
PARTE 1: CHAPAS

1. GENERALIDADES

Chapas são peças estruturais em que uma dimensão, a espessura e , é muito menor que as outras duas, são planas, e os carregamentos são supostamente contidos nesse plano. É o caso, por exemplo, dos painéis de fechamento de fuselagens de aeronaves, em que as pressões internas ou externas podem ser negligenciadas por serem de uma ordem de grandeza muito menor que as tensões que se desenvolvem em seu próprio plano.

Aqui serão analisadas soluções para problemas bidimensionais de elasticidade linear, apenas. Consideram-se chapas infinitesimalmente finas contidas em um plano xy , com as forças externas aplicadas também contidas nesse plano. Isso implica que as únicas componentes de tensão de interesse são $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$. Este é o chamado *estado plano de tensões*, **EPT**.

2. TEORIA DA ELASTICIDADE EM 2D

2.1 Tensões (intensidade de força por unidade de área)

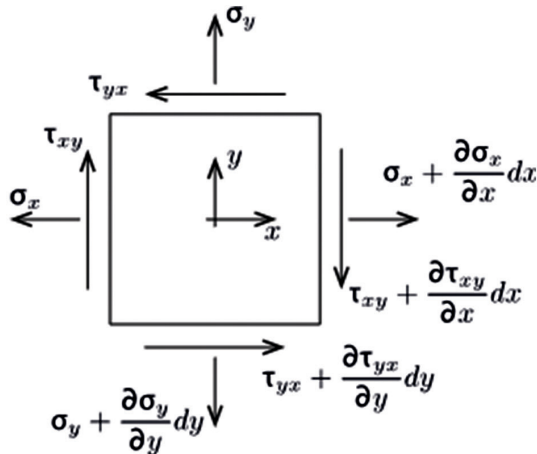


Figura 1.1

Pode-se derivar a equação de equilíbrio em 2D de maneira simples, somando as forças resultantes do produto das tensões (em $\rho a = \frac{N}{m^2}$) pelas áreas em que atuam em um pequeno elemento de chapa $dx \times dy$ e pequena espessura e , representado na Fig. 1.1. Na direção x as forças resultantes das tensões normais, representadas pela letra grega minúscula σ , e tangenciais (de cisalhamento), representadas pela letra grega minúscula τ , devem se equilibrar, considerando-se, ainda, a presença de forças de massa X (em $\frac{N}{m^2}$) e a força de inércia dada pelo produto da densidade do material ρ ($\frac{kg}{m^3}$) pela aceleração \ddot{u} , em que u é a função deslocamento de um ponto da chapa na direção x e pontos superpostos indicam derivações sucessivas no tempo.

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy - \tau_{xy} \right) dx + X dx dy = \rho \ddot{u} dx dy \quad (1.1)$$

Na direção y , considerando-se forças de massa Y (em $\frac{N}{m^2}$) e aceleração \ddot{v} , em que v é a função deslocamento de um ponto da chapa na direção y , tem-se

$$\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy - \sigma_y \right) dx + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx - \tau_{xy} \right) dy + Y dx dy = \rho \ddot{v} dx dy \quad (1.2)$$

No limite, para os lados da pequena área tendendo a zero, tem-se o sistema de equações diferenciais de equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = \rho \ddot{u} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = \rho \ddot{v}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Derivando a 1ª equação em x e a 2ª em y e somando, para acelerações desprezíveis, tem-se

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.4)$$

2.2 Deformações

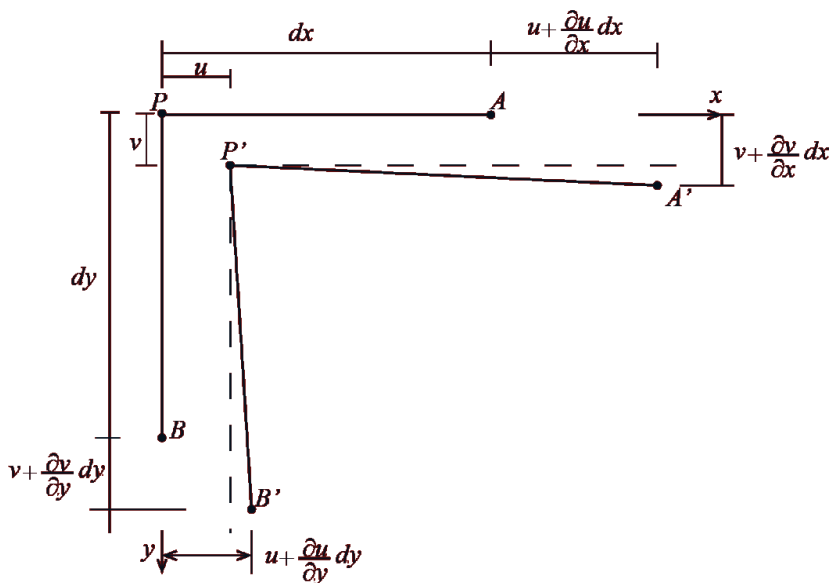


Figura 1.2

O efeito das tensões sobre um corpo deformável é mudar sua forma. Essa mudança é descrita em termos do vetor deslocamento, cujas componentes são u e v , de um ponto P , i.e., o ponto P move-se de sua posição original para essa nova posição P' . A pergunta que se coloca é: para onde se deslocam os pontos

adjacentes A e B da Fig. 1.2? O deslocamento de A na direção x e y , e de B , nessas 2 direções, são, respectivamente,

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (1.5)$$

E também há interesse na deformação longitudinal definido por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.6)$$

um número puro, sem unidades. Na outra direção tem-se

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.7)$$

Mais ainda, as tensões aplicadas podem distorcer o corpo de outras formas, também. Em particular, direções no corpo que estavam a 90° entre si antes da aplicação das tensões de cisalhamento não mais formarão esse mesmo ângulo. Considerem-se os pontos A e B que ficam ao longo das direções x e y a partir de P , inicialmente em ângulo reto, pode-se mostrar (vide Fig. 1.2) que esse ângulo decresce pelo valor

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.8)$$

Este resultado é a *distorção*. Dessa forma, em problemas 2D, tem-se 3 componentes de deformação:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.9)$$

Diferenciando essas equações, a primeira delas duas vezes com respeito a y , a segunda duas vezes com relação a x , e a terceira uma vez com relação a x e uma vez com relação a y , e combinando, obtém-se

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} \quad (1.10)$$

A chamada equação de compatibilidade.

2.3 Lei de Hooke

A Eq. (1.10) dá uma outra equação para ser resolvida, mas para isso é necessário reescrever a equação de compatibilidade em termos de tensões. A relação entre essas grandezas é uma propriedade do material. Adota-se, aqui, uma relação linear, a lei de Hooke. Para o estado plano de tensões, ela pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\tag{1.11}$$

em que,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

No caso do **EPT**, substituindo a lei de Hooke (1.11) na equação de compatibilidade (1.10) encontra-se

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu\sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}\tag{1.12}$$

Impondo-se o equilíbrio, eliminando o lado direito das Eqs. (1.12) usando a Eq.(1.4) obtém-se, para o **EPT**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)\tag{1.13}$$

Se as forças de massa derivarem de um potencial ,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}\tag{1.14}$$

têm-se, para **EPT**, a equação diferencial que governa o problema

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \nu) \nabla^2 V\tag{1.15}$$

2.4 Condições de contorno

Em (1.15) foi obtida a equação diferencial que governa o modelo matemático de chapas de comportamento linear, tudo em *termos de tensões*.

A solução dessa equação depende das forças aplicadas no corpo em questão, i.e., as *condições de contorno*. As componentes de tensão na superfície do corpo devem estar em equilíbrio com as forças externas impostas.

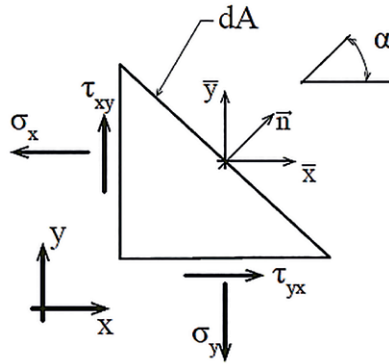


Figura 1.3

Considere-se as forças aplicadas no pequeno triângulo da Fig. 1.3. A hipotenusa desse triângulo corresponde à projeção de uma área infinitesimal dA de normal \vec{n} , recortada da superfície de contorno do corpo. Seja α o ângulo entre a normal dA e a direção x . O equilíbrio de forças na direção x é:

$$\sigma_x dA \cos \alpha + \tau_{xy} dA \sin \alpha = F_x \quad (1.16)$$

onde F_x é a componente da força imposta nessa direção. Dividindo tudo por dA e chamando de \bar{x} a força por unidade de área nessa direção, tem-se

$$\bar{X} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \quad (1.17)$$

Pelo mesmo raciocínio, na direção y

$$\bar{Y} = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \quad (1.18)$$

Na notação de Timoshenko os cossenos diretores são

$$\begin{aligned} l &= \cos \alpha \\ m &= \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.19)$$

3. FUNÇÃO DE TENSÃO DE AIRY

Resolver 3 equações diferenciais parciais torna-se, às vezes, inviável. Fica mais fácil se for introduzida uma nova função ϕ , chamada *função de tensão* (ou *função de Airy*, astrônomo e matemático inglês do século XIX) satisfazendo as equações de equilíbrio. Desconsiderando as forças de massa, define-se

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + X, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + Y, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{1.20}$$

Substituindo-se (1.20) em (1.14) obtém-se, para **EPT**

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)\tag{1.21}$$

Introduzindo o operador laplaciano,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

e admitindo-se forças de massa nulas, chega-se a

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0\tag{1.22}$$

assim, as funções biharmônicas se prestam a essa solução. Para chapas modeladas como longas fitas retangulares, verifica-se, por simples substituição, que o polinômio de 2º grau a seguir é uma solução:

$$\phi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2$$

As componentes de tensão são

$$\begin{aligned}\sigma_x &= c_2, \\ \sigma_y &= a_2, \\ \tau_{xy} &= -b_2\end{aligned}$$

assim, essa é a solução para uma longa fita sob tensões uniformes. Por outro lado, devem ser obedecidas as condições de contorno, que no caso seriam tração uniforme ou cisalhamento uniforme. Pode-se reverter o processo começando de um valor de tensão dado. Por exemplo, se a fita retangular está sob uma tração uniforme de 4 N/m^2 na direção x em uma extremidade e o mesmo valor na direção $-x$ na outra extremidade, então tem-se

$$\sigma_x = c_2 = \frac{4N}{m^2}, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

e a função de tensão é

$$\varphi = 2y^2$$

4. CHAPAS EM COORDENADAS CARTESIANAS

A solução das equações da elasticidade para uma dada condição de contorno é frequentemente muito difícil de ser obtida da forma direta, resolvendo a equação biarmônica e impondo as condições de contorno. Muitas vezes é usada uma técnica conhecida como o *método inverso*, o qual começa por “supor” a solução e mostrando que ela atende à equação biarmônica, e verificando quais as condições de contorno que são satisfeitas por essa solução.

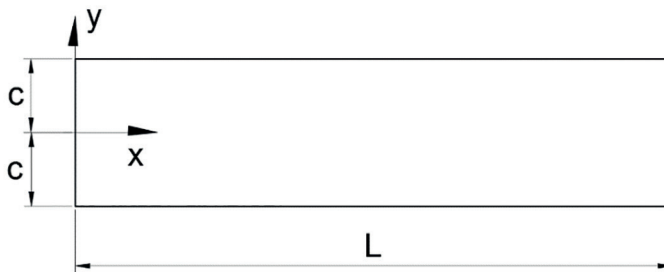


Figura 1.4

Como exemplo, considere-se a função

$$\varphi = \frac{3F}{4c} \left(xy - \frac{xy^3}{3c^2} \right) - \frac{P}{4c} y^2$$

Essa é uma função válida? Tem-se que:

$$H = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{3F}{2c^3}xy - \frac{P}{2c}$$

e, assim,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

provando que essa solução atende a $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$, sendo, portanto, uma função de tensão válida. Agora se deve determinar o problema para o qual essa é a solução, calculando as tensões no domínio mostrado na Fig. 1.4. Da função de tensão tem-se:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{3F}{2c^3}xy - \frac{P}{2c}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{3F}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

Determinando essas tensões ao longo de $y = \pm c$, $\tau_{xy} = 0$, verifica-se que essas fibras extremas podem representar as faces superior e inferior de uma viga sem carga aplicada. Ao longo de $x = 0$,

$$\sigma_x = -\frac{P}{2c},$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3F}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

equivalente à aplicação de uma força normal de compressão P e uma força cortante F na extremidade de uma viga em balanço, conforme a Fig. 1.5.

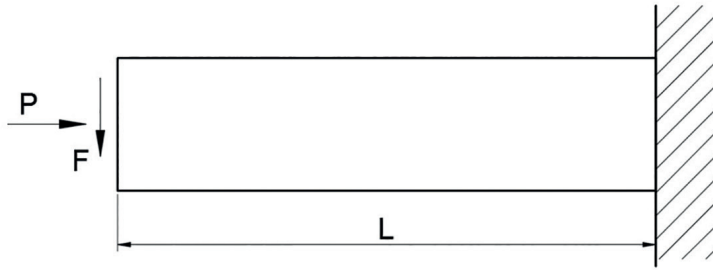


Figura 1.5

Devem ser notados os seguintes pontos:

1. a carga aplicada poderia ser considerada separadamente como uma compressão e uma força cortante; a solução é a *superposição* de duas funções que são separadamente soluções do problema; este é um exemplo do *princípio da superposição*, válido para a Teoria da Elasticidade Linear;
2. a força cortante tem uma distribuição parabólica na extremidade da viga; entretanto, devido ao *princípio de Saint-Venant*, a exata distribuição da força não é importante a uma certa distância do ponto de aplicação; assim, a solução a partir de uma pequena distância da extremidade da viga será a mesma, independentemente da verdadeira distribuição da força aplicada.

4.1 Calculando deslocamentos

Primeiro, procura-se uma função de tensão $\varphi(x, y)$ e determinam-se as tensões. A seguir, como as deformações são relacionadas com os deslocamentos, e as tensões são relacionadas com as deformações pela lei de Hooke, tem-se um caminho para se obter os deslocamentos. No caso de tensões planas tem-se a equação (1.9), da qual pode-se tirar, por exemplo, $\varepsilon_x(x, y)$, que proporciona o deslocamento u , que é dado por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x \quad (1.23)$$

que integrado dá:

$$u(x, y) = \int \varepsilon_x dx + A(y) \quad (1.24)$$

Nota-se que a “constante de integração” não é de fato constante, mas uma função somente da variável y . A razão disso é que ao diferenciar (1.24) com respeito a x para voltar a (1.23) a função $A(y)$ desaparecerá (realiza-se uma derivação parcial), e, portanto, deve-se cuidar para permitir todas as possibilidades.

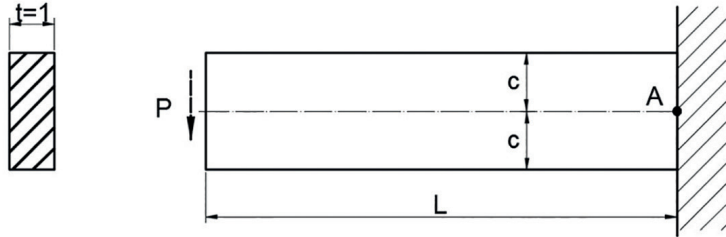


Figura 1.6

Um exemplo para esclarecer. A Fig. 1.6 mostra uma viga em balanço com uma força vertical P aplicada na extremidade livre. A função de tensão para este caso é

$$\varphi = \frac{3P}{4c}xy - \frac{1}{4} \frac{P}{c^3}xy^3$$

a qual fornece as tensões

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3}xy = -\frac{P}{I}xy,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) = -\frac{P}{I} \frac{(c^2 - y^2)}{2},$$

$$\sigma_y = 0$$

Aplicando a lei de Hooke, tem-se

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{Pxy}{EI}$$

que integrada dá

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + f(y)$$

da mesma forma, tem-se

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{\nu Pxy}{EI}$$

dando

$$v = -\frac{\nu Pxy^2}{2EI} + g(x)$$

Mas a lei de Hooke também dá

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Substituindo as expressões já derivadas para u e v nesta última equação, tem-se

$$-\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{dg(x)}{dx} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2)$$

Reunindo-se todos os termos envolvendo x em um termo $G(x)$ e todos os termos envolvendo y em um termo $F(y)$, pode-se escrever

$$F(y) + G(x) = K$$

onde

$$G(x) = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{dg(x)}{dx},$$

$$F(y) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Py^2}{2EI} - \frac{P}{2GI}y^2$$

Agora, pode-se considerar x constante e variar y . Isso equivale a dizer que $G(x)$ e K seriam constantes, implicando que $F(y)$ deve ser uma constante também

$$F(y) = e$$

Essa equação pode ser integrada para obter uma expressão para $f(y)$. Da mesma forma, podemos manter y constante e variar x , $F(y)$ e K são constantes, assim

$$G(x) = d$$

que pode ser integrada para se ter uma expressão para $g(x)$. A outra constante é

$$e + d = K = -\frac{Pc^2}{2IG}$$

Rearranjando, tem-se

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{Px^2}{2EI} + d,$$

$$\frac{df(y)}{dy} = -\frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{P}{2GI}y^2 + e$$

Integrando

$$g(x) = \frac{Px^3}{6EI} + dx + h,$$

$$f(y) = -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{P}{6GI}y^3 + ey + i$$

Os deslocamentos serão, então,

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{P}{6GI}y^3 + ey + i$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + dx + h$$

Finalmente, condições de contorno nos deslocamentos u e v podem ser introduzidas para eliminar constantes de integração não definidas. Para $x = L$ $y = 0$, implicando em $u = v = 0$, $i = 0$ e $h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dL$.

Para efeito de comparação com a Resistência dos Materiais, escrevemos a **linha elástica** como:

$$v(y = 0) = -\frac{Pl^3}{6EI} + \frac{Px^3}{6EI} + d(L - x)$$

Neste exemplo, a extremidade engastada da viga não se move nem roda, e a viga em si não se move como um corpo rígido. Para impor a condição de rotação nula no engaste temos 2 caminhos. O primeiro, ilustrado na Fig. 1.7 é dado por

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{em } x = L \text{ e } y = 0$$

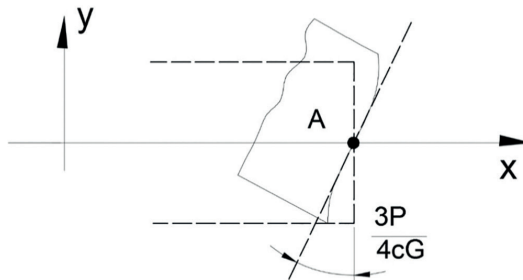


Figura 1.7

implicando em que

$$d = -\frac{PL^2}{2EI} \quad e \quad e = \frac{PL^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}$$

levando à expressão da linha elástica na forma

$$v(y = 0) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}$$

a qual fornece a flecha máxima na extremidade da viga com seu valor conhecido

$$v(x = 0, y = 0) = \frac{PL^3}{3EI}$$

O segundo caminho, ilustrado na Fig. 1.8, é dado por

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{em } x = L \text{ e } y = 0$$

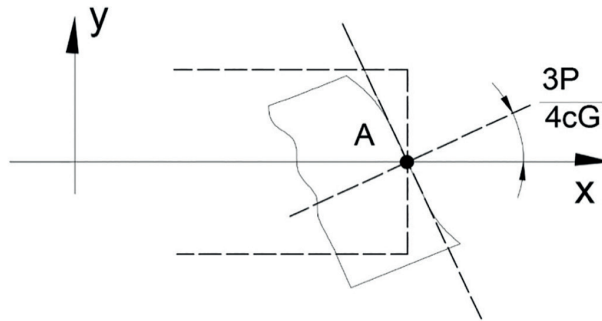


Figura 1.8

implicando em que

$$d = -\frac{PL^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG} \quad e \quad e = \frac{PL^2}{2EI}$$

levando à expressão da linha elástica na forma

$$v(y = 0) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2IG}(L - x)$$

a qual fornece a flecha máxima na extremidade da viga com seu valor corrigido pelo efeito da força cortante

$$v(x = 0, y = 0) = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{Pc^2L}{2IG}$$

4.2 Viga biapoiada com carga uniformemente distribuída

Para a chapa retangular longa biapoiada da Figura 1.9, de espessura unitária, altura $2c$, vão $2L$, sob carregamento distribuído uniforme q , considerada em estado plano de tensões, determinar o campo de tensões, deformações e deslocamentos (inclusive a flecha máxima). Desprezar peso próprio. Comentar os resultados.

Sugestão: partir da função de tensões (função de Airy)

$$\varphi(x, y) = \frac{q}{2I} \left[-\frac{c^3}{3} x^2 + \frac{c^2}{2} x^2 y - \frac{x^2 y^3}{6} + \left(\frac{L^2}{6} - \frac{c^2}{15} \right) y^3 + \frac{y^5}{30} \right]$$

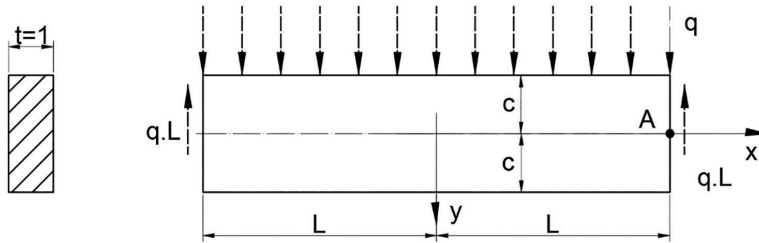


Figura 1.9

a) Cálculo das tensões

A função sugerida satisfaz $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$, levando a

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{q}{2I} \left[(L^2 - x^2)y + \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{q}{2I} (c^2 - y^2)x \end{aligned}$$

funções que satisfazem as condições de contorno na face superior e inferior

$$\tau_{xy}(y = \pm c) = 0 \quad \sigma_y(y = +c) = 0 \quad \sigma_y(y = -c) = -q$$

e nas extremidades $x = \pm L$

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \mp qL \quad \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0 \quad \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0$$

Nota-se que σ_x tem duas parcelas, a primeira, a mesma que a obtida na Resistência dos Materiais e a segunda, uma correção que é pequena para vigas longas em relação à altura da seção. Também se deve notar que as forças aplicadas nas

extremidades devem ser distribuídas conforme as funções obtidas. Essa condição pode ser relaxada tendo em vista o Princípio de Saint-Venant.

b) Cálculo dos deslocamentos

Os deslocamentos u e v podem ser calculados aplicando a lei Hooke para obter as deformações e integrá-las. Levando em conta que no eixo da seção no meio da viga ($x=0, y=0$) o deslocamento horizontal é nulo, por simetria, e o deslocamento vertical é a flecha δ no meio do vão, obtém-se

$$u = \frac{q}{2EI} \left[\left(L^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + vx \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right]$$

$$v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + v \left[(L^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right] \right\}$$

$$-\frac{q}{2EI} \left[\frac{L^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} v \right) c^2 x^2 \right] + \delta$$

Desta última expressão encontra-se a linha elástica:

$$v(y=0) = \delta - \frac{q}{2EI} \left[\frac{L^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} v \right) c^2 x^2 \right]$$

Considerando os deslocamentos verticais nas extremidades nulos (viga biapoiada) encontra-se a flecha máxima:

$$\delta = \frac{5}{24} \frac{qL^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{L^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{v}{2} \right) \right]$$

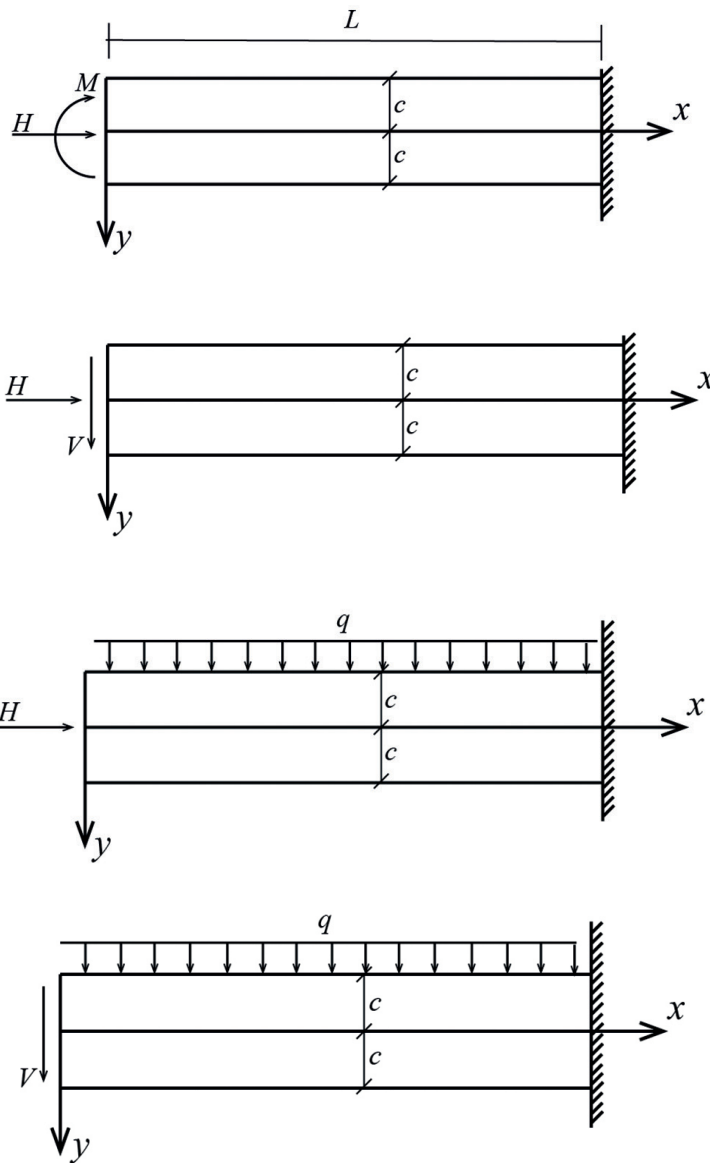
O fator à frente do colchete é a flecha usual da Resistência dos Materiais e o colchete em si é a correção devida à força cortante. Derivando a equação da linha elástica duas vezes em x , encontramos a expressão da curvatura:

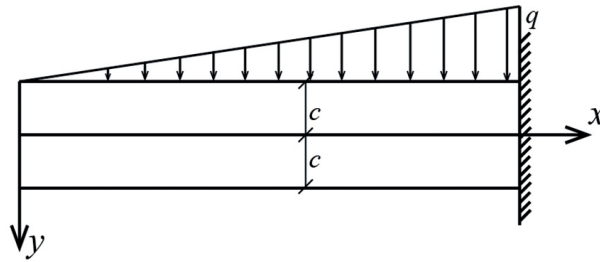
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} |_{y=0} = \frac{q}{EI} \left[\frac{L^2 - x^2}{2} + c^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{v}{2} \right) \right]$$

a qual não é exatamente proporcional ao momento fletor $\frac{q(L^2 - x^2)}{2}$ como deveria ser pela Resistência dos Materiais. Há uma correção.

4.3 Exemplos propostos

As cinco figuras a seguir representam chapas retangulares de espessura unitária, comprimento L , altura $2c$, módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν .





Determinar, para cada uma, os campos de tensões e de deslocamentos, usando Funções de Airy em forma de polinômios.

4.4 Solução dos exercícios propostos

Nesta seção apresenta-se a resolução dos problemas propostos com base na metodologia semi-inversa, que consiste na resolução dos exercícios a partir das relações provenientes da mecânica dos sólidos, em conjunto com as funções de Airy apresentadas anteriormente. Para isso, assume-se que todos os problemas propostos se encontram no regime linear, onde é válida a aplicação do princípio da superposição de respostas.

Apresenta-se nesta seção o desenvolvimento das funções de Airy, adaptadas de modo a respeitar a equação biarmônica em coordenadas retangulares, dada por:

$$\nabla^4(\varphi) = d^4\varphi/dx^4 + 2 d^4\varphi/dx^2dy^2 + d^4\varphi/dy^4 = 0$$

As funções polinomiais variando-se entre o segundo e quinto grau são apresentadas a seguir:

$$\varphi_2 = a_2x^2/2 + b_2xy + c_2y^2/2$$

$$\varphi_3 = a_3x^3/6 + b_3x^2y/2 + c_3xy^2/2 + d_3y^3/6$$

$$\varphi_4 = a_4x^4/12 + b_4x^3y/6 + c_4x^2y^2/2 + d_4xy^3/6 + e_4y^4/12$$

$$\varphi_5 = a_5x^5/20 + b_5x^4y/12 + c_5x^3y^2/6 + d_5x^2y^3/6 + e_4xy^4/12 + f_5y^5/20$$

Uma vez conhecido o formato genérico dos polinômios (relações acima), é possível determinar as tensões atuantes no modelo, dadas por:

Polinômio de 2° grau.

$$\sigma_x = d^2\varphi/dy^2 = c_2$$

$$\sigma_y = d^2\varphi/dx^2 = a_2$$

$$\tau_{xy} = -d^2\varphi/dxdy = -b_2$$

Polinômio de 3° grau.

$$\sigma_x = c_3x + d_3y$$

$$\sigma_y = a_3x + b_3y$$

$$\tau_{xy} = -(b_3x + c_3y)$$

Polinômio de 4° grau.

$$\sigma_x = c_4x^2 + d_4xy + e_4y^2$$

$$\sigma_y = a_4x^2 + b_4xy + c_4y^2$$

$$\tau_{xy} = -(b_4x^2/2 + 2c_4xy + d_4y^2/2)$$

onde os coeficientes a_4, c_4 e e_4 devem respeitar a seguinte relação,

$$a_4 + c_4/2 + e_4 = 0$$

Polinômio de 5° grau.

$$\sigma_x = c_5x^3/3 + d_5x^2y + e_5xy^2 + f_5y^3$$

$$\sigma_y = a_5x^3 + b_5x^2y + c_5xy^2 + d_5y^3/3$$

$$\tau_{xy} = -(b_5x^3/3 + c_5x^2y + d_5xy^2 + e_5y^3/3)$$

De modo similar ao apresentado anteriormente, temos que os coeficientes do polinômio de quinta ordem devem respeitar a seguintes restrições:

$$b_5 + 2d_5 + 3f_5 = 0$$

$$e_5 + 2c_5 + 3a_5 = 0$$

Finalmente, temos por definição, que as relações entre tensão e deformação para o regime elástico linear são dadas por:

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu\sigma_y]/E$$

$$\varepsilon_y = [\sigma_y - \nu\sigma_x]/E$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G = 2(1 + \nu)\tau_{xy}/E$$

E que as deformações são dadas por:

$$\varepsilon_x = \partial u/\partial x$$

$$\varepsilon_y = \partial v/\partial y$$

$$\gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x$$

Exemplo 1: M e H na extremidade esquerda da chapa

Em $x = 0$

$$N = \int_{-c}^c \sigma_x dy = H$$

$$M = \int_{-c}^c \sigma_x y dy = M$$

Em $x = L$

$$u(L, 0) = 0$$

$$v(L, 0) = 0$$

$$\partial v(L, 0)/\partial x = 0$$

Em $y = \pm c$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = 0$$

Assumindo que a tensão σ_x da extremidade oposta ao engaste devido à força horizontal H possa ser aproximada por:

$$\sigma_x \sim H/2c$$

Temos que a função de Airy necessária para descrever este problema deve apresentar um valor de tensão nulo para as componentes σ_y e γ_{xy} , enquanto que a componente σ_x deve ser constante, de valor $H/2c$, logo:

$$\varphi_H = c_2 y^2 / 2$$

onde $c_2 = H/2c$. Uma vez conhecidas as componentes de tensão, assim como a função de Airy que rege o problema, temos que o campo de deformações será dado por:

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x = [\sigma_x - \nu \sigma_y] / E = H / 2Ec$$

$$\varepsilon_y = \partial v / \partial y = [\sigma_y - \nu \sigma_x] / E = -\nu H / 2Ec$$

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = \tau_{xy} / G = 0$$

e os deslocamentos serão

$$\begin{aligned} u &= Hx / 2Ec + f(y) \\ v &= -\nu Hy / 2Ec + g(x) \end{aligned}$$

Além disso, temos que da equação de deformação angular,

$$df(y)/dy + dg(x)/dx = 0$$

A relação obtida nessa equação só será uma igualdade caso ambas as derivadas sejam constantes e de valor complementar, isto é, $d + e = 0 \rightarrow d = -e$. Da aplicação das condições de contorno, obtém-se:

$$\begin{aligned} u &= Hx / 2Ec + dy + f \\ v &= -\nu Hy / 2Ec + ex + g \end{aligned}$$

com

$$u(L, 0) = 0 \rightarrow f = -HL / 2Ec$$

$$v(L, 0) = 0 \rightarrow eL = -g$$

$$\partial v(L, 0) / \partial x = 0 \rightarrow e = 0 \therefore g = d = 0$$

Portanto,

$$u = \frac{H}{2Ec}x - \frac{HL}{2Ec}$$

$$v = -\frac{\nu H}{2Ec}y$$

De maneira semelhante ao realizado na primeira etapa, estuda-se uma viga engastada sob ação de um momento M aplicado à sua extremidade oposta. A resposta em função do campo de tensões será descrita por um polinômio de terceiro grau com termo d_3 não nulo, conforme mostrado abaixo,

$$\varphi_M = d_3 y^3 / 6$$

A escolha de tal polinômio é corroborada pelo fato de que para chapas retangulares, tal polinômio nos fornece uma situação de flexão pura, cuja tensão normal é constante ao longo do eixo horizontal e varia linearmente no eixo y , através da seguinte relação: $\sigma_x = d_3 y$ (ver Timoshenko, 1951). Outra possível estratégia consiste na determinação dos campos de tensão atuantes na estrutura devido à aplicação do momento, e com isso determinar os termos do polinômio de Airy necessários. A constante d_3 é determinada através do seguinte procedimento:

$$M = \int_{-c}^c \sigma_x y dy = \int_{-c}^c (d_3 y) y dy = d_3 (y^3/3)|_{-c}^c = 2d_3 c^3 / 3$$

Logo,

$$d_3 = 3M/2c^3$$

Assim, temos que a função de Airy que rege o problema é dada por:

$$\varphi_M = 3My^3/12c^3 = My^3/6I$$

onde $I = 2c^3/3$ representa o momento de inércia da seção. Uma vez conhecida a função de Airy, temos que as componentes de tensão são dadas por:

$$\sigma_x = \partial^2 \varphi / \partial y^2 = My/I$$

$$\sigma_y = \partial^2 \varphi / \partial x^2 = 0$$

$$\tau_{xy} = \partial^2 \varphi / \partial x \partial y = 0$$

e, portanto, as deformações e deslocamentos serão dados por:

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x = [\sigma_x - \nu \sigma_y] / E = My / EI$$

$$\varepsilon_y = \partial v / \partial y = [\sigma_y - \nu \sigma_x] / E = -\nu My / EI$$

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = \tau_{xy} / G = 0$$

resultando

$$u = Mxy / EI + f(y)$$

$$v = -\nu My^2 / 2EI + g(x)$$

Ao se integrar essas equações e aplicar as condições de contorno referentes ao engaste obtém-se:

$$df(y) / dy + Mx / EI + dg(x) / dx = 0$$

É possível inferir que a igualdade só é obtida caso as funções exclusivas de x e y sejam também constantes e complementares, logo

$$f(y) = dy + f$$

$$g(x) = ex - Mx^2 / 2EI + g$$

e, assim,

$$u = \frac{M}{EI} xy + \frac{ML}{EI} y$$

$$v = -\frac{\nu M}{2EI} y^2 + \frac{ML}{EI} x - \frac{M}{2EI} x^2 - \frac{ML^2}{2EI}$$

Pelo princípio da superposição de efeitos, temos que os campos de deslocamentos do problema como um todo serão dados por:

$$u_g = \frac{H}{2Ec}x - \frac{HL}{2Ec} + \frac{M}{EI}xy + \frac{ML}{EI}y$$

$$v_g = -\frac{\nu H}{2Ec}y - \frac{\nu M}{2EI}y^2 + \frac{ML}{EI}x - \frac{M}{2EI}x^2 - \frac{ML^2}{2EI}$$

Exemplo 2: H e V na extremidade esquerda da chapa

Em $x = 0$

$$N = \int_{-c}^c \sigma_x dy = H$$

$$V = -\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = V$$

Em $x = L$

$$u(L, 0) = 0$$

$$v(L, 0) = 0$$

$$\partial v(L, 0)/\partial x = 0$$

Em $y = \pm c$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = 0$$

De modo semelhante ao realizado para o exemplo 1, faz-se uma aproximação para a carga horizontal H , onde temos que a função de Airy correspondente deve apresentar um valor de tensão nulo para as componentes σ_y e τ_{xy} e, enquanto que a componente σ_x deve ser constante, de valor $H/2c$, logo:

$$\varphi_H = Hy^2/4c$$

e, portanto, temos que o campo de deslocamentos para uma situação de engaste será dado por:

$$u = \frac{H}{2Ec} x - \frac{HL}{2Ec}$$

$$v = -\frac{\nu H}{2Ec} y$$

O processo de determinação para a carga vertical V é o mesmo apresentado em Timoshenko (1951) em seu livro “Theory of Elasticity”, onde se utiliza uma combinação da função de quarta ordem – assumindo-se apenas d_4 não nulo – e de segunda ordem com b_2 não nulo – caso de cisalhamento puro – para a descrição de um estado de tensão correspondente. Assim,

$$\varphi_V = d_4 xy^3/6 + b_2 xy$$

e, de modo análogo, as seguintes componentes de tensão,

$$\sigma_x = d_4 xy$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -b_2 - d_4 y^2/2$$

Impondo $y = \pm c$ livres de carregamento, e que a soma das tensões de cisalhamento atuantes na seção $x = 0$ deva ser igual a V , obtém-se:

$$b_2 = 3V/4c = Vc^2/2I$$

$$d_4 = -2b_2/c^2 = -3V/2c^3 = -V/I$$

Assim, tem-se que a função de Airy referente ao problema de uma viga engastada sob ação de carga concentrada V é dada por:

$$\varphi_V = -Vxy^3/6I + Vc^2xy/2I$$

e, portanto, que as componentes de tensão são dadas por:

$$\sigma_x = -Vxy/I$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -V(c^2 - y^2)/2I$$

A determinação do campo de deslocamento é dada por:

$$\varepsilon_x = -Vxy/EI$$

$$\varepsilon_y = \nu Vxy/EI$$

$$\gamma_{xy} = -V(c^2 - y^2)/2IG$$

Finalmente, tem-se que as componentes de deslocamento serão dadas por:

$$u = -Vx^2y/2EI + f(y)$$

$$v = \nu Vxy^2/2EI + g(x)$$

e,

$$-\frac{Vx^2}{2EI} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Vy^2}{2EI} + \frac{dg(x)}{dx} = -\frac{V(c^2 - y^2)}{2IG}$$

De modo análogo ao realizado ao exemplo 1, obtém-se:

$$u = -\frac{V}{2EI}x^2y - \frac{\nu V}{6EI}y^3 + \frac{V}{6GI}y^3 + ey + g$$

$$v = \frac{\nu V}{2EI}xy^2 + \frac{V}{6EI}x^3 + dx + h$$

Aplicando-se as condições de contorno referentes ao engaste da chapa:

$$e + d = -Vc^2/2IG$$

$$g = 0$$

$$h = -VL^3/6EI - dl$$

$$d = -VL^2/2EI$$

Substituindo-se esses valores nas equações referentes aos campos de deslocamentos, obtém-se a resposta em deslocamentos para a aplicação de um carregamento vertical à extremidade oposta ao engaste.

$$u = -\frac{V}{2EI}x^2y - \frac{\nu V}{6EI}y^3 + \frac{V}{6GI}y^3 + \left(\frac{VL^2}{2EI} - \frac{Vc^2}{2IG}\right)y$$

$$v = \frac{\nu V}{2EI}xy^2 + \frac{V}{6EI}x^3 - \frac{VL^2}{2EI}x + \frac{VL^3}{3EI}$$

Pelo princípio da superposição de efeitos, tem-se que os campos de deslocamentos do problema como um todo serão dados por:

$$u_g = \frac{H}{2Ec}x - \frac{HL}{2Ec} - \frac{V}{2EI}x^2y - \frac{\nu V}{6EI}y^3 + \frac{V}{6GI}y^3 + \left(\frac{VL^2}{2EI} - \frac{Vc^2}{2IG}\right)y$$

$$v_g = -\frac{\nu H}{2Ec}y + \frac{\nu V}{2EI}xy^2 + \frac{V}{6EI}x^3 - \frac{VL^2}{2EI}x + \frac{VL^3}{3EI}$$

Exemplo 3: H na extremidade esquerda e carga uniformemente distribuída q na face superior

Em $x = 0$

$$N = \int_{-c}^c \sigma_x dy = H$$

$$M = \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0$$

Em $x = L$

$$u(L, 0) = 0$$

$$v(L, 0) = 0$$

$$\partial v(L, 0)/\partial x = 0$$

Em $y = \pm c$

$$(\sigma_x)_{y=\pm c} = 0$$

$$(\sigma_y)_{y=-c} = -q$$

$$(\sigma_y)_{y=+c} = 0$$

O processo matemático desenvolvido para obtenção da função de Airy referente ao carregamento horizontal H foi abordado ao longo do exemplo 1, por este motivo, omite-se o desenvolvimento dela nesta seção, apresentando-se apenas seu campo de deslocamentos

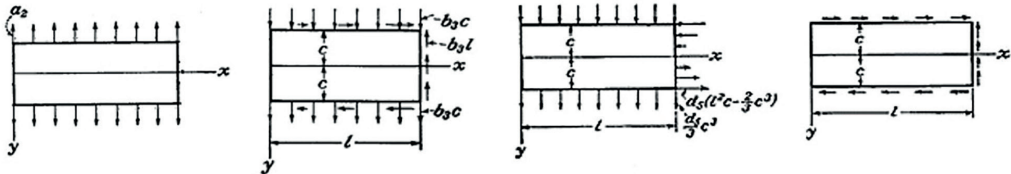
$$u = \frac{H}{2Ec} x - \frac{HL}{2Ec}$$

$$v = -\frac{\nu H}{2Ec} y$$

A descrição do campo de tensão obtido da aplicação de um carregamento uniforme na seção superior é dada pela seguinte função:

$$\varphi_q = \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{d_3}{6} y^3 + \frac{d_5}{6} x^2 y^3 - \frac{d_5}{30} y^5$$

Tal função é obtida da superposição dos campos de tensão de um polinômio de quinta ordem – considerando-se apenas o termo d_5 não nulo – com as soluções dos polinômios de segunda (não nulo) e terceira ordem (b_3 e d_3 não nulos). Sendo a composição de soluções apresentada a seguir.



Dessas relações, é possível inferir que:

$$a_2 = -q/2 = -qc^3/3I$$

$$b_3 = 3q/4c = qc^2/2I$$

$$d_3 = -3q/10c = -qc^2/5I$$

$$d_5 = -3q/4c^3 = -q/2I$$

A dedução de tal polinômio é apresentada em Timoshenko (1951). A partir das funções apresentadas, pode-se caracterizar o polinômio de Airy deste problema como:

$$\varphi_q = -\frac{qc^3}{3I} \frac{x^2}{2} + \frac{qc^2}{2I} \frac{x^2 y}{2} - \frac{qc^2}{5I} \frac{y^3}{6} - \frac{q}{2I} \left(\frac{x^2 y^3}{6} - \frac{y^5}{30} \right)$$

e, portanto, que as componentes de tensão são dadas por:

$$\sigma_x = -\frac{qc^2}{5I} y - \frac{q}{2I} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{qc^3}{3I} + \frac{qc^2}{2I} y - \frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} y^3 \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{qc^2}{2I} x - \frac{q}{2I} (xy^2)$$

A determinação do campo de deformações é dada por:

$$\varepsilon_x = (q(c^3 v / 3EI - c^2 v y / 2EI + v y^3 / 6EI - c^2 y / 5EI - x^2 y / 2EI + y^3 / 3EI))$$

$$\varepsilon_y = (q(c^2 v y / 5EI + v x^2 y / 2EI - v y^3 / 3EI + c^2 y / 2EI - c^3 / 3EI - y^3 / 6EI))$$

$$\gamma_{xy} = (qc^2 x / 2I - qxy^2 / 2I) / G$$

de onde obtém-se:

$$u = (qx(c^3 v / 3EI - c^2 v y / 2EI + v y^3 / 6EI - c^2 y / 5EI - x^2 y / 6EI + y^3 / 3EI)) + f(y)$$

$$v = (qy(c^2 v y / 10EI + v x^2 y / 4EI - v y^3 / 12EI + c^2 y / 4EI - c^3 / 3EI - y^3 / 24EI)) + g(x)$$

e

$$q \left(-\frac{c^2 v x}{2EI} + \frac{v x y^2}{2EI} - \frac{c^2 x}{5EI} - \frac{x^3}{6EI} + \frac{x y^2}{EI} \right) + \frac{df(y)}{dy} + \frac{q v x y^2}{2EI} + \frac{dg(x)}{dx} = \frac{q c^2 x}{2GI} - \frac{q x y^2}{2GI}$$

Pelo procedimento apresentado em “Theory of Elasticity”, obtém-se a seguinte relação para o campo de deslocamento:

$$u = (qx(c^3v/3EI - c^2vy/2EI + vy^3/6EI - c^2y/5EI - x^2y/6EI + y^3/3EI))$$

$$v = (qy(c^2vy/10EI + vx^2y/4EI - vy^3/12EI + c^2y/4EI - c^3/3EI - y^3/24EI)) + g(x)$$

onde

$$g(x) = -\left(\frac{q}{2EI}\right)\left(\left(1 + \frac{v}{2}\right)c^2x^2 - \frac{c^2x^2}{5}\right) + \delta = -\left(\frac{q}{2EI}\right)\left(\left(1 + \frac{v}{2}\right)c^2x^2 - \frac{c^2x^2}{5}\right) + \left(\frac{5qL^4}{24EI}\right)\left(1 + \frac{12c^2}{5L^2}\left(\frac{4}{5} + \frac{v}{2}\right)\right)$$

Finalmente, tem-se que a resposta em deslocamento para o exercício proposto é dada pela superposição dos efeitos, assim:

$$u = u_H + u_q \text{ \& } v = v_H + v_q$$

Exemplo 4: V na extremidade esquerda e carga uniformemente distribuída q na face superior

Em $x = 0$

$$V = \int_{-c}^c \tau_{xy} dy = V$$

$$M = \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0$$

Em $x = L$

$$u(L, 0) = 0$$

$$v(L, 0) = 0$$

$$\partial v(L, 0)/\partial x = 0$$

Em $y = \pm c$

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = 0$$

$$(\sigma_y)_{y=-c} = -q$$

$$(\sigma_y)_{y=+c} = 0$$

Uma vez conhecido o comportamento do campo de tensões e deformações de ambas situações, a resposta final será dada pela composição de ambas. Entretanto, devido à grande complexidade da solução, apresenta-se a mesma por etapas,

$$\varphi_V = -Vxy^3/6I + Vc^2xy/2I$$

$$\varphi_q = -\frac{qc^3}{3I} \frac{x^2}{2} + \frac{qc^2}{2I} \frac{x^2y}{2} - \frac{qc^2}{5I} \frac{y^3}{6} - \frac{q}{2I} \left(\frac{x^2y^3}{6} - \frac{y^5}{30} \right)$$

$$\varphi = \varphi_V + \varphi_q$$

As tensões são dadas por:

$$\sigma_x = -\frac{Vxy}{I} - \frac{qc^2}{5I}y - \frac{q}{2I} \left(x^2y - \frac{2}{3}y^3 \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{qc^3}{3I} + \frac{qc^2}{2I}y - \frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3}y^3 \right)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{V(c^2 - y^2)}{2I} + \frac{qc^2}{2I}x - \frac{q}{2I}(xy^2)$$

e, finalmente, após a aplicação das condições de contorno, tem-se:

$$u_V = -\frac{V}{2EI}x^2y - \frac{vV}{6EI}y^3 + \frac{V}{6GI}y^3 + \left(\frac{VL^2}{2EI} - \frac{Vc^2}{2IG} \right) y$$

$$v_V = \frac{vV}{2EI}xy^2 + \frac{V}{6EI}x^3 - \frac{VL^2}{2EI}x + \frac{VL^3}{3EI}$$

$$u_q = \left(qx(c^3v/3EI - c^2vy/2EI + vy^3/6EI - c^2y/5EI - x^2y/6EI + y^3/3EI) \right)$$

$$v_q = (qy(c^2vy/10EI + vx^2y/4EI - vy^3/12EI + c^2y/4EI - c^3/3EI - y^3/24EI)) + g(x)$$

onde

$$g(x) = -\left(\frac{q}{2EI} \right) \left(\left(1 + \frac{v}{2} \right) c^2x^2 - \frac{c^2x^2}{5} \right) + \left(\frac{5qL^4}{24EI} \right) \left(1 + \frac{12c^2}{5L^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{v}{2} \right) \right)$$

E assim,

$$\begin{aligned}u &= u_V + u_q \\v &= v_V + v_q\end{aligned}$$

Exemplo 5: carga linearmente variável na face superior

Em $y = \pm c$

$$\begin{aligned}(\tau_{xy})_{y=\pm c} &= 0 \\(\sigma_y)_{y=-c} &= -qx \\(\sigma_y)_{y=+c} &= 0\end{aligned}$$

Partindo-se de uma abordagem mista, que leva em conta fundamentos provenientes da mecânica dos sólidos, além de considerar válida a superposição de efeitos, uma possível função de Airy terá um grau superior ao obtido da aplicação do carregamento uniforme q , assim busca-se uma função de sexta ordem que apresente termos cruzados, isto é, termos contendo $x^n y^m$. Assim, assume-se inicialmente um polinômio dado por:

$$\varphi = b_2xy + \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{b_4}{6}x^3y + \frac{d_4}{6}xy^3 + \frac{d_6}{6}x^3y^3 + \frac{f_6}{20}xy^5$$

Tal equação só é considerada válida se, e somente se,

$$f_6 = -2d_6$$

Logo,

$$\varphi = b_2xy + \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{b_4}{6}x^3y + \frac{d_4}{6}xy^3 + \frac{d_6}{2}y^3\left(\frac{x^3}{3} + \frac{xy^2}{5}\right)$$

Aplicando as condições de contorno referentes às fibras inferiores e superiores, obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d_4xy + d_6(x^3y + 2xy^3) \\ \sigma_y &= a_3x + b_4xy + d_6xy^3 \\ \tau_{xy} &= b_2 + \frac{1}{2}(b_4x^2 + d_4y^2) + \frac{d_6}{2}(3x^2y^2 + y^4)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$a_3 = q/2$$

$$b_2 = -\frac{q}{2}\left(1 + \frac{c}{4}\right)$$

$$b_4 = -3q/4c$$

$$d_4 = \frac{q}{2c^2}$$

$$d_6 = q/4c^3$$

Substituindo-se as constantes acima na equação, obtém-se:

$$\varphi = -\frac{q}{2}\left(1 + \frac{c}{4}\right)xy + \frac{q}{12}x^3 - \frac{3q}{8c}x^3y + \frac{q}{12c^2}xy^3 + \frac{q}{8c^3}y^3\left(\frac{x^3}{3} + \frac{xy^2}{5}\right)$$

Aplicando as condições de contorno referentes às fibras inferiores e superiores, obtém-se

$$\sigma_x = \frac{q}{2c^2}xy + \frac{q}{4c^3}(x^3y + 2xy^3)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2}x + -\frac{3q}{4c}xy + \frac{q}{4c^3}xy^3$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{2}\left(1 + \frac{c}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{3q}{4c}x^2 + \frac{q}{2c^2}y^2\right) + \frac{q}{8c^3}(3x^2y^2 + y^4)$$

Finalmente, o campo de deslocamentos é obtido por:

$$u = (qx^2(4cy - 4c^3v - 2vy^3 + x^2y + 4y^3 + 18c^2vy))/(16Ec^3) + f(y)$$

$$v = -(qxy(18c^2y + 2vy^3 - 8c^3 - y^3 + 2vx^2y + 4cvy))/(16Ec^3) + g(x)$$

e da relação $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x = \tau_{xy}/G$, obtém-se

$$\frac{1}{16Ec^3}(qx^2(4c + 18c^2v - 6vy^2 + x^2 + 12y^2)) - \frac{1}{16Ec^3}(qy(18c^2y + 2vy^3 - 8c^3 - y^3 + 2vx^2y + 4cvy)) - \frac{1}{G}\left(\frac{qy^2}{4c^2} - \frac{9qx^2}{8c} - \frac{q(c/4 + 1)}{2} + \frac{qy^4}{20c^3} + \frac{3qy^2(x^2 + y^2/5)}{8c^3}\right) - \frac{niqx^2y^2}{4Ec^3} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = 0$$

Observa-se que a equação acima só é válida, se e somente se, todos os termos forem constantes. Resolvendo o sistema é possível obter os termos restantes da equação de deslocamento.

5. CHAPAS EM COORDENADAS POLARES

5.1 Tensões em coordenadas polares

Frequentemente deseja-se resolver problemas que têm alguma forma de simetria rotacional (por exemplo, encontrar a tensão em um tubo circular). Tais problemas ficam mais simples se as equações forem escritas em coordenadas polares. Considere-se um pequeno elemento, como mostrado na Fig. 1.10, então as tensões serão descritas em termos de componentes radial e tangencial (r e θ). Podem ainda ser consideradas forças de massa R e S . Os lados do elemento valem dr e $r d\theta$, de forma que o equilíbrio de forças na direção radial é

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr\right)(r + dr)d\theta - \sigma_r r d\theta - \left(2\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta\right)\frac{d\theta}{2}dr + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta dr + R r d\theta dr = 0$$

Dividindo por r e desconsiderando infinitésimos de ordem superior, obtém-se a equação de equilíbrio na direção radial:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad (1.25)$$

Da mesma forma a consideração de forças na direção tangencial leva a equação de equilíbrio na direção tangencial:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S = 0 \quad (1.26)$$

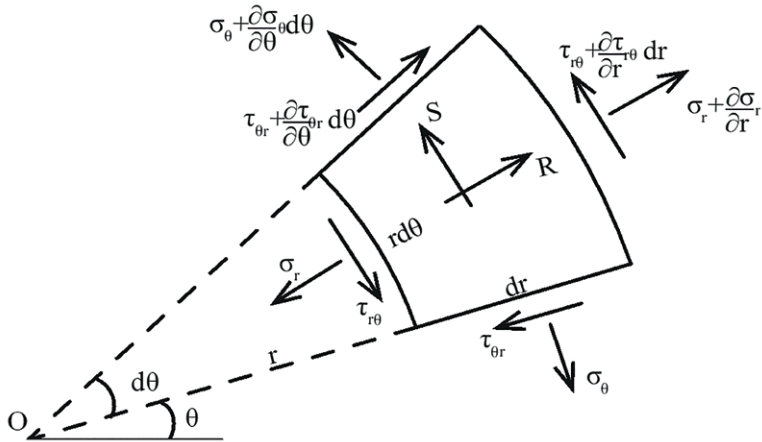


Figura 1.10

Para resolver essas equações procuram-se funções de tensão tais que

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.27)$$

Em coordenadas polares,

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

levando a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi = 0 \quad (1.28)$$

com as componentes de tensão dadas por

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \quad (1.29)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$$

Coordenadas polares são muito úteis para resolver problemas de elasticidade de flexão, furos circulares, tubos e aplicação pontual de forças.

5.2 Deformações em coordenadas polares

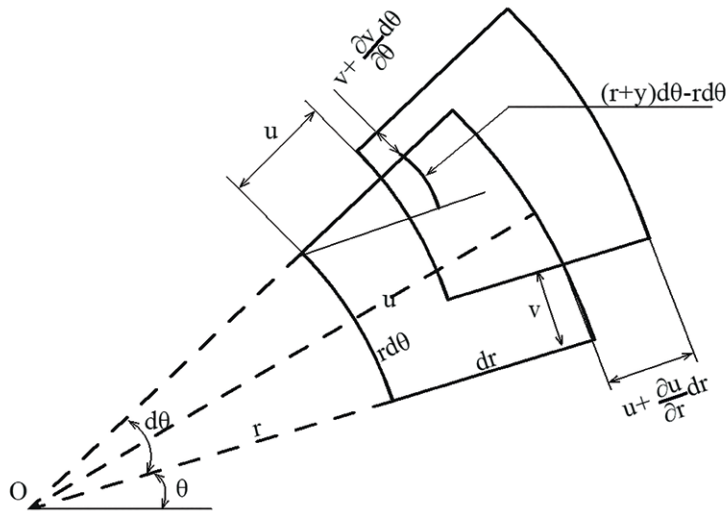


Figura 1.11

As deformações longitudinais em coordenadas polares podem ser escritas a partir da observação da Fig. 1.11:

$$\epsilon_r = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial r} dr - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1.30)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{(r + u)d\theta - rd\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

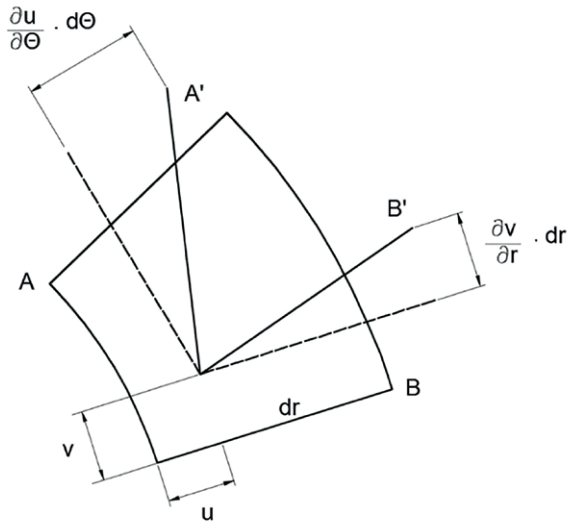


Figura 1.12

Observando a Fig. 1.12, obtém-se a distorção:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{d\theta}{rd\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{dr}{dr} - \frac{v}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (1.31)$$

5.3 Relações entre coordenadas polares e cartesianas

Ao passar de coordenadas cartesianas para polares, introduz-se um outro tipo de transformação de coordenadas.

Em coordenadas cartesianas, trata-se com as direções x e y . Nas polares, trata-se de direções radial e tangencial, que são também ortogonais. Por isso, relações entre propriedades em um ponto que não contém derivadas espaciais são muito similares. Por exemplo, a lei de Hooke se escreve:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G} \end{aligned} \quad (1.32)$$

A relação entre as componentes de tensão nos dois sistemas de coordenadas é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}\tag{1.33}$$

5.4 Tensões em um tubo de paredes grossas

Considerem-se as tensões nas paredes de um tubo sob pressão interna p_i e externa p_o . Nota-se, primeiro, que este é um problema de estado plano de deformações. Além disso, o caso é simétrico com respeito ao eixo do tubo, de forma que sendo essa a origem das coordenadas polares, então qualquer solução será função apenas de r .

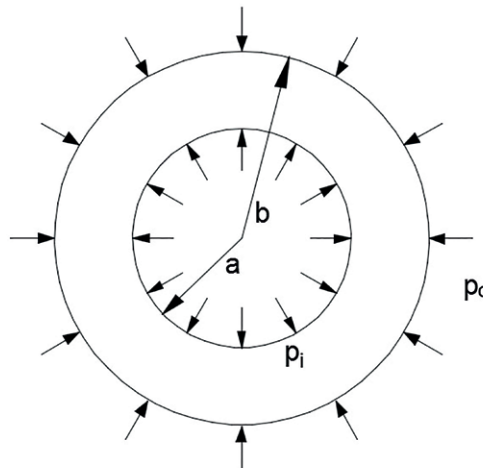


Figura 1.13

Adotando uma função de tensão dependente só de r , a equação (1.27) fica

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

uma equação diferencial ordinária. Sua solução geral é

$$\varphi = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D\tag{1.34}$$

Tomando $B = 0$ e calculando obtém-se

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C$$

Impondo as condições de contorno, as pressões internas (em $r = a$) e externa (em $r = b$), tem-se

$$\begin{aligned} -p_i &= \frac{A}{a^2} + 2C, \\ -p_0 &= \frac{A}{b^2} + 2C, \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2}, \\ C &= \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{2(b^2 - a^2)} \end{aligned}$$

5.5 Solução geral para simetria polar

Em coordenadas polares em 2D, se o problema tem simetria rotacional com respeito à origem, a função de tensão só depende do raio e tem-se uma equação diferencial ordinária. A solução geral tem quatro constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições de contorno. Se forem determinadas as tensões tem-se:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \log r) + 2C \quad (1.35)$$

Quando $r = 0$ aparece uma *singularidade*, pois $\log(0)$ não é definido. Se o problema tem um orifício na origem (como no caso do tubo) isto não ocorre. Entretanto, se não há um furo na origem, os 2 primeiros termos da tensão são singulares. Como a tensão não pode ser infinita em nenhum ponto do corpo, conclui-se que $A = B = 0$. Assim, para uma placa sem um furo na origem, há apenas uma solução possível para a distribuição de tensões simétrica em relação à origem, $\sigma_r = \text{constante}$.

5.6 O método da separação de variáveis

Uma boa parte da Teoria da Elasticidade recai na solução de equações envolvendo derivadas parciais de uma função de 2 ou mais variáveis. Muitos métodos foram desenvolvidos para essa tarefa, tanto numéricos (como o Método dos Elementos Finitos) como analíticos. Um deles é o chamado *método da separação de variáveis*. Nele assumimos que a solução da equação diferencial a derivadas parciais é dada pelo produto de 2 funções, cada uma dependente de apenas uma das variáveis. Ou seja:

$$\varphi(r, \theta) = R(r)\theta(\theta) \quad (1.36)$$

Se esta função for substituída na equação diferencial, com frequência ela se divide em seções separadas que podem ser resolvidas separadamente. Considere-se que

$$\theta(\theta) = \cos 2\theta$$

que substituída na equação diferencial resulta em

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{4}{r^2} R\right) \cos 2\theta = 0$$

que deve se verificar para qualquer valor de θ , de onde conclui-se que

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{4}{r^2} R\right) = 0 \quad (1.37)$$

A solução geral dessa equação diferencial ordinária é

$$R(r) = Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D$$

e assim, a função de tensão completa é

$$\varphi(r, \theta) = \left(Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D\right) \cos 2\theta \quad (1.38)$$

Dela podem-se calcular as tensões:

$$\sigma_r = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta \quad (1.39)$$

$$\sigma_\theta = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right) \sin 2\theta$$

A existência de termos com o raio no denominador implica em uma singularidade na origem. Portanto, essa solução se presta a problemas de chapas com um orifício na origem. O termo $\cos 2\theta$ implica em simetria com relação aos eixos x e y .

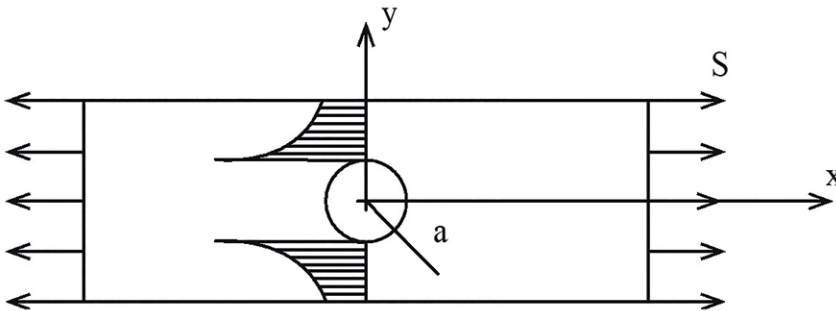


Figura 1.14

Resolve-se, a seguir, analiticamente, o problema de encontrar as tensões em uma chapa retangular sob condições de contorno na forma de tração uniforme S na direção do eixo x , nas extremidades esquerda e direita, e um furo circular de raio a no centro, conforme Fig. 1.14. Pelo princípio de Saint-Venant a influência da existência do furo se limita a uma região ao seu redor, de forma que a uma certa distância do furo a chapa está submetida a uma tensão uniforme S na direção de x . Adota-se uma função de tensão na forma:

$$\varphi(r, \theta) = (A_1 \log r + C_1 r^2) + \left(Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D \right) \cos 2\theta \quad (1.40)$$

resultando em:

$$\sigma_r = \left(\frac{A_1}{r^2} + 2C_1 \right) - \left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (1.41)$$

Para distâncias grandes, i.e., r tendendo ao infinito, a tensão normal tende a

$$\sigma_r = 2C_1 - 2A \cos 2\theta \quad (1.42)$$

que, se adotar $A = -C_1 = -S/4$, leva a

$$\sigma_r = \frac{S}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad (1.43)$$

resultado que concorda com o valor da tensão a grandes distâncias. A condição de contorno no interior do círculo é que a tensão radial se anule. Adotando $r = a$, o raio do círculo, tem-se

$$\sigma_r = 0 = \left(\frac{A_1}{r^2} + \frac{S}{2} \right) - \left(-\frac{S}{2} + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (1.44)$$

Como esta equação tem que se verificar para qualquer valor de θ (ao redor do furo), os termos entre parêntesis devem ser separadamente nulos. Isto dá

$$A_1 = -\frac{S}{2}a^2, \quad \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} = \frac{S}{2} \quad (1.45)$$

Calculando, agora, a tensão de cisalhamento, tem-se

$$\tau_{r\theta} = \left(2A + 6Br^4 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (1.46)$$

Aqui, é necessário que $B = 0$ para que a solução tenha sentido para raios tendendo ao infinito. De novo, o perímetro do furo não deve ter tensões radiais para qualquer valor de θ , levando a:

$$2A - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} = 0 \quad (1.47)$$

Combinando essas relações obtém-se

$$\frac{4BrD}{E} = a^2 \frac{S}{2}, \quad C = -\frac{Sa^4}{4} \theta \quad (1.48)$$

que finalmente dá a função de tensão

$$\varphi(r, \theta) = \frac{Sa^4}{4} \left[\frac{r^2}{a^2} - 2 \log r - \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{a^2}{r^2} - 2 \right) \cos 2\theta \right] \quad (1.49)$$

a qual pode ser usada para derivar os campos de tensão na chapa.

5.7 Deslocamentos em coordenadas polares

As Eqs. (1.30) e (1.31) relacionam deformações e deslocamentos

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (1.50)$$

Pode-se, agora, examinar porque a constante B deve ser nula. Calculando as tensões e substituindo encontra-se que

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - K \sin \theta \quad (1.51)$$

$B \neq 0$, portanto, leva a um termo que depende somente de θ . Este termo não tem apenas um valor. Começando em um ponto (r, θ) , e aumentando θ por 2π , obtém-se o ponto $(r, \theta + 2\pi)$ o qual é o mesmo ponto, de forma que pode-se esperar que a solução seja a mesma. Com expressões envolvendo $\cos \theta$, $\sin \theta$ etc. isso seria o caso. Entretanto, um termo $\frac{4Br\theta}{E}$ mudaria. Há, também, situações onde soluções com múltiplos valores podem ser consideradas, em que há condições de contorno adicionais no problema que removem a ambiguidade. Entretanto, no geral, toma-se $B = 0$.

5.8 Outras aplicações em coordenadas polares

5.8.1 Segmento de coroa circular sob flexão pura

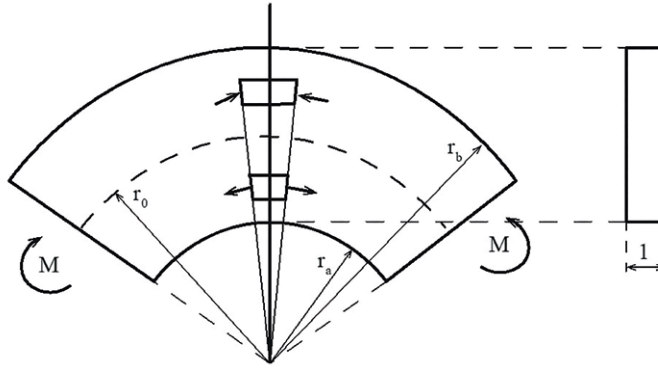


Figura 1.15

Considere-se a barra curva da Fig. 1.15 com seção retangular estreita constante, fletida por momentos M aplicados nas extremidades, resultando em momentos fletores constantes ao longo do comprimento da peça e distribuição de tensões iguais em todas as seções transversais radiais. Os raios interno, do eixo e externo são, respectivamente, r_a , r_o , e r_b . Um raio genérico é r .

As componentes de tensão são:

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{r_a^2 r_b^2}{r^2} \log \frac{r_b}{r_a} + r_b^2 \log \frac{r}{r_a} + r_a^2 \log \frac{r_a}{r} \right) \quad (1.52)$$

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{r_a^2 r_b^2}{r^2} \log \frac{r_b}{r_a} + r_b^2 \log \frac{r}{r_a} + r_a^2 \log \frac{r_a}{r} + r_b^2 - r_a^2 \right)$$

em que

$$N = (r_b^2 - r_a^2)^2 - 4r_a^2 r_b^2 \left(\log \frac{r_b}{r_a} \right) \quad (1.53)$$

5.8.2 Cunha carregada radialmente no vértice

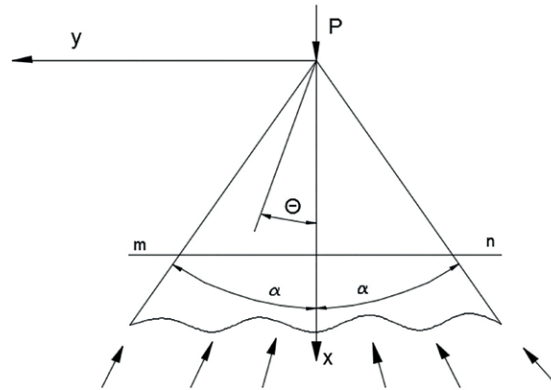


Figura 1.16

A distribuição radial de tensão simples do item anterior pode ser utilizada neste exemplo simétrico de uma cunha de espessura unitária carregada no vértice, como mostrado na Fig. 1.16. Assim,

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r \left(\alpha + \frac{1}{2 \operatorname{sen} 2\alpha} \right)} \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (1.54)$$

5.8.3 Cunha carregada transversalmente no vértice

Um caso complementar é o da carga no vértice da cunha transversalmente ao seu eixo de simetria. Aqui, o ângulo θ é medido a partir direção da força, vertical na Fig.1.17. As tensões são, novamente

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r \left(\alpha + \frac{1}{2 \operatorname{sen} 2\alpha} \right)} \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (1.55)$$

Para ângulo de abertura da cunha α pequeno, as tensões em uma seção $m-n$ são, aproximadamente:

$$\sigma_x = -\frac{Pyx}{I} \left[\left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} \right)^3 \operatorname{sen}^4 \theta \right] \quad \tau_{xy} = -\frac{Px^2}{I} \left[\left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} \right)^3 \operatorname{sen}^4 \theta \right] \quad (1.56)$$

em que I é o momento de inércia da seção $m-n$.

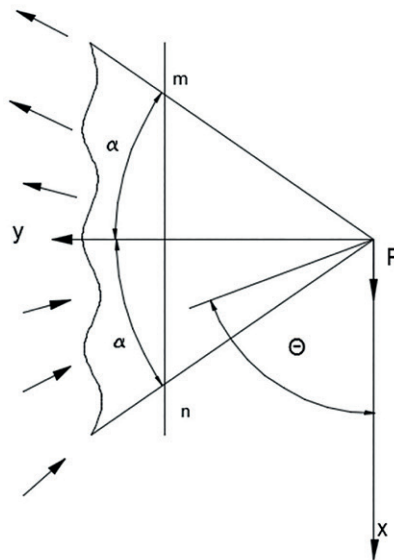


Figura 1.17

6. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM CHAPAS

Os problemas da Engenharia são analisados desenvolvendo modelos conceituais da realidade. Por exemplo, se uma aeronave é observada, pode-se dividi-la em modelos estruturais simplificados como vigas, chapas, placas etc. A seguir, partindo dos conceitos da Mecânica dos Sólidos (que inclui a Teoria da Elasticidade) desenvolve-se um modelo matemático. Nele figuram as incógnitas do problema, função das variáveis independentes, x , y , z (coordenadas espaciais) e, na Dinâmica, do tempo t .

No caso especial da Mecânica dos Sólidos essas incógnitas são escolhidas, no chamado Processo dos Deslocamentos, como sendo os deslocamentos dos infinitos pontos do contínuo que é o sólido:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix}$$

O modelo matemático, em si, é constituído por uma ou mais equações diferenciais, na forma geral:

$$[L]\{u\} = \{f(x, y, z, t)\}$$

onde $[L]$ é um operador diferencial. Acresce-se a essas equações as condições de contorno (e as condições iniciais, nos problemas dinâmicos). Essa é a chamada “formulação forte” do problema.

Para o caso geral de domínios em que se espera grande variação das incógnitas e condições de contorno complicadas, típicas dos problemas reais da Engenharia, soluções fechadas explícitas para as equações diferenciais são, em geral, impossíveis de serem obtidas. Por essa razão, procura-se substituir o contínuo por uma discretização em um número finito de incógnitas chamadas usualmente de “graus de liberdade” em número n .

A técnica usual é aproximar o vetor de incógnitas (deslocamentos) por uma superposição de funções mais simples chamadas “Trial Functions”, ou funções de forma, ou, ainda, funções de interpolação, cada uma delas afetada por um coeficiente a ser convenientemente avaliado para se obter a “melhor aproximação”:

$$\{\tilde{u}\} = [N]\{q(t)\}$$

$$[N] = [N(x, y, z)]$$

onde $[N]$ é uma matriz que contém as *funções de forma*, que só dependem das variáveis independentes x, y, z , e $\{q(t)\}$ é o vetor de coeficientes incógnitos das funções, em número igual ao dos graus de liberdade, independente das variáveis x, y, z .

A “melhor aproximação” é conseguida impondo-se um princípio físico como o Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PTV), o Método de Rayleigh-Ritz, as Equações de Lagrange etc. Uma outra técnica, também usual, puramente matemática, é a minimização do resíduo ponderado resultante da discretização por “Trial Functions”:

$$[R] = [L]\{\tilde{u}\} - \{f\}$$

$$\int [W][R]dV = 0$$

onde $[W]$ são as funções de ponderação. Essas funções são escolhidas de acordo com uma estratégia a ser adotada para minimização do resíduo. São usuais: colocação, subdomínios, mínimos quadrados e, a mais popular, a técnica de Galerkin. A aplicação de qualquer dessas técnicas de aproximação, que resultam em formulações integrais, são as chamadas “formas fracas” dos problemas.

Neste texto, por se contemplar além da estática a Dinâmica de Estruturas, o desenvolvimento básico se fará pelas Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i, \quad i = 1 \text{ a } n \quad (1.57)$$

onde se define a função Lagrangiana

$$L = V - T, \quad \text{com} \quad V = U - W \quad (1.58)$$

e N_i é uma componente das forças aplicadas, inclusive as de amortecimento, V é a Energia Potencial Total, U a Energia de Deformação e W o trabalho das forças externas aplicadas.

6.1 Ideia e histórico do Método dos Elementos Finitos (MEF)

No Método dos Elementos Finitos (MEF), em inglês “Finite Element Method (FEM)”, o domínio do problema é dividido em subdomínios (barras, triângulos, quadriláteros, tetraedros etc.) de dimensões pequenas, mas finitas, denominados *elementos*, unidos em pontos denominados *nós*. A seguir, os deslocamentos no interior dos elementos são aproximados pela superposição de funções de forma:

$$\{\tilde{u}\} = [N]\{q(t)\}$$

onde, agora, $[N]$ contém funções especialmente escolhidas de forma a assumirem valor unitário em um dado nó de um elemento, variando até zero nos demais nós de cada elemento. Assim, cada uma dessas funções só é diferente de zero no interior de um só elemento do conjunto. Com essa definição para as funções, o vetor $\{q\}$ tem a interpretação física de conter os deslocamentos, ainda incógnitos, dos nós de cada elemento. Essa forma de escolha das funções de forma é a essência do método. Todo o restante é a aplicação de princípios físicos ou matemáticos de ajuste do valor dos deslocamentos.

Historicamente, a primeira aplicação de aproximação por “Trial functions” foi feita por Lord Rayleigh em seu “Theory of Sound”, de 1870, na determinação de frequências e modos de vibração de cordas retesadas. Ritz retomou o método em 1910. Na década seguinte, Galerkin apresentou soluções de problemas de engenharia por séries trigonométricas no Método dos Resíduos Ponderados. Courant, em 1943, praticamente usou o MEF na solução de problemas de torção com divisão do domínio em subdomínios triangulares. Com o advento dos computadores eletrônicos, na década de 1940, os engenheiros de estruturas lançaram as bases do MEF. Argyris, em 1954, apresentou o elemento retangular de 4 nós, e Martin, Clough, Turner e Topp apresentaram o elemento triangular de 3 nós em 1956, os dois trabalhos no contexto da engenharia de estruturas aeronáuticas. Finalmente, Clough, em 1960, cunhou a expressão Método dos Elementos Finitos, que se tornou clássica.

6.2 Resumo de Mecânica dos Sólidos em 2D, em forma matricial

Os deslocamentos de um ponto de um contínuo sólido são simbolizados pelo vetor $\{u\}$.

No caso de uma chapa, um domínio bidimensional de eixos x e y , tem-se o vetor 2×1

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{Bmatrix}$$

A partir dos deslocamentos, obtêm-se as deformações do sólido pela aplicação de um operador diferencial:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\}$$

Em uma chapa, o operador é 3×2 :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [L]\{u\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

O próximo passo é obter o vetor de tensões, a partir do de deformações, usando, por simplicidade, a lei de Hooke, em forma matricial:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][L]\{u\}$$

No caso da chapa, o vetor tensão é 3 x 1:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Em Estado Plano de Tensões, a lei de Hooke é expressa pela matriz 3 x 3:

$$[E] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

onde ν é o Coeficiente de Poisson.

Será necessário, no desenvolvimento que se segue, ter, também, a formulação da Energia de Deformação para um sólido elástico, o escalar:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

que compõe a Energia Potencial Total (EPT)

$$V = U - W$$

sendo W o trabalho das forças externas aplicadas. Essas forças são de 3 tipos. As forças de massa (por exemplo, o peso próprio), as forças aplicadas em parte da superfície do elemento, e as forças concentradas nos nós da discretização pelo MEF, que se verá no próximo item.

No caso das duas primeiras, tem-se:

$$W_m = \int_V \{u\}^T \{f_m(x, y, z, t)\} dV$$

$$W_s = \int_S \{u\}^T \{f_s(x, y, z, t)\} dS$$

Deve-se notar que aqui não aparece o fator $\frac{1}{2}$ da expressão da Energia de Deformação. Naquele caso, as deformações crescem à medida que as forças crescem. Aqui, as forças já têm seu valor final e são multiplicadas pelos deslocamentos finais.

Na dinâmica, é levada em conta também a energia cinética, na forma

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dV$$

onde $\{\dot{u}\}$ é o vetor das velocidades (a derivada primeira no tempo é simbolizada pelo ponto sobrescrito, na convenção de Newton), e ρ é a massa específica do material.

6.3 Aproximação da Mecânica dos Sólidos pelo MEF

Adota-se, agora, a aproximação dos deslocamentos, dentro de cada elemento,

$$\{\tilde{u}\} = [N]\{q\}$$

lembrando que no MEF $[N]$ contém funções especialmente escolhidas de forma a assumirem valor unitário em um dado nó de um elemento, variando até zero nos demais nós de cada elemento. Assim, cada uma dessas funções só é diferente de zero no interior de um só elemento do conjunto. A matriz $[N]$, função das coordenadas, tem dimensões 2×6 no caso da chapa.

Como já foi dito, o vetor $\{q\}$ tem a interpretação física de conter os deslocamentos, ainda incógnitos, dos nós de cada elemento, e é função apenas do tempo, no caso da dinâmica. Em um elemento triangular de chapa de 3 nós com 2 graus de liberdade por nó, tem dimensões 6×1 , conforme Figura 1.18.

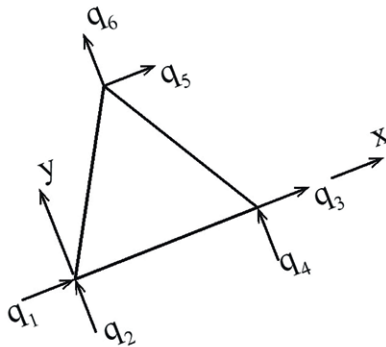


Figura 1.18 Coordenadas generalizadas em um elemento de chapa

Todas as expressões do item anterior, escritas para o contínuo, são agora aproximadas.

As deformações (aproximadas) passam a ser

$$\{\tilde{\varepsilon}\} = [L]\{\tilde{u}\} = [L][N]\{q\} = [B]\{q\}$$

No caso da chapa, 3×6 . O vetor tensões, aproximado, é

$$\{\tilde{\sigma}\} = [E]\{\tilde{\varepsilon}\} = [E][B]\{q\}$$

O que permite escrever a Energia de Deformação do elemento, aproximada,

$$\tilde{U}_e = \frac{1}{2} \int_V \{\tilde{\varepsilon}\}^T \{\tilde{\sigma}\} dV = \frac{1}{2} \{q\}^T \left(\int_V [B]^T [E] [B] dV \right) \{q\}$$

O vetor de velocidades, aproximado é:

$$\{\tilde{u}\} = [N]\{\dot{q}\}$$

e a Energia Cinética do elemento, aproximada, é dada por

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \left(\int_V \rho [N]^T [N] dV \right) \{\dot{q}\}$$

6.4 Equações de Lagrange, em um Elemento

A seguir, aplicam-se as Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i, \quad i = 1 \text{ a } n$$

A função Lagrangiana, aproximada, em um elemento, pode ser considerada uma função escalar de múltiplas variáveis independentes,

$$\tilde{L}_e = \tilde{V}_e - \tilde{T}_e$$

onde,

$$\tilde{V}_e = \tilde{U}_e - \tilde{W}_e$$

O trabalho das forças externas aplicadas ao elemento é:

$$\tilde{W}_e = \int_V \{\tilde{u}\}^T \{f_m\} dV + \int_S \{\tilde{u}\}^T \{f_s\} dS + \{q\}^T \{Q\}$$

ou

$$\tilde{W}_e = \{q\}^T \left(\int_V [N]^T \{f_m\} dV + \int_S [N]^T \{f_s\} dS \right) + \{q\}^T \{Q\}$$

onde $\{Q\}$ é um vetor com n componentes, contendo as forças elásticas restauradoras aplicadas nos nós dos elementos, conforme Figura 1.19.

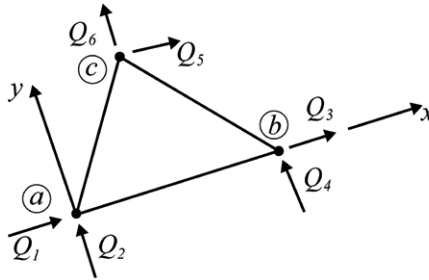


Figura 1.19 Forças elásticas restauradoras aplicadas aos nós de um elemento de chapa

Aplicando-se as Equações de Lagrange, obtém-se

$$\left(\int_V \rho [N]^T [N] dV \right) \{\dot{q}\} + \left(\int_V [B]^T [E] [B] dV \right) \{q\} = \int_V [N]^T \{f_m\} dV + \int_S [N]^T \{f_s\} dS + \{Q\}$$

onde se pode definir a matriz de rigidez do elemento:

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV$$

com dimensões $n \times n$, simétrica e singular, e a matriz de massas do elemento

$$[m] = \int_V \rho [N]^T [N] dV$$

com dimensões $n \times n$, simétrica.

Também podem-se definir os vetores de forças nodais devidas aos carregamentos de massa e superfície, no elemento.

6.5 Elemento triangular de chapa com 3 nós no SLR (Sistema Local de Referência)

Para um elemento de chapa triangular de 3 nós, a, b, c , com 2 graus de liberdade por nó, em Estado Plano de Tensões, com variação linear de deslocamentos e tensões constantes:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

Por simplicidade, adotam-se funções de forma lineares

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} & 0 & N_{26} \end{bmatrix}$$

$$N_{11} = N_{22} = \frac{1}{2A} [x_b y_c - x_c y_b + x(y_b - y_c) + y(x_c - x_b)]$$

$$N_{13} = N_{24} = \frac{1}{2A} [x_c y_a - x_a y_c + x(y_c - y_a) + y(x_a - x_c)]$$

$$N_{15} = N_{26} = \frac{1}{2A} [x_a y_b - x_b y_a + x(y_a - y_b) + y(x_b - x_a)]$$

onde

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{bmatrix}$$

é a área do triângulo a, b, c. Essas funções são apresentadas nas Figs. 1.20 a 1.22.

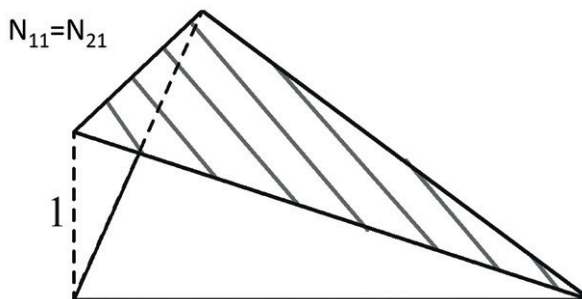


Figura 1.20 Funções de interpolação N_{11} e N_{21} de um elemento de chapa

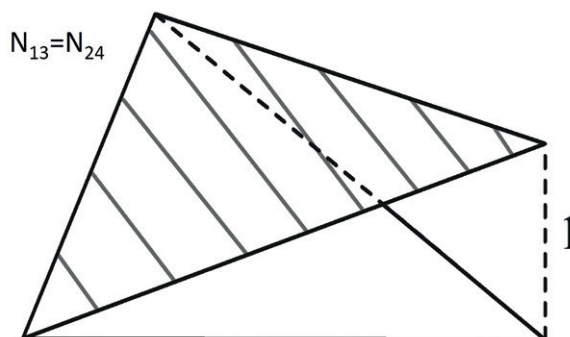


Figura 1.21 Funções de interpolação N_{13} e N_{24} de um elemento de chapa

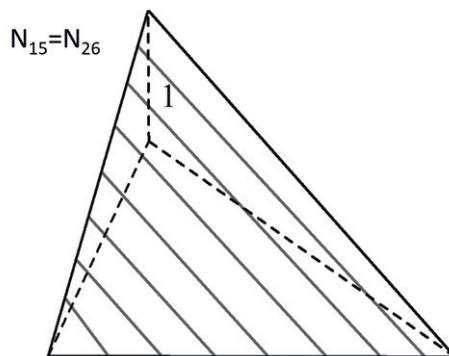


Figura 1.22 Funções de interpolação N_{15} e N_{26} de um elemento de chapa

Com isso, tem-se

$$[B] = [L][N] = \frac{1}{2A} \times \begin{bmatrix} y_b - y_c & 0 & y_c - y_a & 0 & y_a - y_b & 0 \\ 0 & x_c - x_b & 0 & x_a - x_c & 0 & x_b - x_a \\ x_c - x_b & y_b - y_c & x_a - x_c & y_c - y_a & x_b - x_a & y_a - y_b \end{bmatrix}$$

Como a matriz $[B]$ é constante, a matriz de rigidez do elemento triangular de chapa de 3 nós e 2 graus de liberdade por nó, com deslocamentos lineares, tensões constantes, no sistema local de referência fica

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV = [B]^T [E] [B] A t$$

onde t é a espessura constante do elemento. A matriz de massa consistente é

$$[m] = \rho t \int_S [N]^T [N] dS$$

Para outros elementos mais complexos, as integrais do tipo

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV$$

e

$$[m] = \rho \int_V [N]^T [N] dV$$

podem não ter forma fechada ou serem muito trabalhosas de serem obtidas explicitamente. Nesses casos, apela-se para a integração numérica com algoritmos como a Quadratura de Gauss.

Uma matriz de massa simplificada para o elemento de chapa triangular, não consistente, atribui a cada grau de liberdade um terço da massa do elemento.

6.6 Transformação do sistema local para o sistema global da estrutura

No caso do elemento de chapa triangular de 3 nós, com 2 graus de liberdade por nó, tem-se a matriz de rotação 6×6 , e as matrizes de rigidez e de massa do elemento no sistema global de referência são:

$$[K]_e = [T]^T [k] [T]$$

$$[M]_e = [T]^T [m] [T]$$

Entretanto, o mais racional é já fazer os triângulos referenciados ao Sistema Global e usar diretamente as coordenadas dos nós nesse Sistema. Ainda neste caso, a matriz de massa é invariante à rotação.

6.7 “Espalhamento”

Tendo as matrizes e vetores de elemento no sistema global de referência, o passo seguinte é a montagem das matrizes de rigidez e de massa e do vetor de carregamento global da estrutura para se ter o sistema de equações do movimento do Processo dos Deslocamentos.

O algoritmo para tanto se constitui de uma matriz de incidência que dá a correspondência entre os graus de liberdade do elemento e os graus de liberdade da estrutura. Trata-se de um problema simples de lógica e programação.

6.8 Imposição das condições de contorno

Tendo a expressão das equações do movimento no sistema global de referência é necessário introduzir a vinculação do problema. Quando a vinculação determina que certos “graus de liberdade” correspondem a deslocamentos nulos (vinculados), basta anular as linhas e colunas correspondentes, diminuindo-se, dessa forma, as dimensões do sistema. As matrizes resultantes são denominadas *reduzidas*.

A situação é mais complicada quando se determinam, previamente, valores constantes não nulos para certos deslocamentos. De novo se zeram os elementos das linhas correspondentes, exceto os elementos da diagonal principal que é forçada a assumir valor unitário. Essa técnica destrói a simetria do problema, o que não é desejável. Algoritmos alternativos contornam o problema.

6.9 Matriz de rigidez de elemento finito retangular em estado plano de tensão (Argyris, 1954)

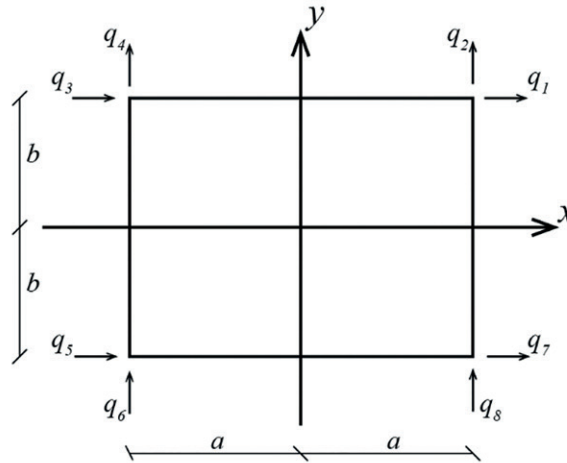


Figura 1.23 Elemento finito retangular $2a \times 2b \times t$

6.9.1 Vetor dos deslocamentos nodais do elemento 8×1

$$\{q\} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8]^T$$

6.9.2 Vetor deslocamento no interior do elemento 2×1

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{Bmatrix}$$

aproximação de elementos finito

$$\{\tilde{u}\} = [N]\{q\}$$

6.9.3 Matriz de funções de forma

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{13} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 & N_{17} & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} & 0 & N_{26} & 0 & N_{28} \end{bmatrix}$$

$$N_{11} = N_{22} = \frac{1}{4ab}(x+a)(y+b)$$

$$N_{13} = N_{24} = -\frac{1}{4ab}(x-a)(y+b)$$

$$N_{15} = N_{26} = \frac{1}{4ab}(x-a)(y-b)$$

$$N_{17} = N_{28} = -\frac{1}{4ab}(x+a)(y-b)$$

6.9.4 Vetor deformações 3x1

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [L]\{u\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Aproximação de elementos finitos

$$\{\tilde{\varepsilon}\} = [L]\{\tilde{u}\} = [L][N]\{q\} = [B]\{q\}$$

onde

$$[B] = [L][N]$$

6.9.5 Vetor tensões 3x1

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][L]\{u\}$$

Aproximação de elementos finitos

$$\{\tilde{\sigma}\} = [E]\{\tilde{\varepsilon}\} = [E][B]\{q\}$$

onde a matriz elástica é

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

6.9.6 Energia de deformação

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

Aproximação de elementos finitos

$$\tilde{U}_e = \frac{1}{2} \int_V \{\tilde{\varepsilon}\}^T \{\tilde{\sigma}\} dV = \frac{1}{2} \{q\}^T \left(\int_V [B]^T [E] [B] dV \right) \{q\}$$

6.9.7 Forças elásticas

Onde se pode definir a matriz de rigidez do elemento:

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV$$

6.9.8 Matriz de rigidez do elemento retangular

$$[k] = [k_d] + [k_s] \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$[k_d] = E' t \times \begin{bmatrix} \frac{b}{3a} & \frac{\nu}{4} & -\frac{b}{3a} & \frac{\nu}{4} & -\frac{b}{6a} & -\frac{\nu}{4} & -\frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} \\ & \frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} & \frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} & -\frac{b}{6a} & \frac{\nu}{4} & -\frac{b}{3a} \\ & & \frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} & \frac{b}{6a} & \frac{\nu}{4} & -\frac{b}{6a} & \frac{\nu}{4} \\ & & & \frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} & -\frac{b}{3a} & \frac{\nu}{4} & -\frac{b}{6a} \\ & & & & \frac{b}{3a} & \frac{\nu}{4} & -\frac{b}{3a} & \frac{\nu}{4} \\ & & & & & \frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} & \frac{b}{3a} \\ & & & & & & \frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} \\ & & & & & & & \frac{b}{3a} \end{bmatrix}$$

$$[k_s] = Gt \times \begin{bmatrix} \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} & \frac{a}{6b} & -\frac{1}{4} & -\frac{a}{6b} & -\frac{1}{4} & -\frac{a}{3b} & \frac{1}{4} \\ & \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} & -\frac{a}{3b} & -\frac{1}{4} & -\frac{a}{6b} & -\frac{1}{4} & \frac{a}{6b} \\ & & \frac{a}{3b} & -\frac{1}{4} & -\frac{a}{3b} & -\frac{1}{4} & -\frac{a}{6b} & \frac{1}{4} \\ & & & \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} & \frac{a}{6b} & \frac{1}{4} & -\frac{a}{6b} \\ & & & & \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} & \frac{a}{6b} & -\frac{1}{4} \\ & & & & & \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} & -\frac{a}{6b} \\ & & & & & & \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} \\ & & & & & & & \frac{a}{3b} \end{bmatrix}$$

6.9.9 Matriz de massa do elemento retangular

Uma matriz de massa simplificada para o elemento de chapa retangular, não consistente, atribui a cada grau de liberdade um quarto da massa do elemento.

7. EXEMPLOS RESOLVIDOS

7.1 Elementos triangulares

Considere-se uma chapa quadrada de espessura, comprimento e largura 1 cm. Também se adota módulo de elasticidade 15 N/cm² e coeficiente de Poisson 0,25.

A chapa será dividida em apenas 2 elementos triangulares, como mostrado na Figura 1.23. A solicitação é uma força de cisalhamento H de 6 N, na face superior.

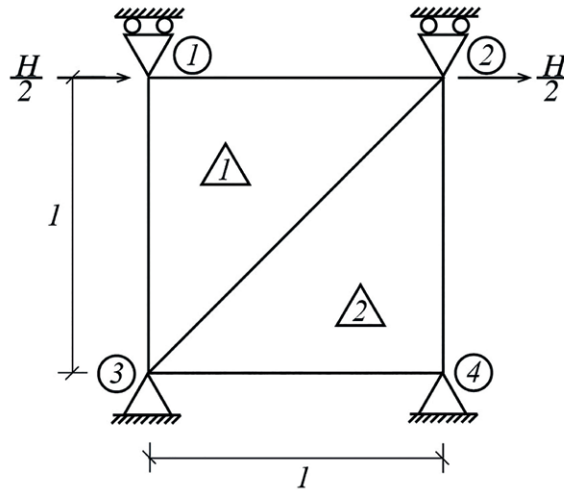


Figura 1.24

As matrizes de rigidez dos 2 elementos são

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 8 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 8 & 0 & -8 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -8 & 3 & 11 & -5 \\ 3 & -8 & 2 & -3 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$[k_2] = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3 & 0 \\ -8 & 3 & 11 & -5 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & 11 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Este sistema tem apenas 2 graus de liberdade, os deslocamentos horizontais dos apoios móveis 1 e 2. Assim, a matriz de rigidez da estrutura reduzida, considerando as condições de contorno, é 2×2 :

$$[K] = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}$$

O carregamento são duas forças horizontais valendo 3 N, na direção dos 2 graus de liberdade. Resolvido o sistema de equações de equilíbrio, os deslocamentos horizontais dos apoios móveis resultam ambos iguais a 1 cm.

As tensões nos elementos, constantes em todos os pontos em seu interior, são

$$\sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 6 \frac{KN}{cm^2}$$

7.2 Elementos retangulares

7.2.1 Elementos retangulares, estática

Considere-se uma chapa quadrada de espessura, comprimento e largura 1 cm. Também se adota módulo de elasticidade 15 N/cm² e coeficiente de Poisson 0,25.

A chapa será dividida em somente um elemento retangular, como mostrado na Figura 1.25.

A solicitação é uma força de cisalhamento H de 6 N, na face superior.

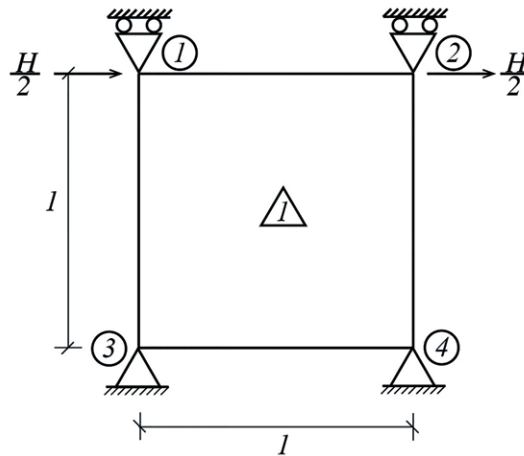


Figura 1.25

A matriz de rigidez do único elemento é

$$[k] = \begin{bmatrix} 7.3333 & 2.5000 & -4.3333 & -0.5000 & -3.6667 & -2.5000 & 0.6667 & 0.5000 \\ 2.5000 & 7.3333 & 0.5000 & 0.6667 & -2.5000 & -3.6667 & -0.5000 & -4.3333 \\ -4.3333 & 0.5000 & 7.3333 & -2.5000 & 0.6667 & -0.5000 & -3.6667 & 2.5000 \\ -0.5000 & 0.6667 & -2.5000 & 7.3333 & 0.5000 & -4.3333 & 2.5000 & -3.6667 \\ -3.6667 & -2.5000 & 0.6667 & 0.5000 & 7.3333 & 2.5000 & -4.3333 & -0.5000 \\ -2.5000 & -3.6667 & -0.5000 & -4.3333 & 2.5000 & 7.3333 & 0.5000 & 0.6667 \\ 0.6667 & -0.5000 & -3.6667 & 2.5000 & -4.3333 & 0.5000 & 7.3333 & -2.5000 \\ 0.5000 & -4.3333 & 2.5000 & -3.6667 & -0.5000 & 0.6667 & -2.5000 & 7.3333 \end{bmatrix}$$

Este sistema tem apenas 2 graus de liberdade, os deslocamentos horizontais dos apoios móveis 1 e 2. Assim, a matriz de rigidez da estrutura reduzida, considerando as condições de contorno, é 2 x 2:

$$[K] = \begin{bmatrix} 7.3333 & -4.3333 \\ -4.3333 & 7.3333 \end{bmatrix}$$

O carregamento são duas forças horizontais valendo 3 N, na direção dos 2 graus de liberdade. Resolvido o sistema de equações de equilíbrio, os deslocamentos horizontais dos apoios móveis resultam ambos iguais a 1 cm.

As tensões no elemento, variáveis em seu interior, calculadas no centro do elemento, são

$$\sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 6 \frac{KN}{cm^2}$$

7.2.2 Elementos retangulares, frequências

Considere-se a mesma chapa quadrada da seção anterior, de espessura, comprimento e largura 1 cm. Também se adota módulo de elasticidade 15 N/m², coeficiente de Poisson 0,25 e densidade 1 kg/m³.

A chapa será dividida em somente um elemento retangular, como mostrado na Figura 1.25.

Pede-se determinar as duas frequências de vibração livre e respectivos modos de vibração.

A matriz de rigidez já foi determinada no exemplo 7.2.1. A matriz de massas simplificada, não consistente, do único elemento é

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

e a matriz de massa reduzida da estrutura é

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.0625 & 0 \\ 0 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

resolvendo o problema de autovalores e autovetores, obtêm-se as duas frequências naturais de vibração,

$$\omega_1 = 6.9282 \frac{rad}{s}, \omega_2 = 13.6626 \frac{rad}{s}$$

e autovetores, os modos de vibração associados,

$$[\varphi_1] = [1 \ 1]^T, \quad [\varphi_2] = [1 \ -1]^T$$

O primeiro deles é o chamado modo de *sway*, em que os dois apoios móveis vibram para a esquerda e para a direita juntos. O segundo é o modo simétrico de vibração, em que quando um dos apoios se desloca para a esquerda, o outro se desloca para a direita, e vice-versa, sempre em oposição.