Capítulo 9

A utilização de problemas matemáticos em aberto no ensino médio

Me. Rui de Andrade Lima[1]
Dr. Marcelo Pedro dos Santos[2]

Resumo: Em matemática, um problema em aberto é uma questão não resolvida. A utilização de problemas em aberto incentiva o uso de atividades investigativas fundamentais para a construção do conhecimento, mas está ausente no ambiente escolar, acarretando prejuízos na formação dos estudantes. O ensino por meio da investigação matemática promove o desenvolvimento do raciocínio e a autonomia do estudante, atribuindo novos significados aos objetos de conhecimento e dando a oportunidade de se aprender matemática fazendo matemática. Esse texto é baseado em (LIMA, 2018) e visa apontar a importância da utilização de problemas matemáticos em aberto no Ensino Médio, quebrando a concepção de estudantes desse nível escolar de que todos os problemas matemáticos têm solução. Assim, realizamos uma pesquisa de problemas matemáticos em aberto acessíveis ao

[1]Colégio Damas, professorruilima@gmail.com
[2]Universidade Federal Rural de Pernambuco, marcelo.pedrosantos@ufrpe.br

estudante do Ensino Médio, com desenvolvimento de conteúdos necessários à compreensão dos problemas pesquisados, abrangendo a Teoria dos Números, com vários resultados sobre números primos, a Análise Combinatória, com tópicos sobre quadrados mágicos, e a Geometria. O trabalho apresenta sugestões de atividades que relacionam conteúdos matemáticos do Ensino Médio com problemas em aberto, para professores utilizarem em sala de aula.

Palavras-chave: Problemas em aberto; Investigação matemática; Números Primos; Combinatória; Geometria.

9.1 Introdução

O objetivo deste trabalho é apontar a importância da utilização de problemas matemáticos em aberto no Ensino Médio, quebrando a concepção de alunos do ensino básico de que todos os problemas matemáticos têm solução; desenvolvendo no aluno o poder de duvidar, fundamental na formação do pensamento crítico; promovendo a investigação matemática e aproximando a matemática ensinada nas escolas de Ensino Médio das pesquisas feitas nos centros universitários. Sobre a importância da pesquisa matemática, D'Ambrosio destaca que:

> Assim como no processo de construção da Matemática como disciplina, a essência do processo é a pesquisa, na construção do conhecimento para cada aluno, a essência do processo tem que ser a pesquisa. Dificilmente o aluno de Matemática testemunha a ação do verdadeiro matemático no processo de identificação e solução de problemas. O professor faz questão de preparar todos os problemas a serem apresentados com antecedência; consequentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno, e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado

> e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. O que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas, dando-lhe a impressão de que ele também conseguirá resolver problemas matemáticos com tal elegância. (D'AMBROSIO, 1993, p. 36).

Definição 1. *Um* ***problema matemático em aberto*** *é uma questão não resolvida, ou seja, uma questão em que a solução não foi encontrada ou não se provou que a questão não tem solução.*

Os problemas em aberto podem despertar o interesse do aluno pela investigação matemática, pois existem problemas que são fáceis de enunciar, mas cujas soluções ainda não foram encontradas e que despertam um fascínio especial. Um problema desse tipo é a Conjectura de Collatz (1910 - 1990) ou Problema $3n+1$, cujo enunciado é:

Problema 1 (Conjectura de Collatz)**.** *Dado um número natural, n, executando-se os seguintes passos:*

i) Se n for par, o seu sucessor será $\frac{n}{2}$;

ii) Se n for ímpar, o seu sucessor será igual a $3n+1$.

e repetindo-se esse processo, o número 1 é sempre obtido?

Por exemplo, começando com o número 3, obtém-se:

$$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

A conjectura de Collatz é um problema matemático em aberto com enunciado acessível ao estudante da educação básica e já testado para milhares de números com uso de supercomputadores sempre atingindo o número 1, mas ela ainda não foi provada matematicamente.

Acredita-se que a solução da conjectura de Collatz abrirá novos caminhos para a matemática e o seu poder em motivar alunos à pesquisa matemática pode ser constatado nas palavras do matemático Derek Jennings

> outra razão é que, por ser fácil de apresentar e entender, tem potencial de atrair jovens para a matemática. Eu mesmo soube de sua existência no Ensino Médio e não resisti ao seu encanto (BBC BRASIL, 2016).

O uso de problemas em aberto no ensino da matemática é fundamental para criar um ambiente interativo entre o aluno e o professor e proporcionar o aprendizado por meio da investigação, permitindo a construção de um conhecimento mais sólido. Assim, é contraditório o professor de matemática não apresentar problemas em aberto aos seus alunos, como destaca Sacristán

> Penso que o mais importante é a dicotomia entre as atividades de ensinar e aprender, introduzida artificialmente por uma prática escolar inadequada. O pesquisador /professor aprende principalmente investigando, mas, no momento em que entra na sala de aula, esquece que o estudante, para aprender, precisa investigar. Assim separa as duas atividades, pois não percebeu que são interligadas, ou por que não se interessa em aprender a utilizar métodos adequados para conectá-las. Outros motivos também se fazem presentes, como a ideia de que a investigação é reservada a um grupo especial de pessoas, assim como a ideia de que a descoberta só é importante quando alguém a faz pela primeira vez conforme os registros acadêmicos. Ocorre também, por parte dos professores, o receio de se depararem, durante a aula, com problemas cuja resposta não conhecem de imediato. Com essa concepção se perde a motivação pedagógica da descoberta e se reduz o ensino à transmissão do produto

> histórico da investigação, perdendo-se o valor da compreensão do processo de produção desse conhecimento (SACRISTÁN, 1998, p. 60).

Apesar do uso de atividades investigativas se mostrar relevante para o aprendizado em matemática, está ausente no cotidiano escolar da educação básica, o que não acontece no ensino superior com os projetos de iniciação científica, que incentivam os estudantes de graduação à pesquisa. Assim, o propósito deste trabalho se concentra na investigação de problemas matemáticos em aberto e na formulação de estratégias para apresentá-los aos alunos do Ensino Médio.

9.2 Fundamentos teóricos e metodológicos

9.2.1 Problemas em aberto de teoria dos números

Os números primos guardam muitos segredos e mistérios que podem estimular o estudante da educação básica a refletir sobre a Teoria dos Números e suas aplicações, estimulando o pensamento crítico e a construção de ideias que fomentem a pesquisa e, consequentemente, estimulem o aluno a aprender matemática, como destaca Abramo Hefez

> Esses números desempenham papel fundamental e a eles estão associados muitos problemas famosos cujas soluções têm resistido aos esforços de várias gerações de matemáticos (HEFEZ, 2016, p.122)

9.2.1.1 Os Números primos

Entre os números naturais, existem números que funcionam como blocos básicos que permitem a construção de todos os números naturais maiores que 1 pela multiplicação, ou seja, existem números primitivos que não podem ser gerados pela multiplicação de outros números, como 2, 3 e 5, e outros números secundários, gerados a partir da multiplicação de números primitivos, como o $6 = 2 \cdot 3$ e o $10 = 2 \cdot 5$.

Definição 2. *Um número natural p maior que 1 é **primo** se possui como divisores apenas 1 e ele próprio, ou seja, 1 e p.*

Por exemplo, 5 é primo.

Definição 3. *Um número natural n maior que 1 que não é primo é dito **composto** e pode ser expresso como produto de dois naturais n_1 e n_2, tais que 1< n_1, n_2 < n, ou seja, $n = n_1 n_2$.*

Por exemplo, 12 é composto, pois $12 = 4 \cdot 3$.

9.2.1.1.1 Números primos em progressão aritmética

Nesta seção, abordaremos a distribuição dos números primos e, especificamente, resultados sobre sequência de números primos em progressão aritmética. Para uma análise mais detalhada desse tema, o leitor pode consultar o artigo "Recorrências, progressões aritméticas e teoria ergódica: teoremas de van der Waerden e de Green-Tao", de Peixe e Buescu, indicado nas referências.

Definição 4. *Uma progressão aritmética, denotada por **PA**, é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado de uma constante r chamada razão da **PA**.*

Por exemplo, a sequência $(2, 5, 8, 11, \ldots)$ é uma **PA** com primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $r = 3$.

Um termo qualquer de uma ***PA***, com primeiro termo a_1 e razão r, é dado por $a_1 + (n-1) \cdot r$, para todo n natural. Assim, a sequência formada pelos números da forma $6n + 5 = 11 + (n-1) \cdot 6$ é uma progressão aritmética e nessa progressão é possível encontrar infinitos primos. De fato, esse é um caso particular do teorema a seguir, que foi demonstrado por Dirichlet (1805 - 1859).

Teorema 1 (Dirichlet)**.** *Se a e b são números naturais primos entre si, então a progressão aritmética*

$$a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$$

possui infinitos números primos.

Ao encontrar progressões aritméticas com infinitos termos primos, por exemplo $6n+5$, com n natural, cujos termos são $11,17,23,29,35,41,\ldots$, observe-se que, apesar da progressão ter infinitos números primos, nem todos os seus termos são primos, como, por exemplo, $35 = 6\cdot 5+5$. Existe uma busca por progressões aritméticas formadas somente por números primos, a sequência 3, 5 e 7, por exemplo, é uma progressão aritmética formada só por três números primos e as maiores já encontradas contém 26 primos (ANDERSEN, 2017). Em 2016, Takeshi Nakamura encontrou uma dessas progressões aritméticas dada por

$$149836681069944461 + 7725290\cdot P\cdot n$$

sendo $P = 2\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 23 = 223092870$ e n inteiro tal que $0\leq n\leq 25$.

Sobre progressões aritméticas formadas apenas por números primos, destacamos os seguintes resultados:

Teorema 2. *Não existe progressão aritmética formada por três ou mais números primos distintos cujo primeiro termo é 2 ou cuja razão é um número ímpar.*

Demonstração. : O primeiro termo a_1 da ***PA*** não pode ser 2, senão a ***PA***$(2,2+r,2+2r,\ldots)$ teria pelo menos dois dos três primeiros termos números primos pares, o que é um absurdo, pois 2 é o único primo par. Então, a_1 é primo ímpar e a razão r da ***PA***$(a_1,a_1+r,a_1+2r,\ldots)$ não pode ser ímpar, senão teria o segundo termo a_1+r primo par, outro absurdo. $\square$

Teorema 3 (Teorema de Corput)**.** *Existe uma infinidade de progressões aritméticas formadas por três números primos.*

Por exemplo, $(3,11,19)$, $(5,11,17)$, $(7,19,31)$ e $(11,29,47)$.

Teorema 4 (Teorema de Green e Tao)**.** *Dado um número natural n qualquer, existem primos $p_1,p_2,\ldots,p_n$ tais que*

$$p_{i+1}-p_i = p_i - p_{i-1},$$

para todo i natural tal que $2\leq i\leq n-1$.

Em outras palavras, Green e Tao (2008) provaram a existência de progressões aritméticas só formadas por números primos de tamanhos arbitrários. Sobre progressões aritméticas infinitas, o resultado a seguir mostra que não é possível elas possuírem apenas números primos.

Teorema 5. *Não existe uma progressão aritmética com infinitos termos formada apenas por números primos.*

Demonstração. Seja a progressão

$$a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots,$$

Suponha, por absurdo, que $a+nb = p$, onde p é primo para todo n natural. Se colocarmos $N = n+kp$, k natural, temos:

$$a+Nb = a+(n+kp)b = a+nb+kpb = p+kpb = p(1+kb)$$

então, $a+Nb$ é divisível por p e, consequentemente, não é primo, o que é um absurdo. $\square$

Sobre progressões aritméticas formadas por números primos, existem as seguintes questões não resolvidas:

Problema 2. *Existem infinitas progressões aritméticas formada por três números primos distintos cujo primeiro termo é 3?*

Em 1939, Van der Corput (1890-1975) provou o **Teorema 3** sobre a existência de infinitas progressões aritméticas de 3 primos, mas não necessariamente iniciadas pelo número 3. Várias progressões aritméticas iniciadas por 3 são conhecidas, mas não se sabe se há uma infinidade delas. Por exemplo, $(3,5,7)$, $(3,11,19)$, $(3,13,23)$, $(3,17,31)$, $(3,23,43)$, $(3,31,49)$, $(3,37,71)$.

Problema 3. *Existem sequências arbitrariamente longas de números primos consecutivos em progressão aritmética?*

Em 1967, Lander e Parkin encontraram a primeira sequência de 6 primos consecutivos em ***PA***, com primeiro termo 121174811 e razão 30. A maior sequência já encontrada possui 10 números primos consecutivos em uma ***PA*** cujo primeiro termo é um número de 93 algarismos e razão 210 (DUBNER et al, 2001).

9.2.2 Problemas em aberto de combinatória

Este assunto é importante para desenvolver no aluno a sua capacidade de raciocínio.

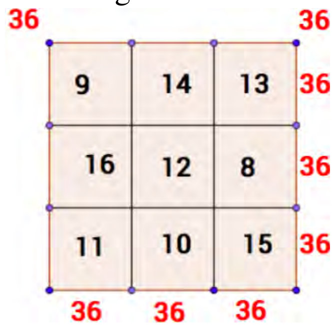
> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da Matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução. [...] Se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas (MORGADO, 1991, p. 3).

9.2.2.1 Quadrados mágicos

Nesta seção, abordaremos os quadrados mágicos que representam uma excelente ferramenta de aprendizagem capaz de desenvolver habilidades em relação à utilização de operações matemáticas.

Definição 5. *Um **quadrado mágico** de ordem n, para todo n natural maior que 2, é uma tabela quadrada de números naturais distintos composta de n linhas e n colunas, tais que a soma de qualquer linha, coluna e diagonal dá sempre o mesmo valor k, chamado constante mágica.*

Figura 9.1: Quadrado mágico de ordem 3 com $k = 36$



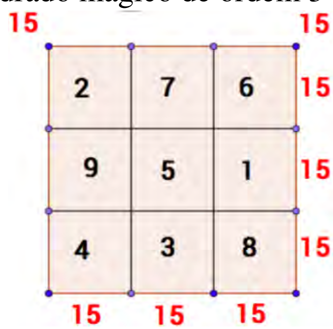
Fonte: Elaborada pelo autor.

Se os n^2 números do quadrado mágico de ordem n estão sequenciados de 1 a n^2, a soma S de todos os números do quadrado mágico de ordem n pode ser encontrada usando a soma dos i primeiros termos de uma progressão aritmética. Então:

$$S = 1 + 2 + \cdots + n^2 = \left(\frac{a_1 + a_i}{2}\right) \cdot i = \left(\frac{1 + n^2}{2}\right) \cdot n^2,$$

e a constante mágica k, soma de cada linha, coluna ou diagonal, é $k = \frac{S}{n}$, ou seja, $k = \left(\frac{1+n^2}{2}\right) \cdot n$. Por exemplo, num quadrado mágico de ordem 3 numerado de 1 a 9 a constante mágica é $k = \left(\frac{1+3^2}{2}\right) \cdot 3 = 15$.

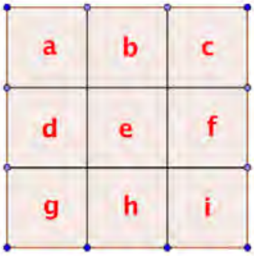
Figura 9.2: Quadrado mágico de ordem 3 com $k = 15$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Propriedades dos quadrados mágicos de ordem 3, numerados de 1 a 9: Considerando o seguinte quadrado mágico, temos:

Figura 9.3: Quadrado mágico de ordem 3 genérico



Fonte: Elaborada pelo autor.

1. O termo central é sempre igual a 5;

   Observe que $a+b+c=15$ e $g+h+i=15$. Somando essas duas equações, temos:

$$a+b+c+g+h+i=15+15$$

$$(a+i)+(c+g)+(b+h)=30,$$

   mas

$$a+i=c+g=b+h=15-e,$$

   portanto

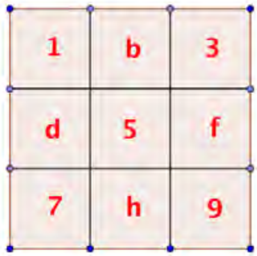
$$15-e+15-e+15-e=30$$

$$45-3e=30$$

$$e=5.$$

2. Os cantos são sempre números pares.
   Supondo, por absurdo, que os cantos são os ímpares 1, 3, 7 e 9, devemos colocar nos cantos opostos números que somem 10.

Figura 9.4: Cantos do quadrado mágico de ordem 3



Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, teríamos uma linha ou coluna com os números 1 e 3, o que é um absurdo, pois o maior valor que dispomos é 9 e $1+3+9=13$, que é menor que a constante mágica 15. Além disso, os cantos opostos não podem ter paridades distintas, visto que a soma deles seria ímpar e, quando somada ao termo central que é ímpar e igual a 5, seria par, ou seja, a constante mágica seria diferente de 15. Assim, temos a seguinte solução para um quadrado mágico de ordem 3 com números sequenciados de 1 a 9.

Figura 9.5: Quadrado mágico de ordem 3 numerado de 1 a 9

Fonte: Elaborada pelo autor.

Usando os números naturais consecutivos $1,2,\ldots,n^2$ para preencher um quadrado mágico de ordem n, existem precisamente:

- Um único quadrado mágico de ordem 3;
- 880 quadrados mágicos de ordem 4;
- 275.305.224 quadrados mágicos de ordem 5;

Não se sabe o número exato de quadrados mágicos de ordem 6, mas foi estimado que seja da ordem de 10^{19} (STEWART, 2009). O cálculo da quantidade de quadrados mágicos apresenta o seguinte problema não resolvido:

Problema 4. *Qual a quantidade de quadrados mágicos de ordem n diferentes, para todo n natural maior que 5?*

9.2.3 Quadrados mágicos de quadrados perfeitos

Existem quadrados mágicos em que todos os seus números são quadrados de números naturais, ou seja, quadrados perfeitos, e o primeiro deles, de ordem 4, foi encontrado por Leonhard Euler em 1770 (BOYER, 2005).

Figura 9.6: Quadrado mágico de Euler de quadrados perfeitos de ordem 4

68^2	29^2	41^2	37^2
17^2	31^2	79^2	32^2
59^2	28^2	23^2	61^2
11^2	77^2	8^2	49^2

Fonte: Euler's Magic Square (2016).

Problema 5. *Encontrar um quadrado mágico de quadrados perfeitos de ordem 3.*

Esse problema foi proposto pelo matemático Édouard Lucas em 1876 e alguns resultados chegaram perto. Por exemplo, o quadrado encontrado pelo matemático Lee Sallows:

Figura 9.7: Quadrado de quadrados perfeitos de Lee Sallows de ordem 3

127^2	46^2	58^2
2^2	113^2	94^2
74^2	82^2	97^2

Fonte: Boyer (2005).

Observe que esse quadrado tem todas as linhas, colunas e uma diagonal com soma 21.609, mas a diagonal $127^2 + 113^2 + 97^2 = 38.307$, portanto não é mágico. Euler conseguiu encontrar o seguinte quadrado mágico em que apenas dois termos não são quadrados perfeitos:

Figura 9.8: Quadrado mágico de Euler de ordem 3

373^2	289^2	565^2
360721	425^2	23^2
205^2	527^2	222121

Fonte: Boyer (2005).

9.2.4 Quadrados mágicos de números primos

O primeiro quadrado mágico de ordem 3 formado apenas por números primos foi encontrado por Sayles em 1913 e possui constante mágica 177 (SHULDHAM, 1914).

Figura 9.9: Quadrado mágico de números primos de Sayles

71	5	101
89	59	29
17	113	47

Fonte: Boyer (c2020).

Considerando a progressão aritmética ($a-4r$, $a-3r$, $a-2r$, $a-r$, a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$, $a+4r$) de 9 termos, com a e r naturais, podemos dispor os seus termos num quadrado mágico de ordem 3 da seguinte forma:

Figura 9.10: Quadrado mágico de ordem 3 de números em PA

a-3r	a+2r	a+r
a+4r	a	a-4r
a-r	a-2r	a+3r

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em geral, os termos de uma progressão aritmética com n^2 termos podem ser números de um quadrado mágico de ordem n e o **Teorema 4** de Green e Tao, da Subseção 9.2.1.1.1, afirma que existem progressões aritméticas de números primos de tamanhos arbitrários, portanto existem quadrados mágicos de números primos de ordem n, para todo n natural maior que 2. Por exemplo, o quadrado mágico de ordem 3 com números primos em progressão aritmética dada por $210n-11$, com n natural e $1 \leq n \leq 9$.

Figura 9.11: Quadrado mágico de ordem 3 de números primos em PA

1669	199	1249
619	1039	1459
829	1879	409

Fonte: Elaborada pelo autor.

9.2.4.1 Problemas em aberto de geometria

A Geometria surgiu nas civilizações antigas por meio da experimentação para suprir necessidades cotidianas relacionadas ao plantio, construções e movimento dos astros, sendo usada para cálculo de perímetros, áreas e volumes. Euclides (300 a.C.), em sua obra *Os Elementos*, apresentou a geometria como ciência de natureza lógica e dedutiva, em que cada afirmação deveria ser deduzida de outras mais simples de maneira lógica e sucessiva.

Os problemas geométricos sempre despertaram o interesse das pessoas e os mais marcantes objetivavam construções com uma régua não graduada e um compasso, sendo conhecidos como: "Os três problemas clássicos de Geometria". Eles são:

- a quadratura do círculo: construir um quadrado com área igual ao de um círculo dado;
- a duplicação do cubo: construir um cubo com volume igual ao dobro do volume de um cubo dado;
- a trissecção do ângulo: dividir um ângulo qualquer em três partes com medidas iguais.

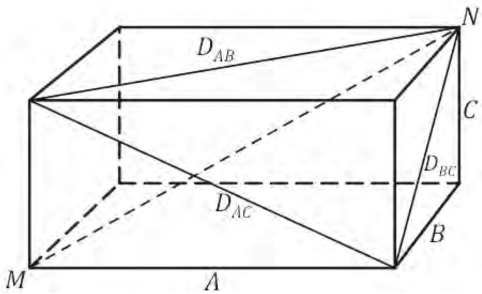
A busca pela solução desses problemas promoveu o desenvolvimento da geometria Euclidiana, levando a descobertas, das quais destacamos as cônicas e curvas cúbicas. Pierre Laurent Wantzel, em 1837, provou a impossibilidade da solução dos três problemas clássicos somente com régua e compasso (BARBOSA; ASSIS NETO, 2011).

Apesar da origem remota, a Geometria Euclidiana não está totalmente pronta e várias questões ainda permanecem sem solução.

9.2.4.2 O Tijolo de Euler

Definição 6. *O* ***tijolo de Euler*** *é um paralelepípedo reto-retângulo em que todas as arestas e diagonais das faces têm medidas expressas por números inteiros positivos.*

Figura 9.12: Tijolo de Euler



Fonte: Nascimento (2015).

Encontrar tijolos de Euler é uma aplicação natural de triplas pitagóricas, pois todas as faces do sólido são retângulos e as medidas de suas diagonais são encontradas por meio do teorema de Pitágoras. O menor tijolo de Euler já encontrado tem arestas $A = 240, B = 117$ e $C = 44$, e diagonais das faces $D_{AB} = 267$, $D_{AC} = 244$ e $D_{BC} = 125$, sendo descoberto em 1719, pelo matemático Halcke. Se a diagonal interna do paralelepípedo que não está contida numa das faces também tem como medida um número inteiro, o paralelepípedo diz-se **perfeito**.

Problema 6. *Encontrar um tijolo de Euler perfeito.*

Já foram encontrados alguns paralelepípedos de arestas inteiras com diagonal interna inteira e apenas duas diagonais de suas faces inteiras, sendo considerados paralelepípedos quase perfeitos, por exemplo, o paralelepípedo com arestas $A = 672, B = 153$ e $C = 104$, diagonais das faces $D_{AB} = 3\sqrt{52777}$, $D_{AC} = 680$ e $D_{BC} = 185$ e diagonal interna $D_{ABC} = 697$.

9.2.5 Aplicação em sala de aula

9.2.5.1 Quadrados mágicos e progressões aritméticas

Nesta seção, apresentaremos uma proposta de aplicação das propriedades de progressões aritméticas nos quadrados mágicos.

Tema: Quadrados Mágicos

Objetivos: Estudar propriedades das progressões aritméticas com o uso quadrados mágicos.

Conteúdos Relacionados: Progressão aritmética e matrizes.

Público alvo: Estudantes da segunda série do Ensino Médio.

Metodologia: Aula expositiva apresentando definição e propriedades das progressões aritméticas aplicadas aos quadrados mágicos.

Inicialmente é preciso trabalhar os conteúdos de Progressões Aritméticas e Matrizes, desenvolvendo os seguintes tópicos:

- **Sequência Numérica**: Dado um número natural n, chama-se **sequência numérica finita** toda função dos números naturais menores ou iguais a n nos reais, ou seja, $f : \{1, 2, 3, 4, ..., n\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n$. Os números $a_1, a_2, ..., a_n$ são chamados de termos da sequência e denota-se a sequência numérica finita por $f = (a_1, a_2, ..., a_n)$, em que as imagens dos números naturais menores ou iguais a n, pela função $f : \{1,2,3,4,...,n\} \to \mathbb{R}$, aparecem entre parênteses, ordenadamente, da direita para esquerda. Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que $f(n) = a_n$, a sequência $f = (a_1,a_2,...,a_n,...)$ é chamada **numérica infinita**.

- **Progressão Aritmética**: Uma progressão aritmética, denotada por **PA**, é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado de uma constante r chamada razão da **PA**. Se a sequência numérica que forma a **PA** é finita, a **PA** é finita.

  - **Termo Geral da PA**: Se $(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n,a_{n+1},\ldots)$ é uma progressão aritmética de razão r, então o termo de ordem n é dado por $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, para todo n natural, tal que $n \geq 1$.

  - **Três termos consecutivos de uma PA**: Em toda PA, cada termo, a partir do segundo, é média aritmética entre o antecedente e o consequente.
    Considerando a,b e c, três termos consecutivos de um PA, temos:
    $$b-a = c-b \Rightarrow 2b = a+c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2} \blacksquare$$

  - **Termos Equidistantes dos Extremos**: Dois termos de uma sequência finita são **equidistantes dos extremos** quando o número de termos que precede um deles é igual ao número de termos que sucede ao outro. Assim, na sequência:
    $$(\underbrace{a_1,a_2,\ldots,a_i}_{i\ termos},a_{i+1},\ldots,a_{n-i},\underbrace{a_{n-i+1},\ldots,a_{n-1},a_n}_{i\ termos})$$
    os termos a_{i+1} e a_{n-i} são equidistantes dos extremos. Observe que dois termos a_k e a_p serão equidistantes dos extremos se $k+p = n+1$. Por exemplo, a_4 e a_{n-3} são termos equidistantes dos extremos de uma PA de n termos.

Propriedade: Em toda **PA** finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.
Sabemos que os termos a_{i+1} e a_{n-i} são equidistantes dos extremos, aplicando a expressão do termo geral, temos

$$\begin{aligned} a_{i+1}+a_{n-i} &= a_1+(n-i-1)\cdot r+a_1+(n-n+i)\cdot r \\ &= a_1+a_1+(n-i-1+n-n+i)\cdot r \\ &= a_1+a_1+(n-1)\cdot r \\ &= a_1+a_n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

– **Termo Central de uma PA**: Em toda PA finita, com número ímpar de termos, o termo central é média aritmética dos extremos ou de dois termos equidistantes dos extremos.
Seja uma **PA** com $2n+1$ termos

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1})$$

O termo central é a_{n+1}. Note que a_n, a_{n+1} e a_{n+2}

são termos consecutivos da **PA**, portanto

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2},$$

como a_n e a_{n+2} são termos equidistantes dos extremos a_1 e a_{2n+1}, temos

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2} = \frac{a_1 + a_{2n+1}}{2}.$$

– **Soma dos n primeiros termos de uma PA**: A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)\cdot n.$$

Considerando os n primeiros termos de uma PA, podemos escrever

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n. \quad (1) \quad \text{ou} \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1. \quad (2) \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as equações (1) e (2), segue que

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

O segundo membro da equação acima é composto por parcelas que são somas de termos equidistantes dos extremos, portanto:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n \blacksquare$$

Matriz Quadrada: Uma **matriz quadrada** de ordem n ou $n \times n$ é uma tabela de números dispostos em n linhas e n colunas, onde $a_{i,j}$ representam os elementos que se localizam na linha i e coluna j

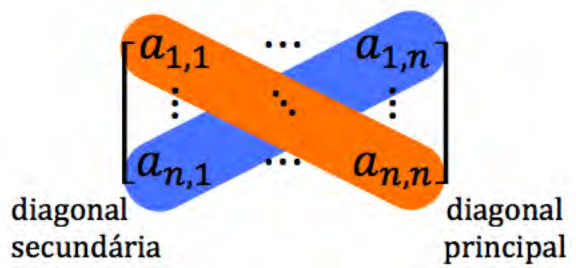
$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

com $1 \leq i, j \leq n$.

- **Diagonal Principal**: Numa matriz quadrada de ordem n, a **diagonal principal** é formada pelos elementos $a_{i,j}$ tais que $i = j$, ou seja, $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$.

- **Diagonal Secundária**: Numa matriz quadrada de ordem n, a **diagonal secundária** é formada pelos elementos $a_{i,j}$ tais que $i+j=n+1$, ou seja, $a_{1,n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n,1}$.

Figura 9.13: Diagonais de uma matriz quadrada



Fonte: Elaborada pelo autor.

- **Quadrado Mágico**: Um **quadrado mágico** é uma matriz quadrada de ordem n, com $a_{i,j}$ distintos e $1 \le i, j \le n$, onde a soma dos elementos de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é sempre igual a uma constante k, chamada constante mágica.

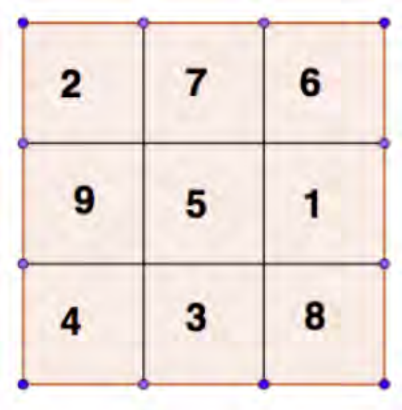
  Após trabalhar os tópicos acima e apresentar a definição de **quadrados mágicos**, mostrar exemplos e propor aos alunos que eles encontrem um quadrado mágico de ordem 3 com números de 1 a 9.

  Na sequência, orientar os alunos para que façam as seguintes transformações em seus quadrados mágicos:

  - **Somar uma constante**: Adicionando uma constante a qualquer a todos os termos do quadrado mágico de ordem 3, numerado de 1 a 9, percebemos que:

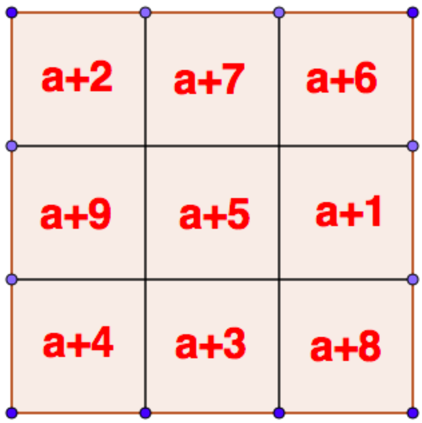
    > *Qualquer sequência de nove números consecutivos pode ser termos de um quadrado mágico de ordem 3*;

Figura 9.14: Quadrado mágico de ordem 3, numerado de 1 a 9



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 9.15: Quadrado mágico de ordem 3 numerado de a+1 a a+9

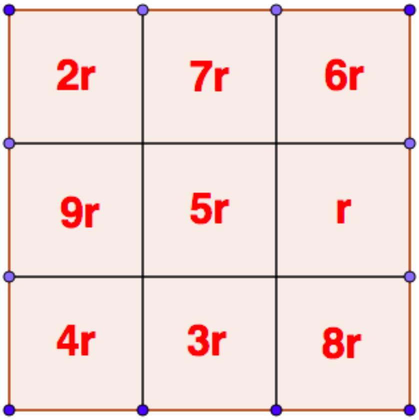


Fonte: Elaborada pelo autor.

- **Multiplicar por uma constante**: Multiplicando por constante s qualquer todos os termos do quadrado mágico de ordem 3, numerado de 1 a 9, percebemos que:

Qualquer sequência de nove múltiplos consecutivos de um número inteiro pode ser termos de um quadrado mágico de ordem 3;

Figura 9.16: Quadrado mágico de ordem 3 numerado de r a $9r$

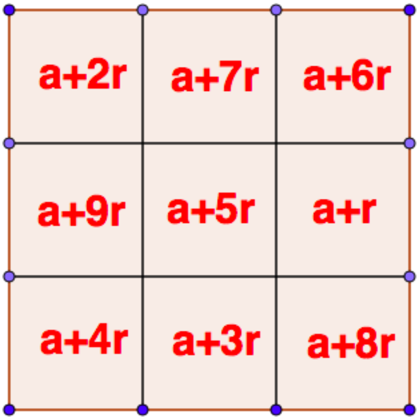


Fonte: Elaborada pelo autor.

– **Multiplicando e somando**: Multiplicando por uma constante r e depois adicionando uma outra constante a a cada um dos termos do quadrado mágico de ordem 3, numerado de 1 a 9, percebemos que:

Qualquer progressão aritmética de nove números pode ser termos de um quadrado mágico de ordem 3 ;

Figura 9.17: Quadrado mágico de ordem 3 numerado de $a+r$ a $a+9r$



Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível arranjar termos de progressões aritméticas em quadrados mágicos de ordem maior que 3. Por exemplo, num quadrado mágico de ordem 4, podemos colocar os 16 termos da seguinte progressão aritmética: $(a, a+r, a+2r, \ldots, a+14r, a+15r)$ com a e r naturais, da seguinte forma

Tabela 9.1: Quadrado mágico de ordem 4 com números em *PA*

a	$a+14r$	$a+13r$	$a+3r$	$4a+30r$
$a+11r$	$a+5r$	$a+6r$	$a+8r$	$4a+30r$
$a+7r$	$a+9r$	$a+10r$	$a+4r$	$4a+30r$
$a+12r$	$a+2r$	$a+r$	$a+15r$	$4a+30r$
$4a+30r$	$4a+30r$	$4a+30r$	$4a+30r$	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que os 16 termos da progressão aritmética foram arranjados formando um quadrado mágico cuja constante mágica é $4a+30r$.

Existe uma outra relação entre os quadrados mágicos e as progressões aritméticas, como veremos a seguir:

– **A Constante Mágica**: Considerando um quadrado mágico de ordem n, numerado de 1 a n^2,

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

com $1 \leq i, j \leq n$ e $a_{i,j} \in \{1, 2, 3, \ldots, n^2\}$, a soma S de todos os números do quadrado mágico de ordem n pode ser encontrada usando a soma dos i primeiros termos de uma progressão aritmética, então

$$S = 1 + 2 + \ldots + n^2 = \left(\frac{a_1 + a_i}{2}\right) \cdot i = \left(\frac{1 + n^2}{2}\right) \cdot n^2$$

e a constante mágica k, soma de cada linha, coluna ou diagonal, é $k = \frac{S}{n}$, ou seja,

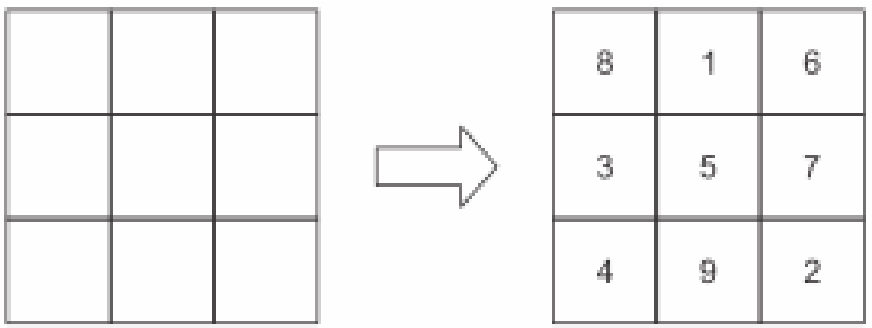
$$k = \left(\frac{1 + n^2}{2}\right) \cdot n.$$

Após trabalhar essas aplicações, o professor pode apresentar aos alunos os problemas em aberto sobre quadrados mágicos da Seção 9.2.2.1, como também propor que procurem quadrados mágicos formados por números primos, o que pode ser feito usando o fato de que progressões aritméticas fornecem números para os quadrados mágicos e o Teorema de Green e Tao, abordado na Subseção 9.2.1.1.1, que garante a existência de progressões aritméticas de números primos de tamanho arbitrário.

Na sequência, sugerimos uma lista de exercícios sobre quadrados mágicos para ser aplicada após trabalhar essa atividade

Questões Propostas

Questão 1 (Colégio Pedro II - 2017). *O Quadrado Mágico é uma tabela quadrada composta por números inteiros consecutivos a partir do 1, em que a soma de cada coluna, de cada linha e de cada diagonal são iguais. Essa soma é chamada de número mágico.*
Aprenda a encontrar o número mágico de um quadrado 3×3 *como o da figura.*



O quadrado mágico 3×3 *possui 9 posições, portanto deve ser preenchido com os números de 1 até 9 sem repetição.*
O número mágico pode ser encontrado seguindo dois passos.
***Passo 1** – Encontrar a soma total dos números.*

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

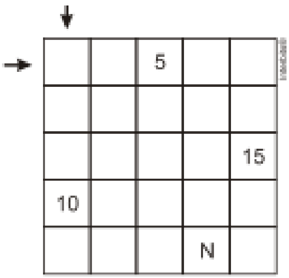
***Passo 2** – Dividir a soma encontrada pelo número de colunas existentes no quadrado. No caso do quadrado mágico* 3×3 *os 9 números estão agrupados em 3 colunas. Logo o número mágico será* $45 : 3 = 15$. *Em condições semelhantes, o número mágico de um quadrado* 4×4 *será*

a) 16.
b) 24.
c) 34.
d) 64.
e) 136.

Resolução*: Do enunciado, o número mágico de um quadrado* 4×4 *é dado por:*

$$\frac{1+2+\cdots+16}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1+16}{2}\right) \cdot 16 = 34$$

Questão 2 (UPE - 2012)**.** *O quadrado mágico abaixo foi construído de maneira que os números em cada linha formam uma progressão aritmética de razão x, e, em cada coluna, uma progressão aritmética de razão y, como indicado pelas setas.*



Sendo x e y positivos, qual o valor de N?
a) 14
b) 19
c) 20
d) 23
e) 25

Resolução: Cada linha forma uma progressão aritmética de razão $x = 2$. Cada coluna, uma progressão aritmética de razão $y = 3$. Portanto, temos:

1	3	5	7	9
4	6	8	10	12
7	9	11	13	15
10	12	14	16	18
13	15	17	19	21

Questão 3 (UFTM - 2012)**.** *O quadrado mágico multiplicativo indicado na figura é composto apenas por números inteiros positivos. Nesse quadrado mágico, o produto dos números de cada linha, de cada coluna e de cada uma das duas diagonais principais dá sempre o mesmo resultado.*

50	2	x
y	10	50
10	z	w

Nas condições dadas, $x+y+z+w$ é igual a
a) 56.
b) 58.
c) 60.
d) 64.
e) 66.

Resolução: Temos que

$100x = 500y = 10zw = 500w = 20z = 50xw \Rightarrow x = 10, y = 2, z = 50$ e $w = 2$

Portanto, $x+y+z = 64$.

Questão 4 (Profmat MA21 - 2015). *Dado $n \in \mathbb{N}$ par, pode existir um quadrado $n \times n$ que é preenchido pelos n^2 primeiros números primos?*

Resolução: A resposta é não, e a razão é uma obstrução de paridade, baseada no fato que 2 é o único primo par. Suponha, por absurdo, que existe um quadrado mágico como estipulado acima. Observe que a linha que contém 2 tem um elemento par e $n-1$ ímpares; como $n-1$ é ímpar, isso quer dizer que a soma dos números na linha é ímpar. Por outro lado, uma linha que não contém 2 tem de ter soma par (estamos somando n números ímpares e n é par!). Mas, então, temos duas linhas com somas distintas, absurdo!

Questão 5 (PUCPR - 2005). *Um quadrado mágico é um arranjo quadrado de números tais que a soma dos números em cada fila (linha ou coluna) e nas duas diagonais é o mesmo. Os nove números $n, n+3, n+6, ..., n+24$, em que n é um número inteiro positivo, podem ser usados para construir um quadrado mágico de três por três.*
A soma dos números de uma fila deste quadrado vale:
a) $3n+6$
b) $3n+36$
c) $3n$
d) $3n+24$
e) $3n+12$

Resolução: Os 9 números $n, n+3, n+6, ..., n+24$ estão em PA cuja soma é S:

$$S = \left(\frac{n+n+24}{2}\right) \cdot 9 = (n+12) \cdot 9$$

e a soma dos elementos de uma fila é

$$\frac{S}{3} = \frac{(n+12) \cdot 9}{3} = 3n+36$$

9.3 Considerações finais

A aplicação de problemas em aberto no Ensino Médio pode motivar os alunos desse nível a aprender matemática, deixando-os surpresos com a possibilidade de entender a afirmação de um problema não resolvido e como problemas com enunciados simples, como a Conjectura de Collatz, não estão resolvidos.

O trabalho mostra que existem vários problemas em aberto cujos enunciados estão no nível da matemática da educação básica, como também afasta dos alunos a mentalidade de que todos os problemas têm respostas conhecidas e que seus professores podem encontrar a resposta a todos os problemas. Apesar de não resolver nenhum dos problemas em aberto, o texto produzido apresenta avanços e soluções parciais para a maioria dos problemas, promovendo um aprofundamento de conteúdos matemáticos da educação básica e acrescentando conteúdos que normalmente não são trabalhados nesse nível escolar.

Em um processo de aprendizagem ativa, o aluno deve ser protagonista de seu aprendizado, em uma relação interativa com o professor, criando uma via de mão dupla em que ambos aprendem e se desenvolvem. É fato que o uso de atividades investigativas proporciona essa aprendizagem ativa, colocando o professor como orientador que ajuda o aluno a ir além do ponto em que conseguiria chegar sozinho. Acreditamos que o uso dos problemas matemáticos em aberto podem promover a investigação, mas durante a elaboração deste material surgiram os seguintes questionamentos:

1. Qual a melhor forma de se propor um problema matemático em aberto a um estudante do Ensino Médio? Mencionar ou não que se trata de um problema em aberto?

2. O conhecimento prévio pelo estudante do Ensino Médio de que um problema matemático está em aberto gera motivação ou desestímulo para tentar respondê-lo?

3. Se um problema matemático em aberto gerar uma motivação num estudante do Ensino Médio para tentar respondê-lo, será apenas por

um curto espaço de tempo e logo ele desistirá após algumas tentativas de resolução?

4. Os problemas matemáticos em aberto motivam apenas alunos do Ensino Médio com alto potencial em matemática ou podem motivar os que têm dificuldade?

5. A motivação gerada por um problema matemático em aberto pode causar dependência e viciação, prejudicando pedagogicamente o estudante do Ensino Médio nos seus estudos regulares?

Assim, pretendemos dar continuidade nesta pesquisa com aplicação desse material para coletar dados que permitam analisar o comportamento dos estudantes do Ensino Médio diante dos problemas em aberto e, consequentemente, elaborar uma proposta curricular de matemática para o Ensino Médio incentivando atividades investigativas por meio de problemas em aberto.

9.4 Referências bibliográficas

ANDERSEN, J. Primes in Arithmetic Progression Records. **Prime Records**, 2017. Disponível em: <http://primerecords.dk/aprecords.htm>. Acesso em: 11 fev. 2018.

BARBOSA, J.; ASSIS NETO, F. Pierre Laurent Wantzel: O Último Capítulo de Dois dos Três. In: IX SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9., 2011, Aracaju. **Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática**. São Paulo: Sbhm, 2011. p. 1 - 9.

BOYER, C. Some notes on the magic squares of problem. **The Mathematical Intelligencer**, [s.l.], v. 27, n. 2, p.52-64, 2005.

BOYER, C. Bimagic squares of primes. **MultiMagic**, c2020. Disponível em: <http://www.multimagie.com/English/BimagicPrimes.htm>. Acesso em: 23 jun. 2021.

BBC BRASIL. **Por que um problema simples é um dos buracos negros da matemática**. 2016. Disponível em:

<http://www.bbc.com/portuguese/geral-36702054>. Acesso em: 10 out. 2016.

D'AMBROSIO, B.. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. **Pro-posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p.35-41, mar. 1993.

DUBNER, H. et al. Ten consecutive primes in arithmetic progression. **Mathematics Of Computation**, [s.l.], v. 71, n. 239, p.1323-1328, 28 nov. 2001.
Disponível em: <http://www.ams.org/journals/mcom/2002-71-239/S0025-5718-01-01374-6/S0025-5718-01-01374-6.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2018.

EULER's Magic Square. **Math Garden Blog**, 2016. Disponível em: <http://mathgardenblog.blogspot.com/2016/05/Euler-magic-square.html>. Acesso em: 23 jun. 2021.

GREEN, B.; TAO, T. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. **Annals Of Mathematics**, [s.l.], v. 167, n. 2, p.481-547, 1 mar. 2008.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção Profmat).

LIMA, R. A. de. **A utilização de problemas matemáticos em aberto no ensino médio**. 2018. Dissertação (Mestrado) — UFRPE, Recife-PE.

MORGADO, A. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 8. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).

NASCIMENTO, S. O Tijolo de Euler. **O baricentro da mente**, 2015. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2015/07/o-tijolo-de-euler.html>. Acesso em: 23 jun. 2021.

PEIXE, T.; BUESCU, J. Recorrências, progressões aritméticas e teoria ergódica: teoremas de van der Waerden e de Green-Tao. **Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, v. 48-49, n. 1, p.39-51, 2010. Disponível em: <<http://rmu.sbm.org.br/Conteudo\/n48_n49/n48_n49_Artigo01.pdf>>. Acesso em: 20 fev. 2018.

SACRISTÁN, J. G.; GÓMEZ, A. I. P.. **Compreender e transformar o ensino**. São Paulo: Artmed, 1998.

SHULDHAM, C. Pandiagonal Prime Number Magic Squares.