

REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL

# CHAPAS, PLACAS E CASCAS na engenharia aeroespacial

2020

*Chapas, placas e cascas: na engenharia aeroespacial*

© 2020 Reyolando M. L. R. F. Brasil

Editora Edgard Blücher Ltda.

Diagramação: Laércio Flenic Fernandes

Revisão: Samira Panini

---

# Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar  
04531-934 – São Paulo – SP – Brasil  
Tel 55 11 3078-5366  
contato@blucher.com.br  
www.blucher.com.br

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed.  
do Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa,  
Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer  
meios, sem autorização escrita da Editora.

---

Todos os direitos reservados pela Editora  
Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

---

Chapas, placas e cascas: na engenharia aeroespacial /  
Reyolando M. L. R. F. Brasil. - 1. ed. - São Paulo: Blucher  
Open Access, 2020.  
164p.

Bibliografia  
ISBN 978-65-5550-022-6 (impresso)  
ISBN 978-65-5550-023-3 (eletrônico)

Open Access

1. Engenharia aeroespacial. I. Título.

---

20-0410

CDD 629.7

---

Índices para catálogo sistemático:  
1. Engenharia aeroespacial

---

*À lembrança de meus queridos pais,  
Yolanda e Miguel René.  
Saudades.*



---

# PREFÁCIO

Este livro pretende estudar a estática, estabilidade e dinâmica de estruturas civis, mecânicas, navais, de petróleo, eólicas e aeroespaciais do tipo folhas, isto é, sólidos de pequena espessura em relação às outras duas dimensões, tais como chapas, placas e cascas, de comportamento linear. A intenção é abordar as bases teóricas e os processos numéricos de solução, em particular o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas, e suas implementações computacionais.

Chapas, placas e cascas estão presentes em várias áreas de aplicação na engenharia estrutural. Na Engenharia Civil tem-se as lajes de concreto armado e protendido, as chapas e cascas das estruturas metálicas, as coberturas em cúpulas etc. Nas engenharias mecânica, naval e aeroespacial, veículos terrestres, navios, aeronaves e espaçonaves são, em sua maior parte, constituídos de chapas, placas e cascas metálicas, devido à leveza e resistência que deles se espera. Na engenharia de petróleo, dutos, raisers, reservatórios e outros equipamentos são estruturas dessa família.

Este livro é pensado não só como um possível texto básico para um curso a nível de graduação ou pós-graduação, conforme a ênfase, mas também como um manual para o engenheiro estrutural praticante.

O texto se restringe a abordar modelos de comportamento linear, material e geométrico, deixando os problemas não lineares para um estudo mais aprofundado, mais indicado para programas adiantados de pós-graduação. Mesmo assim, o problema essencialmente não linear importante da estabilidade de estruturas muito esbeltas, como são as folhas, é tratado. Por um viés de formação do autor, também as bases da dinâmica, isto é, vibrações, desse tipo de estruturas, são apresentadas.

Agradecimentos pela ajuda de meus alunos Santiago, Adson, Omar e Sara.

O autor faz aqui uma homenagem ao maior professor de engenharia estrutural da história, Stephen P. Timoshenko, por trás de tudo que está neste livro.

Valeu!

*Reyolando Brasil*

---

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO E SIMBOLOGIA</b> .....	<b>11</b>
1. INTRODUÇÃO .....	<b>11</b>
2. SIMBOLOGIA DA TEORIA DA ELASTICIDADE .....	<b>15</b>
2.1 TENSÕES .....	<b>15</b>
2.2 DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES .....	<b>16</b>
3. COORDENADAS POLARES E SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS .....	<b>16</b>
4. SIMBOLOGIA DE VETORES E MATRIZES .....	<b>17</b>
<b>PARTE 1: CHAPAS</b> .....	<b>19</b>
1. GENERALIDADES.....	<b>19</b>
2. TEORIA DA ELASTICIDADE EM 2D .....	<b>20</b>
2.1 TENSÕES (INTENSIDADE DE FORÇA POR UNIDADE DE ÁREA).....	<b>20</b>
2.2 DEFORMAÇÕES.....	<b>21</b>
2.3 LEI DE HOOKE.....	<b>23</b>
2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	<b>24</b>
3. FUNÇÃO DE TENSÃO DE AIRY .....	<b>25</b>
4. CHAPAS EM COORDENADAS CARTESIANAS.....	<b>26</b>
4.1 CALCULANDO DESLOCAMENTOS.....	<b>28</b>
4.2 VIGA BIAPOIADA COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA .....	<b>33</b>
4.3 EXEMPLOS PROPOSTOS .....	<b>36</b>
4.4 SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS.....	<b>37</b>
5. CHAPAS EM COORDENADAS POLARES.....	<b>53</b>
5.1 TENSÕES EM COORDENADAS POLARES .....	<b>53</b>
5.2 DEFORMAÇÕES EM COORDENADAS POLARES.....	<b>55</b>
5.3 RELAÇÕES ENTRE COORDENADAS POLARES E CARTESIANAS .....	<b>56</b>

5.4 TENSÕES EM UM TUBO DE PAREDES GROSSAS .....	57
5.5 SOLUÇÃO GERAL PARA SIMETRIA POLAR.....	58
5.6 O MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS.....	59
5.7 DESLOCAMENTOS EM COORDENADAS POLARES.....	62
5.8 OUTRAS APLICAÇÕES EM COORDENADAS POLARES.....	63
5.8.1 SEGMENTO DE COROA CIRCULAR SOB FLEXÃO PURA .....	63
5.8.2 CUNHA CARREGADA RADIALMENTE NO VÉRTICE .....	64
5.8.3 CUNHA CARREGADA TRANSVERSALMENTE NO VÉRTICE .....	64
<b>6. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM CHAPAS.....</b>	<b>65</b>
6.1 IDEIA E HISTÓRICO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF).....	67
6.2 RESUMO DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS EM 2D, EM FORMA MATRICIAL..	68
6.3 APROXIMAÇÃO DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS PELO MEF .....	70
6.4 EQUAÇÕES DE LAGRANGE, EM UM ELEMENTO .....	71
6.5 ELEMENTO TRIANGULAR DE CHAPA COM 3 NÓS NO SLR (SISTEMA LOCAL DE REFERÊNCIA).....	73
6.6 TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA LOCAL PARA O SISTEMA GLOBAL DA ESTRUTURA .....	75
6.7 “ESPALHAMENTO” .....	76
6.8 IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	76
6.9 MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTO FINITO RETANGULAR EM ESTADO PLANO DE TENSÃO (ARGYRIS, 1954).....	77
6.9.1 VETOR DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DO ELEMENTO 8X1 .....	77
6.9.2 VETOR DESLOCAMENTO NO INTERIOR DO ELEMENTO 2X1 .....	77
6.9.3 MATRIZ DE FUNÇÕES DE FORMA.....	78
6.9.4 VETOR DEFORMAÇÕES 3X1 .....	78
6.9.5 VETOR TENSÕES 3X1.....	78
6.9.6 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO .....	79
6.9.7 FORÇAS ELÁSTICAS .....	79
6.9.8 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO RETANGULAR.....	79
6.9.9 MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO RETANGULAR .....	80



<b>7. EXEMPLOS RESOLVIDOS .....</b>	<b>80</b>
7.1 ELEMENTOS TRIANGULARES.....	80
7.2 ELEMENTOS RETANGULARES.....	82
7.2.1 ELEMENTOS RETANGULARES, ESTÁTICA.....	82
7.2.2 ELEMENTOS RETANGULARES, FREQUÊNCIAS .....	83
<b>PARTE 2: PLACAS .....</b>	<b>85</b>
<b>1. GENERALIDADES.....</b>	<b>85</b>
1.1 DERIVANDO A EQUAÇÃO DE SOPHIE-GERMAIN E LAGRANGE.....	85
1.2 CINEMÁTICA.....	87
1.3 LEI DE HOOKE.....	88
1.4 EQUILÍBRIO .....	91
1.5 SOLUÇÃO .....	93
<b>2. DINÂMICA EM PLACAS.....</b>	<b>94</b>
2.1 CARREGAMENTO GENÉRICO .....	94
2.2 VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS.....	94
<b>3. ESTABILIDADE: EQUAÇÃO DE SAINT-VENANT .....</b>	<b>97</b>
<b>4. MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS EM PLACAS.....</b>	<b>100</b>
4.1 GENERALIDADES .....	100
4.2 EXEMPLO BÁSICO.....	101
4.3 EXEMPLO MAIS COMPLETO.....	103
4.4 VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS.....	105
<b>PARTE 3: CASCAS .....</b>	<b>109</b>
<b>1. GENERALIDADES.....</b>	<b>109</b>
<b>2. CASCAS DE REVOLUÇÃO COM CARGA AXISSIMÉTRICA.....</b>	<b>109</b>
2.1 TEORIA DE MEMBRANA.....	111
2.1.1 TEORIA.....	111
<b>3. EXEMPLOS .....</b>	<b>114</b>
3.1 BALÃO ESFÉRICO.....	114
3.2 CASCA CILÍNDRICA (FUSELAGEM DE AERONAVE OU TUBULAÇÃO, PRESSURIZADA).....	114

3.3 CASCA CÔNICA.....	115
3.4 PARABOLOIDE.....	116
3.5 DIRIGÍVEL ELÍPTICO OU EXTREMIDADE DE VASO DE PRESSÃO CILÍNDRICO.....	116
<b>4. TEORIA FLEXIONAL PARA CASCAS CILÍNDRICAS.....</b>	<b>118</b>
4.1 EXEMPLOS .....	121
4.1.1 CASCA CILÍNDRICA.....	121
4.1.2 MOMENTO E FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDOS NA BORDA DE UMA CASCA CILÍNDRICA .....	121
<b>5. ELEMENTOS FINITOS PARA CASCAS DE REVOLUÇÃO.....</b>	<b>122</b>
5.1 MECÂNICA DE SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS .....	123
5.1.1 DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES .....	123
5.1.2 TENSÕES.....	125
5.1.3 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA .....	125
5.2 DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS.....	126
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>131</b>
<b>ANEXO: PROGRAMAS EM MATLAB.....</b>	<b>133</b>
A.1 CHAPAS: ELEMENTO FINITO TRIANGULAR FUNÇÕES LINEARES .....	134
A.2 CHAPAS: ELEMENTO FINITO RETANGULAR (ARGYRIS), ESTÁTICA.....	140
A.3 CHAPAS: ELEMENTO FINITO RETANGULAR, FREQUÊNCIAS E MODOS.....	148
A.4 PLACAS RETANGULARES: DIFERENÇAS FINITAS, ESTÁTICA.....	154
A.5 PLACAS RETANGULARES: DIFERENÇAS FINITAS, FREQUÊNCIAS .....	158
<b>SOBRE O AUTOR .....</b>	<b>163</b>