

Capítulo 8

Cônicas: Refletindo e aprendendo

Ma. Kaliny Ferreira do Nascimento¹
Dra. Anete Soares Cavalcanti²

Resumo: As cônicas são objetos matemáticos com várias aplicações, como seu uso na Acústica, na Medicina e na Engenharia Civil, dentre outras. Apesar disso, pouco se fala nas salas de aula de Ensino Básico sobre essas utilidades, vinculadas fortemente às suas propriedades de reflexão, estabelecendo para os alunos uma restrição desses objetos ao mundo “abstrato” da Álgebra por meio do estudo de suas equações. Para apresentar aos estudantes uma abordagem mais concreta e significativa das cônicas, este artigo visa propor atividades que busquem introduzir esse conteúdo de maneira simples e divertida. Tais atividades também são úteis para consolidar a ideia do conceito dessas cônicas e da localização de seus elementos, preparando, assim, os alunos para um posterior estudo mais aprofundado e teórico dessas curvas. Este trabalho, composto por cinco atividades, foi aplicado na Escola de Referência em Ensino Médio (EREM) Aníbal Falcão, localizada em Tejipió,

¹Professora da Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco – SEE, kaliny.ferreira@yahoo.com.br

²Professora da Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, anete.soares@ufrpe.br

bairro de Recife-PE. Espera-se que essa pesquisa inspire professores de matemática a aplicarem, nas suas aulas, a proposta apresentada.

Palavras-chave: Cônicas; Reflexão; Lúdico; Ensino de Matemática.

8.1 Introdução

As cônicas têm sido objetos de estudo há muitos séculos. Elas possuem propriedades de reflexão que instigaram a curiosidade de muitos matemáticos desde antes de Cristo até hoje. Muitas são as suas aplicabilidades na sociedade, entretanto elas são pouco exploradas em sala de aula. Além de estimular os alunos, o uso de aulas lúdicas com experimentos práticos é útil para consolidar a ideia do conceito dessas cônicas e da localização de seus elementos.

Nas últimas décadas, a Educação brasileira vem sofrendo uma grande revolução quanto aos seus objetivos fundamentais, procurando se distanciar cada vez mais de uma formação engessada e formulaica, por vezes inalcançável aos alunos, e focando em uma maneira mais simples e contextualizada. Essa nova onda filosófica defende que o raciocínio matemático não deve ser compartimentalizado e desvinculado do contexto social no qual o estudante está inserido. Pode-se verificar essa ideia nos documentos oficiais recentes de Educação, cujo principal é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio.

A BNCC do Ensino Médio enfatiza que é necessário haver um ensino de maneira a integrar os campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas). Para isso, utilizam-se os pares de ideias. São eles: variação e constância; certeza e incerteza; movimento e posição; e relações e inter-relações (BRASIL, 2018). Estudando as seções cônicas, pode-se utilizar de muitos desses pares de ideias.

Quando, por exemplo, a partir do conceito dessas curvas como Lugar Geométrico (L.G.) chegamos ao formato dessa cônica, estamos utilizando, pelo menos, o par de ideia variação e constância que, segundo a BNCC,

“envolve observar, imaginar, abstrair, discernir e reconhecer características comuns e diferentes ou o que mudou e o que permaneceu invariante, expressar e representar (ou descrever) padrões, generalizando-o” (BNCC, 2018, p. 520). Daí a relevância de se estudar não somente as cônicas, mas também suas propriedades que são muito usadas em várias áreas do conhecimento e revertidas em benefícios para a nossa sociedade.

No ensino público estadual de Pernambuco, o conteúdo GEOMETRIA ANALÍTICA: SECÇÕES CÔNICAS - Parábola; Elipse; Hipérbole - é restrito para o currículo das escolas integrais, pois essas possuem uma carga horária maior em comparação com as regulares. As expectativas de aprendizagem são as seguintes:

Dominar a aplicação dos conhecimentos de geometria analítica na resolução de problemas. Encontrar as equações das cônicas (parábola, elipse e hipérbole). Resolver sistemas de equações e inequações do segundo grau a duas variáveis, tanto algébrica quanto graficamente (PERNAMBUCO, 2013, p. 23).

Para se atingir esse nível de abstração matemática que essas expectativas de aprendizagem propõem, é necessário que haja antes uma forte compreensão das características do objeto matemático em estudo. Para facilitar esse aprendizado, o professor pode lançar mão de atividades lúdicas que reforcem essas características básicas das cônicas, como os seus formatos, e as propriedades de reflexão que trarão significado e aguçarão a curiosidade dos estudantes nesse processo de aprendizagem.

Este artigo é um recorte da dissertação *Luz, Cônicas, Reflexão: uma sequência didática para o ensino das cônicas* (NASCIMENTO, 2020), cujo objetivo geral é apresentar um conjunto de atividades lúdicas para auxiliar professores durante o processo de ensino-aprendizagem das cônicas para alunos do Ensino Básico. Os objetivos específicos são: compreender a definição dos elementos determinantes das cônicas e indicá-los algébrica e geometricamente; construir modelos geométricos que representem as cônicas e suas propriedades refletoras; e, por fim, associar as proprieda-

des refletoras das cônicas às suas utilizações na sociedade, a fim de dar significado ao estudo desse objeto matemático.

Ressaltamos que apesar dessa pesquisa se tratar de um assunto presente na grade curricular do Ensino Médio e ter sido aplicada nessa etapa escolar, as atividades lúdicas propostas na Seção 8.2 são bastante simples e requerem pouco conhecimento matemático prévio. Muitos experimentos visam exercitar aspectos mais básicos acerca das cônicas, como identificar seus formatos e compreender suas propriedades refletoras, sendo assim, aplicáveis a quaisquer níveis da educação básica.

O artigo possui duas seções, sendo a primeira uma sequência didática para o ensino das cônicas e suas propriedades refletoras aplicadas em uma turma de Ensino Médio. Ela é baseada em atividades lúdicas na qual o aluno constrói conhecimento através de experimentos práticos. Na segunda e última, apresentamos os resultados das nossas observações durante a aplicação das sequências didáticas. É válido ressaltar que a autora também foi a professora que aplicou as atividades supracitadas.

8.2 Fundamentos teóricos e metodológicos

Em uma sala de aula, cada atividade ou tarefa proposta pelo professor com uma determinada finalidade é classificada por Zabala (2015) como unidade elementar do processo de ensino-aprendizagem. Entretanto ele, apesar de reconhecer a importância dessas unidades, defende que elas são insuficientes por si só para realizar uma análise completa acerca do processo de ensino-aprendizagem de um determinado conteúdo. Para ficar mais claro, segue um exemplo.

Em uma abordagem tradicional, a realização de uma lista de exercício acerca de um determinado assunto normalmente é feita após a sua exposição por parte do professor. Por outro lado, em algumas metodologias ativas de ensino, como na sala de aula invertida, ela pode ser proposta inicialmente para os alunos e o seu conteúdo ser trazido para aula por meio de um debate mediado, posteriormente, pelo professor.

No exemplo acima, pode-se observar que a unidade elementar “lista de exercício” pode assumir funções e características diferentes que dependem das unidades elementares que a precedem ou sucedem. Na primeira situação, ela pode ser entendida como um meio de aferir a internalização dos tópicos apresentados na aula expositiva. Enquanto que, na segunda, o professor pode ter desejado usá-la para introduzir o conteúdo, despertando no estudante habilidades como a investigação e o protagonismo.

Assim, é necessário tomar uma outra unidade que permita realizar a análise desse desenvolvimento educativo em torno de um conteúdo, relacionando as unidades elementares entre si e situando-as em relação às diversas variáveis desse processo como, por exemplo, recursos e tempo utilizados. Zabala (2015) apresenta a “sequência de atividades ou sequência didática” como essa unidade de caráter processual.

Sequência didática é um termo comum no mundo docente. Entretanto, para os leitores não familiarizados, o termo pode ser confundido com outros termos pedagógicos. Sendo assim, a definição de sequência didática considerada neste trabalho é:

Sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido (PERETTI; TONIN DA COSTA, 2013, p. 6).

Além de considerar a sequência didática fio condutor do processo de ensino-aprendizagem, pode-se combiná-la à outras ferramentas para potencializar essa construção de conhecimento. Uma dessas ferramentas é a ludicidade.

Segundo Evangelista et al., “a Matemática é uma ciência muito complexa [...] (que) requer atenção especial e disciplina na sua aplicação, o que faz com que muitos alunos apresentem certa dificuldade no momento da sua

aprendizagem e execução” (2013, p. 4), por isso é importantíssimo obter a atenção e o engajamento dos estudantes nessa caminhada. As atividades lúdicas, como jogos ou experimentos práticos, são armas muito poderosas quando se tem esse objetivo.

Conforme Evangelista et al, “para os alunos, aula boa é aquela que consegue prender a atenção deles de forma que o tempo passe sem que eles percebam e proporcione aprendizagem interativa e dinâmica” (2013, p. 5), atribuições facilmente alcançadas quando se envolve a ludicidade.

Dentre os benefícios de se aplicar uma sequência didática lúdica, destaca-se:

Explicações que são feitas com exemplos que atraem a atenção e a curiosidade dos alunos são absorvidas e interpretadas com mais facilidade. Temas que são desenvolvidos em ambientes diversificados, claros, arejados, que proporcione o bem estar do aluno e que exija dele participação ativa, certamente não serão esquecidos. Os alunos gostam e preferem aulas diferentes, a metodologia rotineira de quadro negro, sala de aula com professor escrevendo e o aluno copiando está ultrapassado e não desperta no aluno nenhum estímulo nem interesse de prestar atenção e aprender o que o professor está ensinando (EVANGELISTA et al., 2013, p. 5).

Diante dessa explanação acerca das vantagens dessas duas ferramentas, parece relevante utilizá-las. Portanto essa pesquisa foi feita atentando para essa rica combinação pedagógica entre o uso da sequência didática e da ludicidade.

Os materiais utilizados são, em sua grande maioria, de fácil acesso e baixo custo como, lanterna, cartolina, barbante, régua, compasso, tachinhas, isopor, entre outros. Além de reutilizar materiais que seriam descartados, promovendo, assim, um impacto positivo no meio ambiente, os experimentos produzidos foram expostos na II Feira de Matemática da EREM

Aníbal Falcão pelos alunos da turma do 3º ano A de 2019, além de servirem de recurso pedagógico para auxiliar professores no processo de ensino-aprendizagem das cônicas em turmas futuras, pois estão à disposição de outros docentes na escola.

Na maioria das atividades diferenciadas propostas, optou-se por materializar os conceitos trabalhados no livro didático concordando com o que diz Silva et al.: “o material concreto é uma forma de apresentar ao aluno uma maneira mais fácil e palpável de aprender matemática e como ela pode ser usada no nosso cotidiano” (2016, p. 4).

A seguir, apresentaremos a trajetória de aplicação da sequência didática dessa pesquisa.

8.2.1 Sequência didática - aplicação das atividades lúdicas

Nessa seção, apresentaremos a sequência didática desenvolvida com o intuito de tornar mais lúdico o ensino de cônicas e suas propriedades refletoras.

O enfoque dessa sequência didática foi nas definições gerais e na aplicação das propriedades refletoras, não se apegando à rigidez das fórmulas analíticas das cônicas, sendo assim, não demanda dos alunos conhecimentos matemáticos muito sofisticados ou abstratos, podendo, inclusive, ser aplicada em séries anteriores, como, por exemplo, nos anos finais do Ensino Fundamental.

As demonstrações matemáticas das construções utilizadas nessa sequência didática podem ser encontradas em Nascimento (2020).

- **Tema:** As cônicas e suas propriedades refletoras.
- **Público alvo:** alunos a partir do 8º ano do Ensino Fundamental.

- **Duração:** 12 aulas (aproximadamente 4 encontros com duas aulas de 50 minutos cada e 1 encontro de quatro aulas de 50 minutos cada para a visita técnica).
- **Disciplina:** Matemática.
- **Objetivo geral:** Apresentar uma sequência didática utilizando atividades lúdicas no ensino das cônicas e suas propriedades refletoras.
- **Objetivos específicos:**
 1. Reconhecer as características de cada cônica;
 2. Identificar os elementos das cônicas;
 3. Comprovar a definição de cada cônica através de teste de medição;
 4. Identificar as retas tangentes às curvas;
 5. Compreender e aplicar as propriedades refletoras das cônicas;
 6. Motivar os alunos a estudarem matemática.
- **Avaliação:**
 - *Formativa:* observar o engajamento e desempenho dos alunos durante a aula e acompanhar suas produções nas diversas atividades de classe;
 - *Somativa:* Realização de um teste individual e sem consulta composto por 8 questões abertas acerca do assunto estudado, ver Apêndice 8.4.

Nas subseções a seguir, descreveremos cada uma das atividades realizadas como momentos didáticos em sala de aula, explicitando a quantidade de aulas utilizadas, bem como os materiais e procedimentos adotados.

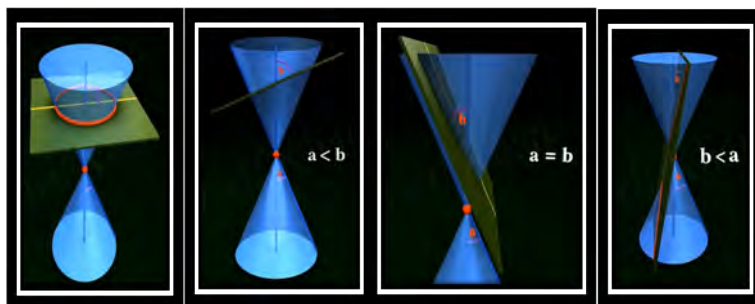
8.2.1.1 Atividade 1: Experimento com lanterna (Duração: 1 aula).

Num primeiro momento, fizemos um experimento com lanterna, a fim de estimular, nos estudantes, a relação do formato de cada curva com suas origens, descobertas por Menaechmus (380 - 320 a.C.), que são as de seções em um cone. Segue a descrição da primeira atividade.

Materiais adotados: notebook, data show e lanterna.

Inicialmente, apresentamos o vídeo *Conic Section 3D Animation* (CREATIVE LEARNING, 2015). Nele, mostramos a relação de cada cônica com o ângulo de inclinação do plano que secciona o cone duplo em relação ao seu eixo, (Ver Figura 8.1). Nesse aspecto, podemos obter quatro tipos de ângulos:

Figura 8.1: Determinação das cônicas através da inclinação de um plano que secciona um cone de duas folhas



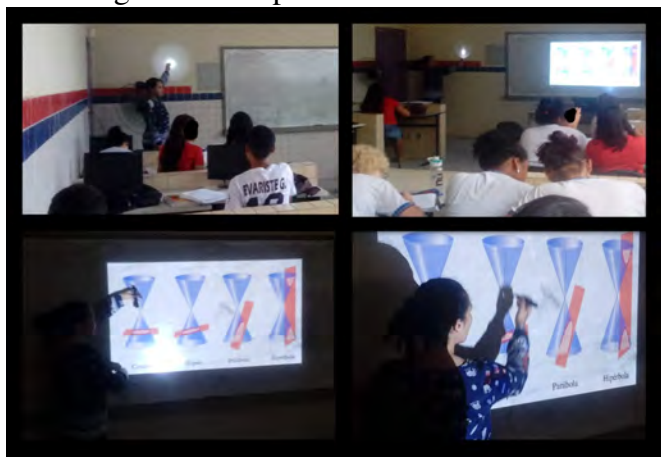
Capturas de tela retiradas de Creative Learning (2015).

1. Reto: circunferência;
2. Maior que o da geratriz do cone: elipse;
3. Igual ao da geratriz do cone: parábola;
4. Menor que o da geratriz do cone: hipérbole.

Em um ambiente suficientemente escuro, direcionamos a lanterna para a parede e, à medida que inclinamos a lanterna em relação à parede, a

intersecção dos feixes de luz com a parede desenharam as cônicas. Os feixes de luz que saem da lanterna são emitidos em forma de cone e a parede se comporta como um plano que o secciona.

Figura 8.1: Experimentos com lanterna



Elaborado pela autora.

A cada figura nova que surgia os alunos eram instigados a refletir para responder às seguintes perguntas:

1. Que tipo de ângulo o plano faz com o eixo do cone?
2. Qual é a cônica formada?

Através da variação da inclinação da lanterna³ pode-se obter uma circunferência, uma elipse, uma parábola ou um ramo de hipérbole.

³Em outra perspectiva, pode-se considerar que o plano seccionador do cone (formato com que os feixes se posicionam no espaço), representado pela parede, é quem se move em relação ao eixo desse cone.

8.2.1.2 Atividade 2: Construções das cônicas com barbante (Duração: 3 aulas).

A segunda atividade diferenciada proposta foi a construção das cônicas pelos alunos.

Materiais utilizados: cartolina, barbante, régua, esquadro, lápis e tachinhas.

(i) Elipse

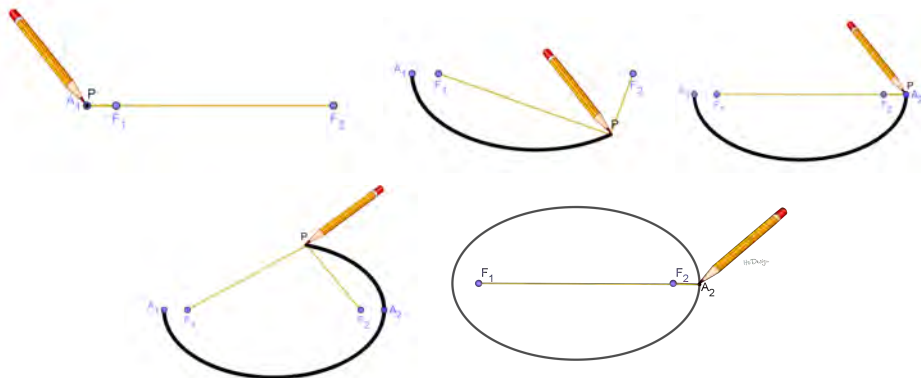
Utilizando um pedaço de barbante e duas tachinhas, pode-se construir uma elipse por meio dos passos (ver Figura 8.2):

- Tome um pedaço de barbante de tamanho $2a$;
- Em seguida, marque dois pontos fixos F_1 e F_2 na cartolina, de modo que a distância entre eles seja menor que $2a$;
- Com o auxílio das tachinhas, fixe as extremidades do barbante em F_1 e F_2 ;
- Encoste o lápis no barbante e estique-o;
- Faça o lápis deslizar pelo barbante esticado traçando na cartolina essa trajetória.

Pode-se encontrar as animações relativas a essa construção no link: <https://www.geogebra.org/m/dbver82d>.

Após a construção, os alunos marcaram dois pontos quaisquer sobre a elipse e, com o auxílio da régua, verificaram que a soma das distâncias de qualquer um desses pontos aos pontos F_1 e F_2 é constante, concluindo assim que a figura obtida foi uma elipse. Em seguida, identificaram na figura os elementos da elipse.

Figura 8.2: Construção com barbante de uma elipse



Elaborado pela autora.

Figura 8.3: Construção da elipse com o auxílio do barbante pelos alunos

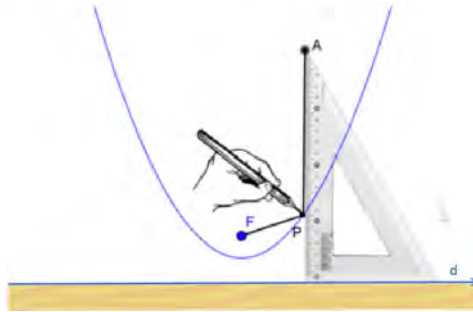


Elaborado pela autora.

(ii) **Parábola**

Utilizando um pedaço de barbante, um esquadro, uma régua e uma tachinha, pode-se construir uma parábola através dos passos:

Figura 8.4: Construção com barbante de uma parábola



Moreira (2017, p. 84).

- Tome um pedaço de barbante cujo comprimento seja igual ao maior cateto de um esquadro escaleno (ver Figura 8.4);
- Trace uma reta r qualquer na cartolina e fixe uma régua sobre ela durante o processo de desenho;
- Apoie o lado menor do esquadro sobre a régua fixada e amarre uma das extremidades do barbante na ponta do esquadro que mede 60° ;
- Marque um ponto F na cartolina de modo que a distância entre ele e a reta r seja positiva e menor que o tamanho do cateto maior do esquadro;
- Com o auxílio de uma tachinha, fixe a outra extremidade do barbante no ponto F ;
- Desloque o esquadro sobre a régua e, simultaneamente, desenhe a parábola mantendo, com o auxílio de um lápis, o barbante esticado e encostado no esquadro.

Pode-se encontrar as animações relativas a essa construção no link: <https://www.geogebra.org/m/hdpp9dx6>.

Figura 8.5: Construção da parábola com o auxílio do barbante pelos alunos



Elaborado pela autora.

Após a construção, os alunos marcaram dois pontos quaisquer sobre a parábola e, com o auxílio da régua, verificaram que as distâncias entre esses pontos e a reta d (diretriz) e o ponto F (foco) são iguais, concluindo assim que a figura obtida foi uma parábola. Em seguida, identificaram na figura os elementos da parábola.

(iii) **Hipérbole**

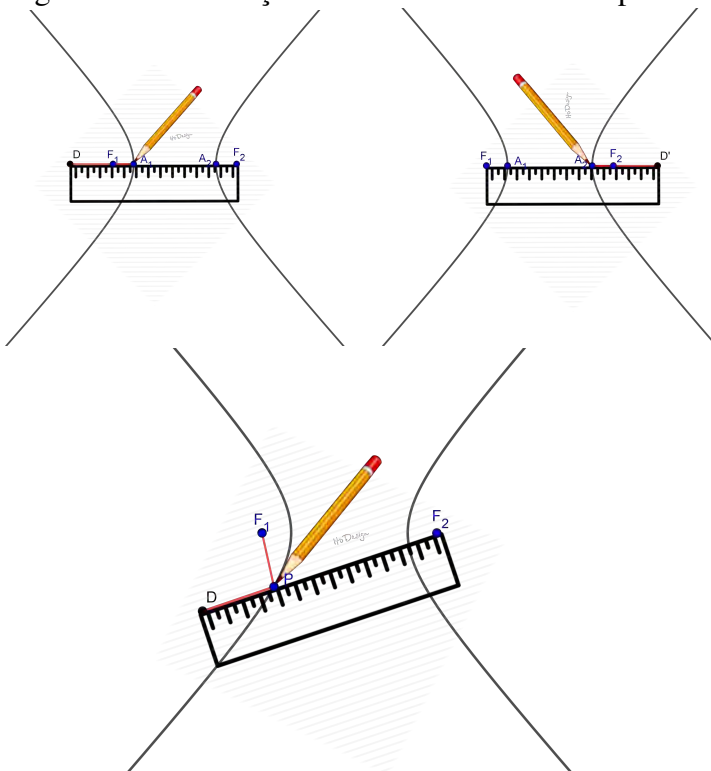
Utilizando um pedaço de barbante e uma régua, pode-se construir uma hipérbole por meio dos passos:

- Marque na cartolina dois pontos, F_1 e F_2 ;
- Corte um pedaço de barbante de maneira que o seu comprimento não ultrapasse o tamanho da régua;
- Prenda uma das extremidades do barbante na régua;
- Fixe a extremidade livre do barbante no ponto F_1 e coloque a extremidade oposta da régua no outro ponto F_2 ;

- Mantenha o lápis encostado na régua e o fio esticado e gire a régua em torno do ponto F_2 , desenhando esse percurso;
- Depois faça o mesmo, invertendo a posição da régua.

Pode-se encontrar as animações relativas a essa construção no link: <https://www.geogebra.org/m/bbbdabvv>.

Figura 8.6: Construção com barbante de uma hipérbole



Elaborada pela autora.

Figura 8.7: Construção da hipérbole com o auxílio do barbante pelos alunos



Elaborado pela autora.

Após a construção, os alunos marcaram dois pontos quaisquer sobre a hipérbole e, com o auxílio da régua, verificaram que o módulo da diferença das distâncias entre esses pontos e os pontos F_1 e F_2 são sempre constantes, concluindo assim que a figura obtida foi uma hipérbole. Em seguida, identificaram na figura os elementos da hipérbole.

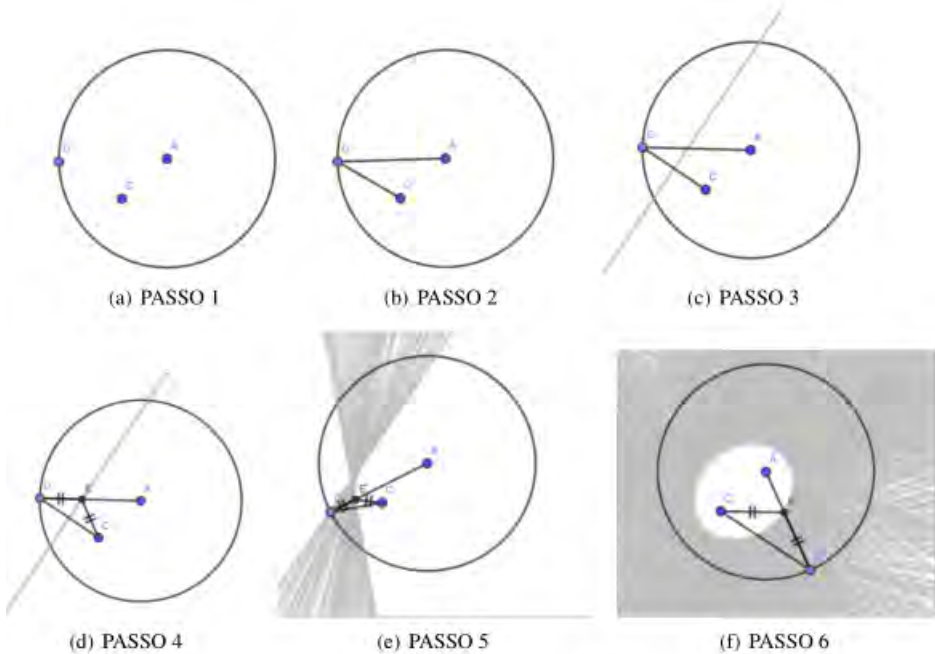
8.2.1.3 Atividade 3: Construção das cônicas usando dobradura (Duração: 2 aulas).

O terceiro experimento realizado utiliza a técnica de dobraduras. O procedimento segue os algoritmos apresentados nas Figuras 8.2, 8.4 e 8.6, mas cada mediatriz (reta tangente) traçada nas figuras anteriormente corresponde aqui a uma dobra de papel. As curvas delimitadas pelas dobras são as cônicas.

Pode-se encontrar as animações relativas a essas construções nos links: <<https://www.geogebra.org/m/xtr4mt4m>>, <<https://www.geogebra.org/m/j2n4e7uy>> e <<https://www.geogebra.org/m/zezhy52a>>.

- Algoritmo de construção de uma elipse por meio de dobraduras.
- PASSO 1 - Construa uma circunferência de centro A , marque um ponto interior, C , e um ponto D sobre ela;
- PASSO 2 - Construa os segmentos \overline{AD} e \overline{CD} ;
- PASSO 3 - Trace a mediatriz do segmento \overline{CD} ;
- PASSO 4 - Marque o ponto de interseção E dessa mediatriz com o segmento \overline{AD} ;
- PASSO 5 - Tome outros pontos sobre a circunferência no lugar de D e repita o processo anterior;
- PASSO 6 - Pela definição de L.G. de uma elipse, o conjunto de pontos “E” é uma elipse, cujos focos são os pontos A e C .

Figura 8.8: Construção da elipse a partir de suas retas tangentes

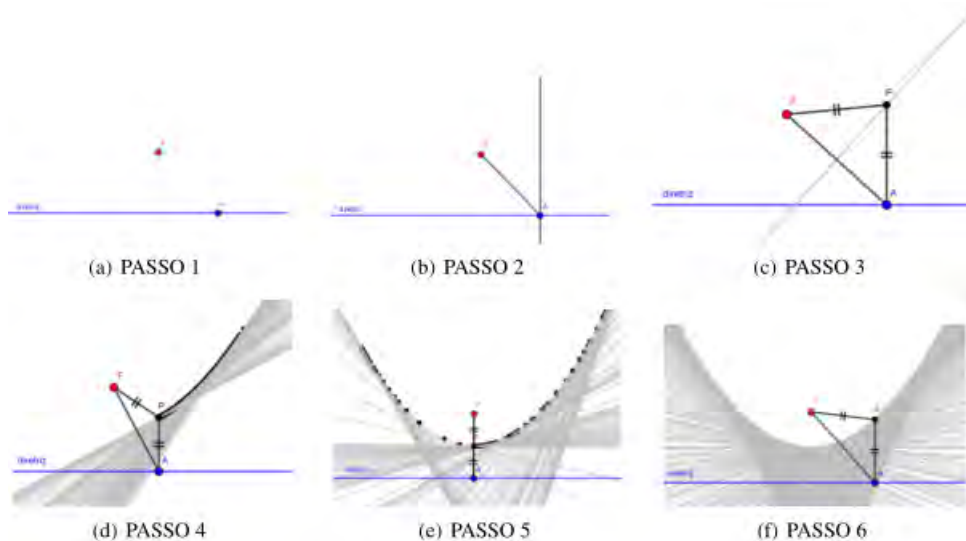


Fonte: Elaborado pela autora

- Algoritmo de construção de uma parábola através de dobraduras.
- PASSO 1 - Construa uma reta d e marque um ponto A sobre ela e um ponto F fora dela;
- PASSO 2 - Trace o segmento \overline{AF} e a reta r perpendicular a d que passa por A ;
- PASSO 3 - Construa a mediatriz do segmento AF e marque o ponto P de interseção entre ela e a reta r ;
- PASSO 4 - Escolha outros pontos na reta d para substituir o A e repita o processo anterior;
- PASSO 5 - Note que o conjunto dos pontos P corresponde à Definição de parábola como L.G.;

- PASSO 6 - Portanto, essa curva é uma parábola cujo foco é o ponto F e diretriz é a reta d .

Figura 8.9: Construção da parábola a partir de suas retas tangentes

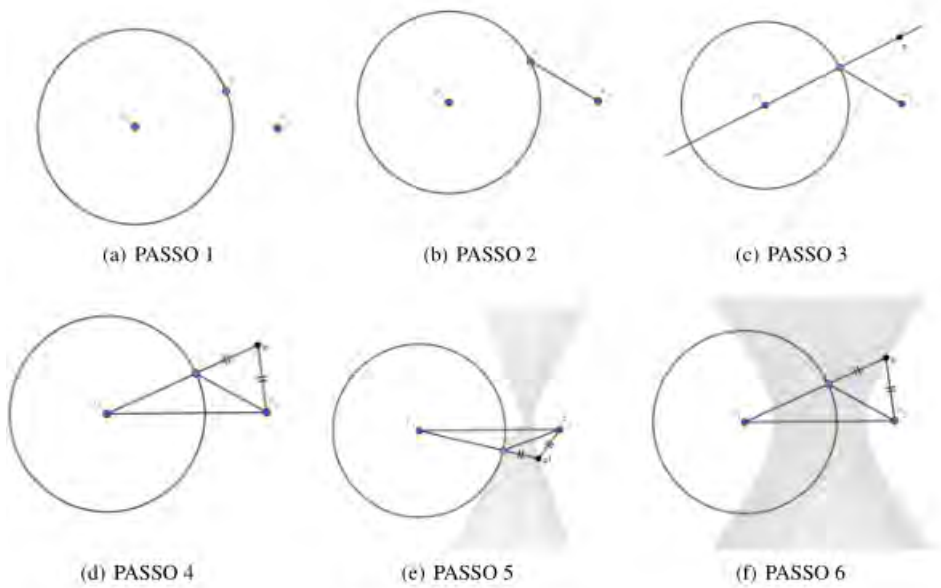


Fonte: Elaborado pela autora

- Algoritmo de construção de uma hipérbole através de dobraduras.
- PASSO 1 - Construa uma circunferência de centro F_1 e marque um ponto C sobre ela e um ponto F_2 externo a ela;
- PASSO 2 - Trace o segmento $\overline{CF_2}$ e a sua reta mediatriz;
- PASSO 3 - Trace a reta $\overleftrightarrow{F_1C}$ e marque o ponto P de interseção entre ela e a mediatriz do segmento $\overline{CF_2}$;
- PASSO 4 - Trace o segmento $\overline{F_1F_2}$ e note que, como P pertence à mediatriz do segmento $\overline{CF_2}$, então $\overline{PC} \equiv \overline{PF_2}$;
- PASSO 5 - Escolha outros pontos da circunferência para substituir o C e repita o processo anterior;

- PASSO 6 - Note que, segundo a definição de hipérbole como L.G., o conjunto dos pontos P corresponde a uma hipérbole de focos F_1 e F_2 .

Figura 8.10: Construção da hipérbole a partir de suas retas tangentes



Fonte: Elaborado pela autora

A Figura 8.11 abaixo mostra um exemplo de cada curva produzida em sala de aula pelos estudantes durante o processo de aplicação do terceiro experimento.

Figura 8.11: Cônicas obtidas através de dobraduras



Fonte: Elaborado pela autora.

No processo de construção, o aluno entenderá as características e propriedades de cada cônica, além de desenvolver habilidades de manipulação de

instrumentos geométricos como régua e compasso. A Figura 8.12 abaixo mostra tal experimento sendo realizado.

Figura 8.12: Construção das cônicas através de dobraduras



Elaborado pela autora.

8.2.1.4 Atividade 4: Experimento de reflexão (Duração: 2 aulas).

Nessa quarta atividade, buscamos enfatizar as propriedades óticas (ou refletoras) das cônicas. Elas são utilizadas em tecnologias para beneficiar a sociedade.

Para cada cônica realizamos uma construção específica que permite aos discentes a visualização de como funcionam tais propriedades.

(i) Propriedade refletora da elipse

A elipse possui uma propriedade refletora aplicada, por exemplo, no aparelho Litotritor usado em tratamentos de cálculos renais. Nessa atividade, propomos a construção de um modelo concreto que mostre a aplicação dessa propriedade em um “bilhar elíptico”, considerando a luz como conjunto de partículas em substituição das bolas de bilhar.

Para simular essa propriedade refletora da elipse, utilizamos folhas de isopor de 10 mm, folhas de papel laminado e laser.

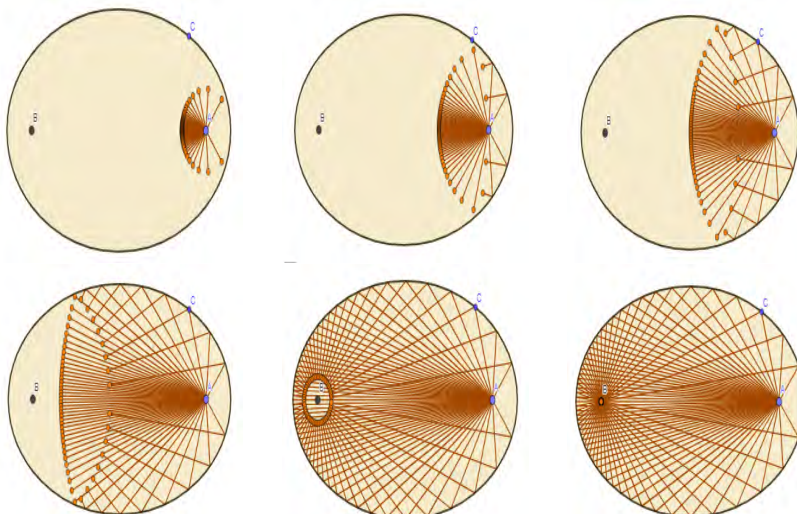
Utilizando o molde, desenhamos uma mesma elipse em cinco folhas de isopor. Retiramos a parte interna da elipse e colamos as placas umas sobre as outras. Em seguida, esse bloco foi colado em uma folha inteira de isopor formando uma cavidade com borda elíptica. Nessa base, marcamos os focos e a borda foi toda revestida de papel laminado. O laser foi posicionado horizontalmente em um dos focos de maneira que o feixe de luz refletisse na borda da elipse. Verificamos que, independente da direção para onde se apontava o laser, o feixe de luz refletido sempre passava pelo outro foco. Conforme ilustrado na Figura 8.13.

Figura 8.13: Experimento de reflexão numa superfície refletora elíptica



Elaborado pela autora.

Figura 8.14: Esquema de reflexão dos raios de luz no experimento da Figura 8.13



Bortolossi (2020).

(ii) Propriedade refletora da parábola

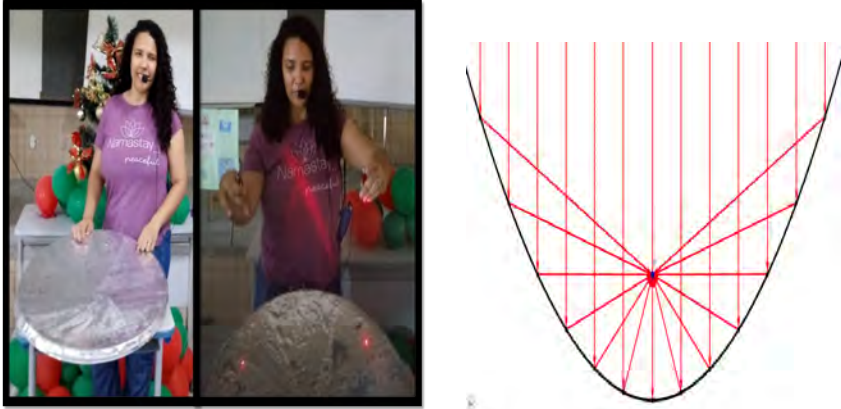
A propriedade refletora da parábola é muito utilizada, dentre outras áreas, em construções como em conchas acústicas, cujo objetivo é direcionar melhor o som para a plateia localizada a sua frente. Essa atividade propõe a construção de um modelo concreto que mostre a aplicação dessa propriedade em uma superfície parabólica, como ocorre em antenas de televisão, por exemplo.

Para simular essa propriedade refletora da parábola, utilizamos uma antena parabólica que seria descartada no lixo, papel alumínio, dois lasers e desodorante aerossol.

Cobrimos a superfície côncava da antena com papel alumínio tomando cuidado de evitar ao máximo formar bolhas. Em um ambiente com pouca luz, direcionamos os lasers à essa superfície da antena de modo que os raios de luz fossem paralelos ao eixo de simetria do paraboloide. Para tornar os raios dos lasers mais nítidos, borrifamos desodorante aerossol no ar ao longo do trajeto da luz.

Após repetir esse procedimento em vários pontos do paraboloide, verificamos que os raios sempre se cruzavam em um determinado ponto (foco das parábolas).

Figura 8.15: Experimento de reflexão numa superfície refletora parabólica



Elaborado pela autora.

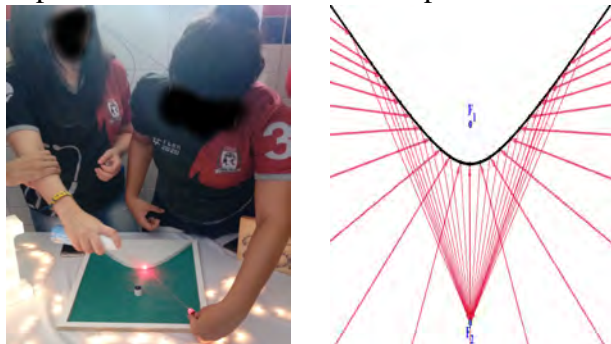
(iii) Propriedade refletora da hipérbole

A hipérbole possui uma propriedade refletora que é utilizada, por exemplo, em telescópios refletores como o Hubble. Nessa atividade, propomos a construção de um modelo concreto que mostre a aplicação dessa propriedade em um "bilhar hiperbólico".

Para simular essa propriedade refletora da hipérbole, construímos um modelo de bilhar hiperbólico em MDF no qual uma das bordas possui o formato de um ramo de hipérbole e a caçapa se localiza no ponto focal externo a esse ramo. Na borda da mesa cujo formato é hiperbólico, inserimos uma placa de fórmica para refletir a luz.

Posicionamos um laser horizontalmente sobre a mesa de maneira que a luz refletisse na borda na direção do foco interno à hipérbole. Verificamos que independente da posição de onde o laser emitisse a luz, ela sempre passava pela caçapa (outro foco), conforme ilustrado na Figura 8.16.

Figura 8.16: Experimento de reflexão numa superfície refletora hiperbólica



Elaborado pela autora.

8.2.1.5 Atividade 5: Visita ao museu interativo de ciência de Pernambuco – Espaço Ciência (Duração: 4 aulas).

A última atividade lúdica proposta foi a visita ao Espaço Ciência que possui, em seu acervo de exposições na área de percepção, algumas aplicações das propriedades refletoras das cônicas. Os alunos assistiram a apresentação dos experimentos e os manipularam. Após a visita, eles escreveram relatórios sobre suas observações.

Nessa visita ao Espaço Ciência, os alunos puderam manipular experimentos que exploram as propriedades refletoras das cônicas, especificamente as da parábola, como o fogão solar e o paraboloide de revolução. A seguir, foram descritos superficialmente esses dois experimentos.

No Paraboloide de Revolução (Orelhão Parabólico), há dois paraboloides com eixos focais paralelos ao solo e com suas superfícies côncavas de frente uma para a outra, a cerca de 20 metros de distância um do outro. Uma pessoa, ao se sentar no local indicado, posiciona sua boca aproximadamente no foco do paraboloide a sua frente. Ao falar, as ondas sonoras colidem no paraboloide e refletem em trajetória retilínea no sentido paralelo ao seu eixo focal em direção ao outro paraboloide. Se não houver obstáculos relevantes nesse trajeto, as ondas sonoras chegam à superfície côncava desse outro paraboloide e reverberam na direção do seu foco onde, se houver uma segunda pessoa, a mensagem inicial será recebida. Veja o esquema da Figura

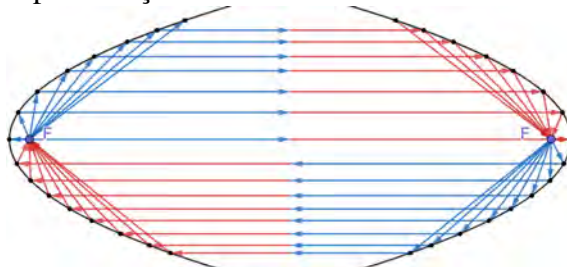
Figura 8.17: Visita ao Espaço Ciência em Olinda - PE



Elaborado pela autora.

8.18.

Figura 8.18: Representação do funcionamento de um orelhão parabólico



Elaborado pela autora.

Já o fogão solar funciona da seguinte forma: os raios solares incidem paralelamente ao eixo focal de um parabolóide cuja superfície côncava (que recebe os raios solares) é revestida por um material refletor. Ao tocar essa superfície refletora do parabolóide, os raios são refletidos em linha reta na direção do foco onde se localiza convenientemente uma grelha que fica

superaquecida em função da concentração dos raios solares nesse ponto, tornando possível o preparo de alimentos. Para melhor compreensão, veja a Figura 8.19.

Figura 8.19: Representação do funcionamento de um fogão solar parabólico



Garcia, Pappalardo e Beozzo (2013).

Essa atividade estimula o aprendizado tanto de matemática quanto de outras ciências exatas, visto que os alunos visitaram experimentos científicos relativos também à outras ciências, além de exercitar a observação e escrita científicas.

8.3 Considerações finais

A matemática é, sem dúvida, uma ciência abstrata, entretanto, isso não implica que ela seja considerada chata ou incompreensível. Para que essa ciência se aproxime mais da realidade dos alunos, é válido que o professor utilize métodos de ensino divertidos e com aplicações práticas.

É de conhecimento geral as várias dificuldades que um professor de escola pública passa e o quanto ele tem que se desdobrar dentro e fora da sala de aula para atingir o objetivo de fazer com que seus alunos aprendam. Contribuir com o trabalho docente para promover o aprendizado acerca das cônicas foram os principais objetivos dessa pesquisa.

Nesse sentido, o propósito deste trabalho foi atingido, visto que foi

apresentada uma aplicação de sequência didática para o ensino das cônicas baseada na ludicidade, que obteve resultados satisfatórios. Nela, os estudantes demonstraram compreender a definição dos elementos determinantes das cônicas e indicá-los algébrica e geometricamente. Além de construir modelos concretos que representem as cônicas e suas propriedades refletoras, esses modelos foram apresentados na II Feira de Matemática da EREM Aníbal Falcão no ano de 2019.

Registramos, a seguir, as percepções da professora acerca das respostas e indagações durante o processo de aplicação da sequência didática bem como o acompanhamento das construções geométricas nas atividades lúdicas e da receptividade dos alunos, que construíram modelos, realizaram experimentos e visitaram um museu de ciência. No primeiro experimento da lanterna (atividade 8.2.1.1), simulou-se as secções de um plano em um cone. Todos os alunos conseguiram associar as figuras formadas na parede com suas respectivas curvas.

Na atividade 8.2.1.2, foram trabalhadas as definições e os elementos de cada curva. Segundo os alunos, ficou mais fácil compreender a relação da figura com a sua respectiva definição como L.G.

Na atividade 8.2.1.3, os alunos exercitaram tanto as habilidades referentes à área de Geometria como desenvolveram seu lado artístico e produziram várias cônicas usando dobraduras.

A atividade 8.2.1.4 foi a que mais empolgou os alunos, devido à aplicação prática das propriedades refletoras utilizando luzes. Além do interesse dos alunos em estudar matemática, nessa atividade, foi reforçada a identificação dos elementos das cônicas, como focos e eixos. Pensamos na aplicação da atividade 8.2.1.5 para que os alunos desenvolvessem competências como a observação científica e a conversão entre a linguagem visual e a escrita.

Em geral, o resultado da aplicação dessas atividades lúdicas foram alunos mais interessados em assistir e participar das aulas de matemática, além de demonstrarem maior compreensão sobre o assunto quando indagados acerca do formato, dos elementos e das propriedades refletoras das cônicas. Essa sequência didática foi publicada nos Anais do VI CONEDU - Congresso Nacional de Educação (NASCIMENTO, 2018) e apresentada oral e

visualmente nesse evento na modalidade *banner* e recebeu muitos *feedbacks* positivos dos professores, elogiando as atividades lúdicas desenvolvidas em sala de aula e demonstrando interesse em desenvolver essa sequência didática com seus alunos. Portanto, dados os resultados obtidos, esperamos que esse trabalho inspire mais professores de matemática a aplicarem, em suas aulas, a proposta apresentada.

8.4 Referências bibliográficas

BORTOLOSSI, H. Bilhar na Elipse. **GeoGebra**, 2020. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/dkwzwa5m>>. Acesso em: 10 mai. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério de Educação, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf>. Acesso em: 08 fev. de 2019.

CREATIVE LEARNING. **Conic Section and 3d Animation**. 2015. 5 min, son., color. Disponível em: <<https://youtube/HO2zAU3Eppo>>. Acesso em: 08 ago. 2019.

EVANGELISTA, J. et al. Matemática Lúdica Ensino Fundamental e Médio. **Educação em Foco**, Amparo, n. 6, p. 26-36, 2013.

GARCIA, B.; PAPPALARDO, J.; BEOZZO, R. Fôlegão Solar Parabólico. **UNESP**, 2013. Disponível em: <<https://www.sorocaba.unesp.br/Home/Extensao/Engenhocas/esquilotelefonico.pdf>>. Acesso em: 12 mai. 2020.

MOREIRA, J. **Construções das cônicas utilizando o desenho geométrico e instrumentos concreto**. 2017. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Rio de Janeiro.

NASCIMENTO, K. **Luz, Cônicas, Reflexão: uma sequência didática para o ensino das cônicas**. 2020. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em

Matemática (PROFMAT), Recife.

NASCIMENTO, K. Luz, Cônicas, Reflexão: uma sequência didática para o ensino das cônicas. In VI CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – CONEDU, 2018, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: Editora Realize, 2018.

PERETTI, L.; TONIN DA COSTA, G. Sequência Didática na Matemática. **Revista de Educação do IDEAU**, Caxias do Sul, v. 8, n. 17, 2013.

PERNAMBUCO. **Conteúdos de Matemática por Bimestre para o Ensino Médio**: com base no parâmetros curriculares do estado de Pernambuco. Recife: Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco, 2013.

RODRIGUES, B. **Construção da Elipse através do Origami**. 2015. 2 min, son., color. Disponível em: <<https://youtube/RNMrDGKYbxw>>. Acesso em: 08 ago. 2019.

RODRIGUES, B. **Construção da Hipérbole através do Origami**. 2015. 2 min, son., color. Disponível em: <<https://youtube/p8pRw9RIrWY>>. Acesso em: 08 ago. 2019.

RODRIGUES, B. **Construção da Parábola através do Origami**. 2015. 2 min, son., color. Disponível em: <<https://youtube/GEvgDMBLRDQ>>. Acesso em: 08 ago. 2019.

SILVA, F. et al. O uso de material concreto no ensino da matemática. In: VIII FORUM INTERNACIONAL DE PEDAGOGIA, 2016, São Luís. **Anais...** São Luís: UFMA, 2016.

TENANIN, L.; SILVEIRA, C.; URIBE, E. Ensino de cônicas e a arte das dobraduras. **Colloquium Exactarum**, vol. 8, n. Especial, Jul–Dez, 2016.

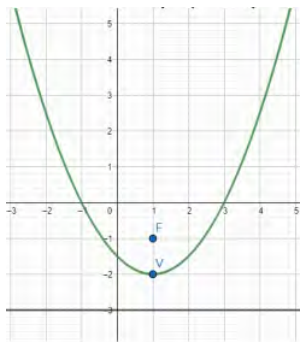
ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

TESTE

AS CÔNICAS E SUAS PROPRIEDADES REFLETORAS

ALUNO(A):

1. Que local geométrico é definido como:
 - a) O conjunto de todos os pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, denominados focos (F_1 e F_2), é constante e maior que a distância entre os focos?
 - b) O conjunto de pontos em um plano cuja distância a um ponto fixo F é sempre igual à distância a uma reta dada?
2. Escreva a equação da parábola representada:



3. Construa uma elipse cuja excentricidade, $\frac{a}{c}$, seja igual a 0.8 e centro C na origem. (Obs.: Deve-se estar indicado os locais dos focos, centro e extremidades dos eixos)
4. Esboce o gráfico de uma hipérbole cujo eixo real mede 8 cm, eixo imaginário mede 6 cm e centro $C(1, 2)$. (Obs.: Deve-se estar indicado os locais dos focos, centro e extremidades dos eixos)
5. Esboce o gráfico de uma parábola cuja concavidade esteja voltada para a esquerda, coordenadas do vértice $V(5, 1)$ e de parâmetro 2. (Obs.: Deve-se estar indicado os locais do foco F , vértice V e da reta diretriz d .)
6. A fotografia abaixo reproduz um abajur e a sombra que ele projeta na parede. Que curvas são essas?



7. Uma das aplicações das propriedades refletoras das cônicas é o aparelho iluminador que os dentistas usam em suas consultas. Nele, o dentista necessita que a iluminação seja concentrada em um único ponto, o dente do paciente, e isso é facilmente alcançado quando se tem um espelho de certo formato e a lâmpada fixada em um determinado ponto fixo, interior em relação a curva formada pelo espelho. Quando o dentista movimentava o seu dispositivo, e consegue colocar a iluminação exatamente no dente a ser trabalhado, este se encontra em um ponto estratégico. Veja a foto abaixo:



Acerca da situação descrita, responda:

- a) Que formato deverá ter esse espelho para que o seu propósito seja atingido?
 - b) Em que lugar geométrico relativo à curva essa lâmpada estará?
 - c) E o dente iluminado?
8. Uma concha acústica é um equipamento cênico, usado em diversos eventos musicais e que está disposto à volta da orquestra e aberto para a plateia. Qual é a vantagem de se construir uma concha acústica com formato parabólico (como no exemplo mostrado na figura abaixo), cujo palco esteja situado no foco dessa curva?

