

EXTENSÕES DO CONCEITO DE TÁBUAS DE VIDA

19.1 INTRODUÇÃO

Em processos de decrementos simples observa-se, por definição, somente um tipo de decremento. No caso de tábuas de vida por decremento único, estudadas até agora, observa-se apenas uma causa de saída da população, ou decremento populacional, a morte. Contudo, pode-se estar interessado em estudar a intensidade com que se dá a saída da população por decrementos diferentes, ou por causas de morte diferentes. Por exemplo, numa população de contribuintes previdenciários um indivíduo pode deixar a população por sair do mercado de trabalho (demissão), por estar gozando de algum benefício (como aposentadoria) ou porque morreu, havendo, portanto, pelo menos 3 decrementos, ou causas de saída da população, diferentes. Pode-se, ainda, estar interessado em um único tipo de decremento, mas que se decompõe em subtipos. Por exemplo, considerando a mortalidade da população, pode-se querer diferenciar a probabilidade de morte por causas externas, das mortes por doenças do aparelho circulatório ou ainda outras categorias de decrementos populacionais. Outro exemplo comum de aplicação de um processo de múltiplos decrementos é a construção de tábuas de vida considerando o efeito de eliminação de determinada(s) causa(s) de morte ou com o surgimento de uma nova.

O Método de Múltiplos Decrementos pode ser aplicado aos dados de uma coorte real ou de período. Uma tábua de vida de múltiplo decremento contém todas as funções de uma tábua de vida de decremento único, e é ainda acrescida de colunas com funções de mortalidade para cada causa de saída, sendo cada causa indicada por um índice.

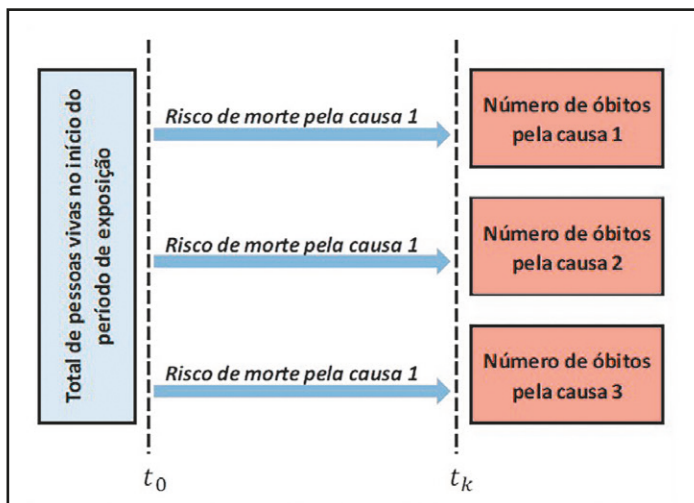
Teoria dos Riscos Competitivos

O Método de Múltiplos Decrementos foi baseado na Teoria dos Riscos Competitivos desenvolvida por atuários no século XIX. Essa teoria envolve situações nas quais os indivíduos estão expostos a mais de um tipo de evento (risco). No caso de estudos sobre mortalidade, os indivíduos estão expostos a diferentes causas de morte; no caso de mercado de trabalho existem diferentes formas de saída da situação de ocupado etc. Segundo essa teoria, se for eliminada uma causa de decremento os indivíduos que morreriam por essa causa passariam, necessariamente, a morrer por outras causas (Chiang, 1984). Assim, os óbitos por outras causas deveriam aumentar, já que o número de pessoas-anos de exposição ao risco de outras causas vai aumentar. Se o número de óbitos e de anos-pessoa aumenta, as TEMs de cada causa não se alteram. Entretanto, aumentando o número de óbitos em cada causa para um mesmo número de indivíduos iniciais, a probabilidade de decremento por cada causa aumenta. Assim, caso seja abolida ou alterada a função de uma das causas de decremento, as pessoas que antes morriam por esta causa agora passarão a morrer por outras causas, mesmo que numa idade superior à que morreriam se aquela determinada causa ainda atuasse.

Em um processo de múltiplos decrementos, vários tipos de decrementos atuam simultaneamente, de forma que os indivíduos possam transitar de um estado de origem para diferentes estados de destino, ou dito de outra forma, podem experimentar diferentes tipos de decrementos. Tais estados de destino são ditos *absorventes*, pois uma vez neste estado não existe possibilidade de uma nova transição. O exemplo mais comum é a construção de uma tábua de vida por múltiplos decrementos, onde uma coorte inicial de indivíduos estaria exposta ao risco de morte por diferentes causas. Neste caso, os indivíduos podem transitar o estado “vivo” para tantos estados absorventes quantas forem as causas de morte atuando. Este exemplo pode ser visualizado na Figura 19.1.

Pela teoria dos riscos competitivos (Chiang, 1984), k tipos de decrementos podem ocorrer onde k diferentes tipos de riscos estão agindo simultaneamente. Para cada tipo de decremento existe uma função de risco.

Figura 19.1: Esquema de exposição de uma população a múltiplas causas de morte



Fonte: Elaboração própria.

19.1.1 Construção da tábua de múltiplos decrementos

A construção de uma tábua de múltiplos decrementos pode surgir mediando o uso de tábuas de decrementos únicos construídas separadamente, ou mediante dados brutos agrupados por tipo de decremento e grupo etário. Também é possível, mediante uma tábua de múltiplos decrementos, construir uma tabela associada de decremento único para cada uma das causas de decremento. Por fim, também é possível analisar como as demais funções da tábua de vida, construída com base na totalidade de decrementos, seriam alteradas com a retirada de uma das causas de decremento. Para isso, é necessário estimar os diferentes tipos de probabilidades condicionais (brutas, brutas parciais e líquidas) associadas a um determinado intervalo etário. A probabilidade bruta mede o risco de ocorrência de um evento quando todos os outros riscos estão atuando na população de interesse. Já a probabilidade bruta parcial mede o risco de ocorrência de um evento quando outros riscos são eliminados. Por sua vez, a probabilidade líquida refere-se à probabilidade de ocorrência de um evento se um determinado risco é o único que atua sobre a população. Ao considerar que esses são os únicos decrementos possíveis, a teoria de riscos competitivos possibilita o estudo das relações entre essas probabilidades. A seguir, são expostos alguns possíveis exemplos de aplicação em duas áreas de estudo:

Mortalidade por causa básica

No Capítulo 9 desenvolveu-se as funções da tábua de vida de único decremento desconsiderando-se a distinção do grau de risco entre diferentes causas de morte. Entretanto, por vários motivos, fazer essa distinção pode ser extremamente relevante. De posse da tábua de vida por todas as causas combinadas e do número de óbitos observados por grupo etário e por cada causa, calcula-se a probabilidade bruta de morte pela causa i , ou seja, a probabilidade de morte devido à causa i na presença de outras causas atuando. Assim, estima-se a esperança de vida devido à causa i quando todas as demais causas estão atuando. Também é possível determinar, com base na probabilidade bruta de morte pela causa i e na probabilidade de morte por todas as causas, a probabilidade líquida de morte pela causa i , ou seja, probabilidade de morte pela causa i caso este seja o único risco de morte atuando sobre a população. Por fim, com base na probabilidade bruta parcial, é possível determinar o efeito na esperança de vida da população mediante a redução, ou até mesmo eliminação do risco por uma causa específica.

Previdência Complementar

Nos estudos e análises sobre previdência complementar é comum o uso de tábuas de decremento único associadas que podem ser combinadas para formar uma tábua de múltiplos decrementos. Por exemplo, a tábua de entrada em invalidez de uma determinada população pode ser combinada com a tábua de vida, de entrada em aposentadoria, de demissões, entre outras, para determinação de uma tábua de múltiplos decrementos para analisar as diversas de saídas de um participante ativo num determinado regime de previdência complementar. Nesta situação, utiliza-se as probabilidades líquidas de saídas do estado de “participante ativo do regime de previdência” para determinação das probabilidades brutas que conformam a tábua de múltiplos decrementos.

Os exemplos apresentados acima evidenciam a necessidade de se entender as relações entre as probabilidades bruta, bruta parcial e líquida ao se trabalhar com tábuas de múltiplos decrementos. No que segue, descreve-se essas relações para cada situação apresentada no exemplo sobre mortalidade por causa básica de morte. Entretanto, os cálculos para outras aplicações, como a de previdência complementar, podem ser conduzidos de maneira similar. O mais importante é ter muito claro todas as situações de decrementos (saídas) que podem ocorrer na população base.

19.1.2 Tabela de múltiplos decrementos a partir de dados brutos

É possível também construir uma tabela de múltiplos decrementos a partir de dados de decrementos por idade, sexo, e causa de decremento. Para isso, necessita-se de uma tábua para todos os decrementos agregados, obtida mediante as técnicas expostas no Capítulo 9, e da quantidade observada de cada tipo de decremento por sexo e idade. Então, determina-se as funções que representam cada tipo de decremento.

Para facilidade de exposição utiliza-se o exemplo de mortalidade por causas básicas para descrição dos cálculos. A Tabela 19.1 apresenta os dados de óbitos masculinos por causa de morte no Brasil em 2012 e também a tábua de vida para essa população no mesmo ano. Os óbitos masculinos são classificados segundo 4 grandes causas de morte, definidas pela Décima Revisão da Classificação Internacional de Doenças (CID-10): Capítulo 1 (Algumas doenças infecciosas e parasitárias), Capítulo 2 (Neoplasias), Capítulo 9 (Doenças do aparelho circulatório) e Capítulo 20 (Causas externas). As demais causas de morte são agrupadas numa única coluna de modo que a soma seja igual ao total de óbitos masculinos na população.

A probabilidade de morte no intervalo etário $(x, x+n)$ pela causa de morte i quando todas as outras causas de morte estão atuando na população de interesse é dita “probabilidade bruta de morte”. Na Tabela 19.1 essas probabilidade estão expostas nas colunas C a G e nas linhas 25 a 42. Essa probabilidade pode ser calculada por:

$${}_nq_x^{b,i} = {}_nq_x \frac{{}_nD_x^i}{{}_nD_x} \quad (19.1)$$

onde ${}_nq_x$ é a probabilidade de morte no grupo etário $(x, x+n)$ por todas as causas, extraída da tábua de vida para a população masculina; e ${}_nD_x^i$ são, respectivamente, o número de óbitos masculinos pela causa de morte i e o número total de óbitos masculinos no grupo etário $(x, x+n)$.

Na Tabela 19.1 a probabilidade bruta de morte por doenças infecciosas e parasitárias (Cap. 1), por exemplo, é feita inserindo na célula C25 a seguinte expressão: = L5 * C5/H5, e assim para baixo até a célula C42. De maneira similar é possível calcular as probabilidades brutas de morte pelas demais causas (Cap. 2, Cap. 9, Cap. 20 e demais causas).

Tabela 19.1: Óbitos masculinos por causa de morte no Brasil em 2012 e respectiva tábua de vida

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Brasil, 2012															
2			Número de óbitos por grupo de causa CID 10 (nD_x)					População residente	nM_x	Tábua de vida						
3	x	n	Cap 1	Cap 2	Cap 9	Cap 20	Demais	Total		n^a_x	n^q_x	l_x	nL_x	T_x	e_x	
4	0	1	982	73	182	607	19.684	21.528	1.463.815	0,0147	0,49	0,0146	1	0,993	71,4	71,4
5	1	4	358	338	117	865	1.768	3.446	5.679.574	0,0006	1,61	0,0024	0,9854	3,936	70,4	71,4
6	5	5	146	368	100	837	795	2.246	7.758.474	0,0003	2,5	0,0014	0,9830	4,912	66,4	67,6
7	10	5	165	389	151	1.865	1.016	3.586	8.875.967	0,0004	2,5	0,0020	0,9816	4,903	61,5	62,7
8	15	5	274	597	438	13.967	1.823	17.099	8.704.999	0,0020	2,5	0,0098	0,9796	4,874	56,6	57,8
9	20	5	558	658	643	19.026	2.276	23.161	8.782.606	0,0026	2,5	0,0131	0,9700	4,818	51,7	53,3
10	25	5	1.053	720	973	16.562	3.203	22.511	8.610.952	0,0026	2,5	0,0130	0,9573	4,756	46,9	49,0
11	30	5	1.639	1.041	1.692	14.095	4.737	23.204	7.853.458	0,0030	2,5	0,0147	0,9449	4,690	42,2	44,6
12	35	5	1.958	1.415	2.693	11.128	6.317	23.511	6.883.541	0,0034	2,5	0,0169	0,9310	4,616	37,5	40,3
13	40	5	2.328	2.528	4.494	9.143	8.662	27.155	6.427.350	0,0042	2,5	0,0209	0,9153	4,529	32,9	35,9
14	45	5	2.505	4.673	7.355	8.003	11.880	34.416	5.785.459	0,0059	2,5	0,0293	0,8961	4,415	28,3	31,6
15	50	5	2.436	7.522	10.988	6.477	14.516	41.939	4.912.910	0,0085	2,5	0,0418	0,8699	4,259	23,9	27,5
16	55	5	2.304	10.717	14.680	5.094	16.595	49.390	3.963.556	0,0125	2,5	0,0604	0,8335	4,042	19,7	23,6
17	60	5	2.146	12.258	17.824	4.062	18.295	54.585	3.087.312	0,0177	2,5	0,0847	0,7832	3,750	15,6	19,9
18	65	5	1.970	13.091	20.104	3.146	20.092	58.403	2.256.975	0,0259	2,5	0,1215	0,7169	3,367	11,9	16,6
19	70	5	1.955	13.624	22.100	2.497	22.986	63.162	1.691.406	0,0373	2,5	0,1708	0,6297	2,880	8,5	13,5
20	75	5	1.860	12.610	22.880	2.184	24.564	64.098	1.105.881	0,0580	2,5	0,2531	0,5222	2,281	5,6	10,8
21	80	5	3.672	19.315	46.745	3.928	60.558	134.218	1.148.647	0,1168	8,6	1,0000	0,3900	3,338	3,3	8,56
22																
23			n^q_x (probabilidades brutas)					e_x								
24	x	n	Cap 1	Cap 2	Cap 9	Cap 20	Demais	Total		Cap 1	Cap 2	Cap 9	Cap 20	Demais	Total	
25	0	1	0,00067	0,00005	0,00012	0,00041	0,01335	0,01460		65,9	73,6	76,4	46,9	73,1	71,4	
26	1	4	0,00025	0,00024	0,00008	0,00061	0,00124	0,00242		66,1	72,7	75,5	46,1	74,6	71,4	
27	5	5	0,00009	0,00024	0,00006	0,00054	0,00051	0,00145		62,6	68,8	71,5	42,4	70,9	67,6	
28	10	5	0,00009	0,00022	0,00008	0,00105	0,00057	0,00202		57,8	63,8	66,5	37,6	66,0	62,7	
29	15	5	0,00016	0,00034	0,00025	0,00798	0,00104	0,00977		52,9	58,9	61,5	33,0	61,1	57,8	
30	20	5	0,00032	0,00037	0,00036	0,01076	0,00129	0,01310		48,1	54,0	56,6	30,7	56,2	53,3	
31	25	5	0,00061	0,00042	0,00056	0,00955	0,00185	0,01299		43,5	49,2	51,6	29,4	51,4	49,0	
32	30	5	0,00104	0,00066	0,00107	0,00891	0,00299	0,01466		39,2	44,3	46,7	28,0	46,6	44,6	
33	35	5	0,00141	0,00102	0,00194	0,00801	0,00455	0,01693		35,3	39,4	41,9	26,5	42,0	40,3	
34	40	5	0,00179	0,00195	0,00346	0,00704	0,00667	0,02090		31,7	34,6	37,1	24,9	37,4	35,9	
35	45	5	0,00213	0,00398	0,00626	0,00682	0,01012	0,02931		28,3	30,0	32,4	23,0	33,0	31,6	
36	50	5	0,00243	0,00750	0,01095	0,00645	0,01446	0,04179		25,1	25,6	28,0	21,1	28,8	27,5	
37	55	5	0,00282	0,01311	0,01796	0,00623	0,02030	0,06042		22,0	21,6	23,9	19,1	24,8	23,6	
38	60	5	0,00333	0,01901	0,02764	0,00630	0,02838	0,08466		18,9	18,1	20,0	17,0	21,0	19,9	
39	65	5	0,00410	0,02724	0,04183	0,00655	0,04181	0,12152		16,0	15,0	16,5	14,8	17,4	16,6	
40	70	5	0,00529	0,03684	0,05975	0,00675	0,06215	0,17077		13,2	12,3	13,5	12,7	14,1	13,5	
41	75	5	0,00735	0,04980	0,09035	0,00862	0,09700	0,25313		10,6	10,1	10,7	10,4	11,1	10,8	
42	80	5	0,02736	0,14391	0,34828	0,02927	0,45119	1,00000		8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	

Fonte: Ministério da Saúde (2012).

19.1.3 Tabela associada de decremento único

Partindo de uma tabela de múltiplos decrementos, pode-se, ainda, construir uma tabela associada de decremento único para cada uma das causas de decremento. Seja a proporção de decrementos pela causa i . A probabilidade de sobrevivência se somente a causa i estiver atuando (líquida) pode ser determinada por:

$${}_n p_x^{l,i} = (1 - {}_n q_x) {}_n S_x^i = {}_n p_x^{\frac{{}_n q_x^{b,i}}{{}_n q_x}} \quad (19.2)$$

onde ${}_n q_x^{b,i}$ é a probabilidade bruta de morte devido à causa i definida na equação (19.1); ${}_n q_x$ e ${}_n p_x$ são, respectivamente, as probabilidades de morte e sobrevivência entre as idades $(x, x+n)$ da tábua de vida agregada (quando todas as causas estão atuando). Essa probabilidade líquida de sobrevivência devido à causa i entre as idades $(x, x+n)$ é igual a zero no último grupo etário. Então, a probabilidade líquida de decremento pela causa i é determinada por:

$${}_n q_x^{l,i} = 1 - {}_n p_x^{\frac{{}_n q_x^{b,i}}{{}_n q_x}} = 1 - {}_n p_x^{l,i} \quad (19.3)$$

Mediante o uso das probabilidade em (19.2) e (19.3) pode-se, ainda, estimar todas as demais funções da tábua de vida dessa tábua associada de decremento único.

A Tabela 19.2 descreve uma aplicação mediante o uso dos dados e dos cálculos realizados na Tabela 19.1. Por exemplo, para o cálculo da probabilidade líquida de morte devido a algumas doenças infecciosas e parasitárias (Cap. 1), utilizando a primeira parte da fórmula (19.3), basta fazer:

$$J25 = 1 - (1 - D4)^{(C25/D4)}$$

e assim para baixo até a célula J42. De maneira similar é possível calcular as probabilidades líquidas de morte pelas demais causas (Cap. 2, Cap. 9, Cap. 20 e demais causas), tal como apresentado nas colunas K a N, da linha 25 a 42.

De posse das probabilidades líquidas para cada causa de morte, procede-se aos cálculos das demais funções da tábua de vida utilizando-se as técnicas apresentadas no Capítulo 9. Uma hipótese importante para os cálculos das demais funções é a constância do tempo médio vivido por aqueles que morreram no intervalo $(x, x+n)$, ou seja, a função ${}_n a_x$ da tábua de vida.

Probabilidades brutas versus probabilidades líquidas

Não havendo qualquer outra causa atuando, a probabilidade líquida de decremento é igual à probabilidade bruta. Caso contrário, os riscos são competitivos, e a probabilidade bruta (por uma dada causa) sempre é menor que a probabilidade líquida daquela mesma causa. Alguns autores conceituam probabilidade líquida como taxa de decremento, mas argumentam que ela se refere à proporção de pessoas de um estado particular que deixa aquele estado por uma determinada causa (Winkleovoss, 1993). No caso de estudos de mortalidade, a análise da probabilidade líquida não é muito informativa, uma vez que supõe-se uma única causa morte atuando sobre a população em estudo.

Tabela 19.2: Exemplo de cálculo das probabilidades líquidas de morte, Homens, Brasil (2012)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Brasil, 2012													
2	Tábua de vida													
3	x	n	${}_n a_x$	${}_n q_x$	l_x	${}_n L_x$	T_x	e_x						
4	0	1	0,49	0,0146	1	0,993	71,4	71,4						
5	1	4	1,61	0,0024	0,9854	3,936	70,4	71,4						
6	5	5	2,5	0,0014	0,9830	4,912	66,4	67,6						
7	10	5	2,5	0,0020	0,9816	4,903	61,5	62,7						
8	15	5	2,5	0,0098	0,9796	4,874	56,6	57,8						
9	20	5	2,5	0,0131	0,9700	4,818	51,7	53,3						
10	25	5	2,5	0,0130	0,9573	4,756	46,9	49,0						
11	30	5	2,5	0,0147	0,9449	4,690	42,2	44,6						
12	35	5	2,5	0,0169	0,9310	4,616	37,5	40,3						
13	40	5	2,5	0,0209	0,9153	4,529	32,9	35,9						
14	45	5	2,5	0,0293	0,8961	4,415	28,3	31,6						
15	50	5	2,5	0,0418	0,8699	4,259	23,9	27,5						
16	55	5	2,5	0,0604	0,8335	4,042	19,7	23,6						
17	60	5	2,5	0,0847	0,7832	3,750	15,6	19,9						
18	65	5	2,5	0,1215	0,7169	3,367	11,9	16,6						
19	70	5	2,5	0,1708	0,6297	2,880	8,5	13,5						
20	75	5	2,5	0,2531	0,5222	2,281	5,6	10,8						
21	80	5	8,6	1,0000	0,3900	3,338	3,3	8,56						
22														
23	${}_n q_x$ (probabilidade brutas)								${}_n q_x$ (probabilidade líquidas)					
24	x	n	Cap 1	Cap 2	Cap 9	Cap 20	Demais	Total	Cap 1	Cap 2	Cap 9	Cap 20	Demais	
25	0	1	0,000666	0,000049	0,000123	0,000412	0,013347	0,014597	0,000671	0,000050	0,000124	0,000415	0,013355	
26	1	4	0,000252	0,000238	0,000082	0,000608	0,001243	0,002423	0,000252	0,000238	0,000082	0,000609	0,001244	
27	5	5	0,000094	0,000237	0,000064	0,000539	0,000512	0,001446	0,000094	0,000237	0,000064	0,000539	0,000512	
28	10	5	0,000093	0,000219	0,000085	0,001050	0,000572	0,002018	0,000093	0,000219	0,000085	0,001050	0,000572	
29	15	5	0,000157	0,000341	0,000250	0,007983	0,001042	0,009773	0,000157	0,000343	0,000252	0,007990	0,001047	
30	20	5	0,000316	0,000372	0,000364	0,010761	0,001287	0,013099	0,000318	0,000375	0,000366	0,010773	0,001295	
31	25	5	0,000607	0,000415	0,000561	0,009554	0,001848	0,012986	0,000611	0,000418	0,000565	0,009571	0,001858	
32	30	5	0,001036	0,000658	0,001069	0,008908	0,002994	0,014665	0,001043	0,000663	0,001077	0,008934	0,003011	
33	35	5	0,001410	0,001019	0,001940	0,008015	0,004550	0,016933	0,001421	0,001027	0,001954	0,008051	0,004578	
34	40	5	0,001792	0,001946	0,003459	0,007038	0,006668	0,020904	0,001809	0,001965	0,003490	0,007088	0,006716	
35	45	5	0,002133	0,003979	0,006263	0,006815	0,010117	0,029308	0,002163	0,004031	0,006337	0,006893	0,010215	
36	50	5	0,002427	0,007495	0,010949	0,006454	0,014465	0,041791	0,002476	0,007627	0,011122	0,006571	0,014667	
37	55	5	0,002819	0,013111	0,017959	0,006232	0,020302	0,060423	0,002903	0,013433	0,018354	0,006408	0,020724	
38	60	5	0,003328	0,019012	0,027645	0,006300	0,028375	0,084660	0,003472	0,019669	0,028472	0,006561	0,029213	
39	65	5	0,004099	0,027239	0,041831	0,006546	0,041806	0,121522	0,004361	0,028624	0,043620	0,006955	0,043594	
40	70	5	0,005286	0,036835	0,059752	0,006751	0,062147	0,170772	0,005779	0,039587	0,063421	0,007376	0,065878	
41	75	5	0,007345	0,049798	0,090354	0,008625	0,097005	0,253126	0,008433	0,055800	0,098937	0,009895	0,105820	
42	80	5	0,027358	0,143908	0,348277	0,029266	0,451191	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	

Fonte: Ministério da Saúde (2012).

19.1.4 Eliminando uma causa

Pode-se, ainda, analisar como as demais funções da tábua de vida seriam alteradas com a retirada/eliminação de uma das causas de decremento. Neste exercício, é preciso lidar com a violação do pressuposto de independência dos riscos competitivos (Wachter, 2014). Ao se eliminar uma determinada causa de morte, as pessoas que morreriam por esta causa ficam, necessariamente, expostas aos riscos de morte por outras causas. Neste caso, conforme explicado anteriormente,

as taxas de mortalidade não se alteram, mas como haverá mais sobreviventes à idade exata x haverá, também, mais pessoas expostas às demais causas que permacecem atuando. Isso aumenta o número de óbitos pelas causas remanescentes e, portanto, altera as probabilidades de morte.

Para tanto este exercício primeiro encontra-se a constante de proporcionalidade do decremento i :

$${}_nR_x^{-i} = \frac{{}_nD_x - {}_nD_x^i}{{}_nD_x} \quad (19.4)$$

onde $-i$ indica a causa que está sendo eliminada e ${}_nD_x$ são os óbitos observados totais, ou seja, por todas as causas agrupadas. Esta constante atribui a cada causa sua importância relativa em relação ao número de óbitos totais em cada grupo etário. Os passos seguintes consistem em:

Encontrar a probabilidade de uma pessoa com idade x sobreviver à idade $x+n$ sem a causa i atuando:

$${}_n p_x^{-i} = {}_n p_x {}_n R_x^{-i} \quad (19.5)$$

a qual depende da importância relativa de cada causa no total de mortes.

Encontrar os sobreviventes à idade $x+n$ desconsiderando a causa de morte i ,

$$\ell_{x+n}^{-i} = \ell_x^{-i} {}_n p_x^{-i} \quad (19.6)$$

assumindo que ℓ_x no primeiro grupo etário tem sempre o mesmo valor, independente da quantidade de causas.

Encontrar a probabilidade de uma pessoa com idade x morrer até a idade $x+n$ com todas as causas atuando menos a causa i que foi eliminada:

$${}_n q_x^{-i} = 1 - {}_n p_x^{-i} \quad (19.7)$$

Encontrar a probabilidade de morte pela causa k depois de eliminada a causa i :

$${}_n q_x^k = {}_n q_x^{-i} \frac{{}_n d_x^k}{{}_n d_x - {}_n d_x^i} \quad (19.8)$$

Com a retirada de uma causa de decremento, os indivíduos que sobrevivem a essa causa podem sobreviver por mais tempo. Portanto, o tempo médio que passam vivos tende a aumentar. Assim, é necessário estimar o tempo médio vivido pelos que morreram sem a causa i . Sabendo que o número de óbitos sem a causa i atuando é dado por:

$${}_n d_x^{-i} = \ell_x^{-i} - \ell_{x+5}^{-i} \quad (19.9)$$

determina-se o tempo médio vivido pelos que morreram sem a causa i :

$${}_n a_x^{-i} = \begin{cases} n + {}_n R_x^{-i} \frac{{}_n q_x}{{}_n q_x^{-i}} ({}_n a_x - n), & x = 0, 1, 5, 75 \\ \frac{-\frac{5}{24} {}_n d_{x-5}^{-i} + \frac{n}{2} {}_n d_x^{-i} + \frac{5}{24} {}_n d_{x+5}^{-i}}{{}_n d_x^{-i}}, & x \in [10; 74] \\ \frac{e_{80}}{{}_n R_x^{-i}}, & x = 80 \text{ e } n = \infty \end{cases} \quad (19.10)$$

A lógica para esta cálculo de ${}_n a_x^{-i}$ é similar àquela utilizada para o cálculo de ${}_n a_x$ descrita na seção 9.4.3 do Capítulo 9.

Conhecidas estas funções pode-se estimar as demais funções da tábua de vida sem a causa i . Pode-se constatar que, com a retirada de uma causa de decremento, a esperança de vida aumenta, sendo esse aumento maior para as idades em que antes havia maior probabilidade de morte.

Na Tabela 19.3 apresenta-se uma aplicação de utilização da tábua de múltiplos decrementos para avaliar o efeito de eliminação de uma causa para a esperança de vida ao nascer quando as causas remanescentes continuam atuando. Mediante o uso dos cálculos já apresentados nas Tabelas 19.1 e 19.2, descreve-se o efeito da eliminação de todas as demais causas de morte, não incluídas nos Capítulos 1, 2, 9 e 20 da CID-10, para o tempo médio a ser vivido a cada idade exata dos homens no Brasil em 2012. De posse da tábua de vida geral (todas as causas atuando em conjunto) e das probabilidades brutas de morte por cada causa, calcula-se as funções definidas nas equações (19.4) a (19.10), tal como nos passos a seguir:

1. Calcula-se a constante de proporcionalidade devido às “demais causas” de morte, conforme definido na equação (19.6):

$$C47 = (O25 - N25) / O25 = 0,08566 \text{ (e assim para baixo até a célula C64)}$$

2. Calcula-se a probabilidade de uma pessoa com idade x sobreviver à idade $x+n$ sem o risco de morte pelas “demais causas”, conforme definido na equação (19.5):

$$D47 = (1 - K4)^{C47} = 0,99874 \text{ (e assim para baixo até a célula D64)}$$

3. Calcula-se os sobreviventes à idade $x+n$ desconsiderando-se as “demais causas” de morte, conforme definido na equação (19.6), mantendo ℓ_0 (raiz da tábua) como uma constante, neste caso igual a 1:

$$E47 = 1$$

$$E48 = E47 * D47 = 0,99874 \text{ (e assim para baixo até a célula E64)}$$

4. Calcula-se a probabilidade de uma pessoa com idade x morrer até a idade $x+n$ devido a todas as causas atuando menos as “demais causas”, conforme definido na equação (19.7):

$$F47=1-D47 = 0,00126 \text{ (e assim para baixo até a célula F64)}$$

5. Calcula-se a probabilidade de morte pela causa k depois de eliminadas as “demais causas”, conforme definido na equação (19.8). Neste caso, se considera k como sendo a causa de morte por “algumas doenças infecciosas e parasitárias” (Cap. 1):

$$G47=F47*J25/(O25-N25) = 0,00067 \text{ (e assim para baixo até a célula G64)}$$

6. Calcula-se número de óbitos sem as “demais causas”, conforme definido na equação (19.9):

$$K47=E47-E48 = 0,00126 \text{ (e assim para baixo até a célula K64)}$$

7. Calcula-se o tempo médio vivido pelos que morreram sem as “demais causas”, conforme definido na equação (19.10):

Para os grupos etários 0-1, 1-4, 5-9 e 75-79:

$$L47=B47+C47*K4/F47*(J4-B47) = 0,49289 \text{ (faça o mesmo para as células L48, L49 e L63)}$$

Para os grupos etários de 10-74 anos:

$$L50=(-(5/24)*K49+(B51/2)*K50+(5/24)*K51)/K50 = 3,62150 \text{ (e assim para baixo até L62).}$$

Para o último grupo etário (80+):

$$L64=O21/C64 = 15,59390$$

Tabela 19.3: Exemplo do efeito da eliminação das “demais causas” de morte para a esperança de vida ao nascer na idade x, Homens, Brasil (2012)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
1	Brasil, 2012															
2	x	n	Número de óbitos por grupo de causa CID 10 (nD _x)					Tábua de vida								
3			Cap 1	Cap 2	Cap 9	Cap 20	Demais	Total	n _a _x	n _q _x	l _x	n _l _x	T _x	e _x		
4	0	1	982	73	182	607	19684	21528	0,49	0,0146	1,0000	0,993	71,4	71,4		
5	1	4	358	338	117	865	1768	3446	1,61	0,0024	0,9854	3,936	70,4	71,4		
6	5	5	146	368	100	837	795	2246	2,5	0,0014	0,9830	4,912	66,4	67,6		
7	10	5	165	389	151	1865	1016	3586	2,5	0,0020	0,9816	4,903	61,5	62,7		
8	15	5	274	597	438	13967	1823	17099	2,5	0,0098	0,9796	4,874	56,6	57,8		
9	20	5	558	658	643	19026	2276	23161	2,5	0,0131	0,9700	4,818	51,7	53,3		
10	25	5	1053	720	973	16562	3203	22511	2,5	0,0130	0,9573	4,756	46,9	49,0		
11	30	5	1639	1041	1692	14095	4737	23204	2,5	0,0147	0,9449	4,690	42,2	44,6		
12	35	5	1958	1415	2693	11128	6317	23511	2,5	0,0169	0,9310	4,616	37,5	40,3		
13	40	5	2328	2528	4494	9143	8662	27155	2,5	0,0209	0,9153	4,529	32,9	35,9		
14	45	5	2505	4673	7355	8003	11880	34416	2,5	0,0293	0,8961	4,415	28,3	31,6		
15	50	5	2436	7522	10988	6477	14516	41939	2,5	0,0418	0,8699	4,259	23,9	27,5		
16	55	5	2304	10717	14680	5094	16595	49390	2,5	0,0604	0,8335	4,042	19,7	23,6		
17	60	5	2146	12258	17824	4062	18295	54585	2,5	0,0847	0,7832	3,750	15,6	19,9		
18	65	5	1970	13091	20104	3146	20092	58403	2,5	0,1215	0,7169	3,367	11,9	16,6		
19	70	5	1955	13624	22100	2497	22986	63162	2,5	0,1708	0,6297	2,880	8,5	13,5		
20	75	5	1860	12610	22880	2184	24564	64098	2,5	0,2531	0,5222	2,281	5,6	10,8		
21	80	5	3672	19315	46745	3928	60558	134218	8,6	1,0000	0,3900	3,338	3,3	8,56		
22																
23	x	n	n _q _x (probabilidade brutas de morte devido à causa i)					n _d _x (número de óbitos devido à causa i)								
24			Cap 1	Cap 2	Cap 9	Cap 20	Demais	Total	Cap 1	Cap 2	Cap 9	Cap 20	Demais	Total		
25	0	1	0,00067	0,00005	0,00012	0,00041	0,01335	0,01460	0,00067	0,00005	0,00012	0,00041	0,01335	0,01460		
26	1	4	0,00025	0,00024	0,00008	0,00061	0,00124	0,00242	0,00025	0,00023	0,00008	0,00060	0,00123	0,00239		
27	5	5	0,00009	0,00024	0,00006	0,00054	0,00051	0,00145	0,00009	0,00023	0,00006	0,00053	0,00050	0,00142		
28	10	5	0,00009	0,00022	0,00008	0,00105	0,00057	0,00202	0,00009	0,00021	0,00008	0,00103	0,00056	0,00198		
29	15	5	0,00016	0,00034	0,00025	0,00798	0,00104	0,00977	0,00015	0,00033	0,00025	0,00782	0,00102	0,00957		
30	20	5	0,00032	0,00037	0,00036	0,01076	0,00129	0,01310	0,00031	0,00036	0,00035	0,01044	0,00125	0,01271		
31	25	5	0,00061	0,00042	0,00056	0,00955	0,00185	0,01299	0,00058	0,00040	0,00054	0,00915	0,00177	0,01243		
32	30	5	0,00104	0,00066	0,00107	0,00891	0,00299	0,01466	0,00098	0,00062	0,00101	0,00842	0,00283	0,01386		
33	35	5	0,00141	0,00102	0,00194	0,00801	0,00455	0,01693	0,00131	0,00095	0,00181	0,00746	0,00424	0,01577		
34	40	5	0,00179	0,00195	0,00346	0,00704	0,00667	0,02090	0,00164	0,00178	0,00317	0,00644	0,00610	0,01913		
35	45	5	0,00213	0,00398	0,00626	0,00682	0,01012	0,02931	0,00191	0,00357	0,00561	0,00611	0,00907	0,02626		
36	50	5	0,00243	0,00750	0,01095	0,00645	0,01446	0,04179	0,00211	0,00652	0,00952	0,00561	0,01258	0,03635		
37	55	5	0,00282	0,01311	0,01796	0,00623	0,02030	0,06042	0,00235	0,01093	0,01497	0,00519	0,01692	0,05036		
38	60	5	0,00333	0,01901	0,02764	0,00630	0,02838	0,08466	0,00261	0,01489	0,02165	0,00493	0,02222	0,06630		
39	65	5	0,00410	0,02724	0,04183	0,00655	0,04181	0,12152	0,00294	0,01953	0,02999	0,00469	0,02997	0,08711		
40	70	5	0,00529	0,03684	0,05975	0,00675	0,06215	0,17077	0,00333	0,02320	0,03763	0,00425	0,03914	0,10754		
41	75	5	0,00735	0,04980	0,09035	0,00862	0,09700	0,25313	0,00384	0,02600	0,04718	0,00450	0,05066	0,13218		
42	80	5	0,02736	0,14391	0,34828	0,02927	0,45119	1,00000	0,01067	0,05613	0,13583	0,01141	0,17597	0,39002		
43																
44	Retirando as demais causas de morte na Tábua de Múltiplos Decrementos (TMD)															
45	x	n	Eliminando Demais causas de morte				n _q _x (probabilidade de morte devido à causa k depois de eliminadas as mortes por demais causas)				Funções da Tábua de Vida após eliminar as Demais causas de morte					
46			n _R _x ⁻ⁱ	n _P _x ⁻ⁱ	l _x ⁻ⁱ	n _q _x ⁻ⁱ	Cap 1	Cap 2	Cap 9	Cap 20	n _d _x	n _a _x	n _l _x	T _x	e _x	
47	0	1	0,08566	0,99874	1,00000	0,00126	0,00067	0,00005	0,00012	0,00067	0,00005	0,00012	0,49289	0,99936	80,2	80,2
48	1	4	0,48694	0,99882	0,99874	0,00118	0,00025	0,00024	0,00008	0,00061	0,00118	1,61107	3,99215	79,2	79,3	
49	5	5	0,64604	0,99907	0,99756	0,00093	0,00009	0,00024	0,00006	0,00054	0,00093	2,50064	4,98548	75,2	75,4	
50	10	5	0,71668	0,99855	0,99663	0,00145	0,00009	0,00022	0,00008	0,00105	0,00144	3,62150	4,98116	70,3	70,5	
51	15	5	0,89339	0,99126	0,99519	0,00874	0,00016	0,00034	0,00025	0,00799	0,00869	2,74486	4,95633	65,3	65,6	
52	20	5	0,90173	0,98818	0,98649	0,01182	0,00032	0,00037	0,00036	0,01077	0,01166	2,53885	4,90377	60,3	61,2	
53	25	5	0,85771	0,98885	0,97483	0,01115	0,00061	0,00042	0,00056	0,00956	0,01087	2,49247	4,84692	55,4	56,9	
54	30	5	0,79585	0,98831	0,96397	0,01169	0,00104	0,00066	0,00107	0,00892	0,01127	2,51768	4,79186	50,6	52,5	
55	35	5	0,73132	0,98759	0,95270	0,01241	0,00141	0,00102	0,00194	0,00803	0,01182	2,53826	4,73438	45,8	48,1	
56	40	5	0,68102	0,98572	0,94087	0,01428	0,00180	0,00195	0,00347	0,00706	0,01344	2,59402	4,67203	41,0	43,6	
57	45	5	0,65481	0,98071	0,92743	0,01929	0,00214	0,00400	0,00630	0,00685	0,01789	2,63507	4,59486	36,4	39,2	
58	50	5	0,65388	0,97247	0,90954	0,02753	0,00245	0,00755	0,01103	0,00650	0,02504	2,64951	4,48887	31,8	34,9	
59	55	5	0,66400	0,95946	0,88451	0,04054	0,00285	0,01325	0,01815	0,00630	0,03586	2,63615	4,33777	27,3	30,9	
60	60	5	0,66483	0,94288	0,84865	0,05712	0,00338	0,01929	0,02805	0,00639	0,04847	2,62611	4,12818	23,0	27,1	
61	65	5	0,65598	0,91852	0,80018	0,08148	0,00419	0,02784	0,04276	0,00669	0,06520	2,60884	3,84500	18,8	23,5	
62	70	5	0,63608	0,88771	0,73498	0,11229	0,00546	0,03808	0,06177	0,00698	0,08253	2,60674	3,47738	15,0	20,4	
63	75	5	0,61677	0,83526	0,65245	0,16474	0,00775	0,05255	0,09534	0,00910	0,10748	2,63077	3,00759	11,5	17,6	
64	80	5	0,54881	0,00000	0,54496	1,00000	0,04985	0,26222	0,63460	0,05333	0,54496	15,59390	8,49813	8,5	15,6	

Fonte: Ministério da Saúde (2012).

Uma vez determinado o tempo médio vivido pelos que morreram sem as “demais causas” em cada grupo etário, procede-se ao cálculo das funções ${}_nL_x$, T_x e e_x utilizando-se as técnicas já apresentadas no Capítulo 9, tal como segue:

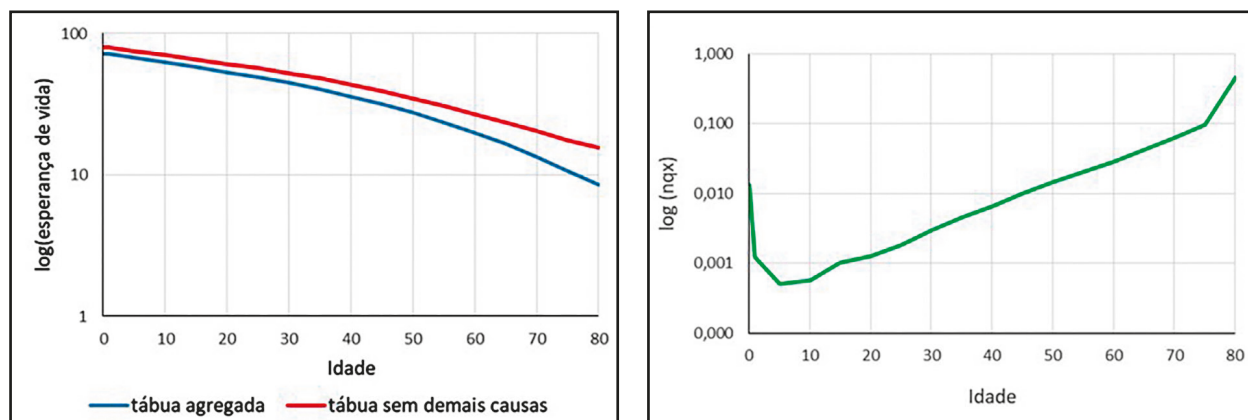
$${}_nL_x: M47=E48*B47+K47*L47 = 0,99936 \text{ (e assim para baixo até a célula M64)}$$

$$T_x: N47=SOMA(M47:\$M\$64) = 80,2 \text{ (e assim para baixo até a célula M64)}$$

$$e_x: O47=N47/E47 = 80,2 \text{ (e assim para baixo até a célula N64)}$$

Pode-se constatar, ao comparar as esperanças de vida da tábua com todas as causas (células O4 a O21) com as esperanças de vida da tábua após eliminar as demais causas de morte (células O47 a O64), que a retirada das demais causas de morte elevou significativamente as esperanças de vida em todas as idades. Para facilitar essa constatação, o Gráfico 19.1 mostra as curvas das esperanças de vida por idade (por todas as causas e eliminando as demais causas de morte) e das probabilidades brutas de morte devido às demais causas. Ambos os gráficos estão em escala logarítmica para potencializar as diferenças por idade. Nota-se, com a eliminação das demais causas de morte, que a esperança de vida sem as demais causas são maiores em todas as idades, sendo essa diferença maior com o avançar da idade, ao mesmo tempo que a probabilidade bruta de morte devido às demais causas também aumenta significativamente com a idade a partir dos 5 anos.

Gráfico 19.1: Esperança de vida com e sem demais causas de morte (esquerda) e probabilidade bruta de morte devido às demais causas (direita), homens, Brasil (2012)

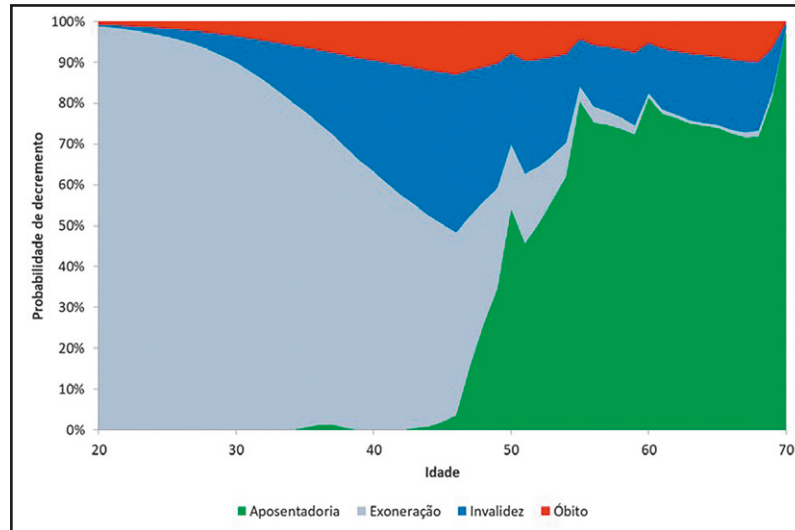


Fonte: Ministério da Saúde (2012).

Mangue (2011) aplicou esta técnica para calcular os efeitos da eliminação da mortalidade por AIDS (SIDA) e malária em Moçambique. Ele encontrou que, para os homens, a eliminação dos óbitos por AIDS (SIDA) elevaria a esperança de vida ao nascer em 9,1 anos, e com a estimacão da mortalidade por malária haveria um ganho de 8,5 anos. Entre as mulheres, o maior ganho na esperança de vida ao nascer seria de 9,9 anos no caso da eliminacão da mortalidade por AIDS (SIDA) e de 9 anos com a supressão dos óbitos por malária. Outro exemplo de aplicacão deste método para

o cálculo da esperança de vida ativa pode ser visto com maiores detalhes no trabalho desenvolvido por Baptista (2003). Já Borges (2009) construiu tabelas de decremento único e múltiplos decrementos para a população de contribuintes previdenciários do Poder Executivo civil federal no Brasil por idade, sexo e escolaridade. O Gráfico 19.2 apresenta alguns de seus resultados mostrando os diferentes padrões etários entre as diferentes formas de saída do estado de contribuinte ativo.

Gráfico 19.2: Probabilidade de saída da população de contribuinte previdenciário para servidores públicos do Poder Executivo civil federal de nível médio por idade, Brasil, 1998 a 2007



Fonte: Borges (2009).

19.1.5 Tábua de múltiplos decrementos com base em tábuas de decremento simples

Com base nas probabilidades líquidas de morte (quando somente uma causa está atuando) definidas na seção 19.1.3, é possível determinar as probabilidades brutas de morte, ou seja, probabilidade de morte devido à causa i na presença de outras causas atuando. Assim, é possível construir uma tábua de múltiplos decrementos com base em tábuas de decrementos simples.

Caso já se tenha disponível tabelas de decrementos únicos e deseja-se verificar como esses diferentes tipos de decrementos se interrelacionam por uma tabela de múltiplos decrementos, pode-se aplicar as relações a seguir, a depender do número de possíveis decrementos em cada situação. O caso mais comum consiste em assumir que as mortes se distribuem uniformemente dentro do intervalo $(x, x+n)$, e que somente duas causas estão atuando. Neste caso, as probabilidades brutas devido aos decrementos 1 e 2 podem ser obtidas, respectivamente, por:

$${}_nq_x^{b,1} = {}_nq_x^{l,1} \left(1 - \frac{1}{2} {}_nq_x^{l,2} \right) \quad (19.11)$$

e

$${}_nq_x^{b,2} = {}_nq_x^{l,2} \left(1 - \frac{1}{2} {}_nq_x^{l,1} \right) \quad (19.12)$$

Caso com 3 decrementos:

$${}_nq_x^{b,1} = {}_nq_x^{l,1} \left[1 - \frac{1}{2} ({}_nq_x^{l,2} + {}_nq_x^{l,3}) + \frac{1}{3} {}_nq_x^{l,2} {}_nq_x^{l,3} \right] \quad (19.13)$$

Procedimento análogo deve ser conduzido para calcular as probabilidades brutas devido aos decrementos 2 e 3.

Caso com 4 decrementos:

$$\begin{aligned} {}_nq_x^{b,1} = {}_nq_x^{l,1} \left[1 - \frac{1}{2} ({}_nq_x^{l,2} + {}_nq_x^{l,3} + {}_nq_x^{l,4}) \right] &+ \left[\frac{1}{3} ({}_nq_x^{l,2} {}_nq_x^{l,3} + {}_nq_x^{l,2} {}_nq_x^{l,4} + {}_nq_x^{l,3} {}_nq_x^{l,4}) \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{4} {}_nq_x^{l,2} {}_nq_x^{l,3} {}_nq_x^{l,4} \right] \end{aligned} \quad (19.14)$$

Procedimento análogo deve ser conduzido para calcular as probabilidades brutas devido aos decrementos 2, 3 e 4.

Na área de previdência complementar é comum o uso de tábuas associadas de decremento único para construir uma tábua de múltiplos decrementos, ou seja, o uso das probabilidades líquidas para determinar as probabilidades brutas, tal como descrito nas equações (19.11) a (19.14) para os casos de 2 a 4 decrementos. Em regimes próprios de previdência complementar, por exemplo, os contribuintes daquele regime podem deixar a condição de contribuinte por diversos motivos: aposentadoria, demissão/exoneração, invalidez, morte etc. Por outro lado, alguns desses decrementos costumam ser analisados em tábuas de decremento único, como é o caso das tábuas de entrada em aposentadoria por invalidez, tábua de mortalidade para servidores públicos cobertos por um determinado regime próprio de previdência, entre outras. Essas tábuas de decremento único podem ser combinadas, mediante aplicação das equações desta seção, para se obter uma tábua de múltiplos decrementos. Essa tábua de múltiplos decrementos permitiria avaliar o efeito, para as reservas futuras de benefícios, de aumentos ou diminuições na concessão de benefícios por invalidez ou na mortalidade dos contribuintes.

19.2 TÁBUA DE VIDA DE MÚLTIPLOS ESTADOS

A tábua de vida de múltiplos decrementos só contempla saídas, mas estas saídas podem ser de diferentes tipos. Muitos fenômenos demográficos são complexos o bastante para serem representados por tábuas de vida de único ou de múltiplos decrementos. As coortes estão expostas a diversos tipos de eventos ou fluxos (decrementos) no ciclo de vida, como migração, casamento, morbidade/incapacidade, morte etc. Muitos eventos podem ser recorrentes, como casamento e divórcio, incapacidade temporária etc.

A Figura 19.2 apresenta um esquema de estado ou condição conjugal (ou civil) e os fluxos que podem ocorrer no ciclo de vida individual. Neste esquema, os fluxos são definidos pelas setas. O estado “Solteiro” é sempre o estado de origem e uma vez experimentado o fluxo para outro estado não é mais possível retornar para esse estado de origem, motivo pelo qual as setas definem apenas

fluxos de saída deste estado. De fato, uma vez que o indivíduo deixa o estado “Solteiro”, ele jamais será considerado como solteiro novamente. O “estado” que apenas recebe fluxos é denominado *estado absorvente*, pois uma vez experimentado o fluxo para esse estado não é mais possível retornar ao estado de origem ou estado anterior ou, ainda, fazer novo fluxo para outro estado, sendo este o caso do estado “Morto”. Os demais estados representados no esquema são todos ditos *estados transientes*, pois os indivíduos tanto chegam quanto saem deste estado no ciclo de vida. São os estados “Casado”, “Viúvo” e “Divorciado”. Como dito antes, as setas definem os fluxos possíveis ao longo do ciclo de vida. Uma vez casado, as únicas formas de deixar este estado são: morrendo, divorciando ou se tornando viúvo. Viúvos ou divorciados podem morrer ou casar novamente.

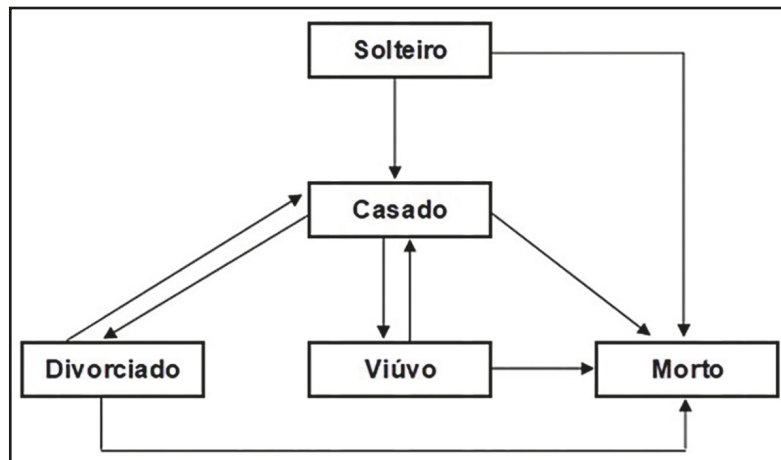
Os fluxos representados no esquema da Figura 19.2 são também denominados “transições”. Tendo por base essas transições, pode-se levantar algumas perguntas relevantes:

Existe diferencial na esperança de vida entre solteiros, casados, viúvos e divorciados ?

Qual o efeito de aumento no número de divórcios para esperança de vida da população ?

Quem vive mais: mulheres solteiras ou homens casados ?

Figura 19.2: Exemplo de fluxos no ciclo de vida individual sobre casamento e divórcio



Fonte: Elaboração própria.

As técnicas apresentadas na seção 19.1 podem ser utilizadas para responder parcialmente essas perguntas. Entretanto, para se chegar em respostas completas, é preciso considerar como que o nível e padrão etários das possíveis transições descritas no esquema da Figura 19.2 podem afetar o tempo médio de vida em cada estado transiente. Pessoas casadas viveram por algum tempo como solteiras, assim como os viúvos e divorciados viveram por algum tempo como casados. Havendo diferenciais de mortalidade entre esses estados conjugais, esses diferenciais seguramente podem afetar o tempo médio de vida de cada coorte nesse ou naquele estado. E mais, havendo diferentes magnitudes de *incrementos* e *decrementos* em cada estado, a depender da magnitude das transições entre estes estados, estas também podem afetar o tempo médio de vida em cada estado.

As chamadas tábuas de incremento-decremento, ou de múltiplos estados ou, ainda, multies-tado, permitem o cálculo da esperança de vida em cada estado considerando as entradas e saídas (Preston, Heuveline e Guillot, 2001). A tábua de vida de múltiplos estados combina as duas ideias

cruzando a dinâmica de mortalidade com aquela da transição ou mudança de situação/estado. As suas aplicações originais eram para modelar a mortalidade conjuntamente com a migração. O modelo resultante era chamado *multirregional* (Rogers, 1975, 2015). Neste modelo, a probabilidade de sobrevivência da tábua de vida se referia à probabilidade de que uma pessoa nascida na região i sobrevivesse por n anos e, no final deste período, residisse na região j . Mais tarde a ideia de regiões diferentes foi generalizada para outros estados diferenciados, como os estados conjugais ou os níveis educacionais em que as pessoas podem se encontrar a cada intervalo de tempo. Por exemplo, Cortez (2007) e Freire et al. (2010) utilizam tábuas de vida de múltiplos estados para estudar a dinâmica entre os estados conjugais no Brasil, onde calcularam probabilidades de decrementos de casamentos por: morte, viuvez, ou dissolução da união. Wajnman (1995) usou a metodologia para estudar a mobilidade ocupacional no Brasil. Gonzaga (2012) utilizou essa técnica para mensurar a expectativa de vida saudável considerando os diferenciais de mortalidade entre pessoas com ou sem incapacidade e, ainda, as transições entre ativos e incapacitados. Todas as funções da tábua de vida multiestado podem ser definidas de forma análoga ao seu significado numa tábua de vida convencional.

19.2.1 Transições entre condições de saúde e análise multiestado da Esperança de Vida Saudável

Como foi visto no Capítulo 8, o conceito de esperança de vida saudável foi desenvolvido com o objetivo de monitorar a qualidade dos anos vividos, particularmente pelos idosos, vis-à-vis o aumento na expectativa de vida dessa população. A EVS refere-se ao número médio de anos de vida que uma pessoa de determinada idade pode esperar viver com saúde, caso que prevaleçam as taxas de morbidade e mortalidade naquela idade específica. Trata-se de uma medida que combina informações de mortalidade e morbidade, sendo, portanto, um indicador importante para monitorar as condições de saúde de uma população. Destacam dois principais motivos de se utilizar a esperança de vida saudável como indicador de saúde. Primeiro, por ser um indicador de saúde que também incorpora a mortalidade, a OMS tem reconhecido sua importância para comparações e tendências internacionais, podendo, assim, revelar diferenças importantes no nível de morbidade e incapacidade entre populações. Segundo, tendências na esperança de vida saudável são particularmente importantes para a análise das hipóteses relacionadas a mudanças no padrão de morbidade e incapacidade (Guillot e Yu, 2009; Gonzaga, 2012).

Como foi discutido no Capítulo 8, a ambiguidade do conceito de EVS reside no problema da definição de “saudável”. Devido a esta ambiguidade é possível encontrar estimativas distintas para a EVS de um mesmo país, dependendo do critério usado para definir esse conceito. A esperança de vida livre de incapacidade funcional é uma das formas mais comuns de medir a expectativa de vida saudável. Uma das razões seria certa dificuldade de mensuração dos outros aspectos relacionados à saúde do indivíduo. Por outro lado, a operacionalização e mensuração da incapacidade ocorre por meio dos aspectos físicos ou funcionais.

O método mais comum para calcular a esperança de vida livre de incapacidade é o método de Sullivan (1971). Neste método se aplicam fatores de redução às funções ${}_nL_x$ da tábua de vida convencional para expressar qual é a proporção de pessoas vivas no grupo etário de $(x, x+n)$ anos que

não sofrem de incapacidade. Para uma introdução sistemática ao método, consulte Jagger, Hauet e Brouard (2001). Existem várias aplicações do método ao Brasil, como Camargos (2004), Romero, Leite e Szwarcwald (2005) e Camargos et al. (2019). Embora o método de Sullivan normalmente forneça uma aproximação bastante razoável ao nível correto da EVS, tem o inconveniente de não considerar as possíveis transições entre estados. Por exemplo, uma pessoa que tem uma incapacidade aos 63 anos pode submeter-se a um tratamento e aos 65 anos pode ter recuperado a sua capacidade plena. Por isso, argumenta-se que a obtenção de resultados mais precisos requer o conhecimento do padrão etário das transições entre estados de saúde e morte para o mesmo indivíduo, entre dois ou mais pontos do tempo, possibilitando, assim, a utilização do método de tábua de vida multiestado para construção do indicador (Rogers, Rogers e Branch, 1990; Lièvre, Brouard e Healthcote, 2003; Guillot e Yu, 2009). É esta abordagem ao cálculo da EVS que será ilustrada a seguir.

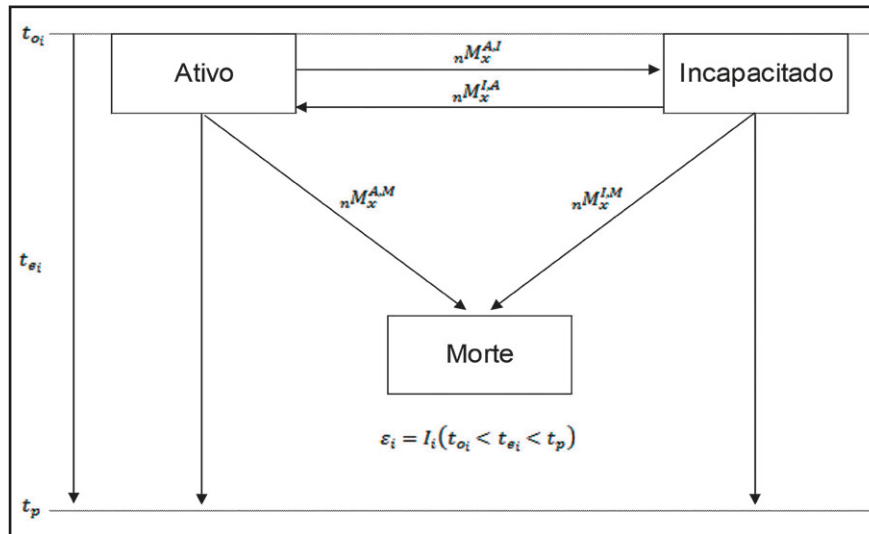
A Figura 19.3 descreve um mecanismo que facilita o entendimento das limitações de dados tanto de um processo de múltiplos decrementos quanto de decrementos-incrementos para estudos sobre esperança de vida livre de incapacidade funcional. A Figura ainda favorece o entendimento de como devem estar os dados disponíveis para determinada aplicação. Caso seja de interesse estimativas da esperança de vida saudável com base na dicotomia de condição de saúde “ativo” ou “incapacitado” funcionalmente, considera-se que o indivíduo pode transitar de ativo para incapacitado ou de incapacitado para ativo (recuperação). Ademais, tanto os indivíduos ativos quanto os incapacitados podem estar expostos a diferentes riscos de morte. Na ausência de outros riscos, a Figura 19.3 representa três estados possíveis para o espaço de transições: ativo, incapacitado funcionalmente e morte, sendo a morte um estado absorvente. As taxas de transição λ , μ e ν representam os riscos de transição aos quais os indivíduos no estado ativo ou incapacitado funcionalmente estão expostos. Essas probabilidades precisam ser estimadas por idade e sexo.

Segundo a Figura 19.3 os indivíduos entram em observação no tempo t_0 e são acompanhados até um tempo t_p (tempo presente ou corrente). O tempo t_e refere-se à data em que o evento (transitar de um estado para outro) ocorreu entre t_0 e t_p determinando, assim, o tempo de espera ou tempo de exposição à ocorrência de uma transição.

Uma das limitações presentes em pesquisas longitudinais, quando o objetivo é estimar o padrão etário das probabilidades de transição, refere-se ao tamanho do intervalo de tempo entre t_0 e t_p . No caso em que o interesse é estimar o padrão etário para as transições descritas na Figura 19.3, se o intervalo de tempo é muito grande e os indivíduos são observados apenas em t_0 e t_p , a ocorrência não observada de múltiplas transições pode afetar as estimativas. O resultado pode ser uma subestimação das probabilidades de transição entre estados de saúde λ , μ e ν . Por outro lado, se o intervalo de tempo entre t_0 e t_p é muito curto, o tempo t_{er} necessário para se observar a ocorrência do evento para o indivíduo i , pode ser maior que t_p em muitos casos. Como resultado tem-se um aumento na ocorrência de censuras à direita¹, dificultando uma estimação adequada das probabilidades de transição.

¹ Em estudos de análise de sobrevivência, a variável aleatória de interesse é o tempo até a ocorrência de um evento, sendo as censuras determinadas, presença de informações incompletas ou parciais. Mais especificamente, censura à direita significa que o tempo de ocorrência do evento está à direita do tempo registrado (Colosimo e Giolo, 2006: 8).

Figura 19.3: Espaço de transições com dois estados transitentes e um estado absorvente



Fonte: Gonzaga (2012).

Quando os dados disponíveis são provenientes de pesquisas transversais as limitações são ainda maiores. Considere, por exemplo, que a pesquisa foi realizada somente em t_p (uma data corrente ou específica). Neste caso, as proporções de indivíduos com incapacidade por idade em t_p podem ser consideradas como boas estimativas para as probabilidades de transição de incapacidade por idade. Entretanto, a eficiência destas estimativas depende de duas condições assumidas (pressupostos) em relação às mudanças e diferenciais nas diversas probabilidades de transição da Figura 19.3 entre t_0 e t_p .

A primeira condição refere-se à homogeneidade nos riscos de morte entre indivíduos ativos e incapacitados funcionalmente. Se existe diferencial de mortalidade entre indivíduos ativos e incapacitados, as proporções de indivíduos incapacitados por idade em t_p não estima corretamente as probabilidades de incapacidade. Por exemplo, se o risco de mortalidade é maior para indivíduos com incapacidade, o efeito seletivo desta heterogeneidade faz com que a parcela da população com incapacidade seja reduzida em maior número, comparada com a parcela sem incapacidade. Consequentemente, a proporção observada de indivíduos com incapacidade em t_p subestima a probabilidade de se tornar incapacitado funcionalmente. Este efeito seletivo do diferencial no risco de morte pode ser irrelevante caso o objetivo do estudo seja analisar a carga de incapacidade, assim como seu custo para a saúde pública sem, entretanto, fazer inferências sobre as consequências das fontes de atrição no risco de incapacidade (Palloni e Thomas, 2013).

A segunda condição consiste em assumir que as incidências de incapacidade e recuperação são constantes entre t_0 e t_p , ou seja, que , são estáveis neste período. A violação desta condição, dependendo da situação, pode fazer com que a proporção de indivíduos com incapacidade em t_p subestime ou sobre-estime a probabilidade de se tornar incapacitado funcionalmente. Outra consequência relacionada à violação da condição de estacionariedade nas medidas de incidência é um aumento, entre t_0 e t_p , no risco de morte de indivíduos com incapacidade em relação ao risco de morte de indivíduos ativos, que introduz o mesmo efeito seletivo na proporção de indivíduos com incapacidade em t_p .

Estimativas da esperança de vida ativa mediante o uso de dados transversais assumem que as condições de homogeneidade nos riscos de morte e de estacionariedade nas probabilidades de transição por idade entre t_0 e t_p são satisfeitas. Assim, as proporções de indivíduos com incapacidade em t_p seriam boas estimativas para as probabilidades de incapacidade por idade.

O método multiestado foi originalmente desenvolvido com o propósito de modelar as transições (movimentos) de pessoas de um estado de existência para o outro como, por exemplo, de solteiro para casado, de empregado para desempregado, de vivendo em área rural para vivendo em área urbana (Rogers, 1975; Rogers, Rogers e Branch, 1989). Mais recentemente o método tem sido amplamente utilizado para o cálculo do número de pessoas-ano que incorporam o movimento de um estado de saúde para o outro, a volta para o estado de origem (recuperação) ou o movimento de qualquer estado para a morte. O modelo resultante é denominado Modelo de Tábuas de Vida Multiestado ou Método Multiestado (Rogers, 1975; Land e Rogers, 1982; Rogers, Rogers e Branch, 1989).

Nas tábuas de vida multiestado, diferentemente das tábuas de múltiplos decrementos, a proporção do número de anos-pessoa vividos é estimada em função das taxas de incidência e mortalidade, incorporando dois ou mais estados transientes (estados de saúde), incluindo recuperação e um estado absorvente (morte). Por considerar a dinâmica do processo de saúde entre dois ou mais pontos no tempo, o método de construção de tábuas de multiestado é considerado como mais adequado para análise de tendências na esperança de vida saudável. Por outro lado, sua aplicabilidade depende da disponibilidade de dados longitudinais e/ou retrospectivos, com informações sobre mudanças nas condições de saúde da população.

Suponha, novamente, que seja de interesse estimativas da EVS com base numa dicotomia do estado de saúde tais como saudável/não saudável ou ativo/incapacitado, tendo como espaço de transições possíveis a representação da Figura 19.4. Suponha também que dispõe-se de pesquisa longitudinal sobre as condições de saúde da população. Neste caso, o problema inicial consiste em estimar as probabilidades ou taxas de transições por idade, entre os anos de aplicação da pesquisa longitudinal (com início em t_0 e término em t_p). Em seguida, essas taxas de transições por idade são utilizadas para estimar a duração esperada do tempo transcorrido em cada estado de saúde (pessoas-ano vividos em cada estado), possibilitando, assim, a construção de tábuas de vida multiestado.

Os movimentos indicados pelas setas na Figura 19.3 entre os tempos t_0 e t_p , assim como o número de pessoas expostas a experimentar determinado movimento, são utilizados para determinar taxas ou probabilidades de transições por idade entre os estados ativo, incapacitado e morte. Considerando que os indivíduos foram observados somente em t_0 e t_p , e que o intervalo de tempo entre t_0 e t_p é adequado para análise do evento de interesse (transições), duas suposições básicas são adotadas: a) somente uma transição pode ocorrer entre t_0 e t_p ; e b) os eventos ocorrem no ponto médio do intervalo entre t_0 e t_p , sendo que o número de indivíduos expostos à determinada transição é ajustado para produzir taxas ou probabilidades centrais de transição. Deste modo, assume-se que as taxas ou probabilidades de transição estimadas são constantes no intervalo entre t_0 e t_p . Conforme discussão anterior sobre as limitações de pesquisas longitudinais para estimativas das probabilidades de transição, a magnitude do viés introduzido ao serem adotadas essas suposições pode depender do número de vezes que a pesquisa longitudinal vai a campo, do tamanho do intervalo de tempo entre as pesquisas e do tipo de evento em estudo.

A modelagem do padrão etário para as taxas ou probabilidade de transição de incapacidade está fundamentada na teoria de processos estocásticos markovianos. Tais processos consistem em conjuntos de estados (Cadeia de Markov) tais que, num determinado instante, cada indivíduo deve ocupar um e somente um estado. Ademais, a probabilidade de um indivíduo transitar de um estado para outro depende somente dos estados de origem e destino.

Numa Cadeia de Markov, definida por um espaço de estados tal como representado pela Figura 19.3, a probabilidade de transição de um estado i para um estado j , entre as idades x e $x+n$, sendo n o tempo entre t_0 e t_p , conforme Figura 19.3, é definida como segue:

$${}_n p_x^{i,j} = \text{prob}[\varepsilon(x+n) = j | \varepsilon(x) = i] \quad (19.15)$$

onde ${}_n p_x^{i,j}$ denota a probabilidade de que um indivíduo no estado i na idade exata x estará no estado j na idade exata $x+n$.

Vários modelos têm sido propostos para estimação das taxas ou probabilidades de transição por idade (Lièvre, Brouard e Healthcote, 2003; Lynch e Brown, 2005). A escolha de determinado modelo pode depender do interesse do pesquisador em estimar taxas ou probabilidades, das suposições adotadas e da parametrização assumida na modelagem das funções.

Assumir que a probabilidade de ocorrência de um evento é constante no tempo implica em considerar que o tempo até a ocorrência de um evento segue uma distribuição exponencial (Allison, 1982). Deste modo, probabilidades de transição tal como definidas em (19.17) são frequentemente estimadas por modelos exponenciais utilizados na análise de risco de tempo discreto (Allison, 1982; Lynch e Brown, 2005; Guillot e Yu, 2009). A forma geral de um modelo exponencial para o ajuste de taxas de transição é representada por:

$$\mu_x^{i,j} = \exp(\alpha^{i,j} + \beta^{i,j} x) \quad (19.16)$$

ou equivalentemente:

$$\ln(\mu_x^{i,j}) = \alpha^{i,j} + \beta^{i,j} x \quad (19.17)$$

onde x é a idade, considerada numa escala contínua, sendo $\alpha^{i,j}$ e $\beta^{i,j}$ constantes que representam, respectivamente, o intercepto e o efeito da idade nas taxas de transição. Deste modo, os coeficientes de regressão α e β podem ser estimados, com aproximação satisfatória, por modelos de risco de tempo discreto (Allison, 1982).

Segundo Lièvre, Brouard e Healthcote (2003), uma parametrização natural para as probabilidades de transição definidas em (19.17), assumindo que o intervalo de tempo (n) é fixo, pode ser realizada pelo seguinte modelo logito multinomial:

$$\ln\left(\frac{{}_n p_x^{i,j}}{{}_n p_x^{i,i}}\right) = \alpha^{i,j}(t) + \beta^{i,j} x(t) \quad (19.18)$$

onde α e β são os coeficientes de regressão, x é a idade exata de ocorrência da transição e n é um intervalo fixo de tempo.

A equação (19.18) determina o logaritmo da razão das probabilidades de transição com base numa função linear de uma ou mais variáveis explicativas. O modelo na equação (19.18) possibilita a estimação das probabilidades preditas de todas as transições envolvidas num espaço de estados tal como representado pela Figura 19.3. O modelo mais simples tem como variável explicativa a idade, considerada como uma variável contínua. Deste modo, tem-se para cada idade exata as probabilidades de transição representadas pelas setas na Figura 19.3. Covariáveis de interesse podem ser incluídas no modelo com o objetivo de analisar diferenciais por subgrupos da população. As probabilidades de transição preditas por idade são utilizadas numa tábua de vida multiestado para estimação da expectativa de vida total e suas componentes, expectativa de vida saudável e não saudável, condicionadas ou não a um determinado estado de saúde inicial (Lièvre, Brouard e Healthcote, 2003; Guillot e Yu, 2009). Existem alguns programas desenvolvidos para estimação de todas as etapas envolvidas na construção de tábuas de vida multiestado, como o IMACh² (Lièvre, Brouard e Healthcote, 2003), GSMLT³ (Lynch e Brown, 2005) e SPACE⁴ (Cai et al., 2010).

Uma abordagem relativamente mais simples para estimação do padrão etário das taxas ou probabilidade de transição de incapacidade, tal como apresentado na Figura 19.3, consiste em seguir as etapas descritas como segue:

1. Calcular as probabilidades observadas de transição entre os estados ativo, incapacitado e morte na idade x , pela seguinte expressão:

$$p_x^{i,j} = \frac{E_x^{i,j}}{N_x^i} \quad (19.19)$$

onde, $E_x^{i,j}$ é o número de transições do estado i para o estado j entre t_0 e t_p , entre pessoas de idades x e N_x^i é número de pessoas de idade x no estado i expostas à transição para o estado j .

2. Devido ao pequeno número de transições $E_x^{i,j}$ entre os estados i e j , as estimativas das probabilidades de transição por idade em (19.19) apresentam grande variabilidade, especialmente em idades mais avançadas. Então, faz-se necessária uma modelagem das probabilidades calculadas em (19.19) com o objetivo de se obter funções suavizadas dos padrões etários de transição. A escolha do modelo para suavização das probabilidades $p_x^{i,j}$ pode ser feita identificando-se uma forma paramétrica para o padrão etário da função. Tendo em vista que essas probabilidades são caracterizadas pelo número de ocorrências (contagem) de um evento (transições) num intervalo de tempo determinado ($t_p - t_0$), é razoável supor que essas probabilidades possam ser ajustadas por um modelo linear generalizado com distribuição Poisson e função de ligação logarítmica.

² Interpolated Markov Chain Method.

³ Gibbs Sampler for Multistate Life Tables Software.

⁴ Stochastic Population Analysis for Complex Events.

3. As probabilidades obtidas em (19.19) representam probabilidades de ocorrência de determinada transição num intervalo de tempo $t_p - t_0$. Sabe-se que, pela teoria de probabilidades, o logaritmo de uma distribuição de probabilidade é igual à função densidade de probabilidade (Blossfeld, Golsch e Rohwer, 2007: 37). Como o conceito de função densidade de probabilidade para a realização de uma variável aleatória é similar ao conceito de taxa instantânea de ocorrência de um evento, as probabilidades em (19.19) podem ser convertidas em taxas anuais de transição considerando-se a seguinte relação:

$$\mu_x^{i,j} = -\frac{1}{t} \ln(1 - p_x^{i,j}) \quad (19.20)$$

onde t é período de tempo (em anos) entre t_0 e t_p . O tamanho do intervalo etário (n) das taxas observadas depende do intervalo de tempo entre as ondas da pesquisa.

19.2.2 Estimação da tábua multiestado: abordagem matricial

Mediante informações sobre eventos ocorridos durante certo intervalo de tempo, determina-se um padrão etário das transições possíveis. Pelo exposto na seção anterior, taxas ou probabilidades de transição podem ser estimadas diretamente das pesquisas longitudinais e depois suavizadas por modelos paramétricos: exponencial, logístico etc.

Define-se a taxa observada de transição do estado i para o estado j entre as idades x e $x+n$ por:

$${}_nM_x^{i,j} = \frac{{}_nD_x^{i,j}}{{}_nP_x^i} \quad (19.21)$$

onde n é o tamanho do intervalo etário, que depende do intervalo de tempo entre as ondas da pesquisa longitudinal; ${}_nD_x^{i,j}$ é o número de transições do estado i para j entre as idades x e $x+n$ e ${}_nP_x^i$ é a população estimada para o meio do período no estado i no grupo etário x e $x+n$. Pelos motivos expostos no Capítulo 9, a população estimada para o meio do período de exposição é uma boa aproximação para o total de anos-pessoa de exposição às possíveis transições (eventos ou decrementos e incrementos).

Recordando parte das definições e técnicas apresentadas no Capítulo 9 para construção de uma tábua de vida por decremento único, onde o principal objetivo foi determinar um padrão etário dos fluxos de um estado de origem (vivo) para um estado de destino (morto), um dos principais obstáculos nesse sentido foi assumir um comportamento paramétrico do risco de morte por idade. A solução mais simples e adequada, utilizando as taxas observadas de mortalidade, foi assumir que os óbitos ocorrem uniformemente em cada intervalo etário e que, portanto, o número de sobrevivente à idade exata x (ℓ_x) varia linearmente em cada intervalo etário. Na estimação da tábua de vida por decremento único (morte) três equações básicas dependiam de uma mesma solução:

$$\ell_{x+n} = \ell_x - {}_n d_x \quad (19.22)$$

$${}_n d_x = {}_n M_x n L_x \quad (19.23)$$

$${}_n L_x = \frac{n}{2} (\ell_x + \ell_{x+n}) \quad (19.24)$$

Estas são versões ligeiramente rearranjadas de (9.1), (9.17) e (9.10). Sob a hipótese de linearidade da função ℓ_x , a mesma solução empírica para essas três equações foi dada em (9.21) por:

$${}_n q_x = \frac{2 {}_n M_x}{2 + n {}_n M_x} \quad (19.25)$$

Pode-se proceder de modo análogo para um sistema multiestado. A diferença é que em cada idade (ou grupo etário) a coorte hipotética estará exposta a mais de um tipo de fluxo (risco, transição). Considerando um intervalo etário de tamanho igual a um ($n=1$) e as múltiplas transições que envolvem uma tábua de vida multiestado, as equações (19.22) a (19.24) podem ser reescritas como:

$$\ell_{x+1}^i = \ell_x^i + \sum_j d_x^{j,i} - \sum_j d_x^{i,j} \quad (19.26)$$

$$d_x^{i,j} = M_x^{i,j} L_x^i \quad (19.27)$$

$$L_x^i = \frac{1}{2} (\ell_x^i + \ell_{x+1}^i) \quad (19.28)$$

onde, em todas essas equações, o sobrescrito i refere-se ao estado de origem (ou atual) e o sobrescrito j refere-se ao estado de destino. Na equação (19.26), “ d ” representa o fluxo entre estados a cada idade x . As funções L e ℓ tem interpretações similares àquelas apresentadas no Capítulo 9.

Várias são os fatores que determinam a natureza dos fluxos das funções ${}_n d_x$ e ℓ_x nas equações (19.26) a (19.28). A função ${}_n d_x$ resulta da multiplicidade de fluxos (uma transição, múltiplas transições e transições recorrentes). Esses fluxos são afetados por entradas e saídas em cada estado j . Se as taxas de saídas do estado j são muito baixas, a quantidade $d_x^{i,j}$ deverá ser alta. Se o intervalo de tempo entre as ondas da pesquisa é pequeno e/ou as taxas de transição são baixas, o problema das transições múltiplas e recorrentes é amenizado. A função ℓ_{x+1}^i é estritamente decrescente com a idade, como no caso da tábua de único decremento. A cada idade x , indivíduos entram e saem da coorte no estado i . Essa função é influenciada pela magnitude das transições (saídas e entradas no estado i) e pela magnitude das funções para todo $j \neq i$.

Retornando ao exemplo apresentado na Figura 19.3, onde observa-se dois estados transientes e um estado absorvente para representação multiestado de incapacidade funcional. Neste exemplo, há quatro probabilidades condicionais a serem estimadas com base nas taxas de transição

observadas, definidas pelas setas. Assim como no caso de decremento único, uma vez estimadas as probabilidades, se conhece a solução para as equações (19.26) a (19.28). Mediante a determinação do padrão etário das transições (observadas e, posteriormente, suavizadas pela metodologia exposta na seção anterior) e fazendo uso de operações matriciais simples, tal como apresentado na seção 17.4 do Capítulo 17, se calculam as quantidades definidas nas equações (19.26) a (19.28).

Define-se matricialmente a equação $\ell(x+1) = \ell(x) - D(x)$ com k estados não absorventes:

$$\begin{pmatrix} \ell_{x+1}^{1,1} & \cdots & \ell_{x+1}^{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{x+1}^{k,1} & \cdots & \ell_{x+1}^{k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_x^{1,1} & \cdots & \ell_x^{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_x^{k,1} & \cdots & \ell_x^{k,k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_j d_x^{1,j} & \cdots & -d_x^{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_x^{k,1} & \cdots & \sum_j d_x^{k,j} \end{pmatrix} \quad (19.29)$$

A matriz $\ell(x+1)$ contém como elementos os valores $\ell_{x+1}^{1,1}$, que representam o número de indivíduos que estavam no estado i na idade x e que, na idade $x+1$, estavam no estado j . Nesta matriz, se $i \neq j$ a função $\ell_{x+1}^{i,j} = d_x^{i,j}$, pois os valores de $\ell_{x+1}^{i,j}$ representam o número de indivíduos que moveram (fluxos) do estado i para o estado j no intervalo $(x, x+1)$. Já a função $\ell_{x+1}^{i,i}$ representa os sobreviventes da coorte original que começaram no estado i na idade x , sobreviveram, e permanecem no estado i na idade $x+1$. Sua magnitude e comportamento depende valor inicial $\ell_x^{i,i}$ e dos decrementos totais do estado $i \rightarrow \sum_{j \neq i} d_x^{i,j}$.

A matriz $D(x)$ é a matriz de incrementos e decrementos. Quantidades na diagonal são os decrementos (saídas) do estado i , ou seja, são a soma de todos os valores na linha fora da diagonal. Quantidades nas colunas fora da diagonal são os incrementos (entradas) para o estado i . Essa equação matricial preserva todas as informações contidas na equação (19.26).

Os valores na diagonal de $\ell(x+1)$ serão sempre menores que os respectivos valores na diagonal da matriz $\ell(x)$, na medida em que $\ell(x)$ é decrementada pelos valores na diagonal de $D(x)$. O número de indivíduos no estado i na idade $x+1$, simbolizado por ℓ_{x+1}^i , deve ser a soma dos valores na correspondente coluna da matriz $\ell(x+1)$.

De forma análoga à matriz $D(x)$, se define a matriz para as taxas de transições observadas:

$$M(x) = \begin{pmatrix} \sum_j M_x^{1,j} & \cdots & -M_x^{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -M_x^{k,1} & \cdots & \sum_j M_x^{k,j} \end{pmatrix} \quad (19.30)$$

O problema na determinação da matriz $D(x)$ é semelhante ao problema de decremento único. Pode-se supor uniformidade dos eventos (fluxos) no intervalo etário e converter as taxas de transição em probabilidades. Feito isso, aparece a solução para as equações (19.26) a (19.28).

Usando (19.25) com $n=1$, ℓ_{x+1} pode ser escrito como:

$$\ell_{x+1} = \ell_x p_x = \ell_x (1 - q_x) = \ell_x \left(1 - \frac{M_x}{1 + 0,5M_x} \right) = \ell_x (1 - 0,5M_x)(1 + 0,5M_x)^{-1} \quad (19.31)$$

Usando a notação de (19.30), o equivalente matricial pode ser escrito como:

$$\ell(x+1) = \ell(x) [I - 0,5M(x)][I + 0,5M(x)]^{-1} \quad (19.32)$$

onde I é uma matriz de identidade e o sobrescrito $-I$ indica a inversão da matriz.

Essa expressão matricial deve ser aplicada para cada intervalo etário até o intervalo aberto (último intervalo etário). Em seguida, determina-se:

$$L(x) = 0,5[\ell(x) + \ell(x+1)] \quad (19.33)$$

Para introduzir a mortalidade como estado absorvente basta substituir por zero todos valores nas últimas linhas das matrizes $\ell(x+1)$, $D(x)$, $\ell(x)$ e $M(x)$.

Para o intervalo etário aberto, o cálculo deve ser semelhante ao da tábua de decremento único. Porém, deve-se estar atento à modificação no cálculo de $L(x)$ neste grupo etário:

$$L(w) = \ell(w) [M(w)]^{-1} \quad (19.34)$$

Onde w é a idade no limite inferior do intervalo aberto; $\ell(w)$ é a matriz do número de indivíduos na idade exata w no estado i e $M(w)$ é matriz de transições entre os estados i e j .

$\ell(w)$ é uma matriz diagonal e $M(w)$ é formada somente por estados não absorventes:

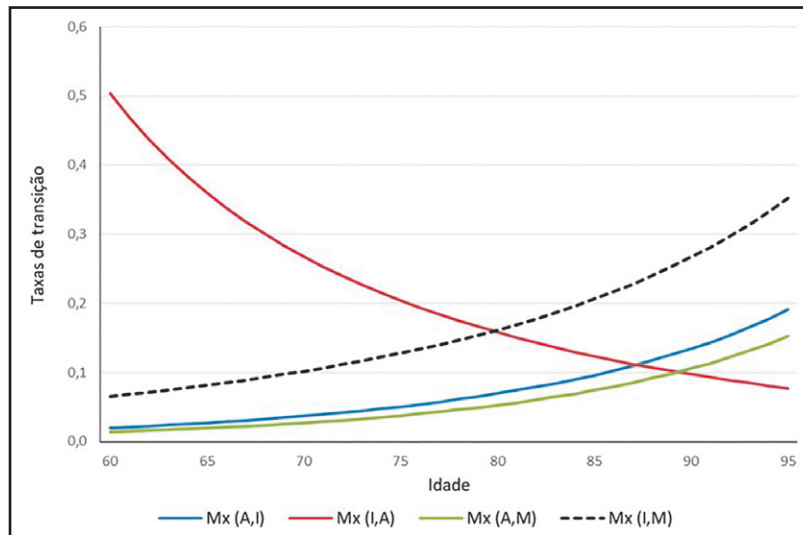
$$\ell(w) = \begin{pmatrix} \ell_w^{i,i} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ell_{x+1}^{j,j} \end{pmatrix} \text{ e } M(w) = \begin{pmatrix} M_w^{i,i} & \dots & M_w^{i,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_w^{j,i} & \dots & M_{x+1}^{j,j} \end{pmatrix} \quad (19.35)$$

19.2.3 Aplicação: tábua multiestado para o cálculo da esperança de vida livre de incapacidade funcional

O Gráfico 19.3 apresenta taxas anuais de transição entre os estados ativo, incapacitado funcionalmente e morte, estimadas para a população mexicana acima dos 60 anos, com base nos dados da pesquisa Mexican Health and Aging Study (2001-2003). Estas estimativas foram extraídas do estudo de Gonzaga (2012). Como aplicação do método multiestado para estimativa da esperança de vida saudável, aqui definida como esperança de vida livre de incapacidade funcional, serão utilizadas essas taxas de transição estimadas por Gonzaga (2012) para aplicação do método multiestado na estimação da esperança de vida livre de incapacidade.

O comportamento das taxas de transição entre os estados ativo, incapacitado e morte por idade são coerentes com o padrão etário dessas taxas na medida em que as taxas de mortalidade, tanto de pessoas no estado ativo quanto no estado incapacitado, e as taxas de pessoas que se tornam incapacitadas aumentam como a idade acima dos 60 anos. Já as taxas de recuperação, ou seja, de pessoas que transitam do estado incapacitado para ativo, diminuem com a idade. Essas taxas de transição serão utilizadas, nesta aplicação, como as taxas definidas pela equação (19.21).

Gráfico 19.3: Taxas anuais de transição entre os estados ativo, incapacitado funcionalmente e morte, México (2001-2003)



Fonte: Mexican Health and Aging Study (2001-2003).

De posse das taxas e transição entre estados de saúde e morte, se definem as matrizes da equação (19.33) para cada idade x , para o cálculo da matriz $\ell(x+1)$. Inicia-se com a construção da matriz das taxas de transição de incapacidade $M(x)$ e da matriz de identidade, tal como descritas na Tabela 19.4.

Tendo por base os dados da Tabela 19.4, a matriz taxas de transição de incapacidade $M(x)$, tal como definida em (19.30), pode ser obtida como segue para $x=60$ anos:

$$\begin{aligned}
 M(60) &= \begin{pmatrix} \sum_j M_{60}^{A,j} & -M_{60}^{A,I} & -M_{60}^{A,M} \\ -M_{60}^{I,A} & \sum_j M_{60}^{I,j} & -M_{60}^{I,M} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0201 + 0,0141 & -0,0201 & -0,0141 \\ -0,5048 & 0,5048 + 0,0657 & -0,0657 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0,0342 & -0,0201 & -0,0141 \\ -0,5048 & 0,5696 & -0,0657 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.36)
 \end{aligned}$$

A última linha da matriz $M(x)$ deve ser igual a zero para introduzir a mortalidade como estado absorvente. Os cálculos para as demais idades podem ser conduzidos de forma similar. Seguindo a estrutura da Tabela 19.4, os cálculos no EXCEL podem ser realizados como segue:

Para $x=60$, tem-se:

$$H6 = C6+E6$$

$$H7 = D6$$

$$I6 = C6$$

$$I7 = D6+F6$$

$$J6 = E6$$

$$J7 = F6$$

Nas células H8, I8 e J8 digitar o valor 0. Fazer o mesmo para as matrizes nas demais idades, até a idade $x=95$. Já a matriz de identidade para cada idade x é definida por:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Essas matrizes são descritas para cada idade } x \text{ nas colunas L a N da Tabela 19.4.}$$

O próximo passo consiste no cálculo da matriz $\ell(x+1)$ tal como definida na equação (19.32). Os elementos desta matriz representam o número de indivíduos na idade exata $x+1$ no estado j que estavam no estado i na idade x , sendo $\ell(x+1)$ uma matriz da forma:

$$\begin{pmatrix} \ell_{x+1}^{A,A} & \ell_{x+1}^{A,I} & \ell_{x+1}^{A,M} \\ \ell_{x+1}^{I,A} & \ell_{x+1}^{I,I} & \ell_{x+1}^{I,M} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.37)$$

Considerando $x=60$:

$$\ell(61) = \ell(60) [I-0,5M(60)][I+0,5M(60)]^{-1} \quad (19.38)$$

Inicialmente, determina-se todos os termos à direita desta equação. Calcula-se o termo $[I-0,5M(60)]$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 0,5 \begin{pmatrix} 0,0342 & -0,0201 & -0,0141 \\ -0,5048 & 0,5696 & -0,0657 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9829 & 0,0101 & 0,0070 \\ 0,2519 & 0,7152 & 0,0329 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19.39)$$

De modo análogo, calcula-se o termo $I+0,5M(60)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0,0342 & -0,0201 & -0,0141 \\ -0,5048 & 0,5696 & -0,0657 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0171 & -0,0101 & -0,0070 \\ -0,2519 & 1,2848 & -0,0329 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19.40)$$

Este último termo deve ser elevado por -1, tal como descrito na equação (19.32):

$$[I-0,5M(60)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0171 & -0,0101 & -0,0070 \\ -0,2519 & 1,2848 & -0,0329 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,9851 & 0,0077 & 0,0072 \\ 0,1931 & 0,7799 & 0,0270 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19.41)$$

Tem-se, então, todos os termos do lado direito da equação (19.32).

Tabela 19.4: Taxas anuais de transição entre os estados ativo, incapacitado funcionalmente e morte, matriz de taxas de transição e matriz identidade, México (2001-2003)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1			Taxas anuais de transição entre os estados ativo, incapacitado e morte, Mexico, (2001-2003)					M ^{AA} (x)	M ^{AI} (x)	M ^{AM} (x)			1	0	0
2								M ^{IA} (x)	M ^{II} (x)	M ^{IM} (x)			0	1	0
3								0	0	0			0	0	1
4	x		M _x (i,j)					M ^{II} (x)				I (matriz identidade)			
5			A -> I	I -> A	A -> M	I -> M									
6	60		0,0201	0,5038	0,0141	0,0657		0,0342	-0,0201	-0,0141		1,0000	0,0000	0,0000	
7								-0,5038	0,5696	-0,0657		0,0000	1,0000	0,0000	
8								0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	1,0000	
9															
10	61		0,0214	0,4689	0,0150	0,0686		0,0364	-0,0214	-0,0150		1,0000	0,0000	0,0000	
11								-0,4689	0,5375	-0,0686		0,0000	1,0000	0,0000	
12								0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	1,0000	
13															
14	62		0,0227	0,4375	0,0160	0,0717		0,0387	-0,0227	-0,0160		1,0000	0,0000	0,0000	
15								-0,4375	0,5092	-0,0717		0,0000	1,0000	0,0000	
16								0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	1,0000	
17															
18	63		0,0242	0,4092	0,0171	0,0749		0,0413	-0,0242	-0,0171		1,0000	0,0000	0,0000	
19								-0,4092	0,4841	-0,0749		0,0000	1,0000	0,0000	
20								0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	1,0000	
21															
22	64		0,0257	0,3835	0,0183	0,0782		0,0439	-0,0257	-0,0183		1,0000	0,0000	0,0000	
23								-0,3835	0,4617	-0,0782		0,0000	1,0000	0,0000	
24								0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	1,0000	
25															
26	65		0,0273	0,3600	0,0195	0,0817		0,0468	-0,0273	-0,0195		1,0000	0,0000	0,0000	
27								-0,3600	0,4417	-0,0817		0,0000	1,0000	0,0000	
28								0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	1,0000	
29	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	
146	95		0,1910	0,0773	0,1522	0,3519		0,3432	-0,1910	-0,1522		1,0000	0,0000	0,0000	
147								-0,0773	0,4292	-0,3519		0,0000	1,0000	0,0000	
148								0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	1,0000	

Fonte: Mexican Health and Aging Study (2001-2003).

Os cálculos desses termos podem ser feitos no EXCEL e os resultados são mostrados na Tabela 19.5. As matrizes que representam os termos $[I-0,5M(60)]$ e $[I+0,5M(60)]^{-1}$ estão indicadas nas colunas K a M e O a Q. O cálculo do termo $[I-0,5M(60)]$, para idade $x=60$, é feito como segue:

$$K3 = G3 - 0,5 * C3 \text{ (e assim para baixo até a célula K5)}$$

$$L3 = H3 - 0,5 * D3 \text{ (e assim para baixo até a célula L5)}$$

$$M3 = I3 - 0,5 * E3 \text{ (e assim para baixo até a célula M5)}$$

Fazer o mesmo para todas idades, até a idade $x=95$. O cálculo do termo $I+0,5M(60)$, para idade $x=60$, é feito como segue:

$$O3 = G3 + 0,5 * C3 \text{ (e assim para baixo até a célula O5)}$$

$$P3 = H3 + 0,5 * D3 \text{ (e assim para baixo até a célula P5)}$$

$$Q3 = I3 + 0,5 * E3 \text{ (e assim para baixo até a célula Q5)}$$

Fazer o mesmo para todas idades, até a idade $x=95$.

Já o cálculo da inversa do termo $I+0,5M(60)$, para idade $x=60$, é feito selecionando as células onde será inserida a matriz inversa, ou seja, a área compreendida pelas células S3:U5. Em seguida, na célula S3, digite:

$$=MATRIZ.INVERSO(O3:Q5)$$

Ao invés de apertar a tecla “Enter”, faça Shift+Ctrl+Enter. Assim, o resultado será exibido tal como aparece nas células S3:U5 da Tabela 19.5. Faça o mesmo procedimento para todas idades, até a idade $x=95$.

O passo seguinte é a multiplicação matricial dos termos $[I-0,5M(60)]$ e $[I+0,5M(60)]^{-1}$, cujo resultado aparece nas colunas W a Y da Tabela 19.5. Para fazer essa multiplicação no EXCEL, selecione área compreendida pelas células W3:Y5. Em seguida, na célula W3, digite:

$$=MATRIZ.MULT(K3:M5;O3:Q5)$$

Ao invés de apertar a tecla “Enter”, faça Shift+Ctrl+Enter. O resultado será exibido tal como aparece nas células W3:Y5 da Tabela 19.5. Faça o mesmo procedimento para todas idades, até a idade $x=95$.

Tabela 19.5: Operações matriciais para o sistema multiestado de incapacidade com dois estados transientes (ativo/incapacitado) e um estado absorvente (morte), México (2001-2003)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	
1	x	M ⁰ (x)			I (matriz identidade)			I - 0.5*M(x)			I + 0.5*M(x)			[I + 0.5*M(x)] ⁻¹			[I - 0.5*M(x)]*[I + 0.5*M(x)] ⁻¹									
2																										
3	60	0,0342	-0,0201	-0,0141	1,0000	0,0000	0,0000	0,9829	0,0101	0,0070	1,0171	-0,0101	-0,0070	0,9851	0,0077	0,0072							0,9702	0,0154	0,0144	
4		-0,5038	0,5696	-0,0657	0,0000	1,0000	0,0000	0,2519	0,7152	0,0329	-0,2519	1,2848	-0,0329	0,1931	0,7799	0,0270							0,3863	0,5597	0,0540	
5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000							0,0000	0,0000	1,0000	
6																										
7	61	0,0364	-0,0214	-0,0150	1,0000	0,0000	0,0000	0,9818	0,0107	0,0075	1,0182	-0,0107	-0,0075	0,9840	0,0083	0,0077							0,9681	0,0166	0,0153	
8		-0,4689	0,5375	-0,0686	0,0000	1,0000	0,0000	0,2344	0,7313	0,0343	-0,2344	1,2687	-0,0343	0,1818	0,7897	0,0285							0,3636	0,5794	0,0569	
9		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000							0,0000	0,0000	1,0000	
10																										
11	62	0,0387	-0,0227	-0,0160	1,0000	0,0000	0,0000	0,9806	0,0114	0,0080	1,0194	-0,0114	-0,0080	0,9829	0,0089	0,0082							0,9658	0,0178	0,0164	
12		-0,4375	0,5092	-0,0717	0,0000	1,0000	0,0000	0,2188	0,7454	0,0358	-0,2188	1,2546	-0,0358	0,1714	0,7986	0,0300							0,3428	0,5972	0,0600	
13		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000							0,0000	0,0000	1,0000	
14																										
15	63	0,0413	-0,0242	-0,0171	1,0000	0,0000	0,0000	0,9794	0,0121	0,0086	1,0206	-0,0121	-0,0086	0,9817	0,0095	0,0088							0,9634	0,0191	0,0175	
16		-0,4092	0,4841	-0,0749	0,0000	1,0000	0,0000	0,2046	0,7580	0,0374	-0,2046	1,2420	-0,0374	0,1617	0,8067	0,0316							0,3234	0,6134	0,0632	
17		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000							0,0000	0,0000	1,0000	
18																										
19	64	0,0439	-0,0257	-0,0183	1,0000	0,0000	0,0000	0,9780	0,0128	0,0091	1,0220	-0,0128	-0,0091	0,9804	0,0102	0,0093							0,9608	0,0205	0,0187	
20		-0,3835	0,4617	-0,0782	0,0000	1,0000	0,0000	0,1917	0,7692	0,0391	-0,1917	1,2308	-0,0391	0,1527	0,8140	0,0332							0,3055	0,6281	0,0664	
21		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000							0,0000	0,0000	1,0000	
22																										
23	65	0,0468	-0,0273	-0,0195	1,0000	0,0000	0,0000	0,9766	0,0137	0,0097	1,0234	-0,0137	-0,0097	0,9791	0,0109	0,0100							0,9581	0,0219	0,0200	
24		-0,3600	0,4417	-0,0817	0,0000	1,0000	0,0000	0,1800	0,7791	0,0408	-0,1800	1,2209	-0,0408	0,1444	0,8207	0,0349							0,2887	0,6414	0,0699	
25		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000							0,0000	0,0000	1,0000	
29	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮							⋮	⋮	⋮	
143	95	0,3432	-0,1910	-0,1522	1,0000	0,0000	0,0000	0,8284	0,0955	0,0761	1,1716	-0,0955	-0,0761	0,8558	0,0673	0,0770							0,7115	0,1345	0,1539	
144		-0,0773	0,4292	-0,3519	0,0000	1,0000	0,0000	0,0387	0,7854	0,1759	-0,0387	1,2146	-0,1759	0,0272	0,8255	0,1473							0,0545	0,6509	0,2946	
145		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000							0,0000	0,0000	1,0000	

Fonte: Mexican Health and Aging Study (2001-2003).

O último passo para se obter a matriz $\ell(x+1)$, tal como definida na equação (19.32), consiste em multiplicar as matrizes que aparecem nas colunas W a Y da Tabela 19.5, pela respectiva matriz $\ell(x)$. Para $x=60$, define-se a matriz do número de indivíduos na idade exata 60 no estado i , assumindo que a raiz da tábua é de 100.000 indivíduos:

$$\ell(60) = \begin{pmatrix} \ell_{60}^A & 0 & 0 \\ 0 & \ell_{60}^I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92800 & 0 & 0 \\ 0 & 7200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.42)$$

A separação do número inicial de 100.000 indivíduos entre ativos e incapacitados depende da proporção de pessoas incapacitadas na primeira onda da pesquisa longitudinal que, neste caso, foi de 7,2%. Assim, tem-se todos os termos à direita de (19.35) para $x=60$:

$$\begin{aligned} \ell(61) &= \ell(60) [I - 0,5M(60)][I + 0,5M(60)]^{-1} \\ \ell(61) &= \begin{pmatrix} 92800 & 0 & 0 \\ 0 & 7200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9829 & 0,0101 & 0,0070 \\ 0,2519 & 0,7152 & 0,0329 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9851 & 0,0077 & 0,0072 \\ 0,1931 & 0,7799 & 0,0270 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 90035 & 1432 & 1333 \\ 2781 & 4030 & 389 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.43) \end{aligned}$$

De acordo com os dados desta matriz, dos 92.800 indivíduos que estavam no estado Ativo na idade 60, 90.035 permaneceram neste estado na idade 61. Ao passo que 1.432 transitaram para o estado Incapacitado e 1.333 morreram. De modo análogo, dos 7.200 indivíduos que estavam no estado Incapacitado na idade 60, 2.781 se recuperaram (transitaram para o estado Ativo) e 389 morreram.

Os cálculos para a matriz $\ell(x+1)$ são apresentados na Tabela 95.6. Nas três primeiras linhas são apresentadas as estruturas das matrizes $\ell(x+1)$ e $\ell(x)$. Para encontrar a matriz $\ell(61)$, selecione a área K6:M8. Então, na célula K6, digite a seguinte equação:

$$=\text{MATRIZ.MULT}(G6:I8;C6:E8)$$

Em seguida, faça Shift+Ctrl+Enter. O resultado será exibido tal como aparece nas células K6:M8 da Tabela 19.6. Faça o mesmo procedimento para todas idades, até a idade $x=95$.

Observe que, pela definição, $\ell(x)$ deve ser formada somente por estados não absorventes, motivo pelo qual, ao se calcular $\ell(62)$, deve-se considerar $\ell(61)$ como sendo:

$$\ell(61) = \begin{pmatrix} 90035 & 1432 & 0 \\ 2781 & 4030 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ou seja, inserindo o valor zero para os estados absorventes.}$$

Em seguida, calcula-se o número de anos-pessoa vividos no estado i entre as idades x e $x+n$ anos, tal como expresso na equação (19.36):

$$L(x) = 0,5[\ell(x) + \ell(x+1)]$$

$$\text{Sendo } L(x) \text{ uma matriz da forma } \begin{pmatrix} L_x^{A,A} & L_x^{A,I} & 0 \\ L_x^{I,A} & L_x^{I,I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.44)$$

Para $x=60$ anos:

$$L(60) = 0,5[\ell(60) + \ell(61)]$$

$$L(60) = 0,5 \left[\begin{pmatrix} 92800 & 0 & 0 \\ 0 & 7200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 90035 & 1432 & 1333 \\ 2781 & 4030 & 389 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 91418 & 716 & 0 \\ 1391 & 5615 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.45)$$

Tabela 19.6: Número de indivíduos no estado i na idade exata x , México (2001-2003)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1							$I^A(x)$	$I^I(x)$	0		$I^{AA}(x+1)$	$I^{AI}(x+1)$	$I^{AM}(x+1)$
2							$I^A(x)$	$I^I(x)$	0		$I^{IA}(x+1)$	$I^{II}(x+1)$	$I^{IM}(x+1)$
3							0	0	0		0	0	0
4	x		$[I - 0.5*M(x)]*[I + 0.5*M(x)]^{-1}$				I(x)				I(x+1)		
5													
6	60		0,9702	0,0154	0,0144		92800	0	0		90035	1432	1333
7			0,3863	0,5597	0,0540		0	7200	0		2781	4030	389
8			0,0000	0,0000	1,0000		0	0	0		0	0	0
9													
10	61		0,9681	0,0166	0,0153		90035	1432	0		87682	2323	1463
11			0,3636	0,5794	0,0569		2781	4030	0		4158	2381	272
12			0,0000	0,0000	1,0000		0	0	0		0	0	0
13													
14	62		0,9658	0,0178	0,0164		87682	2323	0		85480	2949	1576
15			0,3428	0,5972	0,0600		4158	2381	0		4832	1496	211
16			0,0000	0,0000	1,0000		0	0	0		0	0	0
17													
18	63		0,9634	0,0191	0,0175		85480	2949	0		83305	3441	1682
19			0,3234	0,6134	0,0632		4832	1496	0		5139	1010	179
20			0,0000	0,0000	1,0000		0	0	0		0	0	0
21													
22	64		0,9608	0,0205	0,0187		83305	3441	0		81095	3865	1786
23			0,3055	0,6281	0,0664		5139	1010	0		5246	740	163
24			0,0000	0,0000	1,0000		0	0	0		0	0	0
25													
29	65		0,9581	0,0219	0,0200		81095	3865	0		78815	4255	1890
30			0,2887	0,6414	0,0699		5246	740	0		5240	589	156
32			0,0000	0,0000	1,0000		0	0	0		0	0	0
254	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
256	95		0,7115	0,1345	0,1539		3474	2675	0		2617	2209	1323
258			0,0545	0,6509	0,2946		242	186	0		182	154	92
260			0,0000	0,0000	1,0000		0	0	0		0	0	0

Fonte: Mexican Health and Aging Study (2001-2003).

O cálculo de $L(x)$ é feito de modo análogo em todas as idades. Para a última idade (intervalo aberto de idade), deve-se aplicar a equação (19.35) e recordar que $\ell(w)$ é uma matriz diagonal e $M(w)$ é formada somente por estados não absorventes. No caso deste exemplo, as matrizes $\ell(w)$ e $M(w)$ são como segue:

$$\ell(w) = \begin{pmatrix} \ell_w^A & 0 \\ 0 & \ell_w^I \end{pmatrix} \text{ e } M(w) = \begin{pmatrix} M_w^{A,A} & M_w^{A,I} \\ M_w^{I,A} & M_w^{I,I} \end{pmatrix} \quad (19.46)$$

Uma vez determinadas as matrizes de $L(x)$ em todas as idades, procede-se ao cálculo da matriz do tempo total a ser vivido a partir da idade x em cada estado de saúde, ou seja, a matriz

$T(x)$, cujo cálculo é feito para cada elemento da matriz $L(x)$ tal como é feito na tábua de decré-mento único:

$$T(x) = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=x}^w L_{\alpha}^{A,A} & \sum_{\alpha=x}^w L_{\alpha}^{A,I} & 0 \\ \sum_{\alpha=x}^w L_{\alpha}^{I,A} & \sum_{\alpha=x}^w L_{\alpha}^{I,I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.47)$$

Observe que o primeiro elemento da primeira coluna de $T(x)$ representa o total de anos a serem vividos como Ativos a partir da idade x dentre aqueles que estavam neste mesmo estado de saúde na idade anterior. Já a soma da primeira coluna de $T(x)$ representa o total de anos a serem vi-vidos como Ativos a partir da idade x , independente do estado de saúde na idade anterior. Ou seja, cada elemento de $T(x)$ isoladamente representa o tempo total a ser vivido a partir da idade x , num determinado estado de saúde, *condicional* ao estado de saúde na idade anterior. Por outro lado, a soma de cada coluna $T(x)$ representa o tempo total a ser vivido a partir da idade x , *independente* do estado de saúde na idade anterior. Isso permite o cálculo da esperança de vida a cada idade x sob duas óticas distintas: condicional e não condicional ao estado de saúde na idade anterior.

Portanto, a matriz de esperanças de vida na idade x , condicionais ao estado de saúde na idade anterior, é determinada como segue:

$$e(x) = \begin{pmatrix} \frac{T_x^{A,A}}{\ell_x^A} & \frac{T_x^{A,I}}{\ell_x^A} & 0 \\ \frac{T_x^{I,A}}{\ell_x^I} & \frac{T_x^{I,I}}{\ell_x^I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x^{A,A} & e_x^{A,I} & 0 \\ e_x^{I,A} & e_x^{I,I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.48)$$

Cada elemento desta matriz representa o número esperado de anos a serem vividos no estado j a partir da idade x por aqueles que estavam no estado i .

Por outro lado, as esperanças de vida não condicionais em cada estado de saúde e a esperança de vida total compõem o seguinte vetor:

$$e(x) = \begin{pmatrix} \frac{T_x^{A,A} + T_x^{I,A}}{\ell_x} & \frac{T_x^{A,I} + T_x^{I,I}}{\ell_x} & \frac{T_x^{A,A} + T_x^{I,A} + T_x^{A,I} + T_x^{I,I}}{\ell_x} \end{pmatrix} = (e_x^A \quad e_x^I \quad e_x^T) \quad (19.49)$$

Cada elemento desta matriz representa o número esperado de anos a serem vividos no estado i a partir da idade x .

A Tabela 19.7 apresenta os cálculos das matrizes $L(x)$, $T(x)$ e $e(x)$ realizados no EXCEL. As três primeiras linhas da tabela apresentam as estruturas de cada matriz.

Determinando $L(60)$ faça:

$$K6 = 0,5*(C6+G6)$$

$$K7 = 0,5*(C7+G7)$$

$$L6 = 0,5*(D6+H6)$$

$$L7 = 0,5*(D7+H7)$$

Faça o mesmo procedimento para todas idades, até a idade $x=94$.

Para $x=95$ e mais, $L(95+)$, é necessário determinar as matrizes da equação abaixo:

$$L(95+) = \ell(95)[M(95+)]^{-1} \quad (19.50)$$

Para $\ell(95)$, basta digitar na célula C150 e D151:

$$C150 = \text{SOMA}(C146:C147)$$

$$D151 = \text{SOMA}(D146:D147)$$

Para $[M(95+)]^{-1}$, basta pedir a inversa da matriz das taxas de transições na idade $x=95$ (ver células C143:D144 na Tabela 19.5). O resultado desta inversa aparece nas células N150:O151 da Tabela 19.7.

Uma vez determinado $\ell(95)$ e $[M(95+)]^{-1}$, selecione a área K146:L147 (na Tabela 19.7) e digite a seguinte equação na célula K146:

$$=\text{MATRIZ.MULT}(C150:D151;N150:O151)$$

Em seguida, faça Shift+Ctrl+Enter. O resultado será exibido tal como aparece nas células K146:L147 da Tabela 19.7.

Para o cálculo de $T(60)$ na Tabela 19.7, deve-se proceder igualmente no caso de decrementos únicos (ver Capítulo 9), ou seja, acumulando-se os valores em cada elemento da matriz $L(x)$ desde $x=95$ até $x=60$.

Em $x=60$, faça:

$$N6 = \text{SOMA}(K6+K10+K14+\dots+K146)$$

$$N7 = \text{SOMA}(K7+K11+K15+\dots+K147)$$

$$O6 = \text{SOMA}(L6+L10+L14+\dots+L146)$$

$$O7 = \text{SOMA}(L7+L11+L15+\dots+K147)$$

Em $x=61$, faça:

$$N6 = \text{SOMA}(K10+K14+\dots+K146)$$

$$N7 = \text{SOMA}(K11+K15+\dots+K147)$$

$$O6 = \text{SOMA}(L10+L14+\dots+L146)$$

$$O7 = \text{SOMA}(L11+L15+\dots+K147)$$

Segue-se o mesmo procedimento para todas idades, até a idade $x=95$. Sendo que $T(95) = L(95)$

O cálculo para as esperanças de vida condicionais é realizado como segue:

Em $x=60$:

$Q6 = N6 / \text{SOMA}(C6:C7) = 17,5$ (número esperado de anos a serem vividos no estado *Ativo* a partir da idade 60 por aqueles que estavam no estado *Ativo* na idade anterior)

$Q7 = N7 / \text{SOMA}(C6:C7) = 14,2$ (número esperado de anos a serem vividos no estado *Ativo* a partir da idade 60 por aqueles que estavam no estado *Incapacitado* na idade anterior)

$R6 = O6 / \text{SOMA}(D6:D7) = 2,2$ (número esperado de anos a serem vividos no estado *Incapacitado* a partir da idade 60 por aqueles que estavam no estado *Ativo* na idade anterior)

$R7 = O7 / \text{SOMA}(D6:D7) = 4,8$ (número esperado de anos a serem vividos no estado *Incapacitado* a partir da idade 60 por aqueles que estavam no estado *Incapacitado* na idade anterior)

Segue-se o mesmo procedimento para todas idades, até a idade $x=95$. Por fim, para as esperanças de vida não condicionais:

Em $x=60$:

$T6 = \text{SOMA}(N6:N7) / \text{SOMA}(C6:D7) = 17,3$ (número esperado de anos a serem vividos no estado *Ativo* a partir da idade 60)

$U6 = \text{SOMA}(O6:O7) / \text{SOMA}(C6:D7) = 2,4$ (número esperado de anos a serem vividos no estado *Incapacitado* a partir da idade 60)

$V6 = \text{SOMA}(N6:O7) / \text{SOMA}(C6:D7) = 19,7$ (número esperado de anos a serem vividos a partir da idade 60)

Segue-se o mesmo procedimento para todas idades, até a idade $x=95$

Como era esperado, observa-se a soma das esperanças de vida nos estados *Ativo* (17,3) e *Incapacitado* (2,4) é igual à esperança de vida total (19,7).

Tabela 19.7: Tábua de vida multiestado considerando os estados de saúde Ativo e Incapacitado, México (2001-2003)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	
1			$l^A(x)$	$l^I(x)$	0		$l^{AA}(x+1)$	$l^{AI}(x+1)$	$l^{AM}(x+1)$		$L^{AA}(x)$	$L^{AI}(x)$		$T^{AA}(x)$	$T^{AI}(x)$		$e^{AA}(x)$	$e^{AI}(x)$					
2			$l^A(x)$	$l^I(x)$	0		$l^{AA}(x+1)$	$l^{AI}(x+1)$	$l^{AM}(x+1)$		$L^{AA}(x)$	$L^{AI}(x)$		$T^{AA}(x)$	$T^{AI}(x)$		$e^{AA}(x)$	$e^{AI}(x)$		$e^a(x)$	$e^i(x)$	$e^T(x)$	
3			0	0	0		0	0	0														
4	x		I(x)				I(x+1)				L(x)			T(x)			e(x) condicionais			e(x) não condicionais			
5																							
6	60		92800	0	0		90035	1432	1333		91418	716		1626036	202728		17,5	2,2		17,3	2,4	19,7	
7			0	7200	0		2781	4030	389		1391	5615		102448	34257		14,2	4,8					
8			0	0	0		0	0	0		0	0		0	0								
9																							
10	61		90035	1432	0		87682	2323	1463		88859	1878		1534618	202012		16,5	2,2		16,6	2,3	19,0	
11			2781	4030	0		4158	2381	272		3470	3206		101058	28642		18,5	5,2					
12			0	0	0		0	0	0		0	0											
13																							
14	62		87682	2323	0		85480	2949	1576		86581	2636		1445760	200134		15,7	2,2		16,0	2,3	18,3	
15			4158	2381	0		4832	1496	211		4495	1939		97588	25437		20,7	5,4					
16			0	0	0		0	0	0		0	0											
17																							
18	63		85480	2949	0		83305	3441	1682		84393	3195		1359179	197498		15,0	2,2		15,3	2,3	17,7	
19			4832	1496	0		5139	1010	179		4985	1253		93093	23498		20,9	5,3					
20			0	0	0		0	0	0		0	0											
21																							
22	64		83305	3441	0		81095	3865	1786		82200	3653		1274786	194303		14,4	2,2		14,7	2,3	17,0	
23			5139	1010	0		5246	740	163		5193	875		88108	22245		19,8	5,0					
24			0	0	0		0	0	0		0	0											
25																							
26	65		81095	3865	0		78815	4255	1890		79955	4060		1192586	190650		13,8	2,2		14,0	2,3	16,4	
27			5246	740	0		5240	589	156		5243	664		82915	21370		18,0	4,6					
28			0	0	0		0	0	0		0	0											
145	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	
146	95		3474	2675	0		2617	2209	1323		12033	5354		12033	5354		3,2	1,4		2,1	1,9	4,0	
147			242	186	0		182	154	92		1670	7410		1670	7410		0,6	2,6					
148			0	0	0		0	0	0														
149																							
150	95+		3715	0							$[M(w)]^{-1} =$			3,2388	1,4410								
151			0	2861										0,5836	2,5895								

Fonte: Mexican Health and Aging Study (2001-2003).