CAPÍTULO 7

ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL DE UMA SITUAÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Sonia Barbosa Camargo Igliori

Marcio Vieira de Almeida

INTRODUÇÃO

Em Março de 2020, a Organização Mundial da Saúde declarou a COVID-19 como uma pandemia global. Em resposta a isso, muitos países aplicaram medidas de distanciamento social restritivas e políticas de *lockdown*.

A pandemia impactou severamente escolas, professores e alunos, visto que uma das medidas para promover o isolamento social foi adotar a suspensão de aulas presenciais. Em virtude disso, a maioria das instituições de ensino praticou o ensino remoto emergencial como abordagem de ensino.

Entendemos que o ensino remoto emergencial não se assemelha ao ensino a distância. Para Garcia *et al.* (2020), o ensino remoto emergencial

> [...] é um formato de escolarização mediado por tecnologia, mantidas as condições de distanciamento professor e aluno. Esse formato de ensino se viabiliza pelo uso de plataformas educacionais ou destinadas para outros fins, abertas para o compartilhamento de conteúdos escolares. Embora esteja diretamente relacionado ao uso de tecnologia digital, ensinar remotamente não é sinônimo de ensinar a distância, considerando esta última uma modalidade que tem uma concepção teórico-metodológica própria e é desenvolvida em um ambiente virtual de aprendizagem, com material didático-pedagógico específico e apoio de tutores (GARCIA *et al.*, 2020, p. 5).

Durante o período da pandemia de COVID-19, o Instituto Península (2020) realiza uma pesquisa, utilizando métodos quantitativos, por meio de um *survey on-line* e de uma amostra por conveniência, para avaliar o sentimento e a percepção de educadores brasileiros em diferentes estágios.[33] A pesquisa avaliou 7.734 respostas de professores de todo país, das redes municipais, estaduais e particulares do Ensino Infantil ao Médio. Alguns resultados dessa pesquisa, divulgados em agosto de 2020, indicam que antes da paralização das aulas presenciais, 88% dos professores nunca tinham dado aula de forma remota; 83% não se sentiam preparados para ministrar aulas dessa forma e 94% reconhecem a importância da tecnologia para a aprendizagem.

Esses resultados indicam que a mudança para o ensino remoto emergencial foi drástica e professores foram obrigados a utilizar tecnologias digitais para realizar suas aulas e outras atividades de ensino. Para Engelbrecht *et al.* (2020), houve uma consequência, a necessidade de o professor ministrar aulas com tecnologias digitais.

> A comunicação digital, incluindo aulas, tarefas de avaliação, engajamento de estudantes e reuniões virtuais tornaram-se "um novo normal". Como consequência do COVID-19, a alfabetização digital e atributos que antes eram difíceis de abordar, estão sendo fomentados nos alunos para ajudá-los a navegar com sucesso no século XXI (SEHOOLE, 2020). Essa situação torna o aprendizado *online* e híbrido ainda mais relevante do que antes (p. 821, tradução nossa).

Os professores tiveram que se adaptar, rapidamente, ao 'novo normal'. Contudo, investigações (ZBIEK; HOLLEBRANDS, 2008; DRIJVERS *et al.*, 2010; LUCENA, 2018) já indicam que professores de matemática estavam buscando a utilização de ferramentas digitais em suas aulas, antes da pandemia.

A integração de ferramentas digitais em educação matemática tem sido considerada promissora, mas complexa. E assim sendo, a escolha e o manuseio de ferramentas, a elaboração de recursos com elas e sua utilização em sala de aula, ou durante o ensino remoto, precisam ser objeto de discussão tanto na formação inicial de professores como na continuada. Isto é, a integração do professor e dos estudantes com as ferramentas digitais é essencial para a prática docente, ainda mais durante um ensino remoto emergencial.

No âmbito dessa problemática podem, também, ser inseridos questionamentos como:

---

[33] Os resultados parciais da pesquisa, que está em andamento, estão disponíveis em: https://institutopeninsula.org.br/pesquisa-sentimento-e-percepcao-dos-professores-nos-diferentes-estagios-do-coronavirus-no-brasil/.

> O que é difícil, do ponto de vista do professor, integrar a tecnologia ao seu ensino de matemática? Robert e Rogalski (2005) apontam que as práticas dos professores são complexas, mas estáveis. Com base nisso, Lagrange e Monaghan (2009) argumentam que a disponibilidade de tecnologia amplia a complexidade e, como consequência, desafia a estabilidade das práticas de ensino: as técnicas que são usadas em configurações 'tradicionais' não podem mais ser aplicadas em uma rotina, da mesma forma quando a tecnologia está disponível. (DRIJVERS *et al.*, 2010, p. 214, tradução nossa).

Zbiek e Hollebrands (2008) indicam que, com relação ao uso da tecnologia com professores em formação ou em serviço, prefere-se focar no ensino da tecnologia ao invés de utilizar alguma tecnologia como instrumento, para aprender e ensinar matemática. Outro ponto observado, é que, embora esses professores mudem à medida que eles incorporam tecnologias à sua prática docente, preocupações de diferentes naturezas emergem quando refletem nessa incorporação. As seguintes preocupações são indicadas pelos autores: conhecimento necessário para a utilização de tecnologias, impactos advindos desse uso, gerenciamento do uso da tecnologia em sala de aula, seleção de situações, os quais podem afetar alunos, outros professores e o currículo.

Além disso, Lucena (2018) indica dois pontos relacionados à formação dos professores, com relação à utilização das tecnologias.

> [...] o primeiro consiste no fato da formação do professor exigir a constituição de diversos tipos de conhecimentos, que permeiam elementos do conteúdo, da formação teórica e da prática; o segundo exige uma formação que articule teoria e prática. Tais aspectos são fundamentais à mudança de concepção e conduta desses professores na perspectiva não apenas do uso, mas, principalmente, da integração de tecnologias digitais para ensinar e aprender matemática. Isso tem levado a grandes desafios à formação inicial e em serviço, presencial ou a distância, de professores de matemática. (p. 28).

Essa lacuna relacionada à formação para o ensino com tecnologia, pode se refletir no fato de que, quando professores e estudantes migraram para o ensino remoto emergencial podem transferir e transpor metodologias e práticas pedagógicas típicas do ensino presencial para o ensino *on-line*. Nesse sentido, procuramos adaptar orquestrações instrumentais, desenvolvidas no contexto do ensino presencial, para o contexto do ensino remoto emergencial em uma situação matemática específica, relacionada ao teorema de Euler para poliedros.

Neste capítulo, abordamos a problemática relacionada à utilização de tecnologias para o ensino da matemática, com base em uma situação matemática relacionada ao teorema de Euler para poliedros, como uma possibilidade para desenvolvimento de aulas no período de ensino remoto emergencial, apresentando modos de instrumentação e sugerindo atividades.

Foi escolhido como referencial teórico para o desenvolvimento da situação matemática a noção de orquestração instrumental. Essa noção aparece no bojo da discussão sobre ser "necessário que a pesquisa educacional, fosse além dos relatos entusiastas dos primeiros adotantes que se dedicavam em pequena escala experimentos de *design*, e fosse firmemente baseado em fundamentos teóricos" (TROUCHE; DRIJVERS, 2014, p. 1, tradução nossa). Esse referencial também atende à orientação que desejávamos adotar: uma necessidade de integrar ferramentas digitais para o ensino e aprendizagem de matemática.

Além disso, o modelo teórico da orquestração instrumental, possibilita o desenvolvimento de configurações didáticas e modos de execuções, para dar suporte à prática docente relacionada ao uso da tecnologia para ensinar/aprender matemática, em períodos de ensino remoto emergencial.

Com essa perspectiva, este capítulo foi organizado em três momentos: elaboração de uma situação matemática envolvendo o teorema de Euler; elaboração de recursos digitais com a utilização do GeoGebra, e proposição e análise de tipos de orquestração desses recursos com vistas à integralização pretendida.

Sobre a situação matemática, o teorema de Euler para poliedros, a Base Nacional Comum Curricular indica que o estudo da geometria deve envolver um

> [...] conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. E ainda complementa: a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. (BRASIL, 2017, p. 269).

E com relação ao ensino de geometria, a BNCC indica a necessidade de utilização de *software* de Geometria Dinâmica em seu ensino. Por isso, a oportunidade de formularmos situações didáticas em que se utilize a tecnologia no ensino da geometria. A situação matemática proposta envolve conhecimentos básicos sobre polígonos e poliedros como: identificação e classificação de figuras planas (polígonos simples e não simples; polígonos convexos e não convexos); conhecimento de propriedades relacionadas a curvas (aberta e fechada); identificação e classificação de sólidos geométricos (poliedros e não poliedros, poliedros convexos e não convexos), entre outros.

Em virtude das dificuldades apontadas sobre a utilização de tecnologias, objetivamos apresentar tipos de orquestrações que possibilitem a utilização das tecnologias, por parte dos professores, no período de ensino remoto emergencial para a situação matemática considerada.

A pesquisa, apresentada neste capítulo, se insere no âmbito de uma pesquisa teórica e assim sendo os procedimentos metodológicos adotados foram de consultas e análises de material bibliográfico, como artigos científicos; textos e vídeos da Internet, entre outros. Para o desenvolvimento da pesquisa utilizamos, essencialmente, indicações de tipos de orquestrações que se adequassem a uma aula desenvolvida no contexto do ensino remoto emergencial. Além disso, consideramos trabalhos sobre o ensino do teorema de Euler e apresentações da discussão sobre as controvérsias geradas pelo teorema.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: referenciais teóricos, situação matemática, organização didática e modo de exceção.

REFERENCIAIS TEÓRICOS

Dois referenciais teóricos foram considerados no desenvolvimento da situação matemática, a orquestração instrumental e a teoria dos registros de representação semiótica.

A orquestração instrumental introduzida por Trouche (2004) é reconhecida por vários pesquisadores como um aporte teórico que traz subsídios a investigações voltadas à interação do professor com a tecnologia, em sua prática docente, tendo a perspectiva de provocar a gênese instrumental de seus educandos.

A gênese instrumental é um processo definido por Rabardel (1995) quando, para determinado sujeito, um artefato[34] passa a ser um instrumento[35] quando adquire significado. A Gênese ocorre quando um "instrumento resulta de um processo, denominado Gênese Instrumental, por meio do qual o sujeito cons-

[34] A noção de artefato é definida segundo a perspectiva de Rabardel (1995). Ele indica que um "corresponde possibilidades de transformação dos objetos das atividades, que foram antecipadas, deliberadamente pesquisadas e que são suscetíveis de se atualizar no uso (RABARDEL, 1995, p. 49, tradução nossa).

[35] E o termo instrumento é utilizado "para designar o artefato em situação, inscrito ao uso, em uma relação instrumental à ação do sujeito, como um meio dele. É somente uma primeira definição correspondente a uma abordagem minimal da noção psicológica de instrumento que corresponderá a um dos usos, o mais fraco, que nós teremos da noção de instrumento (RABARDEL, 1995, p. 49, tradução nossa).

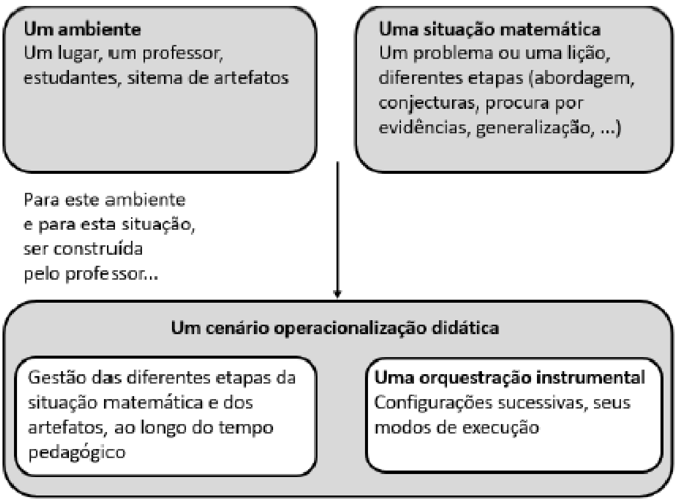
trói um esquema de utilização do artefato para uma dada classe de situações" (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 204, tradução nossa, grifo dos autores).

Trouche (2004) apresenta uma metáfora para apresentar os elementos da orquestração instrumental. Ele compara a sala de aula a uma orquestra. Uma orquestra, de forma geral, pode ser reconhecida como um agrupamento instrumental composto por maestro e instrumentistas, seus instrumentos e partituras, todos dispostos em um espaço com a finalidade de executar uma música. A metáfora da orquestração instrumental (TROUCHE, 2004) compara a sala de aula a uma orquestra, em que o professor é o maestro, seus alunos são os músicos, as tecnologias digitais os instrumentos musicais, as situações de ensino são os repertórios e os objetos matemáticos estudados a música a ser tocada.

Segundo Trouche, uma orquestração instrumental é o arranjo sistemático e intencional de elementos (artefatos e seres humanos) de um ambiente, realizado por um agente (professor) no intuito de efetivar uma situação dada e, em geral, guiar os aprendizes em gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos. É sistemático porque, como método, desenvolve-se numa ordem definida e com um foco determinado, podendo ser entendido com um arranjo integrado a um sistema; é intencional porque uma orquestração não descreve um arranjo existente (sempre existe um), mas aponta para a necessidade de um planejamento *a priori* desse arranjo (TROUCHE, 2005).

Além disso, Drijvers e Trouche (2008) indicam quatro elementos para um cenário de execução didática, que é apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Elementos de um cenário de execução didática



Fonte: Drijvers e Trouche (2008).

No caso deste capítulo, por ser tratar de um estudo teórico, escolhemos uma situação matemática e vamos apresentar possibilidades de orquestração instrumental para a atividade considerada.

Em McKenzie (2001) e em Mariotti (2002) é revelado que a aprendizagem precisa ser guiada pelo professor orquestrando situações matemáticas. Em Kendal e Stacey (2002) e em Kendal, Stacey e Pierce (2004) é mostrado que professores privilegiam técnicas de uso de tecnologias o que acarreta orientar a aquisição de domínio das ferramentas e seus processos de aprendizagem pelos alunos.

Em Drijvers *et al.* (2010) é apresentado um estudo em que se investigou tipos de orquestrações desenvolvidas por professores quando utilizam tecnologias em sala de aula. Os dados considerados foram obtidos por meio de gravações de 38 aulas ministradas por três professores e de informações por meio de questionários e entrevistas. A análise qualitativa desenvolvida identificou seis tipos de orquestração que foram denominados por: *Technical-demo*, *Explain-the-screen*, *Link-screen-board*, *Discuss-the-screen*, *Spot-and-show*, e *Sherpa-at-work*.

A orquestração *Technical-demo* diz respeito à demonstração de ferramentas técnicas pelo professor. Uma configuração didática para essa orquestração inclui acesso ao *applet* considerado e ao ambiente digital matemático, condições técnicas para projetar a tela do computador e um arranjo que permita que os alunos acompanhem determinada demonstração realizada pelo professor. O modo de exploração para a execução dessa orquestração é descrito da seguinte forma "os professores podem demonstrar uma técnica em uma nova situação ou tarefa, ou usar o trabalho do aluno para mostrar novas técnicas na antecipação do que virá a seguir" (DRIJVERS *et al.*, 2010, p. 219, tradução nossa).

O segundo tipo de orquestração, *Explain-the-screen*, é uma explicação oferecida a todos os alunos da sala que é guiada pelo professor com base no que é exibido na tela do computador. A explicação vai além de exposição de técnicas, e envolve conteúdo matemático. O modo de exploração sugerido para esse tipo de orquestração é o seguinte: "o professor pode tomar o trabalho do aluno como um ponto de partida para a explicação, ou começar com sua própria solução para uma tarefa" (DRIJVERS *et al.*, 2010, p. 219, tradução nossa).

Quando o professor destaca uma relação entre o que acontece no ambiente tecnológico e como isso é representado na matemática convencional, seja no papel, no livro e na lousa é denominada orquestração *Link-screen-board*. Esse tipo de orquestração exige instalações de acesso e projeção do ambiente matemático digital, uma configuração didática que possua uma lousa e uma configuração de sala de aula de forma que tanto a tela projetada quanto o quadro estejam visíveis aos estudantes. Da mesma forma que os tipos de orquestração anteriores, no modo de exploração desse tipo de orquestração o professor pode tomar o trabalho do aluno como um ponto de partida ou começar com uma tarefa ou situação problemática definida pelo professor.

A orquestração *Discuss-the-screen* considera uma discussão desenvolvida com todos os alunos da turma sobre as ações que acontecem no computador, objetivando desenvolver uma gênese instrumental coletiva. A configuração didática pode incluir instalações de acesso e projeção do ambiente matemático digital, que possibilite o trabalho do estudante, e um ambiente que seja favorável à discussão. Um modo de exploração, pode ser considerar o trabalho de um estudante, uma tarefa, problema ou abordagem definida pelo professor que podem servir como ponto de partida para as reações dos estudantes.

O quinto tipo de orquestração é chamado de *Spot-and-show*. Nessa orquestração o raciocínio do estudante é exposto por meio de um trabalho desenvolvido por ele, seja de modo individual ou em grupo. Uma configuração didática inclui, no momento de encontro coletivo, instalações de acesso e projeção do ambiente matemático digital, utilizado na atividade, e deve incluir, antes desse encontro, acesso, por parte do estudante, ao ambiente digital matemático. Como modos de exploração, o professor pode selecionar um aluno ou grupo, projetar o trabalho para todos os alunos e solicitar ao grupo selecionado que exponha o seu raciocínio e pedir aos outros estudantes comentários, ou que eles possam fornecer *feedback* sobre o trabalho apresentado.

A última orquestração indicada em Drijvers *et al.* (2010) é chamada de *Sherpa-at-work*. Um estudante, denominado *sherpa*, é selecionado e vai utilizar a tecnologia para apresentar seu trabalho ou realizar ações que o professor possa solicitar. As configurações didáticas são similares à da orquestração *Discuss-the-screen* e deve ser possível que o estudante *sherpa* esteja no controle da tecnologia, de forma que todos os estudantes e o professor possam acompanhar as suas ações. Como modos de exploração, o professor pode considerar o trabalho apresentado ou explicado pelo aluno *sherpa*, ou pode-se fazer perguntas ao aluno *sherpa* e pedir-lhe para realizar ações específicas no ambiente tecnológico.

Em nosso trabalho, adaptaremos três dessas orquestrações (*Explain-the-screen, Discuss-the-screen, Sherpa-at-work*) para a situação matemática considerada no contexto do ensino remoto emergencial. Contudo, entendemos ser importante destacar todas as orquestrações apresentadas em Drijvers *et al.*

(2010), para que o leitor possa conhecer e adaptar os outros tipos de orquestrações instrumentais para o seu contexto, considerando as tecnologias disponíveis.

Sobre esses seis tipos de orquestrações, os autores indicam distinções relacionadas aos papéis dos professores e dos estudantes em cada uma delas.

Nas orquestrações *Technical-demo*, *Explain-the-screen* e *Link-screen-board*, o professor domina a comunicação, e, a ação dos estudantes é restrita e o professor guia a interação Iniciação-Resposta-Avaliação. Aplicativos disponíveis, no período de ensino remoto emergencial, para realizar orquestrações centradas no professor são aqueles que permitem a realização de videoconferências, como o Google Meet, o Microsoft Teams, o Zoom, dentre outras disponíveis. Nesse tipo de aplicativo, o professor pode compartilhar a sua tela e executar orquestrações do tipo *Technical-demo* e *Explain-the-screen*. Para a execução da orquestração *Link-screen-board*, além de um aplicativo para a realização de videoconferência, seria necessário o auxílio de outros instrumentos tecnológicos, por exemplo, um que possibilite ao professor fazer anotações em linguagem matemática manuscrita, como, por exemplo, a utilização de uma mesa digitalizadora.

As outras orquestrações são centradas nos estudantes, conforme enunciam os autores:

> Nas orquestrações *Discuss-the-screen*, *Spot-and-show* e *Sherpa-at-wor*k, os alunos têm a oportunidade de reagir e ter mais participação. Embora o professor gerencie a orquestração, há mais interação e os alunos têm mais voz do que nos três primeiros tipos de orquestração. Estes podem, portanto, ser vistos como orquestrações centradas no aluno (DRIJVERS *et al.,* 2010, p. 2010).

Uma aplicação disponível para a execução das orquestrações que sejam focadas nos estudantes, destacamos a plataforma GeoGebra Classroom.[36] Essa é uma aplicação que possibilita atribuir tarefas aos alunos; ver seus progressos em tempo real, enquanto trabalham em uma tarefa específica; ver quais tarefas os alunos iniciaram (ou não); fazer perguntas aos alunos e ver suas respostas instantaneamente; ocultar nomes de estudantes ao exibir respostas a determinada pergunta; possibilitar discussões entre todos os estudantes, grupos de estudantes e estudantes trabalhando individualmente.

É muito importante destacar que há tantos tipos de orquestrações quantos um professor pode pensar para a sua aula, e da mesma forma os modos de execução de uma tarefa matemática com recursos digitais, ou outros. Um professor orquestra sua aula definindo configurações didáticas e modos de execução de

[36] Um tutorial completo da atividade, em língua inglesa, pode ser encontrado em: https://www.geogebra.org/m/hncrgruu.

uma situação matemática da forma que ele considerar mais adequada. Nossas escolhas nortearam-se pelas experiências como professores, ou como formadores de professores. E têm por objetivo tratar dessa perspectiva na formação de professores.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica é, segundo seu autor, o psicólogo francês Raymond Duval (2008), uma teoria que revela que a aprendizagem matemática depende, essencialmente da relação de um aprendiz com os diferentes registros de representação semiótica dos objetos matemáticos. Essa relação é complexa, pois depende de transformações dessas representações as quais são de dois tipos, os tratamentos e as conversões. O tratamento é uma transformação de uma representação interna a um determinado registro, e a conversão, consiste na passagem de um registro de representação a outro.

SITUAÇÃO MATEMÁTICA

A situação matemática proposta sobre o teorema de Euler para poliedros, se destina ao ensino ou aprimoramento de conceitos matemáticos que constam de seu enunciado e da demonstração desse teorema. Ela permite tratar de identificação de padrões, classificação de objetos geométricos, realização de conversões entre representações de objetos, levantamento de conjecturas e demonstração de resultados matemáticos.

O objetivo geral dessa situação, no que se refere à formação de professores, é o de explorar as possibilidades de um quadro teórico para organizar e gerir uma situação matemática com o uso de tecnologia, utilizando três das orquestrações instrumentais apresentadas (*Explain-the-screen, Discuss-the-screen, Sherpa-at-work*). No que se refere ao aluno, o objetivo é o de se envolver nos questionamentos e solução dos problemas que compõem a situação matemática, com vistas a justificar a relação envolvida no teorema.

ANÁLISE A *PRIORI*

A análise *a priori*, que subsidiou a elaboração da situação matemática, foi realizada a partir de elementos histórico-epistemológicos, de orientações didáticas constantes dos PCN (BRASIL, 1998) e da BNCC (BRASIL, 2017), e de experiências profissionais dos autores deste capítulo em formações de professores com utilização de tecnologias digitais.

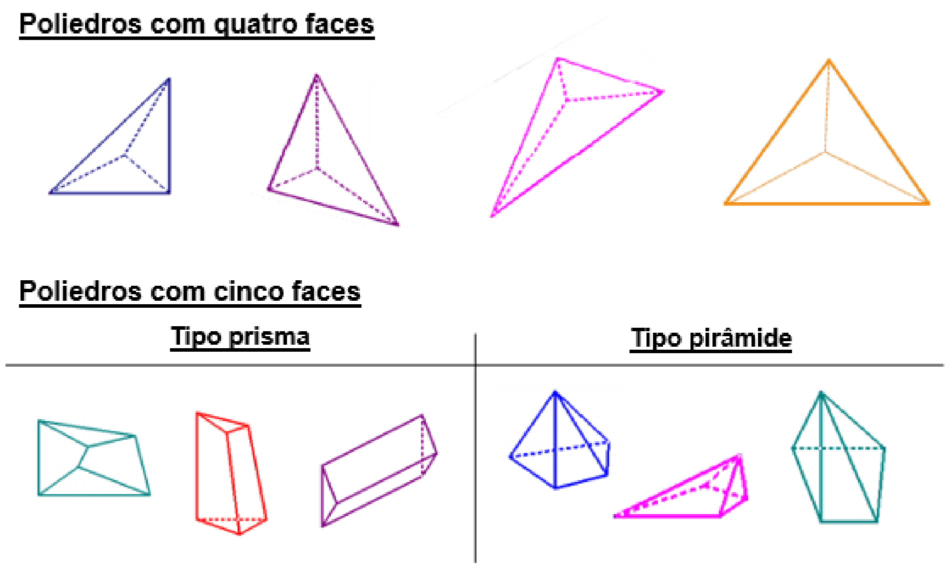
REFERÊNCIAS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICAS

O teorema de Euler[37] para poliedros foi descoberto mais ou menos, ao acaso, em 1758 quando Leonhard Paul Euler (1707-1783) descobriu a existência de uma relação entre o número de faces, vértices e arestas de um poliedro convexo. Ele buscava formular uma classificação dos poliedros em função do número de faces, inspirado na classificação já existente para os polígonos, como por exemplo a classificação de polígonos com quatro lados (quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos).

Euler iniciou a sua investigação procurando classificar os poliedros em função do número de faces, assemelhados ao número de lados das figuras planas (polígonos convexos). Entre os poliedros com o mesmo número de faces, Euler classificou em prismas, pirâmides e "Outros".

Os poliedros com quatro faces se enquadravam na categoria "pirâmide". No entanto, os poliedros com cinco faces se dividiram entre os do "tipo pirâmide" ou "tipo prisma", conforme Figura 2.

Figura 2 – Classificação dos poliedros com quatro e cinco faces

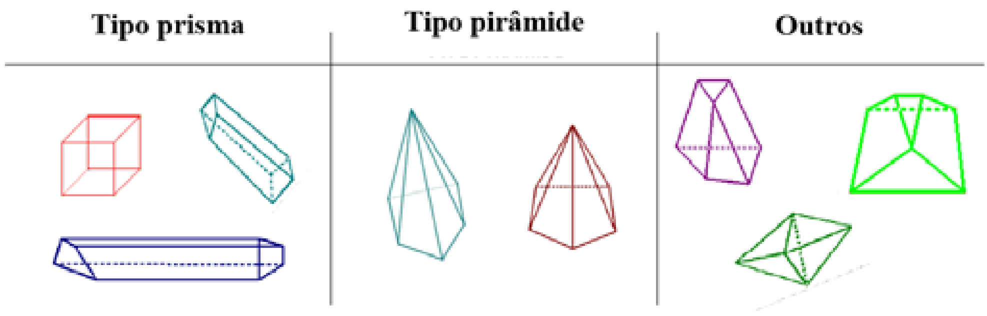


Fonte: MICHEL *et al.*, s.d., p. 4.

[37] O suíço Leonard Euler (1707-1783) é um dos maiores gênios de todos os tempos na matemática e na física.

E observou que para os poliedros com seis faces, começam a aparecer poliedros da terceira categoria "Outros", como pode ser conferido na Figura 3.

Figura 3 – Poliedros com seis faces

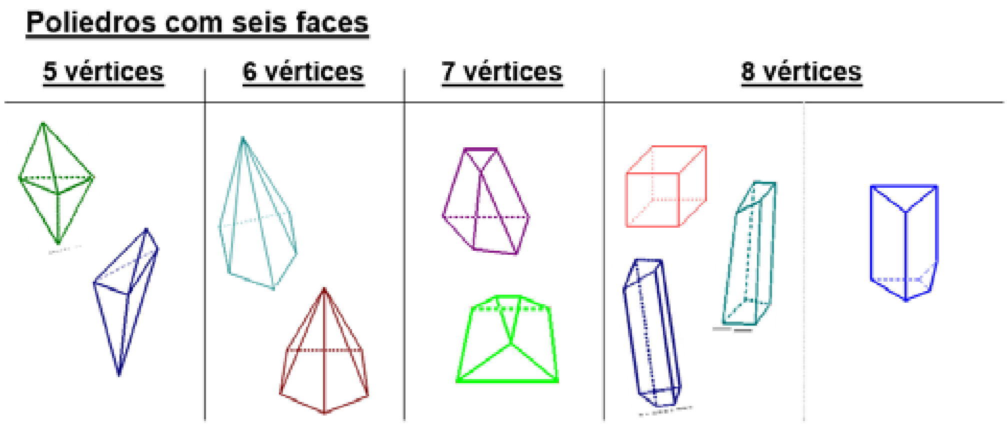


Fonte: MICHEL *et al*., s.d., p. 4.

Euler verificou que os poliedros que tinham o mesmo número de faces e o mesmo número de vértices não se assemelhavam. São os casos de poliedro com oito vértices entre os hexaedros e aqueles com 10 vértices entre os heptaedros e os com 12 vértices entre os octaedros, por exemplo. Ele usou um segundo critério para classificar os poliedros, considerando aqueles que tinham o mesmo número de faces e o mesmo número de vértices.

Na Figura 4, apresentamos os hexaedros agrupando-os segundo o número de vértices.

Figura 4 – Poliedros com seis faces e sua separação pela quantidade de vértices



Fonte: MICHEL *et al*., s.d., p. 4.

Como terceiro critério, Euler pensa no número de arestas como um meio de identificar poliedros que têm o mesmo número de faces e o mesmo número de vértices.

Para os poliedros com seis faces e oito vértices, ele ficou um pouco surpreso ao constar que todos tinham o mesmo número de arestas (seis, oito e doze). Incapaz de distinguir e acreditando ser um caso particular dos poliedros com seis faces, ele considerou o caso de sete faces e dez vértices. E a relação se repetiu (sete, dez, quinze).

Notando que esse fato era verdade para outras famílias com o mesmo número de faces e vértices, ele conjecturou que deveria haver uma relação entre esses números. Assim chegou à sua famosa relação $F + V - A = 2$, que constitui o "Teorema de Euler para poliedros".

Essa relação parece natural e evidente. No entanto, sua demonstração construiu uma história.

Várias demonstrações para essa fórmula foram propostas, em campos muito diferentes da matemática, mais ou menos completas e mais ou menos rigorosas.

Uma das mais conhecidas é a demonstração de Cauchy (1813 *apud* LIMA, 1985) e uma das mais simples é a de Legendre.

Lakatos, em seu livro Provas e Refutações (1976), utiliza a demonstração desse teorema de Euler, sobre poliedros, para discutir a questão das provas matemáticas, e fez isso a partir de uma análise crítica da prova de Cauchy. Lima (1985) considerou que Lakatos não finaliza sua análise crítica à demonstração de Cauchy, e apresenta uma proposta sua.

De fato, Euler, que não conceituou poliedro, admitia que essa relação era válida para os poliedros que hoje denominamos convexos. Ou melhor, ele achava que a relação classificava os poliedros convexos.

No entanto, é aí que está a famosa controvérsia, há muito tempo se sabe que seu teorema representa apenas uma condição necessária, isto é, o que vale é a relação no seguinte sentido: "se um poliedro é convexo então $F + V–A = 2$". Não é verdadeira a direção "se $F + V – V = 2$ então o poliedro e convexo!" Há exemplos de poliedros não convexos para os quais $F+ V – A = 2$. Euler não percebeu isso. A controvérsia sobre o teorema de Euler perdurou mais de um século. Sua história está escrita nas notas de rodapé do livro Lakatos (1976). A solução definitiva dessa controvérsia deve-se a Poincaré (LIMA, 1985). E qual é essa solução definitiva? A resposta a essa pergunta tem que ficar para outro nível de ensino porque está fora da Geometria estudada na escola básica. Mas é possível dar pistas. A condição necessária e suficiente está garantida para sólidos que parecem bolas de futebol com aqueles losangos desenhados.

ELEMENTOS DIDÁTICOS E PEDAGÓGICOS

A situação matemática foi delineada com o objetivo de levar os alunos a fazerem conjecturas, a se interessarem em valorizar a demonstração de resultados matemáticos e a perceberem que a matemática também tem gerado controvérsias em seu desenvolvimento histórico.

No que tange aos professores, o interesse dos autores do capítulo foi propor tipos de orquestrações visando revelar o papel que eles podem desempenhar durante a execução de atividades, o uso de recursos e com a finalidade de ultrapassarem um ensino destinado a algoritmos e técnicas, em síntese, elaborar configurações didáticas para uma situação matemática e organizar modos de exploração dos recursos envolvidos. Uma das formas usuais de exploração da relação de Euler tem sido a seguinte: dados os números de faces e de vértices do poliedro buscar o número de arestas, ou variação disso. Na situação matemática aqui proposta objetiva-se que os alunos acompanhem a elaboração dessa relação e que percebam as questões ligadas à discussão de sua generalidade.

É previsto que os alunos tenham estudado polígonos em anos anteriores, e que eles e os professores tenham conhecimentos elementares de utilização do GeoGebra. O tempo de duração das atividades que constituem a situação matemática depende, como é usual, dos conhecimentos dos alunos, das condições da organização e gestão da sala de aula em um ambiente de ensino remoto e emergencial, ou também presencial. Para essa proposta admitimos que cada atividade deva ter a duração de uma aula de 50 minutos.

A SITUAÇÃO MATEMÁTICA (DESENVOLVIDA POR UM GRUPO DE ATIVIDADES)

A situação matemática, aqui proposta, é desenvolvida em sete atividades A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 e A_7. Assumimos que cada atividade desenvolvida, está sendo realizada por meio de videoconferências on-line e que os estudantes tenham um computador e acesso à internet.

As atividades foram organizadas com uso do GeoGebra e estão disponibilizadas na plataforma GeoGebra Materiais, que podem ser acessadas por meio de links indicados no corpo do texto.

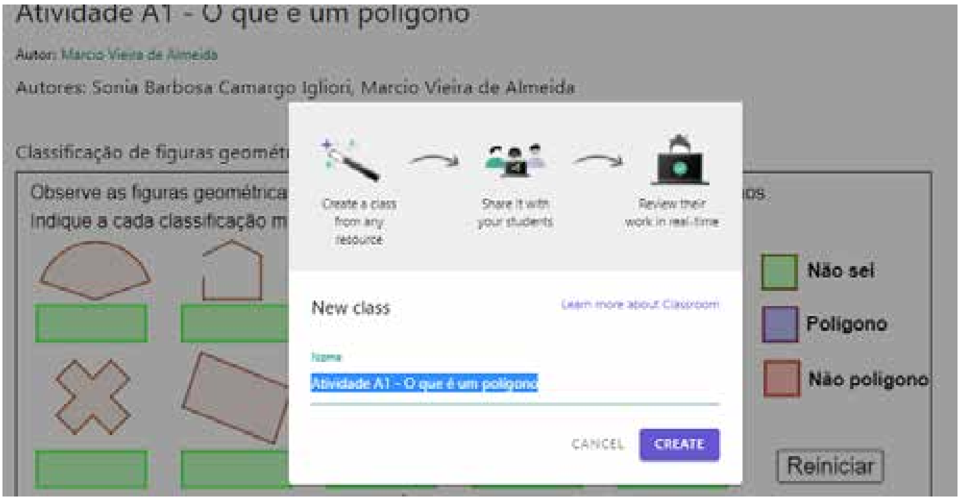
Atividade A_1: Responder à questão: o que é um polígono?

Objetivos: desenvolver competências de classificar e de realizar conversão do registro representação geométrico para língua natural. O modo de execução dessa atividade é proposto em dois passos. $P1_1$: identificação de polígonos entre figuras planas. $P1_2$: levar os alunos a proporem uma 'definição' de polígono por meio da conversão da representação, do registro geométrico para língua natural.

Essa atividade pode ser organizada pela orquestração instrumental do tipo *Sherpa-at-work* (DRIJVERS *et al.*, 2010). Consideramos conveniente esse tipo de orquestração porque o professor acompanha a produção dos demais alunos e por se tratar de conhecimentos já adquiridos. No passo $P1_1$, o alvo é identificar objetos matemáticos, os polígonos. Para isso foi elaborada uma tarefa com o GeoGebra, que está disponível em https://www.geogebra.org/m/e6ka4cgh. Essa tarefa é compatível com os objetivos da atividade, pois, favorece a classificação de figuras.

Depois de acessar o link disponibilizado no parágrafo anterior, pode-se criar uma sessão na plataforma *GeoGebra Classroom* para a atividade. Para isso, o professor deve clicar no botão '*Create Class*', localizado no canto superior direto da atividade, e assim será aberta uma janela, na qual o professor pode criar o nome da sua sala, como apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Disponibilizando uma atividade no GeoGebra Classroom



Fonte: Produção nossa.

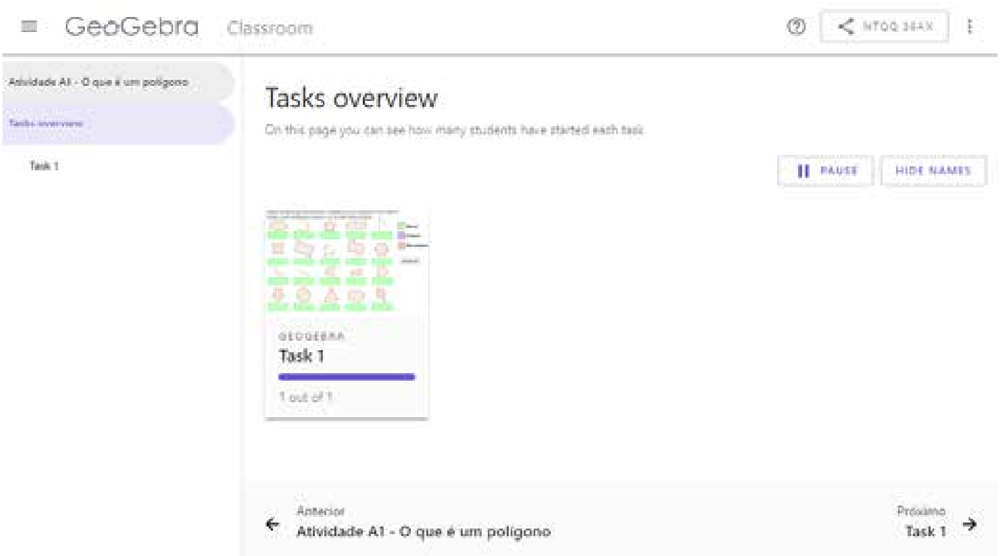
A partir desse momento, o professor será transferido para a plataforma GeoGebra Classroom e aparecerão instruções para o acesso da atividade selecionada pelo professor por meio de um código, como pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 – Código para o acesso para a atividade A_1 na plataforma GeoGebra Classroom

Fonte: Produção nossa.

Depois que os alunos acessarem a atividade no GeoGebra Classroom, o professor terá acesso a um painel no qual é possível acompanhar o desempenho dos alunos enquanto realizam a atividade em tempo real, no menu '*Task Overview*', como apresentado na Figura 7.

Figura 7 – Painel do GeoGebra Classroom que apresenta o trabalho dos alunos



Fonte: Produção nossa.

Essa tarefa pode ser resolvida individualmente. Sugerimos um tempo para a realização da tarefa, o qual pode ser alterado, em função do que o professor percebe no desenvolvimento de sua aula. Ao final do tempo estipulado, o professor seleciona a atividade desenvolvida pelo estudante *Sherpa* e compartilha a sua tela com todos os alunos. O professor, então, pode desencadear uma discussão com todos os estudantes solicitando aos outros alunos que indiquem suas concordâncias e suas discordâncias, em relação ao que consta na tela compartilhada. A atividade se encerra quando os polígonos estiverem distinguidos das demais figuras.

O passo $P1_2$ é relativo à conversão da representação do registro de representação geométrico para língua natural. Durante o passo $P1_1$ o professor pode marcar em um editor de texto as palavras-chave indicadas pelos estudantes durante a discussão, por exemplo, ser fechado, não ser redondo etc. O professor pode ir anotando as palavras e ir construindo com os estudantes uma proposta de 'definição' e toda a discussão se repete até o momento que o professor perceba que pode sistematizar uma definição de um polígono, que pode ser apresentada da seguinte forma:

> Um polígono é constituído de vértices e lados tais que:
>
> Os vértices formam um conjunto finito (ordenado) de pontos em um mesmo plano;
>
> Os lados são segmentos de reta que possuem extremidades nos vértices;
>
> Dois lados consecutivos nunca estão alinhados (colineares);
>
> Qualquer vértice é extremidade de exatamente dois lados;
>
> Os vértices e os lados formam uma figura conexa (em uma única parte); (MICHEL *et al.*, s. d., p. 39, tradução nossa).

Atividade A_2: Responder à questão: O que é um polígono convexo?

Objetivos: desenvolver competências de classificar, identificar polígonos convexos a partir dos registros de representação geométrico e da língua natural. O modo de execução se apoia em conversão de representações, e na apresentação de uma noção intermediária, a de polígono simples, com a intenção de realçar condições que um polígono deve satisfazer para ser um polígono convexo.

A atividade é desenvolvida em três passos. Passo $P2_1$: identificar polígonos simples e não simples em um conjunto de polígonos. Passo $P2_2$: identificar polígonos convexos e não convexos entre polígonos simples. Passo $P2_3$: chegar, no registro de representação em linguagem natural, à definição de um polígono convexo, passando primeiro pela definição de polígono simples.

A atividade A_2 é orientada pelas orquestrações dos tipos *Explain-the-screen* e *Sherpa-at-work*. Na configuração *Explain-the-screen*, o professor dá explicações à classe toda utilizando recursos digitais. Consideramos adequado o acréscimo dessa configuração devido ao fato de estar prevista a introdução de conceitos novos, e nos parece mais complicado a utilização da orquestração *Sherpa-at-work* nesses momentos. Mas, não descartamos a configuração do *Sherpa*, pois há situações em que a participação dele parece essencial.

Como modo de execução é prevista a apresentação pelo professor, de definições escritas (registro em língua natural) de um polígono simples e de um polígono convexo. Definições escritas: 1) *polígonos simples*: um polígono é simples se e somente se dois lados não consecutivos não se interceptam, e, é *não simples* se há dois lados consecutivos que se interceptam. 2) *polígonos convexos*: um polígono é *convexo* se e somente se todo segmento fechado e determinado por dois pontos quaisquer do polígono está inteiramente contido nele, e, é *não convexo* se existem, ao menos dois pontos do polígono, tais que o segmento fechado cujos vértices são esses dois pontos, não está inteiramente contido no polígono. Cada definição deve ser seguida de exemplos e contraexemplos que podem ser exibidos durante a fala do professor.

Em seguida a professora pode criar uma sessão na Plataforma GeoGebra Classroom, como a atividade que pode ser encontrada pelo link https://ggbm.at/ZpDzzTfC, dar um tempo para que os alunos respondam a atividade, e ao final desse tempo, selecionar a atividade do estudante *Sherpa* para desencadear a discussão coletiva. A partir daqui ocorrem a discussão e a finalização, da mesma forma como proposto na atividade A_1.

Atividade A_3: analisar e demonstrar a situação plana do teorema de Euler.

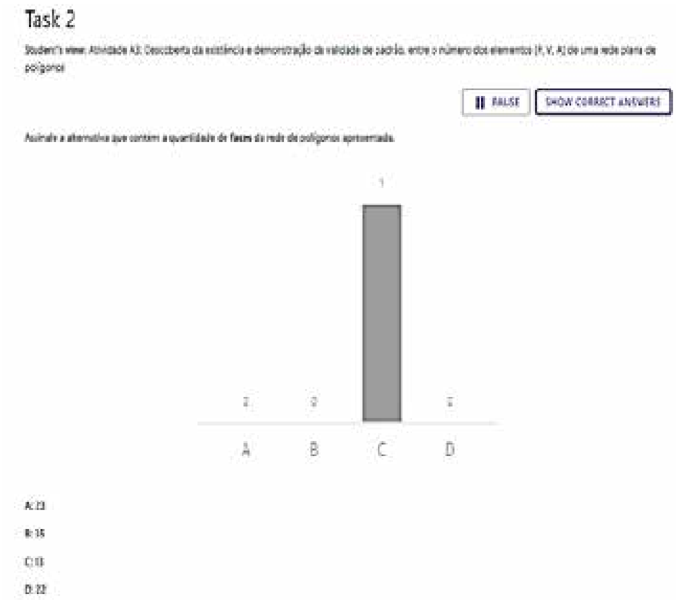
Objetivos: Identificar padrões, transitar entre os registros de representação geométrico e língua natural, por meio de conversões desses registros nos dois sentidos. Essa atividade foi proposta como preparação ao estudo do teorema para o caso espacial, ou seja, para os poliedros.

Tipo de Orquestração instrumental proposta*: Explain-the-screen*. Foi escolhido esse tipo de orquestração pela característica da atividade A_3, em que o professor precisa introduzir conceitos e proposições novas.

P3$_1$: Introduzir a noção de uma rede plana de polígonos, nos registros de representação geométrico e língua natural. O professor introduz a noção de uma rede plana de polígonos, compartilhando a tela com os estudantes na atividade disponibilizada no link https://www.geogebra.org/m/k8yrdpvn. Em seguida, seria possível formalizar a noção de rede plana de polígonos constituída de faces, vértices e arestas tais que: as faces são polígonos simples, as arestas são intersecções de duas faces ou fronteira da rede; os vértices são intersecções de duas arestas; as faces, os vértices e as arestas formam um conjunto conexo (em uma parte).

O professor pode criar com o material disponibilizado no link anterior, uma sessão no GeoGebra Classroom de forma que cada aluno possa trabalhar nas atividades 2, 3 e 4. De forma que eles possam obter o número de faces, vértices e arestas de uma rede de polígonos. No caso de questões de múltipla escola, a plataforma GeoGebra Classroom, exibe um gráfico de barra, no qual o professor consegue verificar como está o desempenho dos estudantes da turma enquanto respondem uma atividade de múltipla escolha. Veja um exemplo, na Figura 8.

Figura 8 – Resposta de uma atividade de múltipla escolha na plataforma GeoGebra Classroom



Fonte: produção nossa.

P3$_2$: Demonstrar a proposição: O número F + V – A não se altera se os polígonos da rede forem triangularizados. Para isso é preciso inicialmente construir com os alunos, por meio da orquestração *Explain-the-screen*, uma triangularização de um polígono simples em dois casos possíveis, como apresentado na atividade disponível em https://www.geogebra.org/m/k8yrdpvn. E discutir com eles para confirmar que um polígono simples qualquer, com n lados, pode ser transformado em (n-2) triângulos. Com o auxílio de tabelas, que podem ser construídas pelo professor, pode-se mostrar em casos particulares, que o número resultante de F + V – A não se altera se um dos polígonos da rede for triangularizado. A verificação é realizada para as duas possibilidades de triangulação de um polígono particular, disponíveis na atividade. Sugere-se que a orquestração seja repetida para todos os polígonos da rede, e ao final, obtém-se o mesmo número de antes da triangularização.

$P3_3$: Verificar que o número F + V – A de uma rede não se altera se se subtrai um triângulo. Pode-se utilizar a atividade "Desenvolvendo a relação para a rede de polígonos planos: F + V – A = 1".[38] Essa atividade pode ser mediada por meio de uma orquestração do tipo *Explain-the-screen*. Com simulações realizadas por meio do aplicativo construído, suprimos um triângulo da rede resultante e confirmamos que o número de faces, mais vértices subtraindo do número de arestas é o mesmo que o inicial. A rede construída no GeoGebra favorece o entendimento de que o procedimento de suprimir triângulos pode continuar até que reste apenas um triângulo T, e então $F_T + V_T – A_T = 1$.

A partir desse ponto, apresentamos as atividades que serão desenvolvidas e apenas indicaremos a forma de orquestração a ser utilizada, sem inserir detalhes técnicos sobre a plataforma GeoGebra Classroom, como feito nas atividades anteriores.

Atividade A_4: Responder à questão: O que é um poliedro?

Objetivos: desenvolver competência de classificar, e, de realizar conversão de registros. Nessa atividade, sugerimos a utilização da mesma configuração didática e o mesmo tipo de orquestração da atividade A_1. Com o apoio da classificação das figuras espaciais em poliedros e outros, como pode ser visto em https://ggbm.at/kkfrnjkn. Todos os meios de execução devem levar à caracterização dos poliedros. Espera-se obter como definição: 'Um poliedro é constituído de faces, de vértices e de arestas tais que: as faces são polígonos, as arestas são intersecções de duas faces, as extremidades das arestas são os vértices, as faces, os vértices e as arestas fazem um conjunto convexo (em apenas uma parte); duas faces contiguas não são coplanares, cada vértice pertence a apenas um ângulo poliedro.

[38] Disponível no link: https://www.geogebra.org/m/k8yrdpvn.

Atividade A_5: Responder à questão: O que é um poliedro convexo?

Objetivos: desenvolver competência de classificar, identificar um poliedro convexo a partir dos registros de representação geométrico e língua natural. Repetir a orquestração da atividade A_2 com a seguinte atividade: https://www.geogebra.org/m/ugm7tykb. Definição na língua natural: um poliedro é convexo, se e somente se, para toda face f o poliedro pertence a uma das regiões R_1 ou R_2 que o plano que contém face *f* divide o espaço.

Atividade A_6: enunciar e demonstrar o teorema de Euler para poliedros convexos. Essa é a atividade central e alvo da situação matemática descrita neste capítulo. Sugere-se dois tipos de configurações didáticas, acontecendo em conjunto. Em parte do trabalho o professor precisa tomar o comando da tecnologia e trabalhar com a classe toda, como por exemplo, quando introduz a noção de diagrama de Schlegel. Para esses momentos, sugerimos a configuração didática tipo *Discuss-the-screen*. Em outros momentos em que as situações são assemelhadas ao caso plano, o professor tem mais a função de selecionar respostas e coordenar discussões sugerimos o *Sherpa-at-work*. Essa atividade tem como modo de execução a realização em cinco passos, orientados pelo encaminhamento das ideias desenvolvido pelo próprio Euler.

No passo $P6_1$ os alunos analisam uma figura (disponível em: https://www.geogebra.org/m/xgcvztfc) com poliedros separados pelo número de faces. Pode-se escolher um estudante *Sherpa* para conduzir a discussão de possível categorização desses poliedros, considerando duas categorias: prismas ou pirâmides. Conferir que essas duas categorias não são suficientes para poliedros com seis ou mais faces. Discute-se então a tentativa de categorização de poliedros em função do número de vértices e depois pelo número de arestas. Repetem-se a ausência de padrão. Busca a categorização por poliedros que tenham o mesmo número de faces e de vértices.

No passo $P6_2$, o professor exibe para todos os alunos**,** os encaminhamentos de Euler, de que poliedros com seis faces e oito vértices tinham 12 arestas. Repetiu essa análise com poliedros, de sete faces e dez vértices e constatou regularidade na relação entre os números de faces, vértices e arestas.

No passo $P6_3$, o professor desafia, então, os alunos para descobrir essa regularidade (ou padrão), uma fórmula proposta e demonstrada por Euler, entre o número de faces, de vértices e de arestas, de um poliedro convexo, e passa a coordenação do trabalho com software e projetor ao *Sherpa*, que projeta na tela uma tabela (que está disponível em https://www.geogebra.org/m/xgcvztfc) e pode pedir para o Sherpa tentar completar a tabela, e nesse momento os outros alunos podem participar da discussão.

Enunciar a fórmula de Euler a partir de casos particulares é o passo $P6_4$. O professor solicita ao *Sherpa* que faça algumas simulações com somas e subtrações entre os números de faces, vértices e arestas. Esse comando leva os alunos a se lembrarem que no caso dos polígonos, as operações tinham por alvo encontrar F + V – A, e passam a efetuar, junto com o *Sherpa* essas operações em cada poliedro exposto na tabela e propõem a fórmula F + V – A = 2.

Referendando esse resultado, o professor retoma a configuração didática *Discuss-the-screen*, pois vai trabalhar com a demonstração do teorema no passo $P6_5$. O professor pode projetar o texto da seção "Diagrama de Schelgel" da atividade (disponível em: https://www.geogebra.org/m/xgcvztfc) e analisar esse diagrama para alguns poliedros. E com a ajuda das construções disponíveis na atividade, professor e alunos podem analisar junto com a classe, uma possível correspondência entre número de faces, vértices e arestas de um poliedro e da rede plana de polígonos correspondente. O objetivo é constatar que os números de vértices e arestas se mantêm e os de faces diminuem em 1. Essa constatação leva à fórmula de Euler, pois se um poliedro tem F faces, V vértices e A arestas, o seu diagrama de Schlegel terá (F – 1) faces, V vértices e, A arestas. Pela atividade A_3, é verdade que (F – 1) + V – A = 1, o que implica que F + V – A = 2.

Atividade A_7. Informações muito gerais sobre o teorema, incluindo as controvérsias.

Objetivo: Apresentar um poliedro *não convexo* que satisfaz o teorema, e um outro que não satisfaz essa fórmula de Euler. Concluir que essa fórmula não é, portanto, geral, para os poliedros. Dar conhecimento de que outro matemático chamado Poincaré continuou esse trabalho e obteve formulações gerais. Sugerimos como orquestração de instrumentação a *Explain-the-screen*.

Modos de exploração em dois passos. $P7_1$. Compartilhar para todos os alunos, dois poliedros *não convexos* (disponíveis na seguinte atividade https://www.geogebra.org/m/hsa64zwg). Relacionar faces, vértices e arestas dos dois poliedros. Verifica-se que um deles satisfaz a fórmula de Euler, mesmo sendo não convexo, mas o outro não. Conclui-se que essa fórmula não é geral para os poliedros. Esse fato trouxe controvérsias durante bastante tempo. O fato é que Euler não definiu poliedro. Hoje se sabe que a característica dos poliedros para satisfazerem a fórmula de Euler são aqueles homeomorfos a uma esfera. Nesse nível de ensino, foi construída uma aplicação que mostra um cubo se transformando em uma esfera, e uma pirâmide se transformando em uma esfera. Essa informação vem de Poincaré que generalizou a fórmula de Euler, para objetos geométricos do espaço, cuja caracterização é de sua deformação contínua.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Finalizamos este artigo em que foi objetivado apresentar tipos de orquestrações que possibilitem a utilização das tecnologias por parte dos professores no período de ensino remoto emergencial para a situação matemática considerada.

Entendemos que o objetivo foi atendido, pois os exemplos apresentados neste capítulo podem auxiliar com a exposição de possibilidades para organização de uma situação didática em busca de desempenhar o papel do maestro que comanda os participantes de um concerto. No entanto, deve-se reconhecer que a análise dos processos de instrumentação e instrumentalização essenciais para uma orquestração, não foram objetivados nesta pesquisa, de orientação teórica. As leituras e consultas de apoio, além das experiências profissionais dos autores foram importantes, mas faltaram os dados da prática específica, que se espera contemplados por meio de contatos virtuais ou efetivos com a sala de aula. Isso porque, o acompanhamento de uma situação prática vai revelar as diferentes concepções de ensino que orientam as práticas pedagógicas. Entre elas, transmitir conhecimento; treinar; indicar; e punir (no sentido de dar uma lição a alguém) (PINO, 2004).

Este artigo apresenta um constructo teórico, a orquestração instrumental, inserido na teoria da didática da matemática, Gênese Instrumental, que abarca uma concepção de ensino "indicar", segundo a qual a

> [...] aquisição do conhecimento é concebida como resultado de uma atividade de procura que o sujeito que aprende (S2) deve fazer seguindo as indicações e orientações do sujeito que ensina (S1). Subjacente a esta concepção está a ideia de que o conhecimento é resultado de um trabalho de investigação e descoberta com a ajuda do outro. No caso do ensino escolar, esse outro é o professor (S1), cujo papel fundamental é ser "guia" do aluno (S2). Esta concepção aponta no sentido de que a atividade de conhecer não é apenas receber informações a respeito do objeto de conhecimento (OC), mas procurar compreender a significação desse objeto, o que exige procura e investigação por parte do sujeito que aprende (S2), mas contando com a orientação de quem ensina (S1) (PINO, 2004, p. 441).

E, em complemento:

> [..] inserimos algumas reflexões, sobre o trabalho dos professores e dos saberes que eles trazem em sua prática, elas levam em consideração que em uma sala de aula há tantas particularidades que só o docente que se ocupa dela e ninguém mais tem

> condições de equacionar as dificuldades dos alunos e propor abordagens de ensino para elas (ABAR; IGLIORI, prefácio, 2012, adaptado).

Neste artigo, o que trazemos ao professor são contribuições advindas de uma teoria da didática da matemática, as quais sempre podem e devem ser filtradas por sua prática e que podem ser úteis para o desenvolvimento de aulas no período de ensino remoto emergencial.

REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. A. P.; IGLIORI, S. B. C. **A reflexão e a prática no ensino – Matemática**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2012. v. 1. 168 p.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais Primeiro e Segundo Ciclos do Ensino Fundamental** – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica; Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão; Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2017.

DRIJVERS, P.; TROUCHE, L. From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor. *In:* BLUME, G. W.; HEID, M. K. (eds.). **Research on technology and the teaching and learning of mathematics**: cases and perspectives. Charlotte, NC: Information Age, v. 2, p. 363-392, 2008.

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H.; GRAVEMEIJER, K. The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in mathematics**, v. 75, n. 2, p. 213-234, 2010.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In:* MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de Representação Semiótica**. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008, p. 11-34.

GARCIA, T. C. M.; MORAIS, I. R. D.; ZAROS, L. G.; RÊGO, M. C. F. D.; GOMES, A. V. **Ensino remoto emergencial**: orientações básicas para elaboração do plano de aula. Natal: SEDIS/UFRN, 2020.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers? **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p. 199-218, 2009.

INSTITUTO PENÍNSULA. **Sentimento e percepção dos professores brasileiros nos diferentes estágios do Coronavírus no Brasil**. Disponível em: https://www.institutopeninsula.org.br/pesquisa-sentimento-e-percepcao-dosprofessores-nos-diferentes-estagios-do-coronavirus-no-brasil/. Acesso em: 30 out. 2020.

KENDAL, M.; STACEY, K. Teachers in transition: moving towards CAS-supported classrooms. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v. 34, n. 5, p. 196-203, 2002.

KENDAL, M.; STACEY, K.; PIERCE, R. The influence of a computer algebra environment on teachers' practice. *In*. GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (eds.), **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators:** turning an computational device into a mathematical instrument. Dordrecht: Kluwer, 2004, p. 83-112.

LAKATOS, I. **Proofs and Refutations: the logic of mathematical discovery**, Cambridge: Cambridge University Press. 1976.

LIMA, E. L. O Teorema de Euler sobre poliedros. **Revista Matemática Universitária**. Rio de Janeiro: SBM, n. 2, 1985.

MARIOTTI, M. A. Influence of technologies advances in students' math learning. *In*. ENGLISH, L. D. (ed.), **Handbook of International Research in Mathematics Education**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2002, p. 757-786.

MCKENZIE, J. Head of the class: how teachers learn technology best. **American School Board Journal**, v. 188, n. 1, p. 20-23, 2001.

MICHEL, D.; JÉRÉMY, D.; SAMUEL, H.; CINDY, L.; ANGELO, M. Relation d'Euler et les polyèdres sans "trou»: Cellule de Géométrie – Catégorie pédagogique la HEH. Elaborada pelo Centre de Rechercher HAUTE ECOLE – Ecole Normale iSEP. Disponível em: http://www.cellulegeometrie.eu/documents/pub/pub_12.pdf. Acesso em: 29 jun. 2018.

PINO, A. Ensinar-aprender em situação escolar: perspectiva histórico-cultural. **Contrapontos**, v. 4, n. 3, p. 439-459, 2009.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies**: une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995.

TROUCHE, L. Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. International **Journal of Computers for mathematical learning**, v. 9, n. 3, p. 281, 2004.

TROUCHE, L. Environnements informatisés et mathématiques: quells usages pour quells apprentissages? **Educational Studies in Mathematics**. v. 55, p.181-197, 2004.

TROUCHE, L.; DRIJVERS, P. Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education. **Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA**, v. 33, n. 3, p. 193-209, 2014.

ZBIEK, R. M.; HOLLEBRANDS, K. A research-informed view of the process of incorporating mathematics technology into classroom practice by in-service and prospective teachers. *In.* HEID, M. K.; BLUME, G. W. (eds.) **Research on technology and the teaching and learning of mathematics:** Syntheses, cases and perspectives, Carolina do Norte-EUA, v. 1, p. 287-344, 2008.