{1}{2}b\dot{q}^2 \quad (3.77)$$

Logo o Lagrangiano é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \quad (3.78)$$

Aplicando-se a condição de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}} = Q \quad (3.79)$$

em que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -kq \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad (3.81)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = m\ddot{q} \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}} = b\dot{q} \quad (3.83)$$

obtém-se o modelo para o sistema massa + mola + amortecedor ( $Q = f$ )

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq = f \quad (3.84)$$

### Exemplo: Circuito RLC

O método do Lagrangiano é aplicável também para o caso de circuitos elétricos. Nesse exemplo adota-se como a grandeza básica a carga  $q$ .

As expressões  $T$  e  $U$  são

$$T = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 \quad (3.85)$$

$$U = \frac{1}{2C}q^2 \quad (3.86)$$

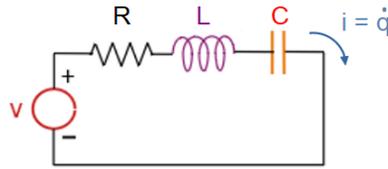


Figura 3.10: Circuito RLC Série.

Logo o Lagrangiano é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2C}q^2 \tag{3.87}$$

Aplicando-se a fórmula de Euler-Lagrange com  $Q = v$  obtém-se o modelo do circuito RLC série

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = v \tag{3.88}$$

**Exemplo: Um Sistema Eletro-Mecânico**

A utilização do conceito de Lagrangiano é particularmente interessante para modelagem de sistemas que envolvem simultaneamente componentes de diferentes naturezas (elétrica, pneumática, hidráulica, mecânica).

Considere o sistema eletromecânico ilustrado na figura 3.11 e que envolve grandezas eletromagnéticas e mecânicas.

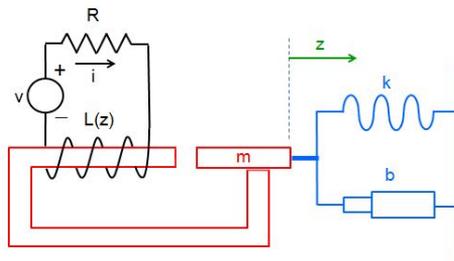


Figura 3.11: Um sistema eletromecânico acoplado.

Notar que movimento da massa  $m$  devido à atração magnética afeta o valor da indutância  $L(z)$ .

O Lagrangiano é da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \overbrace{L(z)\dot{q}^2}^{\text{Elétrica}} + \overbrace{m\dot{z}^2 - kz^2}^{\text{Mecânica}} \right] \tag{3.89}$$

Os elementos dissipadores de energia são o resistor e o amortecedor

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}R\dot{q}^2 + \frac{1}{2}b\dot{z}^2 \quad (3.90)$$

Pela fórmula de Euler-Lagrange, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}} = v \rightarrow L(z)\ddot{q} + R\dot{q} = v \quad (3.91)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{z}} = 0 \rightarrow m\ddot{z} + b\dot{z} + kz - \frac{1}{2} \frac{dL}{dz} \dot{q}^2 = 0 \quad (3.92)$$

O modelo do sistema eletro-mecânico obtido das equações 3.91 e 3.92 é dado por

$$L(z)\ddot{q} + R\dot{q} = v \quad (3.93)$$

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz - \frac{1}{2} \frac{dL}{dz} \dot{q}^2 = 0 \quad (3.94)$$

### 3.2.3 Modelagem utilizando analogia

Diferentes sistemas podem ser descritos por equações diferenciais com a mesma estrutura, porém com parâmetros (coeficientes) distintos.

Como exemplos, considere os três sistemas ilustrados na figura 3.12, descritos pelas equações:

1.  $L \frac{d^2 v_C}{dt^2} + R \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{C} v_C = \frac{1}{C} v$
2.  $C \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{L} i_L = \frac{1}{L} i$
3.  $m \frac{d^2 x}{dt^2} + b\dot{x} + kx = f$

Nota-se nessas equações que a estrutura é idêntica, mas os parâmetros (coeficientes das equações diferenciais) são distintos.

Logo, ajustando-se os valores numéricos dos coeficientes, a solução da EDO seria numericamente idêntica.

Esse conceito pode ser usado para utilizar circuitos elétricos para simular dispositivos mecânicos, hidráulicos e pneumáticos.

No passado era comum o uso de computadores analógicos que eram capazes de traçar a respostas de equações diferenciais mediante a interconexão de integradores, somadores, inversores e outros dispositivos.

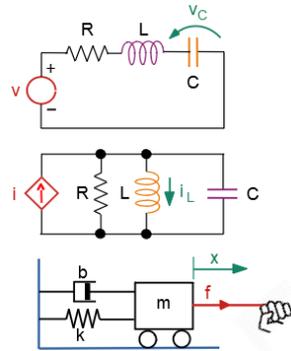


Figura 3.12: Três sistemas: Circuito Série, Circuito Paralelo e Massa-Mola-Amortecedor.

### Analogia eletromecânica

1. **Analogia força-tensão:** Se a grandeza  $f$  for associada a  $v$  (com correção  $\frac{1}{C}$ ) as soluções das EDO's 1 e 3 serão as mesmas se, numericamente,  $L = m$ ,  $R = b$  e  $\frac{1}{C} = k$ .
2. **Analogia força-corrente:** Se a grandeza  $f$  for associada a  $v$  (com correção  $\frac{1}{L}$ ) as soluções das EDO's 1 e 2 serão as mesmas se, numericamente,  $C = m$ ,  $R^{-1} = b$  e  $\frac{1}{L} = k$ .

### Variáveis de esforço e de fluxo

De modo generalizado, dado um componente, podem ser definidas variáveis de esforço e de fluxo (ou *across* e *through*), por exemplo, tensão  $\times$  corrente ou força  $\times$  velocidade.

Em alguns textos, as variáveis de esforço são referidas como variáveis “entre” (*effort*, *across*), denotadas  $e(t)$ , como a diferença de tensão, de pressão e de temperatura). As variáveis de fluxo são referidas como de “através” (*flow*, *through*), denotadas  $f(t)$ , como a corrente, o fluxo de fluido e o fluxo de calor).

Além de  $e(t)$  e de  $f(t)$ , são importantes as seguintes grandezas:

- Potência Instantânea:  $P(t) = e(t)f(t)$
- Energia Transferida:  $E(t) = \int_0^t P(\tau)d\tau$
- Fluxo Acumulado:  $q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$
- Esforço Acumulado:  $p(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau$

### Exemplo

Se a grandeza  $f$  for associada a  $i$  (com correção  $\frac{1}{L}$ ) as soluções das EDO's 1 e 2 serão as mesmas se, numericamente,  $C = m$ ,  $\frac{1}{R} = b$  e  $\frac{1}{L} = k$  e, além disso,

- Potência Instantânea:  $P(t) = v(t)i(t)$
- Energia Transferida:  $E(t) = \int_0^t P(\tau)d\tau$
- Fluxo Acumulado (carga elétrica):  $q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$  ou  $i = \frac{dq}{dt}$
- Esforço Acumulado (fluxo magnético):  $\phi(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau$  ou  $v = \frac{d\phi}{dt}$

O método pode ser adaptado a sistemas térmicos (resistência térmica  $R$ , capacitância térmica  $C$ , *variável entre* =  $T$ , temperatura, *variável através* =  $i$ , fluxo de calor  $Q$ ):

$$T = Ri \quad (3.95)$$

$$i = C \frac{dT}{dt} \quad (3.96)$$

e a sistemas hidráulicos (resistência  $R$ , capacidade volumétrica  $C$ , *variável entre* =  $p$ , pressão, *variável através* =  $q$ , vazão, como já visto anteriormente no exemplo de tanques.

### 3.2.4 Atraso de transporte

Um importante fenômeno encontrado, por vezes, na prática é o de atraso puro ou de transporte.

Um exemplo de situação em que ocorre o atraso de transporte encontra-se ilustrado na figura 3.13, em que, com periodicidade  $T$ , um corante é injetado no fluxo de água. Um sensor baseado na absorbância de um feixe luz detecta a presença da água colorida como o sinal  $u(t)$ . Quando o plugue de água colorida atinge o sensor na saída da tubulação é gerado o sinal  $y(t)$ . Nota-se

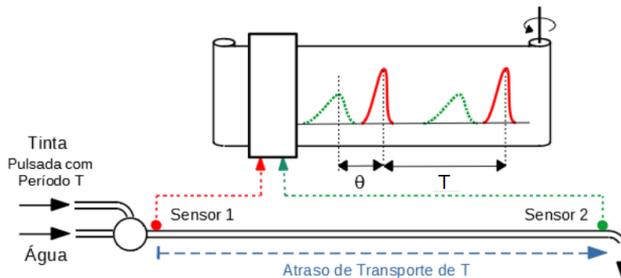


Figura 3.13: Devido ao tempo para o plugue de água corada percorrer a tubulação, a leitura do segundo sensor (em verde) é atrasada em relação ao primeiro (em vermelho).

pelo gráfico da figura 3.13 que o pico do sinal  $y(t)$  ocorre com atraso de  $\theta$  unidades de tempo, em relação ao sinal  $u(t)$ . Nesse exemplo, a forma de onda de  $y(t)$  é mais “alargada” do que  $u(t)$  em vista de a tinta ter se difundido para a vizinhança do plugue.

Caso a forma de onda de  $y(t - \theta)$  seja a mesma que de  $u(t)$ , ter-se-á o caso de atraso puro, ou seja,

$$y(t) = u(t - \theta) \quad (3.97)$$

### 3.3 Validação de modelos

Os modelos devem caracterizar “adequadamente” o fenômeno físico sob estudo. Porém o qualificativo “adequadamente” necessita ser tornado mais preciso.

- O modelo deve ser o mais simples possível, conforme preconizado pelo princípio da Navalha de Ockham (William of Ockham, 1287–1347). Modelos complexos e que levam em consideração efeitos negligenciáveis dificultam o projeto sem o devido benefício.
- É prudente estabelecer figuras de mérito para uma análise da adequação do modelo escolhido. Por exemplo, calculando a diferença entre as respostas do modelo e do processo para uma mesma excitação. Quando se utiliza simulação como em casos em que não há acesso a todo o processo, pelo menos alguns sensores, atuadores ou processadores reais podem ser incorporados para que os resultados seja mais próximos àqueles a serem observados no campo.
- O modelo pode ser considerado validado, de fato, quando o projeto é incorporado ao processo físico e o resultado atende às especificações técnicas preestabelecidas.

### 3.4 Incertezas em modelos

As leis de controle determinadas com o uso de modelos inadequados podem apresentar desempenho aquém do esperado quando utilizado com os processos reais.

Entre os diversos exemplos de fatores que contribuem para a degradação do desempenho estão

- **Sinais que se afastam muito do ponto de operação.** É exemplo uma mola que obedece à lei de Hooke para pequenos tracionamentos ( $f = kx$ ) mas tende a ficar mais *dura* se for muito solicitada ( $f = kx^3$ ) e, eventualmente, pode se romper. Um outro exemplo é o fato de que intensidades muito grandes de campo magnético tendem a produzir saturação do núcleo ferromagnético, alterando a indutância de reatores.
  - **Ruídos desconsiderados.** São exemplos as vibrações da plataforma onde está instalado o equipamento, interferências devidas a campos eletromagnéticos geradas por centelhamento em máquina de solda a ponto, rajadas de vento, entre outros.
-

- **Valores nominais discrepantes.** São exemplos os componentes eletrônicos comerciais que podem apresentar tolerâncias grandes, por exemplo, capacitor com  $C = 1.0 \mu F \pm 20\%$  ou utilização de insumos com baixa pureza.
- **Fenômenos não modelados.** São exemplos folga de engrenagem, atrito seco, modos de flexão de vigas, anisotropia do meio, entre outros.
- **Variações lentas com o tempo.** São exemplos o envelhecimento de componentes, o deslocamento do centro de massa devido ao consumo de combustível, oscilações climáticas, entre outras possibilidades.
- **Desconsideração dos atrasos de transporte.** São exemplos a demora na recepção de sinais devido à localização remota do sensor, utilização de rede internet para transmissão de dados, tempo de processamento para cálculo do sinal de controle, entre outras possibilidades.
- **Utilização inadequada.** São exemplos a operação de veículos com excesso de passageiros, ausência de proteção em ambientes hostis, manutenção de baixa qualidade, entre outros, levando a variações incertas e desconhecidas dos parâmetros do modelo.

**A modelagem de sistemas pode ser auxiliada por ferramentas tais como os grafos de ligação (*bond graphs*), analogia e fluxografo (*flowgraph*). Existem, ainda, ambientes de software específicos para modelagem de sistemas, muitos dos quais gratuitos, que já possuem vários componentes prontos que podem ser interligados graficamente.**

### 3.5 Solução de EDOs lineares

O comportamento de sistemas dinâmicos de tempo contínuo são frequentemente descritos por equações diferenciais ordinárias (EDOs).

A solução de uma EDO típica (representando sistemas LTI)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad (3.98)$$

pode ser obtida através de vários métodos.

Neste texto serão apresentados apenas dois métodos, em vista da importância destes no contexto de problemas de controle:

- via formulação no espaço de estados; e
-

- através da utilização da *transformada de Laplace*.

Ambos os métodos são detalhadamente estudados em obras tais como (CHEN, 1970), (OGATA, 1970), (SHINNERS, 1972), (KUO, 1980), (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1986) (DORF; BISHOP, 1995) e (HESPANHA, 2009), entre outros.

### 3.5.1 Espaço de estados

Embora a equação diferencial ordinária de  $n$ -ésima ordem 3.98 possa ser tratada diretamente, aqui optou-se por transformá-la em  $n$  equações de primeira ordem, mediante o artifício de se fazer

$$x_1 = y \quad (3.99)$$

$$x_2 = \dot{y} \quad (3.100)$$

...

$$x_n = y^{(n-1)} \quad (3.101)$$

em que  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$  e, a partir de  $n = 3$ , é usual utilizar a notação  $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$ .

Nessas condições, tomando-se derivadas em  $t$  nas equações 3.99, obtém-se o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \quad (3.102)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \quad (3.103)$$

...

$$\dot{x}_1 = y^{(n)} = -a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1} \dot{y} - a_n y + u \quad (3.104)$$

$$= -a_1 x_n - \dots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + u \quad (3.105)$$

O vetor  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ , será chamado de *estado*. No contexto de Engenharia de Controle, *estado* é um conjunto de grandezas de um sistema que, se conhecidas em um instante, permite que se determine o valor futuro dessas grandezas, caso sejam fornecidas os sinais de entrada).

Intuitivamente, estado é aquele conjunto de grandezas que, se for conhecido em um certo instante  $t$ , os valores futuros  $x(\tau)$ ,  $\tau \geq t$  podem ser determinados caso conheça as entradas  $u(\sigma)$ ,  $\sigma \in [t, \tau]$

Utilizando-se a notação matricial, as expressões 3.102 a 3.105 podem ser agru-

padas na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (3.106)$$

De 3.102 a 3.105, depende-se também que

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \quad (3.107)$$

Será visto mais adiante que a representação no espaço de estados  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$  não é única (por exemplo, uma representação diferente pode ser obtida fazendo-se uma transformação similar  $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$  em que  $\mathbf{P}$  é não singular).

A solução do sistema de equações diferenciais ordinárias 3.106 pode ser determinada, por exemplo, pelo método construtivo utilizando a iteração de Picard apresentado no Apêndice B.

Aqui, será apenas verificado através de substituição que a expressão

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (3.108)$$

satisfaz

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.109)$$

com a condição inicial  $\mathbf{x}(0)$ .

De fato, notando que a variável de integração é  $\tau$  e não  $t$ , a equação 3.108 é reescrita como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (3.110)$$

$$= e^{\mathbf{A}t} \left( \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \right) \quad (3.111)$$

Diferenciando-se a expressão 3.110 em  $t$ , obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} \underbrace{\left( \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \right)}_{\mathbf{x}} + e^{\mathbf{A}t} e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B}u \quad (3.112)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.113)$$

Portanto, de fato, a expressão 3.108 é a solução de 3.109.

Necessita-se, agora, de um método eficiente para caracterizar  $e^{\mathbf{A}t}$

### 3.5.2 Exponencial de matriz

Na expressão 3.108 está presente um termo denotado  $e^{\mathbf{A}t}$ .

É conveniente mencionar que, por definição (BARNETT, 1990),

$$e^{\mathbf{A}t} \triangleq \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \dots \quad (3.114)$$

e que o polinômio característico  $\Delta(\lambda)$  de uma matriz  $\mathbf{A}_{n \times n}$  é dado por

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (3.115)$$

$$= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (3.116)$$

Seja agora  $\overline{\Delta}(\mathbf{M})$  definido por

$$\overline{\Delta}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^n + a_1\mathbf{M}^{n-1} + \dots + a_{n-1}\mathbf{M} + a_n\mathbf{I}_{n \times n} \quad (3.117)$$

em que  $\mathbf{M}$  é uma matriz quadrada  $n \times n$ . (Note que  $\Delta : C \rightarrow C$ , enquanto  $\overline{\Delta} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , mas os coeficientes  $a_i, i = 1, 2, \dots, n$  são os mesmos.)

O teorema de Cayley-Hamilton (vide Apêndice C) afirma que

$$\overline{\Delta}(\mathbf{A}) = 0 \quad (3.118)$$

Para  $P(\mathbf{M})$  um polinômio matricial de ordem qualquer, pode-se escrever a identidade

$$P(\mathbf{M}) = Q(\mathbf{M})\overline{\Delta}(\mathbf{M}) + R(\mathbf{M}) \quad (3.119)$$

em que a maior potência de  $R(\mathbf{M})$  em 3.119 é  $(n - 1)$ .

Nota-se, agora, que para o caso  $\mathbf{M} = \mathbf{A}$

$$P(\mathbf{A}) = Q(\mathbf{A})\overline{\Delta}(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A}) \quad (3.120)$$

$$= R(\mathbf{A}) \quad (3.121)$$

ou seja, um polinômio  $P(\mathbf{A})$  de ordem arbitrária, por exemplo,  $e^{\mathbf{A}}$  ou  $\mathbf{A}^{100}$ , pode ser escrito com potências de  $\mathbf{A}$  até grau  $n - 1$ .

Portanto a exponencial de matriz  $e^{\mathbf{A}t}$  pode ser expressa como uma soma ponderada por pesos  $\alpha_k(t)$  de potências  $\mathbf{A}^k$  de  $\mathbf{A}$  para  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ , ou seja,

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1} \quad (3.122)$$

Os coeficientes  $\alpha_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  podem ser determinados resolvendo-se o sistema de  $n$  equações com o mesmo formato que a expressão 3.122

$$e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} \quad (3.123)$$

$$e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} \quad (3.124)$$

...

$$e^{\lambda_n t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \alpha_2(t)\lambda_n^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} \quad (3.125)$$

em que  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  são os autovalores de  $\mathbf{A}_{n \times n}$ .

Caso os autovalores sejam distintos,  $i \neq j \rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$ , o sistema em 3.125 será de  $n$  equações a  $n$  incógnitas.

Resolvendo-se o sistema de equações 3.123 obtém-se as expressões para  $a_k(t)$  em função de  $e^{\lambda_1 t}$ , ...,  $e^{\lambda_n t}$  e colecionando-se os termos em  $e^{\lambda_k t}$  obtém-se

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_k e^{\lambda_k t} \quad (3.126)$$

em que  $\mathbf{M}_k$  são matrizes com entradas reais.

Se houver auto-valores com multiplicidades maiores que 1, então, deve-se utilizar as expressões derivadas.

Por exemplo, se  $\lambda_i$  possui multiplicidade 3 ( $< n$ ), então deriva-se 2 vezes em  $\lambda_i$  a expressão  $e^{\lambda_i t}$  para se obter 3 equações.

$$e^{\lambda_i t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_i + \alpha_2(t)\lambda_i^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1} \quad (3.127)$$

$$t e^{\lambda_i t} = \alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_i + \dots + (n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-2} \quad (3.128)$$

$$t^2 e^{\lambda_i t} = 2\alpha_2(t) + 6\alpha_3(t)\lambda_i + \dots + (n-2)(n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-3} \quad (3.129)$$

### Exemplo: Motor DC de ímã permanente

Considere um motor DC controlado pela armadura e tendo como carga o seu rotor.

O circuito de armadura apresenta resistência  $R$  e indutância  $L$ , o momento de inércia do rotor é  $J$ , a velocidade angular de rotação do eixo é  $\omega$  e o torque é  $\tau$ . A corrente de armadura é  $i_a$ , a tensão é  $v_a$  e a força contra eletromotriz induzida é  $e_a$ . Nesse exemplo, o coeficiente de atrito  $B$  é considerado nulo.

A lei de Newton, aplicada à parte mecânica, permite escrever

$$J \frac{d\omega}{dt} = \tau \quad (3.130)$$

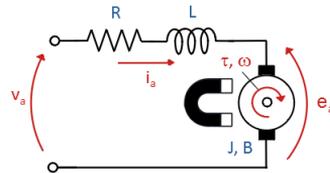


Figura 3.14: Motor DC acionado pelo circuito de armadura.

e, notando que em motores DC,

$$\tau = K_2 i_a \quad (3.131)$$

obtém-se

$$J \frac{d\omega}{dt} = K_2 i_a \quad (3.132)$$

Por outro lado, a lei de Kirchoff aplicada à parte elétrica leva a

$$v_a - e_a = R i_a + L \frac{di_a}{dt} \quad (3.133)$$

em que a força contraeletromotriz induzida é

$$e_a = K_1 \omega \quad (3.134)$$

Em não havendo perdas no motor, a potência elétrica deve ser igual à potência mecânica,

$$p = e_a i_a = \tau \omega \quad (3.135)$$

$$K_1 \omega i_a = K_2 i_a \omega \quad (3.136)$$

$$K_1 = K_2 = K \quad (3.137)$$

e, portanto, combinando e rearranjando as equações 3.132 a 3.137, obtém-se o modelo do motor DC controlado pela tensão de armadura  $v_a$ ,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K}{J} i_a \quad (3.138)$$

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R}{L} i_a - \frac{K}{L} \omega + \frac{1}{L} v_a \quad (3.139)$$

ou, na forma matricial,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} v_a \quad (3.140)$$

Utilizando-se os valores numéricos  $L = 1 H$ ,  $K = 2 N m A^{-1}$ ,  $R = 3 \Omega$ ,  $J = 2 kg m^2$  e  $v_a(t) = 1 V$  para  $\forall t$ , além da condição inicial  $\omega(0) = 1 s^{-1}$  e  $i_a(0) = 0 A$ , a equação diferencial a ser resolvida é dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}}; \begin{bmatrix} \omega(0) \\ i_a(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

A saída de interesse é a velocidade de rotação do motor,  $\omega$ ,

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix}; t \geq 0 \quad (3.142)$$

Para obter a expressão fechada de  $e^{\mathbf{A}t}$ , necessita-se, inicialmente, determinar os autovalores de  $\mathbf{A}$ , ou seja, as raízes do polinômio

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (3.143)$$

$$= \det \left( \begin{bmatrix} \lambda - 0 & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} t \right) \quad (3.144)$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \quad (3.145)$$

que são  $\lambda = -1$  e  $-2$ .

Pela metodologia proposta, a expressão para  $e^{\mathbf{A}t}$  é

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} t} = \alpha_0(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

em que os coeficientes  $\alpha_i(t)$ ,  $i = 0, 1$  são obtidos resolvendo-se

$$e^{-1t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)(-1) \quad (3.147)$$

$$e^{-2t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)(-2) \quad (3.148)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-1t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-1t} - e^{-2t} \\ e^{-1t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

Logo, a exponencial de matriz desejada é dada por

$$\begin{aligned} e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} t} &= (2e^{-1t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ &+ (e^{-1t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.152)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-1t} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} e^{-2t} \quad (3.153)$$

e a solução do problema de contorno 3.141 é

$$\begin{bmatrix} \omega(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} \omega(0) \\ i_a(0) \end{bmatrix} + \int_0^t e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} (t-\tau)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \quad (3.154)$$

O segundo termo da solução é facilmente calculada notando que

$$\int_0^t e^{-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \tau} d\tau = \begin{bmatrix} 2e^t - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{3}{2} & e^t - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \\ e^{2t} - 2e^t + 1 & e^{2t} - e^t \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

Portanto, retomando a solução da equação de estados,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} &= e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 2e^t - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{3}{2} & e^t - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \\ e^{2t} - 2e^t + 1 & e^{2t} - e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.156)$$

$$= e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} t} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(e^t - 1)^2 \\ e^t(e^t - 1) \end{bmatrix} \right\} \quad (3.157)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t} + \frac{1}{2} \\ e^{-2t} - 1e^{-t} \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

A figura 3.15 apresenta uma comparação entre a resposta do Motor DC obtida por simulação da equação diferencial 3.141 e a solução analítica 3.158. Note que a velocidade angular tende ao valor 0.5 que corresponde ao ponto de equilíbrio

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.159)$$

$$\begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix}_{eq} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

**Pausa para relembrar conceitos importantes:** Uma EDO linear e invariante no tempo de ordem  $n$  pode ser transformado em um sistema de  $n$  equações de primeira ordem, para o qual é fácil obter a solução explícita. Essa solução está relacionada com Equações de Estado, Teorema de Cayley-Hamilton, Polinômios de Matrizes, Polinômio Característico, Exponencial de Matriz e Autovalores.

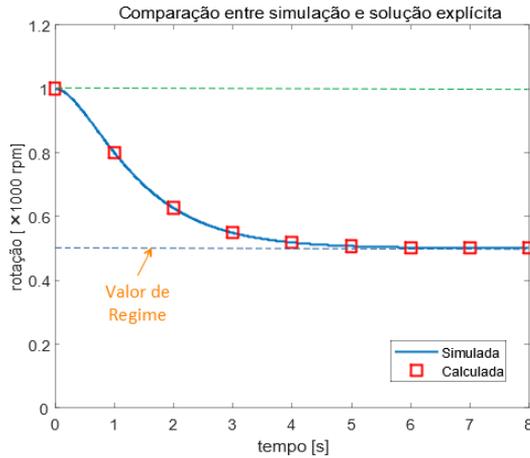


Figura 3.15: Comparação entre a resposta do Motor DC obtida por simulação e pela expressão analítica.

### 3.6 Método da média (*averaging*)

Considere um sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (3.161)$$

em que  $\varepsilon$  é um escalar pequeno (a solução aproximada que se obtém deve atender as especificações quanto à acurácia exigida) e  $f$  é periódico em  $t$ , com período  $T$ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t + T) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (3.162)$$

A ideia no método da média é obter uma solução aproximada utilizando o fato que  $\mathbf{x}$  varia muito mais lentamente do que a variação periódica de  $\mathbf{f}$  ao longo de  $t$ .

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle \quad (3.163)$$

em que

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad (3.164)$$

#### Exemplo

Seja um sistema descrito por

$$\dot{x} = \varepsilon \left( -0.5x^2 + x \sin^2(t) \right) \quad (3.165)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}$  para cada  $t$  fixo. Neste caso, como  $f(x, t)$  é de período  $\pi$ ,

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-0.5x^2 + x \sin^2(\tau)) d\tau \quad (3.166)$$

$$= 0.5(x - x^2) \quad (3.167)$$

Constata-se que o modelo médio é

$$\dot{x} = 0.5(x - x^2). \quad (3.168)$$

### Pêndulo de Kapitza

Um exemplo interessante é o pêndulo cujo fulcro é submetido a uma vibração na direção vertical de pequena amplitude, mas de frequência muito elevada.

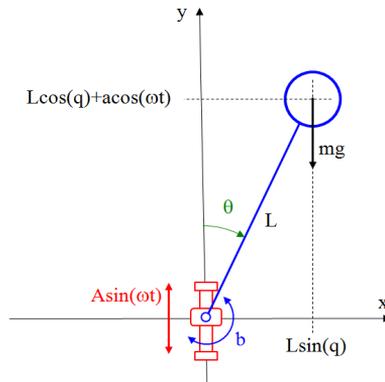


Figura 3.16: Pêndulo de Kapitza.

Sejam  $L$  o comprimento da haste e  $A$  a amplitude da vibração da base na direção vertical,  $a(t) = A \sin(\omega t)$  de modo que  $A \ll L$ .

Denotando-se  $g$  a aceleração da gravidade local, a frequência natural é  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ .

A frequência de vibração  $\omega$  do ponto de fixação é suposto ser tal que  $\omega \gg \omega_0$ . O movimento do pêndulo é então descrito por

$$L\ddot{\theta} = A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \theta - g \sin(\theta) \quad (3.169)$$

$$- \frac{k}{m} [L\dot{\theta} - A\omega \cos(\omega t) \sin \theta] \quad (3.170)$$

em que  $m$  é a massa,  $k$  a constante de atrito viscoso e  $\theta$  o ângulo entre a haste e a vertical.

Para simplificar a notação, definem-se algumas variáveis auxiliares

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega_0}{\omega A}, & \beta &= \frac{k}{m\omega_0}, & \varepsilon &= \frac{A}{\ell}, & \tau &= \omega t \\ x_1 &= \theta x_2 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\theta}{d\tau} + \cos(\tau) \sin(\theta)\end{aligned}\quad (3.171)$$

O modelo do pêndulo de Kapitza é reescrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} x_2 - \cos(\tau) \sin(x_1) \\ -\alpha\beta x_2 - \alpha^2 \sin(x_1) + \cos(x_1) \cos(\tau) [x_2 - \cos(\tau) \sin(x_1)] \end{bmatrix}\quad (3.172)$$

Uma vez que  $\tau = \omega t$  com  $\omega \gg \omega_0$ , pode-se obter o modelo médio calculando

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} f_1(\tau, x) \\ f_2(\tau, x) \end{bmatrix} d\tau\quad (3.173)$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 \\ -\alpha\beta x_2 - \alpha^2 \sin(x_1) - \frac{1}{4} \sin(2x_1) \end{bmatrix}\quad (3.174)$$

de modo que se chega a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\alpha\beta x_2 - \alpha^2 \sin(x_1) - \frac{1}{4} \sin(2x_1) \end{bmatrix}$$

é interessante observar que o pêndulo pode ser mantido na posição invertida ( $x_1 = \theta = \pi$ ), através da vibração vertical do ponto de fixação da haste.

De fato, o modelo linearizado, para o ponto de equilíbrio ( $x_1 = \theta = \pi$ ), é

$$\left. \frac{\partial \langle \mathbf{f} \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\pi, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 - \frac{1}{2} & -\alpha\beta \end{bmatrix}.\quad (3.175)$$

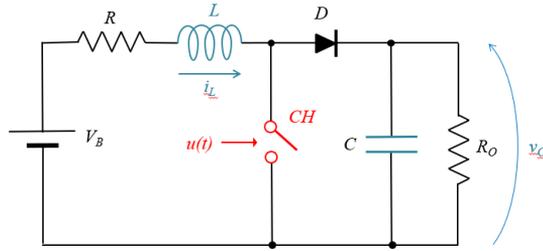
O polinômio característico é dado por

$$\Delta(\lambda) = \lambda(\lambda + \alpha\beta) + \frac{1}{2} - \alpha^2.\quad (3.176)$$

Observe que o sistema é estável para  $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $\beta > 0$ .

### Exemplo: Conversor elevador de tensão

O conversor elevador de tensão (conversor *boost*) possui um elemento comutador (tiristor ou transistor) que pode estar ligado (ON:  $u = 1$ ) ou desligado (OFF:  $u = 0$ ).


 Figura 3.17: Conversor *boost*.

O circuito varia estruturalmente de acordo com cada estado do elemento comutador. O modelo quando  $u=1$  (chave  $CH$  fechada) é dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_o C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_B \quad (3.177)$$

Por outro lado, o modelo quando  $u = 0$  (chave  $CH$  aberta) é dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_o C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_B \quad (3.178)$$

Se a chave  $CH$  é comutada com período  $T$  muito menor do que as constantes de tempo do circuito, ficando  $DT$  ligado e  $(1-D)T$  desligado, o modelo médio é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} &= \left( D \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_o C} \end{bmatrix} + (1-D) \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_o C} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_B \end{aligned} \quad (3.179)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1-D}{L} \\ \frac{1-D}{C} & -\frac{1}{R_o C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_B \quad (3.180)$$

A figura 3.18 foi obtida mediante simulação numérica e representa a resposta do modelo médio e dos modelos chaveados com frequências de  $25 \text{ rd/s}$  e  $50 \text{ rad/s}$  para o circuito com  $R = 5 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 0.1 \text{ F}$  e  $R_o = 10 \Omega$ . Assumindo que a saída de interesse é  $V_C$ , a função de transferência é

$$G(s) = \frac{1-D}{LC \left[ s^2 + \left( \frac{1}{R_o C} + \frac{R}{L} \right) s + \frac{(1-D)^2}{LC} \right]} \quad (3.181)$$

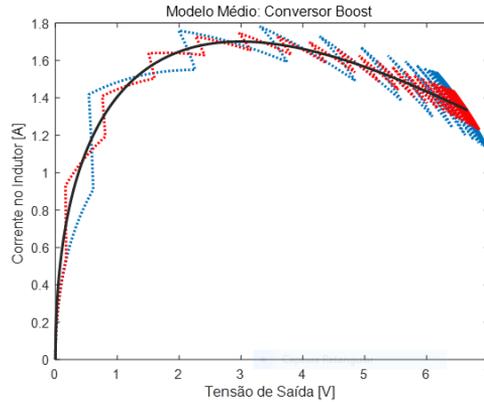


Figura 3.18: Comparação entre a resposta do modelo médio e o modelo chaveado com diferentes frequências.

O conversor *boost* é controlado pela manipulação do *duty cycle*  $D$ . Quando  $D = 1$  (chave ON) a energia é armazenada no indutor  $L$  (o conjunto  $R + L$  constitui uma bomba de corrente). Quando  $D = 0$  (chave OFF) a energia armazenada em  $L$  é passada para o conjunto  $R_o + C$ . Usualmente a ideia é medir a tensão de saída  $V_C = V_O$  e utilizar um controlador para ajustar  $D$  para manter a saída regulada.

O valor de  $V_C$  para uma entrada constante  $V_B$  e  $D$  fixo, em regime estacionário, é dado por

$$G(0) = \frac{(1 - D)R_0}{R + (1 - D)^2 R_0} \quad (3.182)$$

Portanto, pode-se conceber uma lei de controle em que  $D$  é ajustado conforme a tensão  $V_C$  desejada.

Nota-se, porém, que  $V_C$  possui uma dependência não linear com relação a  $D$ .

### 3.7 Linearização

Quando o modelo do sistema físico é linear, são disponíveis vários métodos efetivos para o projeto do controlador.

Um enfoque para projetar de controladores é, portanto, obter inicialmente um modelo linearizado para o sistema físico.

Embora existam vários métodos para obter uma aproximação linear para um modelo não linear, apresenta-se neste capítulo apenas o método do truncamento da série de Taylor. Posteriormente serão mostrados outros métodos.

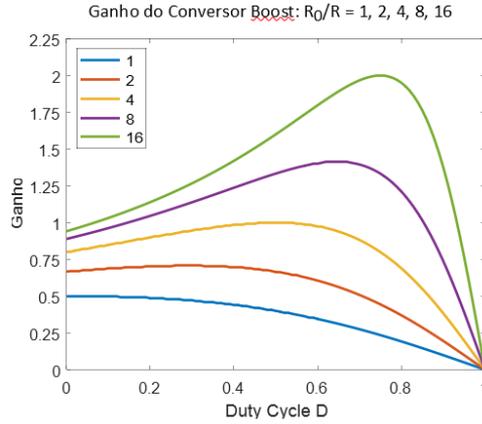


Figura 3.19: Características de variação da tensão em regime permanente, sobre variadas cargas (diferentes cores), em função o *duty cycle*  $D$ .

Considere um sistema descrito pela EDO da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad , \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.183)$$

em que  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  para  $t$  fixo.

Se  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_E$  é uma entrada constante, então a resposta  $\mathbf{x}_E$  é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}_E = \mathbf{f}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) \quad (3.184)$$

Adicionando-se uma perturbação  $\Delta \mathbf{u}(t)$ , ou  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_E + \Delta \mathbf{u}(t)$ , a resposta perturbada

$$(\mathbf{x}_E + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_E + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u}_E + \Delta \mathbf{u}(t)) \quad (3.185)$$

que, pela fórmula de Taylor e desprezando os termos superiores, permite escrever

$$\dot{\mathbf{x}}_E + \dot{\Delta \mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) + \nabla_{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) \Delta \mathbf{x} + \nabla_{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) \Delta \mathbf{u} + o(\|\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u}\|^2) \quad (3.186)$$

Notando que  $\dot{\mathbf{x}}_E = \mathbf{f}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E)$ ,

$$\dot{\Delta \mathbf{x}} \simeq \nabla_{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) \Delta \mathbf{x} + \nabla_{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) \Delta \mathbf{u} \quad (3.187)$$

para pequenos perturbações  $\{\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{x}\}$  ou

$$\dot{\Delta \mathbf{x}} \simeq \mathbf{A}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) \Delta \mathbf{u} \quad (3.188)$$

em que **A** e **B** são dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E)} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E)} \quad (3.189)$$

Tendo-se projetado um controlador com base no modelo linearizado, a sua utilização com o processo original requer que o valor nominal de  $\mathbf{u}_E$  seja somado com  $\Delta \mathbf{u}$  e  $\mathbf{x}_E$  subtraído de  $\mathbf{x}$ .

No caso de se ter  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ , procede-se de modo análogo, fazendo-se  $\Delta \bar{\mathbf{y}} = \nabla_{\mathbf{x}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_E) \Delta \mathbf{x}$  e subtraindo  $\bar{\mathbf{y}}$  de  $\mathbf{y}$  conforme indicado na figura 3.20.

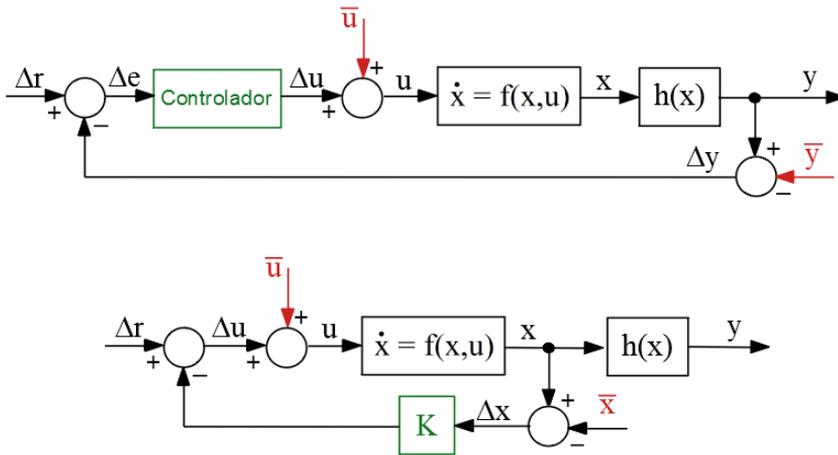


Figura 3.20: Estrutura para utilização do modelo linearizado usando a expansão em série de Taylor.

### Estabilidade estrutural

Alguns modelos não lineares podem ser sensíveis a incertezas paramétricas, ainda que estas sejam pequenas.

Considere o modelo escalar

$$\dot{x} = x^2 - 2x + 1 + \mu \quad (3.190)$$

em que  $\mu > 0$  é uma perturbação, por exemplo,  $\mu = 10^{-10}$ .

O ponto de equilíbrio é dado para o valor nominal  $\mu = 0$  por

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (3.191)$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1}}{2} \quad (3.192)$$

$$= 1 \quad (3.193)$$

Mas, com a incerteza  $\mu = 10^{-10}$ , resulta que

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (3.194)$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (1 + 10^{-10})}}{2} \quad (3.195)$$

$$= 1 \pm j10^{-5} \quad [\text{complexos}] \quad (3.196)$$

Neste exemplo, o comportamento do modelo é alterado drasticamente quando o parâmetro sofre uma pequena alteração, o que se conhece como o fenômeno da bifurcação.

Mais especificamente, nesse modelo, uma pequena variação de  $\mu$  afeta a existência ou não do ponto de equilíbrio.

O fenômeno apresentado é conhecido na literatura como bifurcação sela-nó (*saddle-node*, *fold* ou *tangencial bifurcation*).

$$\dot{\Delta x} = \nabla_x^T f(\bar{x}, \bar{u}) \Delta x + \nabla_u^T f(\bar{x}, \bar{u}) \Delta u \quad (3.197)$$

$$= 0 \Delta x + 3 \bar{u}^2 \Big|_{\bar{u}=0} \Delta u \quad (3.198)$$

$$= 0 \quad (3.199)$$

### 3.7.1 Validade dos modelos linearizados

#### Sistemas topologicamente conjugados

Em muitas aplicações, o modelo linearizado aproxima bem o comportamento do modelo não linear em uma vizinhança suficientemente pequena do ponto de equilíbrio.

Porém, nem sempre isso é verdadeiro.

Para estudar de forma mais aprofundada o tema, introduz-se o conceito de modelos topologicamente conjugados.

Considere 2 modelos, cada qual descrito por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad (3.200)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{z}(t)) \quad (3.201)$$

em que  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$  para  $t \in \mathbb{R}$ .

Assuma que ambos, 3.200 e 3.201, possuem soluções  $\mathbf{x}(\tau)$  e  $\mathbf{z}(\tau)$  para  $\tau \in [t_0, t)$  com  $t > 0$ .

Os sistemas 3.200 e 3.201 são ditos *topologicamente semiconjugados* se para algum  $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{Z} \subset \mathbb{R}^n$  abertos, existe uma aplicação bijetora  $\mathbf{h} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}$  tal que

$$\mathbf{h} \circ \mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \mathbf{h} \quad (3.202)$$

ou  $\mathbf{h}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$ .

De modo intuitivo, as soluções de 3.200 podem ser obtidas a partir daquelas de 3.201 por “deformações” caracterizadas por  $\mathbf{h}$  e vice-versa.

Uma função contínua  $\mathbf{h}$  com a inversa  $\mathbf{h}^{-1}$  também contínua é chamada de homeomorfismo. No caso de  $\mathbf{h}$  ser homeomórfica, diz-se que os modelos 3.200 e 3.201 são topologicamente conjugados.

### Exemplo: Sistemas lineares

Considere os sistemas lineares

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} \quad (3.203)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{G}\mathbf{z} \quad (3.204)$$

em que  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  são matrizes  $n \times n$ .

Os modelos 3.203 e 3.204 são topologicamente conjugados se, para  $\mathbf{F}_{n \times n}$ ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{H} \quad (3.205)$$

ou seja, são relacionados por uma transformação similar (mudança de base).

Para se estudar um sistema utilizando um modelo linearizado, deseja-se que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.206)$$

$$\dot{\Delta\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_E) \Delta\mathbf{x} \quad (3.207)$$

sejam topologicamente conjugados em uma vizinhança do ponto de operação  $\mathbf{x}_E$ .

Antes de apresentar o teorema de Hartman-Grobman, é necessário definir o que é um ponto de equilíbrio hiperbólico.

Um ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_E$  em torno do qual se fez a linearização é dito ser hiperbólico se nenhum autovalor de  $\mathbf{A}(\mathbf{x}_E)$  possuir parte real nula (ou não esteja sobre o eixo imaginário).

### Teorema de Hartman-Grobman

O teorema de Hartman–Grobman (1959/1960), também conhecido como o teorema da linearização, permite caracterizar o comportamento local de sistemas dinâmicos na vizinhança de pontos de equilíbrio hiperbólicos.

Seja  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  a solução de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  para um mapa suave (*smooth*)  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{x}_E$  um ponto de equilíbrio hiperbólico. Então existem vizinhanças  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_E) \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{Z}(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$  e um homeomorfismo  $\mathbf{h} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}$  tais que

1.  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_E) = \mathbf{0}$ ,
2.  $\mathbf{h} \circ \mathbf{f} = \mathbf{A} \circ \mathbf{h}$  em que  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  e  $\dot{\Delta \mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}$ .

Logo o modelo original ( $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) e o linearizado ( $\dot{\Delta \mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}$ ) são topologicamente conjugados.

Um resultado imediato é que se todos os autovalores da matriz Jacobiana  $\mathbf{A}(\mathbf{x}_E) = \nabla_{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_E)$  possuem a parte real negativa, esse ponto de equilíbrio hiperbólico  $\mathbf{x}_E$  é estável.

Esse procedimento para verificação da estabilidade é conhecido como o “primeiro método de Lyapunov” (ou o “método indireto de Lyapunov”).

Em problemas de controle existem, em geral, variáveis manipuladas (aqui denotadas  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ ).

Considere 2 modelos descritos por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.208)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{z}(t), \mathbf{v}(t)) \quad (3.209)$$

em que  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^m$  para  $t \in \mathbb{R}$ .

Assuma que dado  $\mathbf{u}(t)$ , 3.208 e 3.209 possuem solução  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  e  $(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \in \mathbf{Z} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

Novamente, deseja-se fazer a associação

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{z}(t), \mathbf{v}(t)) \iff \dot{\Delta \mathbf{x}} \simeq \mathbf{A}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) \Delta \mathbf{u}, \quad (3.210)$$

com o intuito de projetar leis de controle utilizando modelos linearizados.

### Caso de controle realimentado $(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{z}))$

Se as leis de controle são do tipo realimentação de estado  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  ou de saída dada por  $\mathbf{y} = \mathbf{l}(\mathbf{x})$  que leva a  $\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{l}(\mathbf{x}))$ , recaí-se no caso anterior e o teorema de Hartman-Grobman é aplicável.

**Caso de  $\mathbf{u}(t)$  gerado por uma EDO**

Considere um processo modelado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.211)$$

em que a lei de controle  $\mathbf{u}(t)$  é gerada por

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.212)$$

Tomando-se o estado aumentado  $\mathbf{x}_a = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{u}^T]^T$ , pode-se colocar 3.211 e 3.212 na forma

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_a(t)) \quad (3.213)$$

e o teorema de Hartman-Grobman pode ser utilizado.

**Contraexemplo**

Considere o sistema escalar

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.214)$$

$$= u^3 \quad (3.215)$$

O modelo linearizado no ponto  $(x_E, u_E) = (0, 0)$  é

$$\dot{\Delta x} = \nabla_x^T f(x_E, u_E) \Delta x + \nabla_u^T f(x_E, u_E) \Delta u \quad (3.216)$$

$$= 0 \Delta x + 3 u_E^2 \Big|_{u_E=0} \Delta u \quad (3.217)$$

$$= 0 \quad (3.218)$$

Aqui, a partir de um modelo controlável obteve-se um modelo linearizado não controlável.

**3.8 Estabilidade de sistemas LTI**

Um estado  $\mathbf{x}_E$  é dito ser ponto de equilíbrio de

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad (3.219)$$

se  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_E$  implica que, para  $\forall t \geq t_0$ , tem-se que  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_E$ .

Intuitivamente, o ponto de equilíbrio é aquele em que  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  ou, em outras palavras,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_E, t) = \mathbf{0}$ .

---

Para o caso particular de sistemas LTI SISO com a representação

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.220)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.221)$$

e entrada nula  $u(t) = 0$ , tem-se um único ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_E = \mathbf{0}$  se  $\mathbf{A}$  for não singular.

Os estudos dos casos de  $u(t) \neq 0$  ou de quando  $\mathbf{A}$  é singular são deixados como exercício.

Um ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_E$  é dito ser estável se, dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário,  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_E\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (3.222)$$

Um ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_E$  é dito ser assintoticamente estável se é estável e existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_E\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E\| \downarrow 0 \text{ para } t \uparrow \infty \quad (3.223)$$

Um ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_E$  é dito ser globalmente exponencialmente estável se  $\exists \alpha, \lambda > 0$  tal que para  $\forall \mathbf{x}(t_0)$

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_E\| e^{-\lambda t} \quad ; \forall t \geq t_0 \quad (3.224)$$

Sistemas LTI SISO são ditos globalmente assintoticamente estáveis (com certo abuso de linguagem, pois estabilidade é propriedade de pontos de equilíbrio) se todos os autovalores da matriz de sistemas  $\mathbf{A}_{n \times n}$  (ou, equivalentemente, todas as raízes  $\lambda_k$  do polinômio característico  $\Delta(\lambda)$ ) possuem parte real negativa, pois

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_k e^{\lambda_k t} \quad (3.225)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (3.226)$$

se  $u(t) = 0$ .

No domínio transformado, tal fato se traduz na condição de que todos os polos da função de transferência estão localizados estritamente no semiplano esquerdo.

Existem vários critérios que permitem verificar se todos os polos da função de transferência estão localizados estritamente no semiplano esquerdo, sem a necessidade de calculá-los. Alguns desses critérios serão apresentados em um capítulo próprio adiante.

### 3.9 Controlabilidade

Considere um sistema LTI de dimensão  $n$  descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.227)$$

com a condição inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  conhecida.

A representação 3.227 é dita ser controlável se, dado um ponto qualquer  $\mathbf{x}_f$  no espaço de estados, existe  $\mathbf{u}(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$ ,  $t_f > 0$ , tal que

$$\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_f) \quad (3.228)$$

ou seja, existe uma lei de controle  $\mathbf{u}(t)$  que leva um estado  $\mathbf{x}_0$  a um outro  $\mathbf{x}_f$ , ambos arbitrários.

Levando-se em conta a expressão da solução da equação diferencial 3.227, a fórmula que expressa a transferência de  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  para  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$  é

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_f &= e^{\mathbf{A}t_f} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}t_f} \left( \mathbf{x}_0 - \int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (3.229)$$

ou, introduzindo a notação  $\Delta\mathbf{x} = e^{-\mathbf{A}t_f} \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0$ , a equação 3.229 é reescrita como

$$\Delta\mathbf{x} = e^{-\mathbf{A}t_f} \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0 \quad (3.230)$$

$$= \int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.231)$$

A tarefa é obter  $\mathbf{u}(t)$  de modo que a equação 3.231 seja satisfeita. Ressalta-se que a solução não é única, pois pode-se transitar de  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}_f$  percorrendo caminhos diferentes e que correspondem a  $\mathbf{u}(t)$  distintos.

Propõe-se a seguinte lei de controle

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{W}_C(0, t_f)^{-1} \Delta\mathbf{x} \quad (3.232)$$

em que a matriz  $\mathbf{W}_C(0, t_f)$  é definida por

$$\mathbf{W}_C(t_1, t_2) \triangleq \int_{t_1}^{t_2} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau \quad (3.233)$$

Assuma que  $\mathbf{W}_C(t_1, t_2)$ , chamada de gramiano de controlabilidade, é inversível.

Substituindo-se a lei de controle proposta, a expressão à direita de 3.231 se torna

$$\int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{W}_C(0, t_f)^{-1} \Delta \mathbf{x} d\tau \quad (3.234)$$

$$= \underbrace{\int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T \tau} d\tau}_{\mathbf{W}_C(0, t_f)} \mathbf{W}_C(0, t_f)^{-1} \Delta \mathbf{x} \quad (3.235)$$

$$= \Delta \mathbf{x} \quad (3.236)$$

que é o resultado desejado, notando que  $\mathbf{W}_C(0, t_f)^{-1} (e^{-\mathbf{A}t_f} \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0)$  foi posto para fora da integral por este não depender de  $\tau$ .

Portanto, caso  $\mathbf{W}_C(t_1, t_2)$  definido em 3.233 seja uma matriz invertível para  $t_1 \neq t_2$ , é possível transitar de  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}_f$  e, conseqüentemente, o sistema é controlável. Resta verificar se há uma forma simples de verificar se  $\mathbf{W}_C(t_1, t_2)$  é invertível.

Ao invés de uma prova formal, será mostrado que um critério simples para verificar a controlabilidade é testar se

$$\rho \left( \left[ \mathbf{B} : \mathbf{A}\mathbf{B} : \dots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right] \right) = n \quad (3.237)$$

em que  $\rho(\mathbf{M})$  denota o posto da matriz.

De fato, substituindo-se a expressão da exponencial 3.122.

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = a_0(\tau)\mathbf{I} + a_1(\tau)\mathbf{A} + \dots + a_{n-1}(\tau)\mathbf{A}^{n-1} \quad (3.238)$$

na expressão da gramiano de controlabilidade em 3.233, tem-se que

$$\mathbf{W}_C(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T \tau}}_{\mathbf{\Phi}} d\tau \quad (3.239)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^T d\tau \quad (3.240)$$

em que

$$\mathbf{\Phi} = a_0(\tau)\mathbf{B} + a_1(\tau)\mathbf{A}\mathbf{B} + \dots + a_{n-1}(\tau)\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \quad (3.241)$$

Logo, a não singularidade de  $\mathbf{W}_C(t_1, t_2)$  está relacionada com a não-singularidade de  $\mathbf{\Phi}$  que, por sua vez, depende do posto de  $\mathbf{U} = \left[ \mathbf{B} : \mathbf{A}\mathbf{B} : \dots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right]$ .

Detalhes de uma prova completa podem ser encontrados em (CHEN, 1970), (HESPANHA, 2009) e (KAILATH, 1980), entre outros.

**O caso de  $W_C(0, \infty)$** 

Para o cálculo de  $W_C$  quando o processo é estável e invariante no tempo, note, inicialmente, que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \mathbf{A}e^{At} \quad (3.242)$$

que permite escrever

$$\frac{d}{dt} \left( e^{At} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T t} \right) = \mathbf{A} e^{At} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T t} + e^{At} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T t} \mathbf{A}^T \quad (3.243)$$

Integrando esta expressão, e lembrando da hipótese de que  $A$  é estável

$$\underbrace{e^{At} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T t}}_{-\mathbf{B} \mathbf{B}^T} \Big|_0^\infty = \mathbf{A} \underbrace{\int_0^\infty e^{At} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T t} dt}_{W_C} + \underbrace{\int_0^\infty e^{At} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T t} dt}_{W_C} \mathbf{A}^T \quad (3.244)$$

constata-se que

$$\mathbf{A} W_C + W_C \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (3.245)$$

**Exemplos de verificação da controlabilidade**

Considere o exemplo do motor DC, representado por um modelo no espaço de estado com dimensão  $n = 2$

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (3.246)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \quad (3.247)$$

e que corresponde à função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.248)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.249)$$

$$= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad (3.250)$$

A matriz  $\mathbf{U}$  calculada a partir de  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  é

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.251)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (3.252)$$

e esta representação do motor DC é controlável uma vez que  $\rho(\mathbf{U}) = 2$ .

Considere uma outra representação do mesmo motor DC, agora com o espaço de estados de dimensão  $\bar{n} = 3$ .

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}} u \quad (3.253)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \mathbf{x} \quad (3.254)$$

que resulta na mesma função de transferência que 3.250, mas agora empregando  $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}\}$  em 3.253 e 3.254

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & 6 \\ -1 & s & 11 \\ 0 & -1 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.255)$$

$$= \frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^2+3s+2} \quad (3.256)$$

O fato de uma representação no espaço de estados de dimensão 3 resultar em uma função de transferência de ordem 2 está relacionado com o fato de existirem componentes que ou não recebem entradas, ou não produzem saídas.

No caso da representação  $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}\}$ , tendo-se em vista que

$$\rho\left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} : \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} : \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\right) = 2 < 3 = \bar{n} \quad (3.257)$$

conclui-se que ela não é controlável. Mais detalhadamente, o cancelamento de  $(s+3)$  na expressão 3.256 indica que o modo  $e^{-3t}$  não é afetado por  $u(t)$ .

### 3.10 Observabilidade

Por outro lado, seja um sistema LTI de dimensão  $n$  descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (3.258)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}, \quad (3.259)$$

com a condição inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  desconhecida.

A representação é dita ser observável se as entradas  $\mathbf{u}(t)$  e saídas  $\mathbf{y}(t)$  são conhecidas em um intervalo  $[t_1, t_2]$ ,  $t_1 \neq t_2$ , então é possível estimar o valor de  $\mathbf{x}_0$ .

Sabendo-se que a solução do sistema de equações 3.258,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (3.260)$$

ou seja,

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \underbrace{\mathbf{y}(t) - \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{\gamma(t)} \quad (3.261)$$

em que o termo  $\gamma(t)$  é conhecido.

Infelizmente,  $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}$  não é, em geral, invertível mesmo em casos em que a matriz  $\mathbf{C}$  é quadrada  $n \times n$ , o que não permite escrever  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t})^{-1} \gamma(t)$ , para algum  $t$ .

Multiplicando-se a equação 3.261 pela esquerda pelo termo  $e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T$ , obtém-se que

$$e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \gamma \quad (3.262)$$

que, integrado entre 0 e  $t > 0$ , leva a

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \gamma \quad (3.263)$$

Definindo-se a matriz gramiana de observabilidade  $\mathbf{W}_O(t_1, t_2)$ , no caso geral, por

$$\mathbf{W}_O(t_1, t_2) \triangleq \int_{t_1}^{t_2} e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \quad (3.264)$$

a expressão 3.263 se torna

$$\mathbf{W}_O(0, t) \mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \gamma \quad (3.265)$$

e, se  $\mathbf{W}_O(t_1, t_2)$  for inversível para  $t_1 \neq t_2$ ,

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{W}_O(0, t) e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \gamma \quad (3.266)$$

A invertibilidade de  $\mathbf{W}_O(t_1, t_2)$  pode ser verificada se

$$\rho(\mathbf{V}) = n \quad (3.267)$$

em que

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.268)$$

conforme argumento análoga utilizado no caso de controlabilidade, ou seja,

$$\mathbf{W}_O(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \underbrace{\mathbf{C} e^{\mathbf{A} \tau}}_{\Psi} d\tau \quad (3.269)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Psi^T \Psi d\tau \quad (3.270)$$

### Exemplo de verificação da observabilidade

Considere o exemplo do motor DC, representado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (3.271)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \quad (3.272)$$

para o qual

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} \quad (3.273)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.274)$$

cujo posto é 2. Logo, esta representação do motor DC é observável.

Os critérios para a verificação de controlabilidade e de observabilidade são essenciais em um projeto, uma vez que, no projeto de controladores de malha fechada, a variável manipulada  $u$  pode depender direta ou indiretamente da saída  $y$ . Na literatura podem ser encontrados outros critérios de controlabilidade e de observabilidade (vide, por exemplo, (HESPANHA, 2009)).

### 3.10.1 Decomposição de Kalman

O modelo de um sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.275)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (3.276)$$

pode ser reescrito, através de uma transformação similar apropriada  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Px}$ , na forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{C\bar{O}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{CO} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{C}O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{C\bar{O}} & \bar{\mathbf{A}}_{12} & \bar{\mathbf{A}}_{13} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{CO} & \bar{\mathbf{A}}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{C}O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{C\bar{O}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{CO} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{C}O} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{C\bar{O}} \\ \bar{\mathbf{B}}_{CO} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_{CO} & \bar{\mathbf{C}}_{\bar{C}O} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Du} \quad (3.277)$$

A decomposição de Kalman leva a 4 blocos indicados por:  $CO$  = controlável e observável,  $C\bar{O}$  = controlável mas não observável,  $\bar{C}O$  = não controlável mas observável,  $\bar{C}\bar{O}$  = não controlável nem observável.

O bloco  $\bar{C}\bar{O}$  não é representado em 3.277 porque não recebe entradas nem produz saídas, de forma que, se for estável, não afeta o projeto do controlador.

### 3.10.2 Redução de modelos

Nesse módulo é tratado apenas o método de redução de modelos utilizando balanceamento dos gramianos de controlabilidade e de observabilidade.

Modelos balanceados são aqueles em que os gramianos de controlabilidade e observabilidade são iguais e diagonais.

Transformações similares podem tornar modelos não balanceados em balanceados.

O balanceamento é útil, por exemplo, na redução de modelos, pois fornece informações sobre os ganhos relativos de um canal em relação a outro.

Considere um processo descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.278)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (3.279)$$

e seja a transformação similar

$$\mathbf{x} = \mathbf{Tz} \quad (3.280)$$

Notando que  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{z}}$  e que  $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ ,

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\widehat{\mathbf{A}}}_{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}} \mathbf{z} + \underbrace{\widehat{\mathbf{B}}}_{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}} \mathbf{u} \quad (3.281)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\widehat{\mathbf{C}}}_{\mathbf{C}\mathbf{T}} \mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.282)$$

Usando a expressão 3.245, e multiplicando por  $\mathbf{T}$  pela esquerda e por  $\mathbf{T}^{-T}$  pela direita, obtém-se que

$$\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{W}} + \widehat{\mathbf{W}}\widehat{\mathbf{A}}^T + \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{B}}^T = \mathbf{0} \quad (3.283)$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\widehat{\mathbf{W}} + \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{T}^T\mathbf{A}^T\mathbf{T}^{-T} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{T}^{-T} = \mathbf{0} \quad (3.284)$$

$$\mathbf{A} \underbrace{\widehat{\mathbf{W}}}_{\mathbf{W}} + \underbrace{\widehat{\mathbf{W}}}_{\mathbf{W}} \mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (3.285)$$

Logo,  $\mathbf{T}$  transforma  $\mathbf{W}$  segundo

$$\widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{T} \quad (3.286)$$

Analogamente, para o gramiano de observabilidade, tem-se

$$\widehat{\mathbf{A}}^T\widehat{\mathbf{V}} + \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{A}} + \widehat{\mathbf{C}}^T\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{0} \quad (3.287)$$

$$\mathbf{T}^T\mathbf{A}^T\mathbf{T}^{-T}\widehat{\mathbf{V}} + \widehat{\mathbf{V}}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{T}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (3.288)$$

$$\mathbf{A}^T \underbrace{\widehat{\mathbf{V}}}_{\mathbf{V}} + \underbrace{\widehat{\mathbf{V}}}_{\mathbf{V}} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (3.289)$$

e, portanto,

$$\widehat{\mathbf{V}} = \mathbf{T}^T\mathbf{V}\mathbf{T} \quad (3.290)$$

O objetivo é buscar  $\mathbf{T}$  de modo que

$$\widehat{\mathbf{V}} = \widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{\Lambda} \quad (3.291)$$

em que  $\mathbf{\Lambda}$  é diagonal

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (3.292)$$

Uma forma de obter  $\mathbf{T}$  é através da decomposição em valores singulares (SVD - *Singular Value Decomposition*).

Sejam as matrizes raiz quadrada  $\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}$  e  $\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}$  de  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{V}$ , respectivamente, que

pode ser obtida via decomposição de Cholesky (vide, por exemplo, (BERNSTEIN, 2009)).

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{W}^{\frac{T}{2}} \quad (3.293)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{\frac{T}{2}} \quad (3.294)$$

Através da Decomposição em Valores Singulares (SVD) da matriz  $\mathbf{V}^{\frac{T}{2}} \mathbf{W}^{\frac{1}{2}}$ , obtém-se  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{V}^{\frac{T}{2}} \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{M} \mathbf{\Lambda} \mathbf{N}^T \quad (3.295)$$

em que  $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \mathbf{I}$  (ou seja,  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$  e  $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^T$ ).

Observando em 3.295 que  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^T \mathbf{V}^{\frac{T}{2}} \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{N}$  a transformação buscada é

$$\mathbf{T} = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{N} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{V}^{-\frac{T}{2}} \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$$

De fato, notando que  $(\mathbf{X}\mathbf{Y})^{-T} = (\mathbf{Y}^T \mathbf{X}^T)^{-1} = (\mathbf{X}^T)^{-1} (\mathbf{Y}^T)^{-1}$

$$\widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{T}^{-T} \quad (3.296)$$

$$= \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{M}^T \mathbf{V}^{\frac{T}{2}} \mathbf{W} \mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.297)$$

$$= \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{M}^T \underbrace{\mathbf{V}^{\frac{T}{2}} \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{W}^{\frac{T}{2}} \mathbf{V}^{\frac{1}{2}}}_{\mathbf{M} \mathbf{\Lambda} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{M}^T} \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.298)$$

$$= \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{\Lambda} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{\Lambda} \quad (3.299)$$

Analogamente para  $\widehat{\mathbf{V}}$ ,

$$\widehat{\mathbf{V}} = \mathbf{T}^T \mathbf{V} \mathbf{T} \quad (3.300)$$

$$= \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{N}^T \mathbf{W}^{\frac{T}{2}} \mathbf{V} \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{N} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.301)$$

$$= \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{N}^T \underbrace{\mathbf{W}^{\frac{T}{2}} \mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{\frac{T}{2}} \mathbf{W}^{\frac{1}{2}}}_{\mathbf{N} \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}^T} \mathbf{N} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.302)$$

$$= \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{N} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{\Lambda} \quad (3.303)$$

Os passos para balancear um modelo no espaço de estados são

- determinar  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{V}$  ( $\mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{A}^T \mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}$ )
- por SVD obter  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  tal que  $\mathbf{V}^{\frac{T}{2}} \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{M} \mathbf{\Lambda} \mathbf{N}^T$
- a transformação similar buscada é  $\mathbf{T} = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{N} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{V}^{-\frac{T}{2}} \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$

Uma vez que o sistema está balanceado, ordena-se o conjunto  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  e os estados associados a  $\lambda_i$  menores (informalmente, mais “fracamente” controláveis e observáveis) são descartados.

### 3.11 Simulação de sistemas dinâmicos

Conforme foi visto, EDOs lineares admitem solução fechada. Porém, em geral, esse não é o caso de modelos não lineares. Nesses caso, a simulação pode ser um enfoque útil. Em uma primeira avaliação de se um modelo linearizado e eventualmente reduzido se aproxima do processo físico real, pode-se fazer uma comparação com um modelo mais completo, eventualmente não linear.

No passado eram utilizados computadores analógicos, hoje superados pelos digitais. Na simulação analógica, a integração era realizada por amplificadores operacionais, enquanto na simulação digital a integração é realizada numericamente, utilizando, por exemplo, o algoritmo Runge-Kutta (vide, por exemplo, (BLUM, 1972)).

A ideia básica é simples e consiste em representar  $\dot{x}(t)$  através de blocos matemáticos e de roteamento de sinais, de modo que na saída do bloco integrador seja obtido  $x(t)$ .

Com o intuito de apresentar uma forma de realizar uma simulação digital de sistema dinâmico representado por uma equação ordinária, considere a equação de Van der Pol controlada

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = v \quad (3.304)$$

A equação 3.304 pode ser reescrita de modo que seja expressa em termos de 2 integradores independentes, fazendo-se  $x_1 = x$  e  $x_2 = \dot{x}$ , obtendo-se

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.305)$$

$$\dot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 + v \quad (3.306)$$

Como pode ser visto na figura 3.21, para o caso particular da equação de Van der Pol controlada, basta que se alimente cada bloco integrador com sinais  $\dot{x}$  apropriados.

#### 3.11.1 Solução utilizando transformada de Laplace

Os sistemas do tipo LTI podem ser estudados mediante o emprego da transformadas de Laplace, visto que são representados por equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes que não variam com o tempo.

A transformada de Laplace é definida por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad (3.307)$$

$$\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \quad (3.308)$$

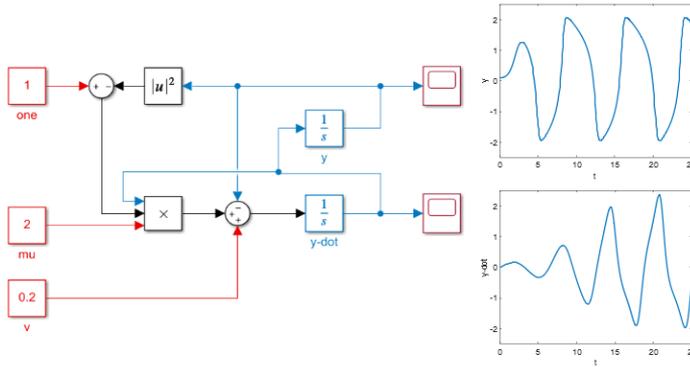


Figura 3.21: Exemplo de diagrama de simulação: equação de Van der Pol.

possui a propriedade

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] = sF(s) - f(0) \tag{3.309}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace aos dois lados da equação de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{3.310}$$

obtém-se que

$$\mathcal{L}[\dot{\mathbf{x}}] = \mathcal{L}[\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}] \tag{3.311}$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{3.312}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{3.313}$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{3.314}$$

Notando que  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ , a versão transformada da saída  $\mathbf{Y}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{y}(t)]$  é dada por

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + \underbrace{(\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})}_{\mathbf{G}(s)}\mathbf{U}(s) \tag{3.315}$$

A expressão

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{3.316}$$

é denominada de função de transferência do sistema e representa, no domínio transformado “s”, uma relação entre as grandezas de entrada e a saída.

A função de transferência é dita ser uma representação externa de um sistema (ou seja, envolve apenas  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{y}$ ), enquanto as equações de estado são ditas

serem representações internas (envolvem também  $\mathbf{x}$ ).

Para simplificar a notação, considera-se a partir desse ponto, sistemas SISO, de modo que  $G(s)$  é  $1 \times 1$ .

No caso de  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ , a relação entrada-saída é um mero “ganho”

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3.317)$$

e, portanto, no domínio transformado, podem-se empregar representações tipo grafos como o *fluxograma* ou *fluxografo* (MASON, 1956) .

A função de transferência é uma razão de polinômios (ou uma matriz com razões de polinômios  $G_{ij}(s)$  no caso multivariável, da forma

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.318)$$

$$= \frac{K(s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m)}{s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n} \quad (3.319)$$

$$= \frac{K(s - \zeta_1) \dots (s - \zeta_m)}{(s - \pi_1) \dots (s - \pi_n)} \quad (3.320)$$

em que  $\zeta_i$  são chamados de *zeros* e  $\pi_j$  de *polos* do modelo.

De posse de  $Y(s)$ , a função de saída  $y(t)$  pode ser recuperada através da transformada inversa de Laplace

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \quad (3.321)$$

A ideia é expressar  $Y(s)$  como uma soma de parcelas típicas

1.  $\mathcal{L}^{-1}[\delta(t)] = 1$  (delta de Dirac)

2.  $\mathcal{L}^{-1}[u(t)] = \frac{1}{s}$  (degrau unitário)

3.  $\mathcal{L}^{-1}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$

4.  $\mathcal{L}^{-1}[te^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2}$

5.  $\mathcal{L}^{-1}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

6.  $\mathcal{L}^{-1}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

### 3.11.2 Exemplo de transformada inversa de Laplace

Seja um processo cujo modelo é descrito no domínio transformado por

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 6} \quad (3.322)$$

e a excitação é um degrau unitário  $U(s) = 1/s$ .

A saída  $Y(s)$  é dada por

$$y(t) = \mathcal{L} [Y(s)] \quad (3.323)$$

$$= \mathcal{L} [G(s)U(s)] \quad (3.324)$$

$$= \mathcal{L} \left[ \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 6} \frac{1}{s} \right] \quad (3.325)$$

Para obter a expressão da transformada inversa, utiliza-se a expansão em frações parciais,

$$\mathcal{L} \left[ \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 6} \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L} \left[ \frac{r_1}{s + 2} + \frac{r_2}{s + 3} + \frac{r_3}{s} \right] \quad (3.326)$$

em que  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  devem satisfazer a identidade

$$\frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 6} \frac{1}{s} = \frac{r_1}{s + 2} + \frac{r_2}{s + 3} + \frac{r_3}{s} \quad (3.327)$$

Existem métodos práticos para obter  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ , sem necessitar a solução de um sistema de equações.

Um tal método é multiplicar o denominador associado a  $r_i$  em ambos os lados da equação 3.327.

Para o caso particular de obter  $r_2$ , multiplicam-se ambos os lados de 3.327 por  $(s + 3)$

$$\frac{2s + 1}{(s + 2)(s + 3)} \frac{1}{s} (s + 3) = \frac{r_1}{s + 2} (s + 3) + \frac{r_2}{s + 3} (s + 3) + \frac{r_3}{s} (s + 3) \quad (3.328)$$

Fazendo a substituição  $s = -3$ , tem-se que

$$-\frac{5}{3} = \frac{r_1}{s + 2} (s + 3) \Big|_{s=-3} + r_2 + \frac{r_3}{s} (s + 3) \Big|_{s=-3} \quad (3.329)$$

Usando o mesmo procedimento para obter  $r_1$  e  $r_3$ , pode-se expressar a saída

como

$$y(t) = \mathcal{L} \left[ \frac{2s+1}{s^2+5s+6} \frac{1}{s} \right] \quad (3.330)$$

$$= \mathcal{L} \left[ \frac{-\frac{5}{3}}{s+2} + \frac{\frac{3}{2}}{s+3} + \frac{\frac{1}{6}}{s} \right] \quad (3.331)$$

$$= \mathcal{L} \left[ \frac{-\frac{5}{3}}{s+2} \right] + \mathcal{L} \left[ \frac{1.5}{s+3} \right] + \mathcal{L} \left[ \frac{\frac{1}{6}}{s} \right] \quad (3.332)$$

$$= -\frac{5}{3}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{6}1(t) \quad (3.333)$$

### Relações entre os Domínios $t$ e Transformado $s$

Retomando o exemplo do motor DC, tinha-se que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.334)$$

Da expressão 3.315,

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(s) \quad (3.335)$$

em que

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.336)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \quad (3.337)$$

e

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.338)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.339)$$

$$= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad (3.340)$$

Portanto, para o motor DC, a relação entrada-saída é dada por

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) + \frac{1}{s^2 + 3s + 2} U(s) \quad (3.341)$$

Seja agora uma entrada do tipo degrau unitário

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.342)$$

cujas representação no domínio transformado é

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] \quad (3.343)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} u(\tau) d\tau \quad (3.344)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} d\tau \quad (3.345)$$

$$= -\frac{1}{s} \Big|_0^{\infty} \quad (3.346)$$

$$= \frac{1}{s} \quad (3.347)$$

No caso particular de condição inicial  $[\omega(0) \ i_a(0)]^T = [1 \ 0]^T$  e entrada degrau unitário,  $U(s) = 1/s$ , a expressão 3.341 permite escrever a resposta  $Y(s)$  como sendo

$$Y(s) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] + \frac{1}{s^2+3s+2} \frac{1}{s} \quad (3.348)$$

$$= \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)(s+2)} \quad (3.349)$$

e, portanto,  $y(t)$  pode ser obtido pela transformada inversa de Laplace

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)(s+2)} \right] \quad (3.350)$$

Expandindo  $Y(s)$  da expressão 3.349, tem-se que

$$\frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+1} + \frac{r_3}{s+2} \quad (3.351)$$

$$= \frac{(r_1 + r_2 + r_3)s^2 + (3r_1 + 2r_2 + r_3)s + 2r_1}{s(s+1)(s+2)} \quad (3.352)$$

Igualando-se os numeradores em 3.351-3.352,

$$r_1 + r_2 + r_3 = 1 \quad (3.353)$$

$$3r_1 + 2r_2 + r_3 = 3 \quad (3.354)$$

$$2r_1 = 1 \quad (3.355)$$

ou  $r_1 = 1/2$ ,  $r_2 = 1$  e  $r_3 = -0.5$ , de modo que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+2} \right] \quad (3.356)$$

Consultando uma tabela de transformadas inversas de Laplace (disponível, por exemplo, em (DORF; BISHOP, 1995), (OGATA, 1970), (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1986), (KUO, 1980)), constata-se que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{r}{s+a} \right] = r e^{-at} \quad (3.357)$$

e, pela linearidade aplicada à expressão 3.356

$$y(t) = \omega(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} \quad (3.358)$$

que coincide com o resultado obtido anteriormente (primeiro componente da expressão 3.158).

**Observação 1:** Em casos em que há atrasos puros de  $T$  unidades de tempo dos sinais, a função de transferência pode apresentar termos tipo  $exp(-Ts)$ , visto que

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-Ts} \quad (3.359)$$

que é também do tipo polinomial, caso se interprete como

$$e^{-Ts} = 1 - Ts + \frac{1}{2!} T^2 s^2 - \frac{1}{3!} T^3 s^3 + \dots \quad (3.360)$$

**Observação 2:** Considere a função  $f(t) = e^{-at}$  em que  $a > 0$ . A transformada de Laplace de  $f(t)$ , pela definição, é dada por

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.361)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} dt \quad (3.362)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \quad (3.363)$$

Na região em que  $(Re\{s\} + a) > 0$ , ou seja,  $Re\{s\} > -a$ , a integral converge e

$$F(s) = \frac{1}{s+a} \quad (3.364)$$

O semiplano caracterizado por  $Re\{s\} > -a$  é chamado de região de convergência (*Region of Convergence* - ROC).

Logo, para obter a transformada inversa, o caminho da integração  $(\sigma - j\infty) \rightarrow (\sigma + j\infty)$  em

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} e^{-st} F(s) ds \quad (3.365)$$

deve ser tal que  $\sigma > -a$ .

A expressão em 3.365 é chamada de Integral de Bromwich ou Fórmula de Mellin (DOETSCH, 1974).

**A transformada de Laplace permite representar a relação entre a entrada  $u(t)$  e a saída  $y(t)$  que envolve uma integral de convolução como um simples ganho  $G(s)$  no domínio transformado,  $Y(s) = G(s)U(s)$ . A função de transferência  $G(s)$  pode ser calculada de modo muito simples,  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , bem como a sua inversa através da expansão em frações parciais.**

### 3.11.3 Resposta a Impulso $t$ e $s$

Tanto as soluções obtidas no domínio  $t$  quanto no domínio transformado  $s$  são representações do mesmo sistema e devem estar estreitamente relacionadas. De fato, considere uma entrada  $u$  do tipo impulsivo, ou seja,  $u(t) = \delta(t)$  (função delta de Dirac ou, mais rigorosamente, função generalizada ou distribuição de Dirac).

Considerando o fato (vide, por exemplo (ZEMANIAN, 1965))

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0) \quad (3.366)$$

obtém-se de 3.108 para o caso  $\mathbf{x}(0) = 0$  e  $u(t) = \delta(t)$  que

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (3.367)$$

$$= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (3.368)$$

$$= \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\delta(\tau)d\tau \quad (3.369)$$

$$= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B} \Big|_{\tau=0} \quad (3.370)$$

$$= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} \quad (3.371)$$

A resposta a uma entrada impulso é denotada por

$$g(t) \triangleq y(t)|_{u=\delta} = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} \quad (3.372)$$

para  $t \geq 0$ , supondo o sistema inicialmente em repouso.

Uma outra maneira de expressar compactamente a resposta impulso é

$$g(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} \times 1(t) \quad (3.373)$$

em que o sinal degrau unitário é definido por

$$1(t) = \begin{cases} 1 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} \quad (3.374)$$

Essa necessidade de incluir a condição  $t \geq 0$  decorre do princípio da *causalidade*, ou seja, para indicar a ausência da resposta antes da aplicação da excitação de entrada, que no caso ocorre em  $t = 0$ .

Assumindo-se que  $u(t) = 0$ , para  $t < 0$  pode-se notar que

$$y(t) = \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B} u(\tau)d\tau \quad (3.375)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) u(\tau)d\tau \quad (3.376)$$

$$= [g * u](t) \quad (3.377)$$

em que  $[f * g](t)$  denota a convolução entre as funções  $f$  e  $g$ , de modo que, usando a propriedade  $\mathcal{L}[[f * g](t)] = F(s)G(s)$ , permite escrever

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3.378)$$

Portanto,  $G(s)$  é a transformada de Laplace da resposta a impulso  $g(t)$ .

É interessante lembrar, ainda, que o polinômio característico da matriz  $\mathbf{A}_{n \times n}$  é o polinômio de grau  $n$  dado por

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (3.379)$$

e que coincide com o denominador da função de transferência

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.380)$$

$$= \mathbf{C} \left[ \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \right] \mathbf{B} \quad (3.381)$$

$$= \frac{1}{\Delta(s)} \mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} \quad (3.382)$$

Portanto, os polos de um sistema são números complexos que anulam o denominador de  $G(s)$  e coincidem com os autovalores de  $A$ . Além disso, constata-se que, na ausência de entradas ( $u(t) = 0$ ), a saída do sistema é uma soma ponderada de exponenciais  $e^{\mathbf{A}_1 t}, \dots, e^{\mathbf{A}_n t}$ , chamados de *modos*. Lembrar que, quando há autovalores com multiplicidade maior que 1, por exemplo, se  $\mathbf{A}_i$  possui multiplicidade  $k$ , então surgem termos  $t^k e^{\mathbf{A}_i t}$

Os autovalores da matriz  $A$  são também raízes do polinômio característicos e polos da função de transferência. A função de transferência é a transformada de Laplace da resposta impulso. Para entrada nula, a saída de um sistema LTI é uma soma de exponenciais com pesos dependentes da condição inicial. Em suma, equações de estado e funções de transferência se relacionam pelo conjunto de números complexos que são os autovalores da matriz  $A$  ou os polos do  $G(s)$ .

### 3.12 Sistemas de segunda ordem

Um sistema de grande importância prática é o de segunda ordem (ou grau). A função de transferência de um sistema de segunda ordem LTI genérico é da forma

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b} \quad (3.383)$$

Porém, é muito conveniente reescrever 3.383 na forma

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.384)$$

pois os polos ficam descritos por

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \implies s = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \quad (3.385)$$

e no caso de  $0 < \xi < 1$  os polos são complexos conjugados e dados por

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.386)$$

sendo denotados frequentemente na forma

$$s = -\sigma \pm j\omega_d \quad (3.387)$$

$$\sigma = \xi\omega_n \quad (3.388)$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.389)$$

Os parâmetros  $\xi$  e  $\omega_n$  possuem interpretação física imediata e são chamados, respectivamente, de coeficiente de amortecimento e frequência natural.

A obtenção de  $\xi$  e de  $\omega_n$ , a partir de  $a$  e  $b$  em 3.383, é imediata notando que

$$b = \omega_n^2 \implies \omega_n = \sqrt{b} \quad (3.390)$$

$$a = 2\xi\omega_n \implies \xi = \frac{a}{2\omega_n} = \frac{a}{2\sqrt{b}} \quad (3.391)$$

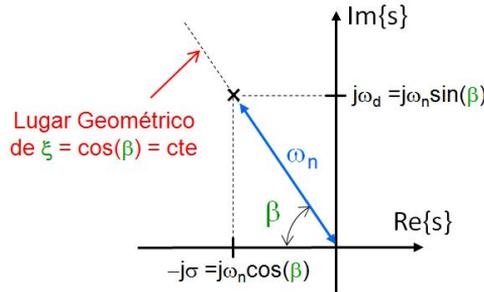


Figura 3.22: Relação entre as partes real e imaginária de polos complexos conjugados de um sistema de segunda ordem.

Como foi visto anteriormente, a resposta de um sistema LTI que possui um polo em  $p$  apresenta termos (modos) tipo  $e^{pt}$  na saída.

Como a matriz  $\mathbf{A}$  em  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$  é real, o polinômio característico  $\Delta(s)$  possui coeficientes reais, de modo que, se um número complexo  $s$  é raiz de  $\Delta(s) = 0$ , então o seu complexo conjugado  $\bar{s}$  também o é.

Portanto, a saída apresenta termos  $e^{-\sigma t \pm j\omega_d t}$ , ou seja, um componente oscilatório  $\sin(\omega_d t + \phi)$  com envoltória  $e^{-\sigma t}$ .

Graficamente, a resposta de um sistema de segundo grau a uma excitação do tipo degrau unitário (3.374), quando  $0 < \xi < 1$ , apresenta a forma vista na figura 3.23.

A resposta a um entrada degrau de um sistema linear de segunda ordem pode ser bem caracterizada através de dois parâmetros, mais especificamente,  $\xi$  e  $\omega_n$ .

Introduzindo a notação  $\beta = \cos^{-1}(\xi)$  tem-se que a resposta degrau apresenta como grandezas notáveis o tempo de subida (*rise time*)

$$t_r = \frac{(\pi - \beta)}{\omega_d} \tag{3.392}$$

e o sobressinal (*overshoot*, sobressinal, sobrepasso, ultrapassagem)

$$M_p = \exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\pi\right) \tag{3.393}$$

Dadas as especificações de sobressinal ( $M_p$ ) e tempo de subida ( $t_r$ ), os valores de  $\xi$  e  $\omega_n$  podem ser obtidas aplicando-se as expressões 3.393 e 3.392, ou por inspeção dos gráficos 3.24.

Além de  $t_r$  e  $M_p$ , podem ser definidos o tempo de pico  $t_p$  e o tempo de acomodação  $t_s$ . O tempo de acomodação (*settling time*)  $t_s$  é aquele que corresponde ao instante em que a saída entra em uma faixa de tolerância (no caso)

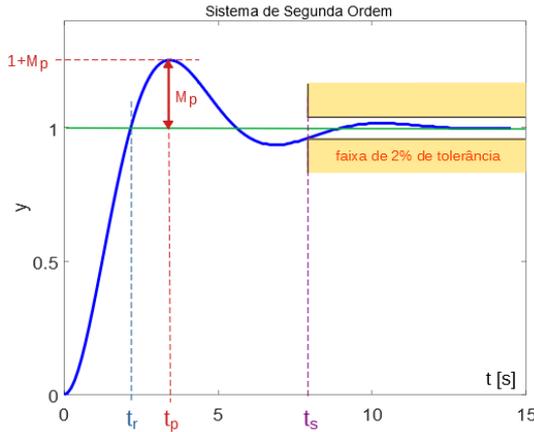


Figura 3.23: Resposta típica de um sistema de segunda ordem. Nesse exemplo,  $\xi = 0.456$  e  $\omega_n = 2$

de 2% em relação ao valor de regime.

**Observação importante**

Notar que o sobressinal  $M_p$  depende somente do coeficiente de amortecimento  $\xi$ , enquanto o tempo de subida  $t_r$  depende de  $\xi$  e de  $\omega_n$ .

Embora ainda não tenha sido definido formalmente, a *margem de fase* de um sistema de segunda ordem é calculada a partir da malha aberta

$$L(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n} \tag{3.394}$$

e a sua fórmula é

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi^4} - 2\xi^2}} \tag{3.395}$$

também depende apenas de  $\xi$ .

**Exemplo: Sistema massa + mola + amortecedor**

Retomando o sistema massa+mola+amortecedor, seja  $f_{mola} = ky$  e  $f_{amortecedor} = b\dot{y}$ , de modo que

$$m\ddot{y} = f - b\dot{y} - ky \tag{3.396}$$

em que  $f$  é uma força de tração externa.

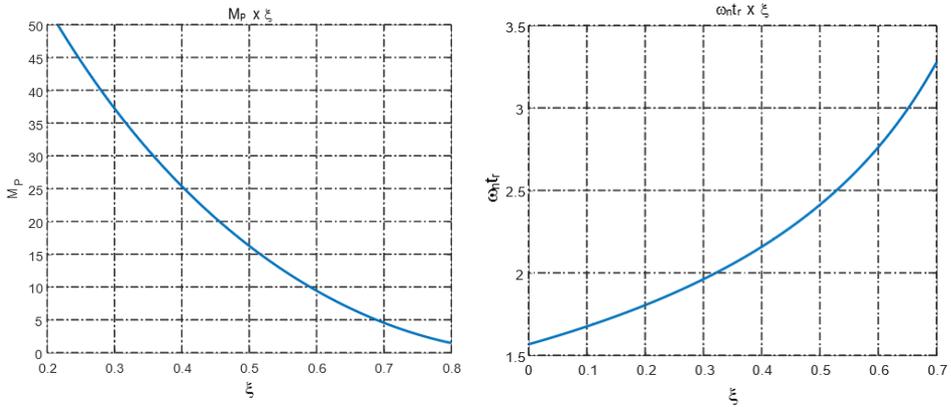


Figura 3.24: Gráficos  $M_p \times \xi$  e  $t_r \omega_n \times \xi$ .

Assumindo que o corpo está inicialmente em repouso ( $y = 0, \dot{y} = 0$ ) e a força  $f$  é aplicada a partir de  $t = 0$ , a transformada de Laplace permite escrever

$$(ms^2 + bs + k) Y(s) = F(s) \tag{3.397}$$

ou

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \tag{3.398}$$

Logo os parâmetros  $\xi$  e  $\omega_n$  são

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.399}$$

$$2\xi\omega_n = \frac{b}{m} \tag{3.400}$$

A figura 3.25 apresenta as respostas de sistemas de segunda ordem com  $\omega_n = 1$  e com valores de  $\xi = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ , evidenciando o efeito do coeficiente de amortecimento.

Vê-se, também, na figura 3.25, o significado do conceito de frequência natural, no caso,  $\omega_n = 1$ , que corresponde ao período de oscilação de  $P = 2 * \pi / \omega_n \simeq 6.28$  s.

Enfim, sistemas de segunda ordem podem ser facilmente especificados mediante duas de suas características: percentagem de sobressinal + tempo de subida, razão de decaimento + tempo de acomodação, margem de fase + largura de banda, entre outras combinações, uma vez que são necessários apenas dois parâmetros  $\xi$  e  $\omega_n$  para determinar a posição dos polos.

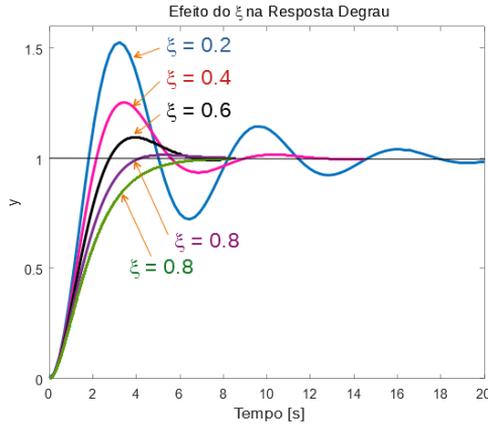


Figura 3.25: Respostas de sistemas de segunda ordem com  $\omega_n = 1$  mas com variados valores de  $\xi$ .

### 3.12.1 Polos dominantes

Os modelos de segunda ordem são, muitas vezes, úteis para o estudo de sistemas de ordem maior, pois muitas vezes estes podem ser aproximados, valendo-se do conceito de polos dominantes.

Seja um sistema que possui polos  $p_1 = -\sigma + j\omega$ ,  $p_2 = -\sigma - j\omega$  ( $\sigma > 0, \omega \geq 0$ ) além de polos  $p_i, i = 3, \dots, n$  de modo que  $Re\{p_i\} \ll -\sigma, i = 3, \dots, n$ . Lembrando que  $e^{Re\{p_i\}t}$  decai muito mais rapidamente que  $e^{-\sigma t}$ , constata-se que, após um breve transitório, os modos que predominam são  $e^{p_1 t}$  e  $e^{p_2 t}$ .

Considere a função de transferência

$$G(s) = \frac{10^6}{(s + 1)(s + 2)(s + 100)(s + 200)} \tag{3.401}$$

em que há 2 polos afastados  $-100$  e  $-200$ .

A saída  $Y(s)$  correspondente a uma entrada degrau  $R(s) = 1/s$  é dada por

$$Y(s) = G(s)R(s) \tag{3.402}$$

$$= \frac{10^6}{s(s + 1)(s + 2)(s + 100)(s + 200)} \tag{3.403}$$

$$= \frac{25}{s} + \frac{-50.759}{s + 1} + \frac{25.768}{s + 2} + \frac{-0.010}{s + 100} + \frac{0.001}{s + 200} \tag{3.404}$$

A saída  $y(t)$  para  $t \geq 0$  é dada, portanto, por

$$y(t) = \underbrace{25 - 50.76 e^{-t} + 25.77 e^{-2t}}_{\text{dominante}} \underbrace{-0.01 e^{-100t} + 0.001 e^{-200t}}_{\text{negligenciavel}} \quad (3.405)$$

$$\approx 25 - 50.76 e^{-t} + 25.77 e^{-2t} \quad ; t \geq 0 \quad (3.406)$$

uma vez que os termos  $-0.010 e^{-100t} + 0.001 e^{-200t}$  são de pequenos coeficientes e decaem mais rapidamente quando comparado aos termos dominantes.

O cancelamento pode ser realizado diretamente na função de transferência, levando-se em consideração que, para frequências de interesse ( $\omega \approx 1, 2$ ), tem-se que  $j\omega \ll 100$ , ou seja,  $(j\omega + 100) \approx 100$

$$G(s) = \frac{10^6}{(s + 1)(s + 2) \times 100 \times 200} \quad (3.407)$$

$$= \frac{50}{(s + 1)(s + 2)} \quad (3.408)$$

Deve-se ter cuidado para não cometer o erro de meramente excluir os termos com polos afastados ( $(s + 100)$  e  $(s + 200)$  no exemplo).

$$G(s) = \frac{10^6}{(s + 1)(s + 2)\cancel{(s + 100)}\cancel{(s + 200)}} \quad (3.409)$$

$$= \frac{10^6}{(s + 1)(s + 2)} \quad \leftarrow \text{ERRADO!} \quad (3.410)$$

**Exemplo: Polos dominantes**

Com o intuito de ilustrar a utilização do conceito de polos dominantes, considere o diagrama de blocos visto na figura 3.26.

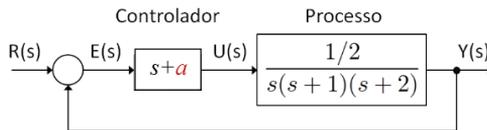


Figura 3.26: Exemplo de utilização do conceito de polos dominantes em projetos de controladores

O problema consiste em ajustar a posição do parâmetro  $a$ , na função de transferência

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{2} \frac{s + a}{s(s + 1)(s + 2)} \quad (3.411)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{s + a}{s^3 + 3s^2 + 2s} \quad (3.412)$$

de modo que, em malha fechada com ganho negativo unitário, a resposta degrau apresente um sobressinal de 16.3%. Se a hipótese de polos dominantes for válida, o que deve ser verificado *a posteriori*, esse sobressinal corresponde a fazer  $\xi = 0.5$ .

A função de transferência de malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s + a}{2s^3 + 6s^2 + 5s + a} \quad (3.413)$$

e a expressão 3.413 deve assumir, mediante ajuste de  $a$ , o formato desejado  $T_d(s)$  com um par de polos complexos dominantes e mais um polo afastado  $p$ , ou seja,

$$T_d(s) = \frac{s + a}{(s - p)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (3.414)$$

$$= \frac{s + a}{2(s - p)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (3.415)$$

$$= \frac{s + a}{2s^3 + (4\xi\omega - 2p)s^2 + (2\omega^2 - 4p\xi\omega)s - 2p\omega^2} \quad (3.416)$$

Igualando-se os denominadores de 3.413 e 3.416, tem-se que

$$2s^3 + 6s^2 + 5s + a = 2s^3 + (4\xi\omega - 2p)s^2 + (2\omega^2 - 4p\xi\omega)s - 2p\omega^2 \quad (3.417)$$

e, portanto, deve-se ter

$$6 = 4\xi\omega - 2p \quad (3.418)$$

$$5 = 2\omega^2 - 4p\xi\omega \quad (3.419)$$

$$a = -2p\omega^2 \quad (3.420)$$

Impondo a condição de projeto,  $\xi = 0.5$ , resulta um sistema de 3 equações a

3 incógnitas

$$3 = \omega - p \quad (3.421)$$

$$5 = 2\omega^2 - 2p\omega \quad (3.422)$$

$$a = -2p\omega^2 \quad (3.423)$$

que leva a  $\omega = 5/6$ ,  $p = -13/6$  e  $a \simeq 3$ . A parte real dos polos dominantes é dada por  $-\omega_n \cos(60^\circ) = -5/12 = -0.41667 \gg -13/6 = -2.1667$ , valendo a aproximação por polos dominantes. Sempre que se adota uma metodologia de projeto que envolve aproximações, é importante fazer uma verificação do resultado obtido.

### 3.12.2 Efeitos do zero

Quando se projeta um controlador utilizando conceito de polos dominantes, é imprescindível verificar o resultado, visto que envolve uma aproximação.

Em particular, quando há zeros na função de transferência, o cuidado deve ser redobrado, como visto na figura 3.27.

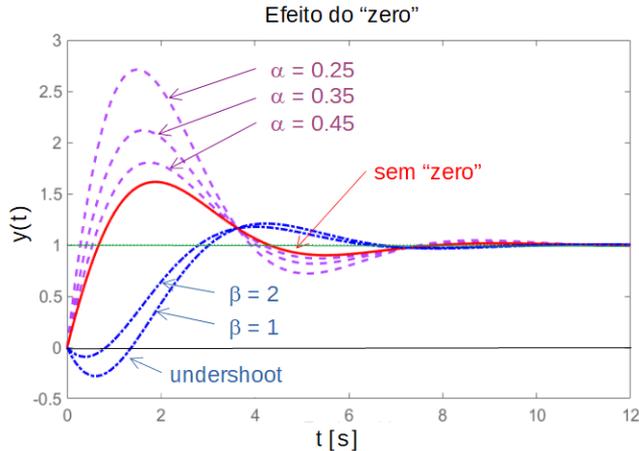


Figura 3.27: Exemplo de utilização do conceito de polos dominantes em projetos de controladores.

As funções de transferência utilizadas na figura 3.27 são

$$G_1(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{-s + \alpha}{s^2 + s + 1} \quad (3.424)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{\beta} \frac{s + \beta}{s^2 + s + 1} \quad (3.425)$$

em que  $\alpha = 0.25; 0.35; 0.45$  e  $\beta = 1.0; 2.0$ .

Na prática, sistemas de primeira e segunda ordem aproximam adequadamente um grande número de processos de interesse. Além disso, o comportamento desses sistemas é facilmente caracterizado por um pequeno número de parâmetros intuitivos. Em particular, sistemas de segunda ordem podem ser especificados por  $\xi$  e  $\omega_n$ , coeficiente de amortecimento e frequência natural, respectivamente.

### 3.13 Resposta em frequência

O sinal senoidal tem propriedades especiais com referência a sistemas LTI tanto pela facilidade que proporciona na análise teórica, quanto em procedimentos experimentais.

Dado um sistema linear representado pela função de transferência  $G(s)$  com todos os seus polos com parte real negativa, se a entrada é senoidal

$$u(t) = U \sin(\omega t) \quad (3.426)$$

então a resposta  $y(t)$  em regime permanente do sistema é também senoidal de mesma frequência e dada por

$$y(t) = |G(j\omega)| U \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad (3.427)$$

Considere um sistema representado por  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  e seja uma entrada senoidal  $u(t) = U \sin(\omega t)$  cuja transformada de Laplace é

$$U(s) = \frac{U\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3.428)$$

A saída do sistema para esta entrada é então

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{U\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3.429)$$

$$= \frac{N(s) U \omega}{(s + p_1) \dots (s + p_n) (s - j\omega) (s + j\omega)} \quad (3.430)$$

cuja expansão em frações parciais, assumindo que o conjunto de polos é constituído de polos reais distintos, polos reais com multiplicidade maior que 1 e polos complexos conjugados, resulta em

$$Y(s) = \frac{A_1}{(s + p_1)} + \dots + \frac{A_n}{(s + p_n)} + \frac{B_{k1}}{(s + p_k)} + \frac{B_{k2}}{(s + p_k)^2} + \dots + \frac{C_1 s + D_1}{(s + \sigma_1)^2 + \omega_1^2} + \dots + \frac{E}{(s - j\omega)} + \frac{E^*}{(s + j\omega)} \quad (3.431)$$

em que os coeficientes  $A_i$ ,  $B_k$  e  $C$  e  $D$  correspondem aos polos do sistema e os coeficientes  $E$  e  $E^*$  aos polos do sinal de entrada e são dados por

$$E = \frac{U}{2j} G(j\omega) \quad (3.432)$$

$$E^* = \frac{U}{-2j} G(-j\omega) \quad (3.433)$$

Invertendo a transformada de Laplace, obtém-se

$$\begin{aligned}
 y(t) = & A_1 e^{-p_1 t} + \dots + A_n e^{-p_n t} + \\
 & + B_{k1} e^{-p_k t} + B_{k2} t e^{-p_k t} + \dots + \\
 & + K_1 e^{-\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \dots + E e^{+j\omega t} + E^* e^{-j\omega t} \quad (3.434)
 \end{aligned}$$

Como por hipótese todos os polos do sistema têm parte real negativa, a saída em regime permanente ( $t \rightarrow \infty$ ) será

$$y_{rp}(t) = 0 + \dots + 0 + E e^{+j\omega t} + E^* e^{-j\omega t} \quad (3.435)$$

Portanto, substituindo os valores de  $E$  e  $E^*$  das equações 3.432 e 3.433,

$$y_{rp}(t) = \frac{U}{2j} G(j\omega) e^{j\omega t} + \frac{U}{-j2} G(-j\omega) e^{-j\omega t} \quad (3.436)$$

que, após simplificação, resulta em

$$y_{rp}(t) = |G(j\omega)| U \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad (3.437)$$

Conclui-se que para modelos LTI estáveis, o cálculo da resposta a uma entrada senoidal, em regime permanente, requer apenas o ganho de amplitude  $|G(j\omega)|$  e a defasagem  $\angle G(j\omega)$ .

Como os sinais periódicos podem ser decompostos em uma soma de senoides (harmônicas nas séries de Fourier) e os sistemas lineares satisfazem o princípio da superposição, os valores numéricos de  $|G(j\omega)|$  e  $\angle G(j\omega)$  para frequências variando de 0 a  $\infty$  constituem uma representação da dinâmica do sistema.

### 3.13.1 Curvas de Bode

Em geral, quando a representação gráfica  $G(j\omega)$  é apresentada na forma de módulo e fase, são utilizados dois sistemas de coordenadas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Curva de Magnitude:} & 20 \log(|G(j\omega)|) \quad \times \quad \log \omega \\
 \text{Curva de Fase:} & \angle G(j\omega) \quad \times \quad \log \omega
 \end{array}$$

Tais gráficos são chamados de curvas de Bode e a de magnitude é representada em  $dB$  e, usualmente, a de fase em graus.

As curvas são traçadas em papel monolog e a leitura do eixo das abscissas é realizada em  $rad/s$ .

Considere a função de transferência

$$G(s) = \frac{K(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} \quad (3.438)$$

e note que

$$|G(j\omega)| = \frac{K |j\omega - z_1| \dots |j\omega - z_m|}{|j\omega - p_1| \dots |j\omega - p_n|} \quad (3.439)$$

Para fazer esboços gráficos, é mais conveniente que se tenha somas de termos ao invés de multiplicações. Assim, aplicando-se  $20 \log(\cdot)$  em ambos os lados da expressão 3.439 tem-se que

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log K + 20 \log |j\omega - z_1| + \dots + 20 \log |j\omega - z_m| \\ &\quad - 20 \log |j\omega - p_1| + \dots + 20 \log |j\omega - p_n| \end{aligned} \quad (3.440)$$

O gráfico de  $20 \log K$  é simplesmente uma constante.

O gráfico dos ganhos, compostos pela soma de curvas associadas a termos do tipo  $20 \log |j\omega - a|$ , cada quais aproximáveis pelas assíntotas

- Se  $\omega \ll a$ , então  $20 \log |j\omega - a| \simeq 20 \log |a|$  que é uma constante.
- Se  $\omega \gg a$ , então  $20 \log |j\omega - a| \simeq 20 \log \omega$  que é uma reta usando escala [dB] na ordenada e  $\log \omega$ .

Para a fase, tem-se que

$$\angle G(j\omega) = \angle \left( \frac{K (j\omega - z_1) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1) \dots (j\omega - p_n)} \right) \quad (3.441)$$

$$\begin{aligned} &= \angle (j\omega - z_1) + \dots + \angle (j\omega - z_m) \\ &\quad - \angle (j\omega - p_1) - \dots - \angle (j\omega - p_n) \end{aligned} \quad (3.442)$$

em que cada termo do tipo  $\angle (j\omega - a)$  possui a aproximação vista na figura 3.28 traçada para  $a = 10$ . A aproximação da curva de fase pode utilizar os pontos notáveis  $0.2a$  e  $5a$ .

### 3.13.2 Resposta em frequência de um sistema de segunda ordem

Como mencionado anteriormente, os sistemas de segunda ordem desempenham um papel muito importante na prática e, conseqüentemente, são relevantes os conhecimentos quanto à sua caracterização no domínio da frequência.

Os pontos notáveis nas curvas de Bode de sistemas de segunda ordem são a frequência de ressonância

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (3.443)$$

e o pico na resposta em frequência (usualmente apresenta-se em dB)

$$M_r = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.444)$$

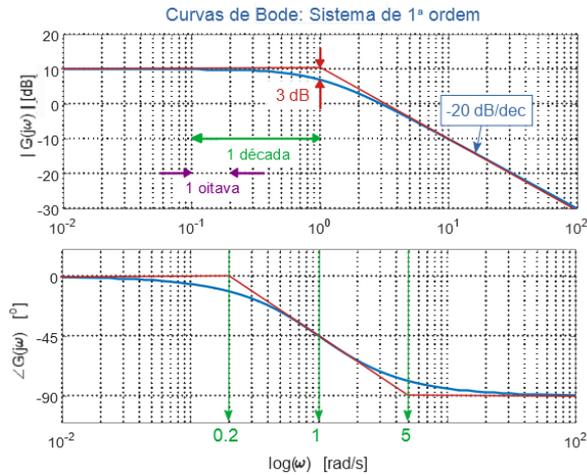


Figura 3.28: Parcela das curvas de Bode correspondentes a um termo  $1/(s+a)$ .

A figura 3.29 apresenta uma resposta em frequência típica de um sistema de 2ª ordem subamortecida, além de indicar o significado do pico em ressonância  $M_r$  e a frequência de ressonância  $\omega_r$ .

Se o sobressinal desejado é  $M_p$ , tem-se a partir da equação 3.393 que o coeficiente de amortecimento requerido é

$$\xi = -\frac{\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 M_p}} \tag{3.445}$$

que corresponde ao pico na resposta em frequência  $M_r$  fornecido pela expressão 3.444. Estando de posse do valor de  $\xi$  e uma outra especificação, como o do tempo de subida, pode-se determinar  $\omega_n$  e, portanto,  $\omega_r$ , segundo a expressão 3.443.

### 3.13.3 Resposta em frequência de um atraso de transporte

Conforme visto em 3.97, o modelo do atraso de transporte é da forma

$$y(t) = u(t - T) \tag{3.446}$$

e, portanto, a função de transferência correspondente é

$$Y(s) = \mathcal{L}(u(t - T)) = U(s)e^{-Ts} \tag{3.447}$$

Para efeito da resposta em frequência e traçado das curvas de Bode, nota-se que  $|e^{-j\omega T}| = 1$ , constante, ou  $0\text{ dB} = 20 \log(1)$ . Porém, a fase é dada

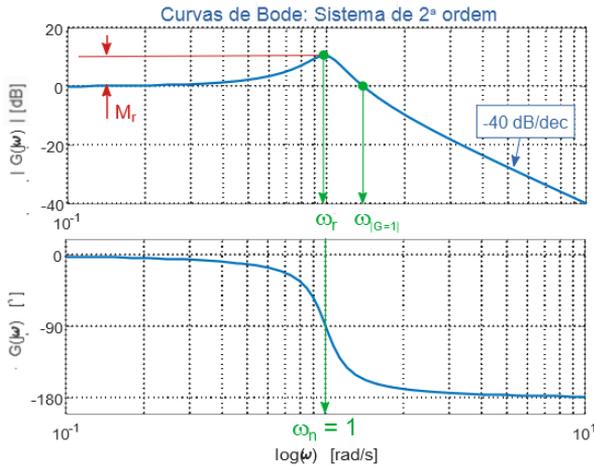


Figura 3.29: Curvas de Bode de um processo de 2ª ordem em que se indica o significado do pico em ressonância  $M_r$  e a frequência de ressonância  $\omega_r$ .

por  $\angle e^{-j\omega T} = -\omega T$  e, portanto, cresce indefinidamente com o aumento da frequência  $\omega$ .

Uma visualização gráfica e intuitiva é apresentada na figura 3.30, em que se observa que um mesmo atraso de transporte de  $T = 0.785\text{ s}$  corresponde a diferentes valores de *atraso de fase*. No caso, atrasos de fase de  $\pi/4\text{ rad}$  para o sinal  $\sin(t + T)$  em relação ao sinal  $\sin(t)$  e de  $\pi/2\text{ rad}$  para o sinal  $\sin(2t + T)$  em relação ao  $\sin(2t)$ .

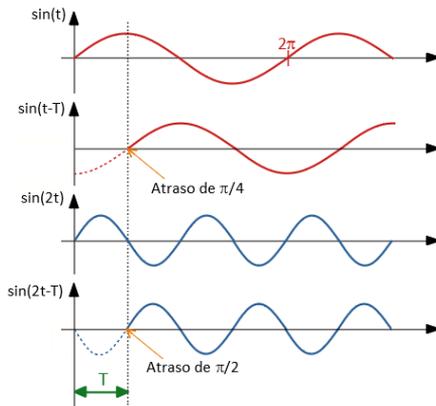


Figura 3.30: Influência da frequência no valor do atraso de fase

As curvas de Bode representam, graficamente e de modo completo, o comportamento de um sistema. Logo, as curvas de Bode desempenham um papel muito importante em projeto de controladores, uma vez que várias características importantes do sistema, como a ressonância, a margem de fase e a banda passante, podem ser facilmente visualizadas e modificadas.

### 3.13.4 Filtro complementar

Quando se tem dois sensores medindo uma mesma grandeza e a faixa de frequência dos ruídos é diferente, existe um exemplo muito ilustrativo da importância do conceito de resposta em frequência. Na figura 3.31 são apresen-

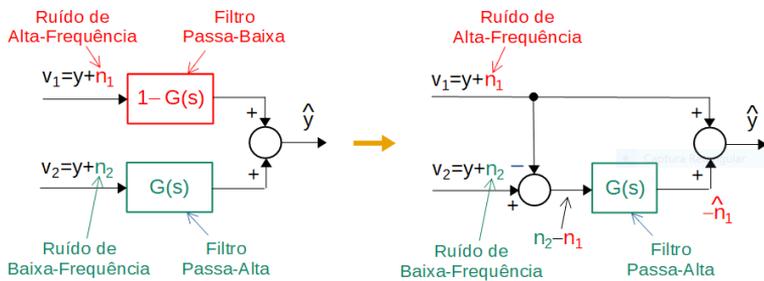


Figura 3.31: Filtro complementar

tadas duas alternativas para implementação do filtro complementar.

O sinal  $v_1$  é uma medida da grandeza  $y$  perturbado com um ruído aditivo de alta frequência, enquanto  $v_2$  é a medida de  $y$  perturbada com um ruído de baixa frequência.

Um exemplo é a estimação da velocidade baseada em dois sensores diferentes: um acelerômetro e um sensor de posição. Os sinais  $v_1$  e  $v_2$  poderiam corresponder à integral das medidas do acelerômetro e derivadas do sensor de posição. Nesse caso, a integração possui efeito de filtro passa baixas enquanto o derivador exacerba os ruídos.

### 3.13.5 Cartas de Nichols

A carta de Nichols, às vezes chamada de carta de Nichols-Black, é uma ferramenta gráfica (ábaco) que permite a visualização simultânea de características de malhas aberta e fechada de controle.

Seja  $G_{MA}(s)$  uma função de transferência de malha aberta. Dados os valores

numéricos do módulo  $|G_{MA}(j\omega)|$  e da fase  $\angle G_{MA}(j\omega)$  para uma dada frequência  $\omega$ , a Carta de Nichols permite ler graficamente o módulo  $|G_{MF}(j\omega)|$  e a fase de  $\angle G_{MF}(j\omega)$  de malha fechada

$$G_{MF} = \frac{G_{MA}}{1 + G_{MA}} \tag{3.448}$$

em um gráfico módulo  $\times$  fase. É usual utilizar a escala  $dB$  no eixo da ordenada,

**Exemplo: Carta de Nichols**

A figura 3.32 ilustra o aspecto de uma Carta de Nichols para a função de transferência

$$G_{MA} = \frac{s + 3}{s(s + 1)(s + 5)} \tag{3.449}$$

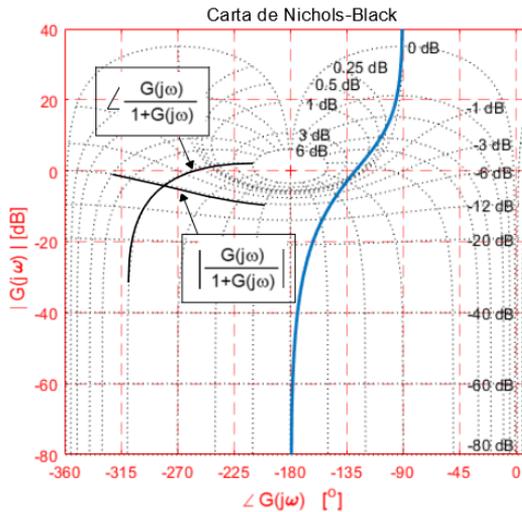


Figura 3.32: Carta de Nichols para a função de transferência de malha aberta  $1/s(s + 1)(s + 2)$ .

É interessante ressaltar que curvas de Bode podem ser obtidas experimentalmente no laboratório, utilizando-se um gerador de sinais senoidais e um osciloscópio, ou de um sistema digital de geração e aquisição digital de sinais.

**3.13.6 Largura de banda**

Intuitivamente, sistemas que possuem respostas rápidas são aqueles que atenuam pouco os componentes de frequências mais elevadas. O grau de atenu-

ação das altas frequências em relação às baixas pode ser expresso quantitativamente pela largura de banda.

Dada uma função de transferência  $G(s)$ , a largura de banda é a faixa  $(0, \omega_c)$ , sendo que a frequência de corte  $\omega_c$  é caracterizada por

$$|G(j\omega)| < |G(j\omega_c)| - 3 \text{ dB} \quad \forall \omega > \omega_c. \quad (3.450)$$

O conceito de largura de banda é importante uma vez que, quanto maior, a resposta do sistema tende a ser mais rápida. Intuitivamente, tal fato está relacionado com a proporcionalidade inversa entre  $\omega$  e  $t$ .

### 3.14 Realizações simples

Dadas as matrizes  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  de uma representação no espaço de estados, a função de transferência é obtida facilmente aplicando-se a fórmula

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.451)$$

como foi visto em 3.315.

Por uma questão de simplicidade, vamos assumir que  $\mathbf{D} = [0]$  e que  $G(s)$  é escalar.

O problema de realização consistem em obter  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$  a partir de um  $G(s)$  dado.

#### Forma canônica controlável

Considere uma função de transferência  $G(s)$  dada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \quad (3.452)$$

$$= \frac{c_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3.453)$$

e, note que, para condições iniciais nulas e utilizando a notação  $y^{(\alpha)} = d^\alpha y / dt^\alpha$ , tem-se

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_0 y = c_0 u \quad (3.454)$$

ou

$$y^{(n)} = -a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1} \dot{y} - a_0 y + c_0 u \quad (3.455)$$


---

Fazendo-se a associação

$$x_1 = y \quad (3.456)$$

$$x_2 = \dot{y} \quad (3.457)$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = y^{(n-2)} \quad (3.458)$$

$$x_n = y^{(n-1)} \quad (3.459)$$

segue imediatamente que

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \quad (3.460)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \quad (3.461)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \quad (3.462)$$

$$\dot{x}_n = y^{(n)} = -a_1 x_n - \dots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + c_0 u \quad (3.463)$$

Substituindo a expressão 3.455 em 3.463 e utilizando a notação

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{bmatrix}^T \quad (3.464)$$

tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (3.465)$$

e

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \quad (3.466)$$

ou seja,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.467)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.468)$$

Quando a matriz  $\mathbf{C}$  possui a forma especial

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{m-1} & c_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.469)$$

tem-se da expressão para  $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \left[ \begin{array}{cccccc} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc|c} * & * & \cdots & * & 1 \\ * & * & \cdots & * & s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & s^{n-2} \\ * & * & \cdots & * & s^{n-1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]$$

com  $c_k = 0$  para  $m + 1 \leq k \leq n - 1$  que resulta em

$$G(s) = \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.470)$$

A realização obtida é controlável, pois

$$\mathbf{U} = [\mathbf{B}; \mathbf{A}\mathbf{B}; \dots; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3.471)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \diagup & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ 1 & * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \quad (3.472)$$

que tem posto  $n$ .

### 3.14.1 Forma canônica observável

Para sistemas de 1 entrada e 1 saída,  $G(s)$  é  $1 \times 1$ , tem-se que

$$G(s) = G^T(s) \quad (3.473)$$

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{C}^T \quad (3.474)$$

e chamando  $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{B}^T$  e  $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{C}^T$  de modo que  $G(s) = \hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}\hat{\mathbf{B}}$ , tem-se que

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}} \\ \hat{\mathbf{C}}\mathbf{A}^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{A}^T)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \\ \vdots \\ \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.475)$$

e, portanto,

$$\mathbf{V}^T = [\mathbf{B}; \mathbf{A}\mathbf{B}; \dots; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3.476)$$

$$= \mathbf{U} \quad (3.477)$$

Como a transposição não altera o posto,  $\mathbf{V}$  possui posto  $n$  e, portanto, a representação é observável.

### 3.14.2 Realização diagonal

A função de transferência pode ser expandida em frações parciais

$$G(s) = \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.478)$$

$$= \frac{r_1}{s - p_1} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} \quad (3.479)$$

Assumindo que  $p_i \neq p_j$ , para  $i \neq j$ , para evitar a necessidade de recorrer à forma completa da representação de Jordan, tem-se que

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{r_1}{s - p_1} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} \quad (3.480)$$

ou seja,

$$Y(s) = Y_1(s) + \dots + Y_n(s) \quad (3.481)$$

$$= \frac{r_1}{s - p_1} U(s) + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} U(s) \quad (3.482)$$

A realização de

$$G_i(s) = \frac{r_i}{s - p_i}; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.483)$$

é imediata,

$$\dot{x}_i = -p_i x_i + r_i u; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.484)$$

Assim, para  $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n-1} \quad x_n]^T$  pode-se escrever

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -p_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (3.485)$$

e, para a saída, de 3.481,

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \quad (3.486)$$

Quando o estado  $\mathbf{x}$  está disponível, pode-se conceber uma estratégia de controle baseado em modos, utilizando mudança de base.

Note que se  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é não singular, então a transformação

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} \tag{3.487}$$

permite escrever

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \tag{3.488}$$

$$= \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u) \tag{3.489}$$

$$= \underbrace{\mathbf{PAP}^{-1}}_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{PB}}_{\tilde{\mathbf{B}}}u \tag{3.490}$$

Esse tipo de transformação é dita ser similar e os autovalores são preservados, ou seja,

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}) = \det(\lambda\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{PAP}^{-1}) \tag{3.491}$$

$$= \det(\mathbf{P}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}) \tag{3.492}$$

$$= \cancel{\det(\mathbf{P})} \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cancel{\det(\mathbf{P}^{-1})} \tag{3.493}$$

$$= \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \tag{3.494}$$

### 3.14.3 Utilização dos parâmetros de Markov

Considere inicialmente a função de transferência

$$G(s) = \frac{\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n} \tag{3.495}$$

Através de divisão longa,  $G(s)$  pode ser escrita em termos de polinômio em  $s^i$ ,

$$\frac{\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n} = \frac{\beta_0}{h_0} + \frac{(\beta_1 - \alpha_1 \beta_0)}{h_1} s^{-1} + \dots \tag{3.496}$$

$$= h_0 + h_1 s^{-1} + h_2 s^{-2} + \dots \tag{3.497}$$

em que  $h_i$  são introduzidos para simplificar a notação.

Inspecionando-se os coeficientes de  $s^i$ , obtém-se que

$$h_0 = \beta_0 \tag{3.498}$$

$$h_1 = -\alpha_1 h_0 + \beta_1 \tag{3.499}$$

$$h_2 = -\alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_0 + \beta_2 \tag{3.500}$$

⋮

$$h_k = -\alpha_1 h_{k-1} - \alpha_2 h_{k-2} - \dots - \alpha_k h_0 + \beta_k \tag{3.501}$$

Portanto, a função de transferência pode ser escrita como uma soma de potências de  $s$  com os coeficientes dados pelos parâmetros de Markov:

$$G(s) = h_0 + h_1s^{-1} + h_2s^{-2} + \dots \quad (3.502)$$

A matriz de Hankel, denotado  $\mathbf{H}(m, n)$ , é definida por

$$\mathbf{H}(m, n) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & \cdots & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m & h_{m+1} & \cdots & h_{m+n-1} \end{bmatrix} \quad (3.503)$$

Por outro lado, considere a representação no espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

cujas representação no domínio transformado é

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.504)$$

Sabendo-se que

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A}s^{-1} + \mathbf{A}^2s^{-2} + \dots \quad (3.505)$$

a função de transferência pode ser reescrita como

$$G(s) = \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{A}s^{-1} + \mathbf{A}^2s^{-2} + \dots \right) \mathbf{B} \quad (3.506)$$

$$= \mathbf{C}\mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}s^{-1} + \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B}s^{-2} + \dots \quad (3.507)$$

Comparando-se os termos desse polinômio em  $s$  com o que envolvia os parâmetros de Markov  $h_i$ , obtido anteriormente, constata-se que

$$h_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}$$

Os passos para utilizar o conceito de parâmetros de Markov para realizar  $G(s)$  são:

- A partir do  $G(s)$  de ordem  $n$ , efetuar a divisão longa e obter os parâmetros de Markov  $\{h_1, \dots, h_{2n}\}$

- Construir a matriz de Hankel

$$\mathbf{H}(n+1, n) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-1} \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \cdots & h_{2n} \end{bmatrix} \quad (3.508)$$

- Determinar o posto de  $\mathbf{H}(n+1, n)$

$$n^* = \rho \{ \mathbf{H}(n+1, n) \} \quad (3.509)$$

- Obter  $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n^*} & \frac{1}{n^*+1} & \frac{0}{n^*+2} & \cdots & \frac{0}{n+1} \end{bmatrix}$  tal que

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n^*} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{H}(n+1, n) = 0 \quad (3.510)$$

- Construir as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n^*} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{n^*} \end{bmatrix} \quad (3.511)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.512)$$

Pode-se verificar que

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n^*-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{H}(n^*, n^*) \quad (3.513)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n^*-1} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (3.514)$$

possuem rank  $n^*$ .

Portanto, a representação é completamente controlável e observável, ou seja, a realização é mínima.

### Teorema de Silverman

Uma sequência infinita de parâmetros de Markov é realizável por um modelo LTI, se e somente se existirem inteiros  $n$  e  $m$  tal que  $\rho(\mathbf{H}(n, m)) = \rho(\mathbf{H}(n + 1, m + i)) = n^*$  para  $i = 1, 2, \dots$ . Nesse caso,  $n^*$  é a ordem da realização mínima.

#### 3.14.4 Realização de Gilbert

Seja  $\mathbf{G}(s)_{p \times m}$  uma função de transferência estritamente própria ( $\mathbf{D} = \mathbf{0}_{p \times m}$ )

$$\mathbf{G}(s) = [g_{ij}(s)] ; i = 1, \dots, p ; j = 1, \dots, m \quad (3.515)$$

e

$$\Delta(s) = s^r + a_{r-1}s^{r-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (3.516)$$

o mínimo múltiplo comum dos denominadores de  $g_{ij}(s)$ .

Assumindo-se que as raízes  $\lambda_i, i = 1, \dots, r$  do polinômio característico são distintas, pode-se escrever

$$\Delta(s) = \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i) \quad (3.517)$$

e permitem obter as matrizes  $\mathbf{R}_i, i = 0, \dots, r - 1$ , tais que

$$\mathbf{G}(s) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{s - \lambda_i} \mathbf{R}_i \quad (3.518)$$

Os resíduos são obtidos fazendo-se

$$\mathbf{R}_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) \mathbf{G}(s) \quad (3.519)$$

Denote-se

$$\rho_i := \text{rank}(\mathbf{R}_i) \quad (3.520)$$

e sejam matrizes  $\mathbf{C}_i$  e  $\mathbf{B}_i$  escolhidos de modo que

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \quad (3.521)$$

Nessas condições, uma realização controlável  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{0}\}$  é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_{\rho_1 \times \rho_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r \mathbf{I}_{\rho_r \times \rho_r} & \\ & & & \end{bmatrix} ; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_r \end{bmatrix} ; \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \dots \quad \mathbf{C}_r] \quad (3.522)$$

**Exemplo**

Considere a função de transferência

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ -\frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad (3.523)$$

e seja  $\Delta(s) = (s+1)(s+2)$ .

A expansão em frações parciais leva a identidade

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 2s+4 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \quad (3.524)$$

$$= \frac{1}{s+1} \mathbf{R}_1 + \frac{1}{s+2} \mathbf{R}_2 \quad (3.525)$$

em que

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.526)$$

Portanto,

$$\rho_1 = 2 \quad (3.527)$$

$$\rho_2 = 1 \quad (3.528)$$

e uma possibilidade de escolha de  $\mathbf{C}_i$  e  $\mathbf{B}_i$  seria

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.529)$$

$\mathbf{C}_1 \qquad \mathbf{B}_1$

e

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.530)$$

$\mathbf{C}_2 \qquad \mathbf{B}_2$

A realização diagonal de Gilbert obtida é dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & [-2] \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.531)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.532)$$

e

$$\mathbf{y} = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \end{array} \right] \mathbf{x} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \mathbf{x} \quad (3.533)$$

Para verificação, basta calcular  $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ . Além disso, pode-se verificar que a representação é completamente controlável e observável, ou seja, é mínima.

Para sistemas de 1 entrada e 1 saída,  $G(s)$  é  $1 \times 1$ , tem-se que

$$G(s) = G^T(s) \quad (3.534)$$

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{C}^T \quad (3.535)$$

e, chamando  $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{B}^T$  e  $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{C}^T$  de modo que  $G(s) = \hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}\hat{\mathbf{B}}$ , tem-se que

$$\mathbf{V} = \left[ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{C}} \\ \hat{\mathbf{C}}\mathbf{A}^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{A}^T)^{n-1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \\ \vdots \\ \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^{n-1} \end{array} \right] \quad (3.536)$$

e, portanto, como esperado,

$$\mathbf{V}^T = [\mathbf{B}; \mathbf{A}\mathbf{B}; \dots; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3.537)$$

$$= \mathbf{U}. \quad (3.538)$$

Como a transposição não altera o posto,  $V$  possui posto  $n$  e, portanto, a representação é observável.

Mais detalhes no artigo original:

Gilbert, E. G. Controllability and Observability in Multivariable Control Systems. *S.I.A.M. Control*, Ser. A, 1, p. 128-151, 1963.

**É importante a habilidade de transitar entre as diferentes representações no espaço de estados e através das funções de transferência, visto que especificações diferentes se adaptam melhor a uma ferramenta em um certo domínio do que em outro. Além disso, funções de transferência podem ser obtidas em ensaios laboratoriais, injetando-se sinais senoidais  $u$  e observando a relação entre  $y$  e  $u$  (ganho e defasagem).**

Em 1756, Euler Leonhard Euler (1707-1783), um dos maiores matemáticos da história, escreveu *Elementa Calculi Variationum*, em que apresenta a equação de Euler-Lagrange. No entanto, a primeira solução para um problema de

cálculo de variações é atribuído a Sir Isaac Newton PRS (1642-1727) por ter resolvido o problema de obter o perfil de uma figura geométrica de revolução que oferecesse a mínima resistência ao movimento em um fluido, em 1687.

Em 12 de agosto de 1755, Joseph-Louis Lagrange (Giuseppe Luigi Lagrangia, 1736-1813) escreveu uma carta a Euler, apresentando um novo método para resolver os problemas na obra *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* de Euler, escrito em 1744 e editado por Marcum-Michaelém Bousquet.



Euler



Lagrange



Bromwich



Heaviside

Em 1898, Oliver Heaviside FRS (1850-1925) apresenta o cálculo operacional e estuda o comportamento transitório de sistemas, introduzindo o conceito análogo ao de função de transferência.

O cálculo operacional de Heaviside foi colocado em alicerces robustos por Thomas John I'Anson Bromwich (1875-1929) e, em particular, a integral de contorno utilizada na transformada inversa é chamada de integral de Bromwich.

## 3.15 Exercícios

### 3.15.1 Exercício: Sistema eletromecânico

Os sistemas micromecânicos (MEMS) são, em geral, baseados em efeitos elétricos ao invés de dispositivos maiores que se valem de efeitos magnéticos.

Se o dielétrico é o ar, a rigidez dielétrica é da ordem de  $3E6V/m$  resultando  $E^e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \sim 40 J.m^{-3}$ .

Por outro lado, utilizando indutores com núcleo de ferro, considerando saturação a  $1.6 Wb.m^{-2}$ , tem-se  $E_m = \frac{1}{2\mu_0} b^2 850 J.m^{-3}$ .

Assim, dispositivos baseados em efeitos elétricos são interessantes para dispositivos de pequenas dimensões, como os manufacturados com tecnologia microeletrônica. Neste exercício, busca-se obter um matemático na forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias para o sistema ilustrado em [3.33](#)



### 3.15.3 Exercícios: Solução de equações diferenciais ordinárias

Obter as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares e invariantes no tempo.

**Observação:** É interessante resolver as equações no domínio do tempo ( $t$ ) e no domínio transformado ( $s$ ) e verificar que os resultados são compatíveis.

1.

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 7\dot{y} + 3y = 0 \quad (3.540)$$

$$y(0) = 1 \quad (3.541)$$

$$\dot{y}(0) = 0 \quad (3.542)$$

2.

$$\dot{y} + 3y = \delta(t) \quad (3.543)$$

$$y(0) = 0 \quad (3.544)$$

3.

$$\dot{y} + 3y = u(t) \quad (3.545)$$

$$y(0) = 0 \quad (3.546)$$

4.

$$\dot{y} + 3y = \sin(10t) \quad (3.547)$$

$$y(0) = 0 \quad (3.548)$$

5.

$$\dot{y} + 3y = \sin\left(\frac{1}{10}t\right) \quad (3.549)$$

$$y(0) = 0 \quad (3.550)$$

6.

$$\dot{y} + 3y = e^{-3} \quad (3.551)$$

$$y(0) = 0 \quad (3.552)$$

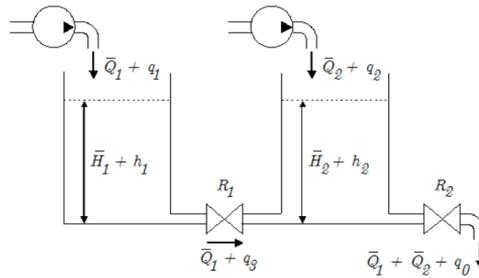


Figura 3.35: Sistema de 2 tanques acoplados.

### 3.15.4 Exercício: Sistema de tanques acoplados

Obter um modelo na forma de equação de estados para o sistema de vasos comunicantes da figura 3.35.

As entradas são as variações incrementais das bombas ( $q_1$  e  $q_2$ ) e as saídas são as variações incrementais do nível de líquido ( $h_1$  e  $h_2$ ).

### 3.15.5 Exercício: Modelo de um circuito envolvendo transformador

Considere o circuito da figura 3.36. Calcular  $V_2/I$ , sabendo-se que, para o

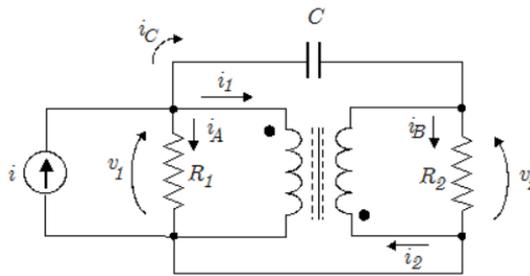


Figura 3.36: Um circuito elétrico com transformador.

transformador, tem-se

$$v_1 = sL_{11}i_1 + sMi_2 \tag{3.553}$$

$$v_2 = sMi_1 + sL_{22}i_2 \tag{3.554}$$

e os pontos indicam a sua polaridade.

---

### 3.15.6 Exercício: Modelo de um girômetro

Considere um giroscópio montado em um sistema de eixos como ilustrado na figura 3.37.

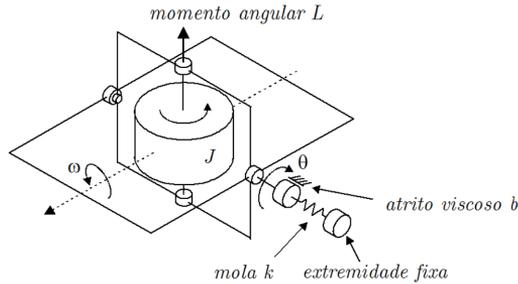


Figura 3.37: Um sistema girômetro.

Obter a equação de estado, considerando  $x_1 = \theta$  e  $\dot{\theta}$  e, caso resulte em um modelo não linear, linearize-o.

### 3.15.7 Exercício: Erros em regime permanente

Calcular os erros em regime para entradas degrau e rampa, supondo que as funções de transferência fornecidas são de malha aberta e a realimentação a ser utilizada é unitária.

1. 
$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2} \quad (3.555)$$

2. 
$$G(s) = \frac{s+2}{s(s+1)} \quad (3.556)$$

3. 
$$G(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)} \quad (3.557)$$

4. 
$$G(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)^2} \quad (3.558)$$

### 3.15.8 Exercício: Ampliadores operacionais (OpAmps)

Obter a função de transferência  $Y(s)/U(s)$  para cada circuito da figura 3.38.

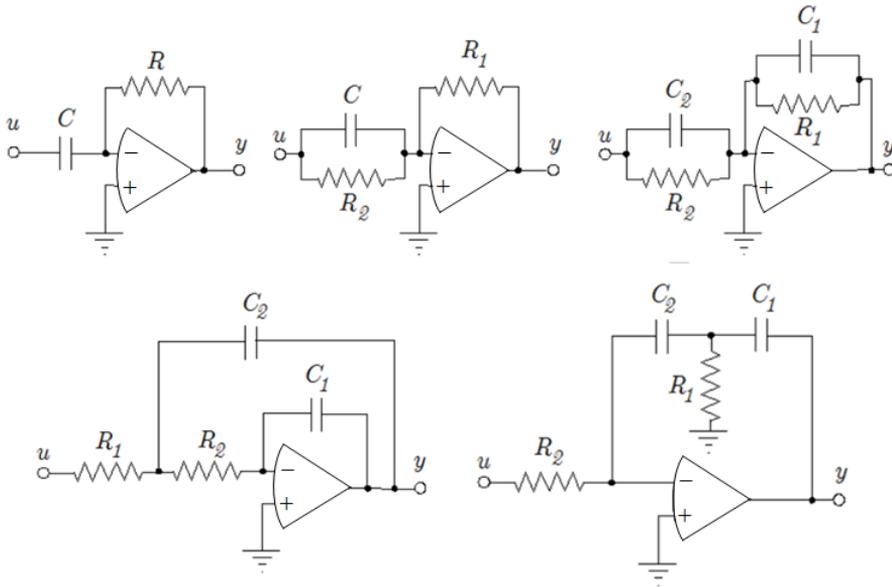


Figura 3.38: Circuitos de relevância prática utilizando OpAmps.

### 3.15.9 Exercício: Traçado de curvas de Bode

Esboçar as curvas de Bode:

1.

$$G(s) = \frac{s + 1}{(s + 0.1)(s + 10)} \quad (3.559)$$

2.

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 0.6s + 9} \quad (3.560)$$

3.

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)} \quad (3.561)$$

4.

$$G(s) = \frac{1}{s(s - 1)} \quad (3.562)$$

5.

$$G(s) = \frac{10}{(s^2 + s + 1)(s + 10)} \quad (3.563)$$

---

6. 
$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)} \quad (3.564)$$

7. 
$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)} \quad (3.565)$$

8. 
$$G(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)} \quad (3.566)$$

9. 
$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)} \quad (3.567)$$

10. 
$$G(s) = \frac{(1-s)}{(s+1)} \quad (3.568)$$

11. 
$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)} \quad (3.569)$$

12. 
$$G(s) = \frac{s(s-1)}{(s+2)^2(s+5)} \quad (3.570)$$

13. 
$$G(s) = \frac{10(1-s)}{s^2(s+5)} \quad (3.571)$$

14. 
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.572)$$

$$y = x_1 \quad (3.573)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \quad (3.574)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.575)$$

15. 
$$G(s) = \frac{100e^{-0.5s}}{s(s+1)} \quad (3.576)$$

---

**3.15.10 Exercício: Traçado manual de curvas de Bode**

Esboce manualmente, utilizando lápis e papel *monolog*, as curvas de Bode

$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)} \quad (3.577)$$

**3.15.11 Exercício: Resposta em frequência de um filtro**

Esboçar as curvas de Bode ( $V_{out}(s)$  é a saída e  $V_{in}(s)$  a entrada) do circuito da figura 3.39.

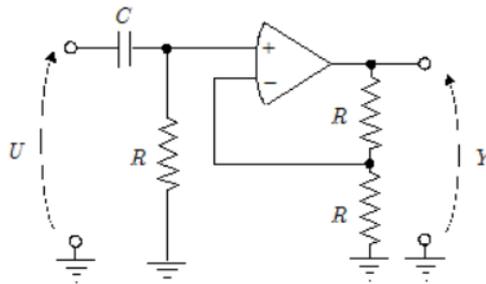


Figura 3.39: Um circuito utilizando amplificador operacional ideal.

**3.15.12 Exercício: Margens de ganho e de fase**

Determinar  $MF$  e  $MG$ :

(a)

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^3} \quad (3.578)$$

(b)

$$G(s) = \frac{(s + 2)}{(s + 1)(s - 3)} \quad (3.579)$$

(c)

$$G(s) = \frac{1}{2}e^{-s} \quad (3.580)$$

**3.15.13 Exercício: Especificações no domínio da frequência**

Um servomecanismo possui função de transferência

$$G(s) = \frac{500A}{s(s + 10)(s + 20)} \quad (3.581)$$

em que  $A$  é o ganho ajustável do amplificador. Qual deve ser o valor de  $A$  de modo que, ao se fechar a malha com uma realimentação unitária, o sistema possua um pico de ressonância  $M_r$  de  $8\text{ dB}$ ? Em que frequência ocorre a ressonância?

### 3.15.14 Exercício: Solução de EDO utilizando a transformada de Laplace

Obter a transformada inversa de Laplace, utilizando o método da expansão em frações parciais

a)

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3} \quad (3.582)$$

b)

$$G(s) = \frac{90(s + 2)}{s^2(s + 1)(s + 3)} \quad (3.583)$$

### 3.15.15 Exercício: Transformação de representação no espaço de estado para função de transferência

Determine a função de transferência  $Y(s)/U(s)$  e discuta o resultado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.584)$$

$$y = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.585)$$

### 3.15.16 Exercício: Função de matriz

Considere uma matriz da forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (3.586)$$

em que  $a \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . Obter uma matriz  $\mathbf{B}$ , tal que  $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{A}$ .

Lembrar que

$$\ln(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} (x - 1)^i \quad (3.587)$$

**3.15.17 Exercício: Resposta degrau a partir do repouso**

Esboçar a resposta a uma entrada tipo degrau unitário  $u(t)$  para o sistema descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.588)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.589)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.590)$$

**3.15.18 Exercício: Resposta à condição inicial**

Esboçar a resposta  $y(t)$  para entrada nula  $u(t) = 0, \forall t \geq 0$ , sabendo-se que:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.591)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.592)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.593)$$

**3.15.19 Exercício: Resposta impulso**

Esboçar a resposta impulso do sistema descrito pelas equações de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.594)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.595)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.596)$$

**3.15.20 Exercício: Resposta degrau com condição inicial não nula**

Esboçar a resposta  $y(t)$  para entrada degrau unitário  $u(t)$ , sabendo-se que

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.597)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.598)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.599)$$

---

**3.15.21 Exercício: Propriedade da matriz companheira**

Dada uma matriz quadrada  $\mathbf{A}_{n \times n}$  do tipo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (3.600)$$

(a) mostrar que o seu polinômio característico é

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (3.601)$$

(b) e os autovalores são da forma

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.602)$$

**3.15.22 Exercício: Matriz de Vandermonde**

(a) Mostrar que o determinante de uma matriz de Vandermonde  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V}_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.603)$$

é dado por

$$\det(\mathbf{V}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \quad (3.604)$$

(b) Apresentar uma aplicação desse resultado em problemas de sistemas de controle.

**3.15.23 Exercício: Propriedade de autovalores**

Mostrar que se  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são os autovalores de uma matriz  $\mathbf{A}_{n \times n}$ , então

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (3.605)$$

**3.15.24 Exercício: Realizações**

Obter uma representação do tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.606)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.607)$$

para o sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s^2+5s+6} \quad (3.608)$$

e verificar a controlabilidade e a observabilidade.

**3.15.25 Exercício: Cancelamentos em funções de transferência**

Determine a função de transferência  $Y(s)/U(s)$  e discuta o resultado obtido:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.609)$$

$$y = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.610)$$

**3.15.26 Exercício: Controlabilidade e observabilidade**

Considere um processo representado no espaço de estados por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.611)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.612)$$

1. Verificar se o sistema é controlável. Caso não seja, determinar o modo não controlável.
2. Verificar se o sistema é observável. Caso não seja, determinar o modo não observável.

**3.15.27 Exercício: Seleção de sensores**

Considere o processo representado no espaço de estado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.613)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.614)$$

Assumindo que no mercado existem 4 sensores compatíveis com esse processo,

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.615)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.616)$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.617)$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.618)$$

qual o dispêndio mínimo para se conseguir monitorar todos os componentes de  $x$ , sabendo-se que os custos dos sensores  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_2$  e  $\mathbf{C}_4$  são, respectivamente, R\$ 100,00, R\$ 150,00, R\$ 120,00 e R\$ 240,00?

### 3.15.28 Exercício: Isolação de falhas

Um método simples para isolar falhas de sensores é utilizar observadores de estado. Considere um sistema que possui 3 sensores associados a matrizes  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  e  $\mathbf{C}_3$ .

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.619)$$

$$y_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{x} \quad (3.620)$$

$$y_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{x} \quad (3.621)$$

$$y_3 = \mathbf{C}_3\mathbf{x} \quad (3.622)$$

Assume-se que o estado é observável a partir de quaisquer dos sensores  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  e  $\mathbf{C}_3$ . Denotando por  $\hat{x}$  o estado estimado e  $\hat{y}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , as saídas de cada estimador, ou seja,

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y_3 - \hat{y}_3) \quad (3.623)$$

$$\hat{y}_1 = \mathbf{C}_1\hat{\mathbf{x}} \quad (3.624)$$

$$\hat{y}_2 = \mathbf{C}_2\hat{\mathbf{x}} \quad (3.625)$$

$$\hat{y}_3 = \mathbf{C}_3\hat{\mathbf{x}} \quad (3.626)$$

qual o comportamento dos sinais  $e_i = y_i - \hat{y}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , se houver falha, uma de cada vez, nos sensores 1, 2 e 3?

### 3.15.29 Exercício: Inserção de integrador na malha

Considere o processo representado no espaço de estado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.627)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.628)$$

Deseja-se utilizar uma lei de controle da forma

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \rho \int_0^t [r(\tau) - y(\tau)] d\tau \quad (3.629)$$

em que  $r(t)$  é o sinal de referência a ser rastreada.

Obter os valores de  $\mathbf{K}$  e de  $\rho$ , de modo que os polos dominantes correspondam a uma resposta degrau com sobressinal de 16.3% e tempo de subida de 1 s.

### 3.15.30 Exercício: Realizações

Obter uma representação no espaço de estados na forma canônica observável e também a função de transferência  $Y(s)/U(s)$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} = 2u + \frac{dyu}{dt} \quad (3.630)$$

### 3.15.31 Exercício: Realimentação de estados

Considere um processo cuja função de transferência é

$$G(s) = 100 \frac{s + 10}{s^3 + 30s^2 + 300s + 1000} \quad (3.631)$$

1. Obter uma realização  $\{\mathbf{A}_{3 \times 3}, \mathbf{B}_{3 \times 1}, \mathbf{C}_{1 \times 3}, \mathbf{D}_{1 \times 1}\}$  com a propriedade de que seja observável mas não controlável.
2. Verificar se seria possível utilizar uma lei de controle tipo realimentação de estados  $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + r$ , de modo que para  $r(t)$  do tipo unitário, a resposta apresente sobressinal de aproximadamente 16% e tempo de subida de aproximadamente 1 s.

### 3.15.32 Exercício: Resposta temporal à condição inicial não nula

Esboçar o gráfico  $x_2(t) \times x_1(t)$  para  $t \geq 0$  do processo descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.632)$$

sabendo-se que  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ .

### 3.15.33 Exercício: Manutenção da controlabilidade sob realimentação de estados

Considere as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{b}$  de dimensões  $n \times n$  e  $n \times 1$ , respectivamente. Denotando por  $\rho(\mathbf{M})$  o posto (*rank*) da matriz  $\mathbf{M}$ , mostrar que

$$\rho \left[ \mathbf{b} \mid \mathbf{A}\mathbf{b} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \right] = \rho \left[ \mathbf{b} \mid (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})\mathbf{b} \mid \dots \mid (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})^{n-1}\mathbf{b} \right] \quad (3.633)$$

para qualquer  $\mathbf{k}$  de dimensão  $1 \times n$ . Qual a relevância dessa propriedade no contexto de sistemas de controle?

### 3.15.34 Exercício: Magnitude de sinais de controle

Considere o processo descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.634)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.635)$$

1. Obtenha uma lei de controle  $u(t)$  que a partir de  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$  em  $t = 0$  atinja  $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T$
2. Obtenha uma lei de controle  $u(t)$  que a partir de  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$  em  $t = 0$  atinja  $\mathbf{x}(10^{-10}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ .

### 3.15.35 Exercício: Incertezas nos sensores

Considere um processo representado no espaço de estados por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.636)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.637)$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são ganhos associados aos sensores que monitoram os componentes  $x_1$  e  $x_2$  do estado, respectivamente.

Os sensores apresentam incertezas, de modo que

$$c_i = c_i^{nom} + \Delta c_i; \quad i = 1, 2 \quad (3.638)$$

sendo  $c_i^{nom}$  o valor nominal informado pelo fabricante e  $\Delta c_i$  a incerteza devida à fabricação.

Escolher a melhor opção em termos de precisão do observador de estados a ser implementado, considerando que há várias opções de sensores comerciais, conforme a tabela abaixo, porém com a restrição de que  $c_1$  e  $c_2$  devem ser do mesmo fabricante.

Marca	$c_1^{nom}$	$\Delta c_1$	$c_2^{nom}$	$\Delta c_2$
<i>Alfasense</i>	10	0.1	1	0.2
<i>Betasense</i>	5	0.2	5	0.2
<i>Gamasense</i>	1	0.3	10	0.2