ANEXO 9

A9.1 LEI DA GRAVITAÇÃO DE NEWTON

Em 1684, Christopher Wren (1632-1723), matemático e arquiteto, um dos fundadores do Royal Society, propôs a Edmond Halley (1656-1752; astrônomo descobridor do cometa que leva seu nome) e a Robert Hooke, o mais brilhante experimentador do Royal Society, um prêmio de um livro de 40 xelins[1] a quem comprovasse sua opinião de que uma força dirigida do planeta ao Sol, cuja intensidade fosse proporcional ao inverso do quadrado da distância, bastava para explicar a trajetória dos planetas. O prazo era de 2 meses.

Na época, vivia em Cambridge o titular da cadeira Lucasiana de matemática, Isaac Newton (1642-1727), "que não se importava de se dar a conhecer", tendo feito apenas uma conferência pública em 1672 sobre uma estranha teoria da natureza da luz, sustentando que a luz branca era composta de todas as cores do arco-íris. Halley estava persuadido que Newton tinha um método poderoso para resolver os problemas mais complexos sobre curvas, apesar de ser uma pessoa de difícil acesso.

Dirigiu-se ao Trinity College e encontrou Newton de bom humor. Comunicou-lhe que a questão lhe era familiar, e que achava que uma força dirigida ao Sol e inversamente proporcional ao quadrado da distância ao planeta era necessária para explicar o sistema dos planetas. Newton explicou que havia guardado as anotações em uma gaveta e se comprometeu a transmitir-lhe assim que encontrasse a folha.

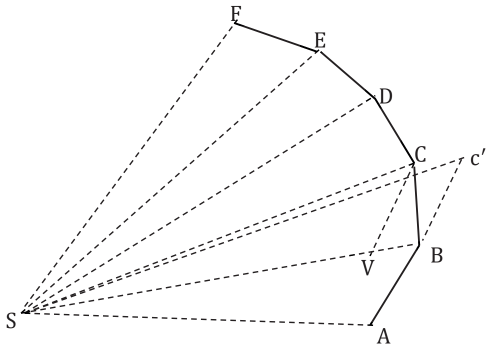
Halley esperou alguns meses. Em novembro de 1684, Newton confiou ao colega Edward Paget, membro do Trinity College, bom matemático, mas também bom de bebida, a missão de entregar a Halley um curto manuscrito, páginas que continham a resposta à pergunta formulada.

---

[1] Xelim: *shilling*, moeda de prata inglesa equivalente a 12 pence. 20 *shillings* equivalem a 1 libra esterlina. Na época aproximadamente a metade do lucro mensal de um comerciante rico!

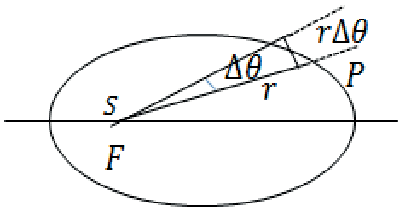
A9.1.1 Demonstração elegante

Prova geométrica:



Para demonstrar a lei das áreas (a segunda lei de Kepler), Newton se baseia nesse esquema, em que o corpo em movimento descreve uma trajetória ABCDEF. Considera-se que a força central dirigida a S age instantaneamente e a intervalos de tempo regulares para fazer o objeto "cair" em direção a S: entre duas ações, o objeto se desloca em linha reta e em velocidade constante.

O raio vetor SP varre as áreas SAB, SBC, SCD etc. (ver Figura)[2] em intervalos de tempo iguais, $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$ etc.



Observação: será visto na Seção A9.4 "Momento angular", Equações 1a e 2, que, levando ao lim o elemento de área:

$^1/_2\, r \cdot r\Delta\theta$, isto é, quando o planeta efetua uma elipse, fazemos o que os gregos chamavam de processo de "exaustão", Newton "*fluxions*" e Leibniz, "derivada".

Ou seja:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{1}{2} r \cdot r \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} L/_m. \qquad (0)$$

[2] E também a Figura indicada por 0 em Problema da força central, Secção A9.2.

Em que L é o momento angular do planeta.

Trata-se de uma demonstração algébrica, na secção A9.4 “Momento angular”, Equações 1a e 2, daremos uma demonstração vetorial e, como veremos, L é constante, isto é, é conservado.

Lógico, fazendo os Δt_i iguais, quando $\Delta t \to 0$, isto é, levando ao lim, as correspondentes áreas, SAB, SBC, SCD etc. se tornarão também iguais, pois no lim, a poligonal A, B, C, D, ... se torna uma elipse, de vez que $dA/dt = cte$, então, o raio vetor SP varre áreas iguais em tempos iguais (conforme a 2ª Lei de Kepler).[3]

Demonstração:

Se não houvesse força centrípeta, o planeta continuaria por inércia até c', Cc' // VB, $AB = Bc'$, pois $\Delta t_1 = \Delta t_2$.

Área $SAB = SBc'$, pois base AB igual à base Bc' e altura dos triângulos SAB e SBc' são iguais (perpendicular de S sobre o prolongamento de AB).

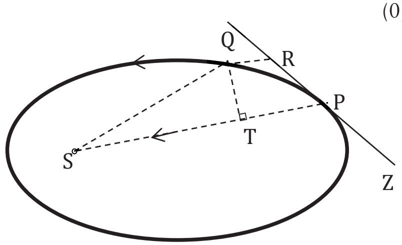
De B até C atua a força centrípeta que faz o planeta em lugar de ir a c', dirigir-se a C.

Os triângulos SBC e SBc' têm áreas iguais, pois a base SB é comum aos dois e ambos têm a mesma altura, já que Cc' é paralelo a VB. Então, os triângulos SAB e SBC têm a mesma superfície.

O mesmo vale para os outros pontos da poligonal. A seguir, diminuímos os lados AB, BC, CD e, proporcionalmente, os intervalos Δt. Levando ao limite, obtemos a 2ª lei de Kepler: varre áreas iguais em tempos iguais.

A9.2 O PROBLEMA DA FORÇA CENTRAL

(0)



3 Veremos que a 2ª lei de Kepler equivale à conservação da quantidade de movimento angular L.

Hipótese: P percorre órbita elíptica.

S é um foco.

SP varre áreas iguais em tempos iguais.

PR é tangente à trajetória em P.

QR é paralela a SP e QT perpendicular a ST.

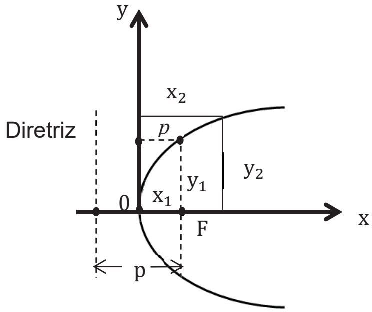
Demonstração em quatro etapas:

1ª etapa: SP varre áreas iguais em tempos iguais.

A força que atua no planeta é central e dirigida para S.

2ª etapa: propriedade geométrica da elipse implica em: quando Q tende a P: $^{QR}/_{QT^2}$ se torna constante e independe de P. Newton recorre à passagem ao limite (Q tendendo a P).

Observação: relação $^{QR}/_{QT^2} = \text{cte}$



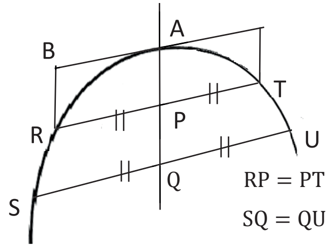
Newton aproximou no “limite” a curva à parábola cuja equação é: $y^2 = 2px$

$$\therefore \frac{y^2}{x} = 2p = \text{cte} \qquad (1)$$

p é a distância do foco à diretriz

F é o foco.

A9.2.1 Propriedade da parábola

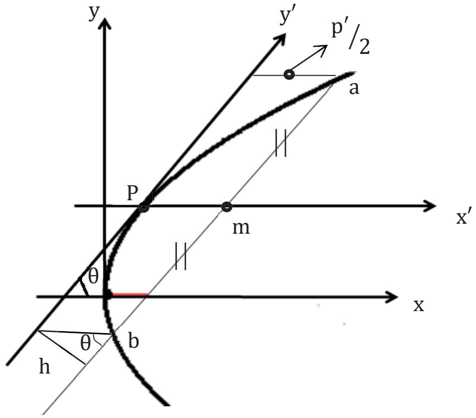


$$\frac{AP}{AQ} = \frac{RP^2}{SQ^2} = \text{cte} \Longrightarrow \frac{AB^2}{SQ^2} = \frac{BR}{AQ}$$

APQ é um diâmetro que divide a parábola ao meio, cortando ao meio as cordas RT e SU. RP e SQ são semicordas.

Referência: Arquimedes

Para um sistema de coordenadas quaisquer $(x'\ y')$:



$$\frac{y^2}{x} = 2p = \text{cte e } \frac{y'^2}{x'} = 2p' = \text{cte}$$

$$\text{sen}\,\theta = 2\frac{h}{p'}$$

$$\frac{y'^2}{x'} = 2\left(\frac{p}{\text{sen}^2\theta}\right) = \text{cte} \Rightarrow p' = \frac{p}{\text{sen}^2\theta}$$ [4]

[4] Quando $\theta = 90°$, $p' = p$, $y' = y$ e $x' = x$.

$$\frac{y_1^2}{x_1} = \frac{y_2^2}{x_2} \therefore \frac{y'^2}{x'} = \text{cte}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{4-2}{6-3} = \frac{2}{3}$$

(HÜTTE, 1958)

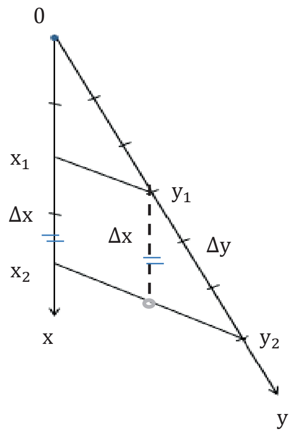
A9.2.2 Propriedade das proporções

$\frac{\Delta y^2}{\Delta x} = \frac{y^2}{x}$ ∴ A variação Δy^2 está para a variação Δx, assim como y^2 está para x. (2)

$$\frac{2}{3} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{4}{6} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_i}{y_i} = \text{cte}$$

$$\frac{4-2}{6-3} = \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x_i}{y_i} = \text{cte} = K$$

Pois: $x_2 = x_1 + \Delta x$



$\therefore x_2 - x_1 = x_1 + \Delta x - x_1 = \Delta x$

$y_2 - y_1 = y_1 + \Delta y - y_1 = \Delta y$

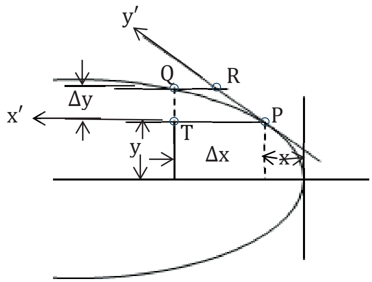
$x_2 - x_1 = K\Delta y = \Delta x$

$\therefore \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{K\Delta y}{\Delta y} = K = \text{cte}$

Com base em triângulos semelhantes, têm seus lados correspondentes proporcionais. (ver CASTRUCCI, GIOVANNI)

Voltando à equação da parábola: ${y^2}/{x} = 2p = cte$, podemos deduzir que:

$$\frac{x}{\Delta x} = \frac{y^2}{\Delta y^2} = cte, \text{ pois } \frac{x_2}{y_2^2} = \frac{x_1}{y_1^2} = \frac{\Delta x}{\Delta y^2} = cte = \frac{1}{2p}$$



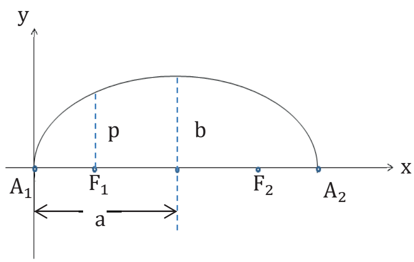
Segundo Newton:

$\frac{QR}{QT^2}$ trata-se da variação da proporção: ${\Delta y^2}/{\Delta x}$

No lim quando $Q \to P$, $\frac{QR}{QT^2} \to \frac{\Delta x}{\Delta y^2}$ [5]

Compare as duas figuras, são semelhantes.[6]

$\frac{RP^2}{PT} = \frac{y'^2}{x'} = \frac{QT^2}{QR} = cte$, por semelhança de triângulos.



[5] Pois: $\lim_{Q \to P} \frac{QR}{QT^2} = \quad = \frac{QR}{QT^2} = \frac{\Delta x}{\Delta y^2} = \frac{x}{y^2} = \frac{1}{2p} \Rightarrow y^2 = 2px$ Ver equações 1 e 2 acima, Secção A9.2 e A9.2.2.

[6] Ver Figura anterior em Arquimedes. Inicialmente, QP é um segmento de elipse e ∴ QR/QT^2 não é exato. Quando $Q \to P$, chega-se a um segmento QP que se torna parabólico, então, QR/QT^2 se torna exato e constante.

Observação:

Equação da elipse referida ao vértice:

$$y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$$ [7]

Quando $a \to \infty$, a elipse se torna uma parábola, como visto anteriormente, e a equação se torna $y^2 = 2px$, equação de uma parábola, o que confirma o procedimento.

Quando Newton leva ao limite Δx e $\Delta y \to 0$, corresponde a levar $a \to \infty$, tornando a elipse tão grande que um pequeno trecho seu se confunde com uma parábola, que é uma elipse em que um dos focos e, portanto a, tende para o infinito.

Aliás, pelo cálculo diferencial, que foi uma descoberta de Newton, compartilhada com Leibniz:

$$\frac{d(y^2)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(y^2)}{\Delta x} = \frac{2y}{1} = \frac{d(2px)}{dx} = \frac{2p}{1}$$

Como p é constante, $\frac{d(2px)}{dx}$ será constante.

Logo, no limite, quando $\Delta x \to 0$, $\frac{QT^2}{QR} = \frac{\Delta(y^2)}{\Delta x}$ tende a uma constante: 2p

q.e.d.

3ª etapa: Newton avalia geometricamente a intensidade da força central, ver fig na secção A9.2, Problema da Força Central.

Se não houvesse força, o corpo se deslocaria de P segundo a tangente PR. Por efeito da força, se desvia por uma distância RQ, conforme Galileu. Sabe-se que um corpo sujeito a uma força constante desloca-se com o quadrado do tempo, obedecendo à fórmula: $\vec{s} = \vec{v}_0 t + \vec{g}\,t^2/2$

O 1º termo leva em conta o movimento inercial e o 2º, o efeito da força fazendo a trajetória resultante ser PQ ([8]). Logo, a intensidade da força será proporcional ao limite da relação $QR/(QT)^2$, quando Q tende a P (ver Figura assinalada em (0) da figura na secção A9.2).

Expressando Δt em termos geométricos:

Como visto, o tempo é proporcional à área varrida pelo vetor SP. Portanto, Δt é proporcional à área SPQ. Logo, com boa aproximação: $SP \times {}^{QT}/_{2}$ (ver Figura assinalada com (0), mencionada fig, secção A9.3).

Recorde-se que espaço: $e = ({}^{1}/_{2})at^2 \Rightarrow$ aceleração $a = {}^{2e}/_{t^2}$, como $F = ma \Rightarrow F = {}^{2me}/_{t^2}$, logo, a força F é proporcional ao inverso do quadrado do tempo t.

---

[7] $p = \frac{b^2}{a}$, ver Equação 1 em “Observação: cônicas”, secção A9.3.1.2.

[8] Como se vê, é uma soma vetorial de um movimento uniforme pela inércia e um movimento acelerado, pela aceleração centrípeta, resultando uma trajetória parabólica, como o movimento de um projétil.
Ref.: Hal-Resn v1 e A1. Finn v1.

Quando Q tende a P, torna-se exata. Então Δt é proporcional a $SP \times QT$. Logo, a intensidade da força central será proporcional ao limite da relação $QR/(SP \times QT)^2$ quando Q tende a P.

4ª etapa: o que vimos aplica-se a uma elipse. Pela 1ª etapa, a força central é dirigida para S. Pela 3ª etapa, a intensidade é proporcional ao produto de ${}^{1}/_{SP^2}$ pelo limite da relação QR/QT^2 [9] quando Q tende a P. A 2ª etapa nos diz que essa relação tende a uma constante. Conclusão: F é proporcional a ${}^{1}/_{SP^2}$, isto é, a intensidade da força é proporcional ao inverso do quadrado da distância SP.

Ref: Scientific American

c.q.d ou q.e.d. (*quod erat demonstrandum*)

Referindo-se a Salmeron, (1954):

Grandezas diretamente proporcionais:

Se a for proporcional a b:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots\cdots\cdots\frac{a_n}{b_n} = c \text{ (constante)}$$

Em geral: $\frac{a}{b} = c \Rightarrow a = c.b$ c é constante de proporcionalidade.

Grandezas inversamente proporcionais:

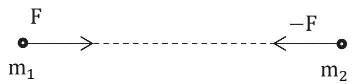
$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = \cdots\cdots\cdots\frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = c \text{ (constante)}$$

Em geral,

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = c \Rightarrow ab = c$$

Teorema: quando uma grandeza a é proporcional a duas outras b e c, será proporcional ao produto dessas outras (HALLIDAY, RESNICK, WALKER, 1996).

A interação entre duas partículas de massas m_1 e m_2 como uma força de atração, formam um par ação-reação de valores F e $-F$, conforme a 3ª lei de Newton.



Pela 2ª lei, a força de atração será proporcional às massas envolvidas no sistema m_1 e m_2·, mas como estão afastadas de uma distância r a influência na força F será como o inverso do quadrado desse afastamento. Quanto maior a distância, menor a força, e a variação é, como vimos, com o quadrado da distância.

Logo: $\frac{F}{m_1.m_2.\left(\frac{1}{r^2}\right)} = G$ (constante gravitacional) $\therefore F = G\frac{m_1.m_2}{r^2}$

[9] A força é proporcional ao quadrado do tempo e, portanto, com o quadrado da área.

Recordemos a “regra de três composta”:

Quando existem mais de duas grandezas relacionadas, a “regra de três” é chamada de composta. Para a compreensão do teorema mencionado, a regra de três composta é perfeitamente adequada. Vejamos um exemplo para prová-lo: uma torneira enche um tanque de 200 l em 20 min. Quanto tempo duas torneiras levariam para encher um tanque de 300 l?

Tempo t		Volume V		Quantidade Q
20	$\longrightarrow$	200	$\longrightarrow$	1
X	$\longrightarrow$	300	$\longrightarrow$	2

Analisemos as grandezas de duas em duas. Se as torneiras enchem 200 l em 20 min, 300 l vão demorar mais tempo, portanto, as grandezas tempo e volume são diretamente proporcionais. Se uma torneira enche em 20 min, duas gastarão menos tempo, portanto, são inversamente proporcionais. Nesse caso, será preciso inverter a grandeza quantidade a fim de montar a proporção. Confira: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow \frac{t_2}{V_2 \cdot Q_1} = \frac{t_1}{V_1 \cdot Q_2} = \text{cte}$

Substituindo: $\frac{t_2}{300 \cdot 1} = \frac{20}{200 \cdot 2} = \text{cte} = \frac{1}{20}$

Ou seja: $\frac{t_2}{V_2\left(\frac{1}{Q_2}\right)} = \frac{t_1}{V_1\left(\frac{1}{Q_1}\right)} = \frac{t}{V\left(\frac{1}{Q}\right)} = \text{cte}$

Compare com a fórmula: $\frac{F}{m_1 m_2\left(\frac{1}{r^2}\right)} = G$, uma constante.

c.q.d.

O que comprova o teorema.

Voltando ao problema: $t_2 = \frac{1}{20} 300 \cdot 1 = 15\text{min}$

A9.3 2ª LEI E GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Newton não expressou a 2ª lei como equação: uma mudança no movimento é proporcional à força motriz e se dá ao longo da linha reta na qual a força é impressa (Crease, 2011).

Notação moderna: $F \propto \Delta(mv)$ (2)

Isto é, a força é proporcional à variação da quantidade de movimento mv, variação supostamente no tempo. Desde que a mudança na velocidade seja a aceleração: F = ma. A primeira pessoa a expressar essa noção como equação foi Leonhard Euler, quase um século mais tarde.

De fato, na proposição nº 24 do 2º livro dos *Principia Mathematica* de Newton, se explica:

> "A velocidade que uma dada força pode produzir em uma dada matéria, em um tempo dado, é diretamente proporcional ao tempo, e essa velocidade é proporcional à força e inversamente proporcional à quantidade de matéria."

Se substituirmos "velocidade que uma dada força pode produzir" por dv, "força" por F, "matéria" por m e "tempo dado" por dt, teríamos: $F = {}^{mdv}/_{dt} = ma$.

Esclarecemos: Newton deduziu os *Principia* em linguagem geométrica. Não utilizou o cálculo das "fluxões" (que chamamos hoje de derivadas), pelo qual se poderia escrever: F = ma, levando em conta o nível de conhecimento dos leitores aos quais se dirige. O estilo geométrico correspondia à expectativa dos filósofos da Natureza do fim do século XVII. A Física, como ciência independente ainda não existia, era uma parte da Filosofia.

Porém, o enunciado da 2ª lei do movimento é surpreendente.

A força aparece como proporcional à mudança de movimento. Não se faz referência ao tempo. Não se sabe se convém transcrever F = ma (força proporcional à aceleração) ou $F = m\Delta v$ (força proporcional à variação da velocidade Δv, da velocidade v).

Ref.: Scientific American, Genios da Ciencia nº 7, Isaac Newton.
The Mathematical Principles of Natural Philosophy

Isaac Newton, 1729 (SCIENTIFIC AMERICAN; NEWTON)

Newton expressou a gravitação universal como: a gravidade "existe em todos os corpos, universalmente", e sua intensidade entre dois corpos depende da massa desses corpos e "será inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros" (Crease, 2011).

Combinando a força gravitacional com a 2ª lei de Newton: $F = G\frac{Mm}{r^2} = mg$, em que g é a aceleração da gravidade.

Daqui obtemos: $g = \frac{GM}{r^2}$

Em 1798, Henry Cavendish, utilizando uma balança de torção semelhante à utilizada por Coulomb para determinar a força devida a cargas elétricas, obteve:

$G = 6{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{dinacm^2/g^2}$ ou $6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N.m^2/kg^2}$ [10] considerando $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, ao nível do mar e à latitude de 40°N.

Com isso, é possível calcular a massa da Terra:

$980 = \frac{6{,}67\times10^{-8}\times M}{(6{,}38\times10^{8})^2}$ considerando que a Terra atrai 1 g com força de 980 dinas e raio da Terra 6.380 km ou $6{,}38 \times 10^{8}\mathrm{cm}$ $\therefore M = 5{,}98 \times 10^{27}\mathrm{g} = 5{,}98 \times 10^{24}\mathrm{kg}$

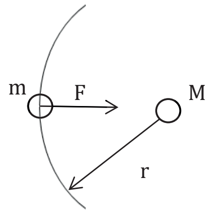
Volume da Terra $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 108{,}8 \times 10^{25}\mathrm{cm^3}$

---

[10] Também: $G = 6{,}67 \times 10^{-8}(\mathrm{gcm/s^2})\ (\mathrm{cm^2})/\mathrm{g^2} = 6{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{cm^3/gs^2}$.

Massa específica média: $\frac{600\times10^{25}}{108,8\times10^{25}} = 5,5\,\mathrm{g/cm^3}$.

Também podemos calcular a massa do Sol:



$F = G\frac{Mm}{r^2} \therefore G\frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r$, (força centrípeta, ver Seção 2.1.3, Equação 3a 1, sobre MHS).[11]

$\therefore \omega^2 = G\frac{M}{r^3}$, (1)

Logo, a velocidade angular independe da massa do planeta, dependendo da massa do Sol e do raio da órbita planetária. Considerando a órbita da Terra, suposta circular:

150 milhões de km e tempo de revolução de 365 dias, ω em rad/seg.

$\therefore \omega = {}^{2\pi}/_{365\mathrm{d}} = 2\pi/3,1536\times10^7\mathrm{seg}$

$\therefore M = \left(\frac{2\pi}{3,1536\times10^7}\right)^2 \frac{\left(1,5\times10^{11}\right)^3}{6,67\times10^{-11}} = \frac{(1,9924)^2}{10^{14}}\,\frac{3,375\times10^{33}}{6,67\times10^{-11}} =$

$= 2,0086\times10^{30}\mathrm{kg} = 2,0086\times10^{27}\mathrm{ton} = 3,3612\times10^5$ da Terra

$\cong 340\,000$ da Terra.

A9.3.1 Resolução moderna

A9.3.1.1 Introdução

$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\frac{d\vec{A}}{dt}\right) = \vec{A}\times\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} + \frac{d\vec{A}}{dt}\times\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{A}\times\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$, pois $\frac{d\vec{A}}{dt}\times\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$, $\mathrm{sen}\alpha = 0$.[12]

$$\therefore \int \vec{A}\times\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}\cdot dt = \int\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\frac{d\vec{A}}{dt}\right)dt = \vec{A}\times\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{c} \qquad \vec{c}\ \text{constante}$$

Equação do movimento de uma partícula P de massa m:

[11] Obtida multiplicando a massa m pela aceleração radial ou centrípeta.

[12] $\frac{d\vec{A}}{dt}\times\frac{d\vec{A}}{dt} = \left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right|\cdot\left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right|\,\mathrm{sen}\alpha$, α ângulo entre $\frac{d\vec{A}}{dt}$ e $\frac{d\vec{A}}{dt} \therefore \alpha = 0$

m $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f(r)\vec{r}_1$[13] $\vec{r}$ vetor posição de P com relação à origem 0,

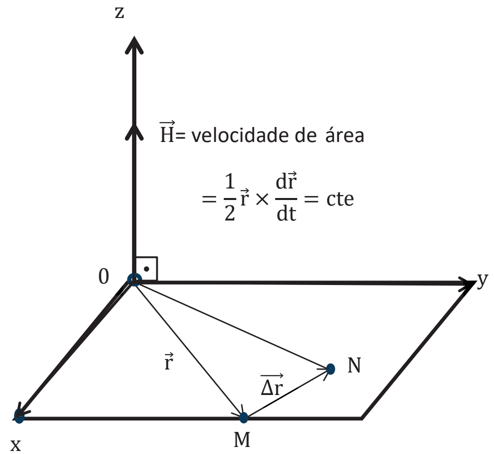
$\overrightarrow{r_1}$ vetor unitário na direção $\vec{r}$, f(r) função da distância de P a 0 (força).

a) Achando o produto vetorial por $\vec{r}$: $m\vec{r} \times {d^2\vec{r}}/{dt^2} = f(r)\vec{r} \times \overrightarrow{r_1} = 0$, pois r e r_1 são colineares
$\therefore \vec{r} \times \vec{r}_1 = 0$, logo: $\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = 0$$

Integrando: $\vec{r} \times {d\vec{r}}/{dt} = \vec{c}$, ver Introdução.

Recordemos: a derivada de uma constante é nula.



b) Se $f(r) < 0$, a aceleração ${d^2\vec{r}}/{dt^2}$ tem sentido oposto a r_1, a força é dirigida para 0 e a partícula P é sempre atraída para 0 (força atrativa).
Se $f(r) > 0$, a força se afasta e a partícula P é repelida (força repulsiva).

A força dirigida para o ponto 0, fixo: atrativa ou repulsiva, dependendo somente da distância $\vec{r}$ de 0. Chama-se "Força central".

c) No tempo Δt a partícula se move de M para N. Área varrida, é aproximadamente a ${1}/{2}$ da área do paralelogramo formado por $\vec{r}$ e $\overrightarrow{\Delta r}$:
$\frac{1}{2}\,\vec{r} \times \Delta\vec{r}$ (ver produto vetorial, cujo valor é o da área do paralelogramo).

$\therefore$ Área varrida pelo raio vetor na unidade de tempo:

[13] Massa × aceleração = força, função do raio.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\vec{r} \times {d\vec{r}}/{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$$ $\vec{v}$ velocidade instantânea

A grandeza $\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$,chama-se "velocidade de área" (1)

Pelo item a): $\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} =$ constante

Como $\vec{r} \cdot \vec{H} = 0$, o movimento é realizado no plano xy perpendicular a $\vec{H}$.[14]

Veremos adiante, em "Momento angular", equações 1 e 2, sendo: $\vec{H} = \frac{\vec{L}}{m} = \frac{1}{m}\vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{H}$ é $\perp$, isto é, perpendicular, a $\vec{r}$ e a $\vec{p} = m\vec{v}_\theta$, portanto $\perp$ ao plano xy, $\vec{v}_\theta$ está no plano xy.

Lembrar que o resultado do produto vetorial: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, é um vetor $\perp$ ao plano formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

$\therefore$ $\vec{r}$ e $\vec{H}$ são perpendiculares pois: $\vec{r} \cdot \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{r} \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{r} \parallel \vec{r}$, $\text{sen}(\widehat{rr}) = 0$

O triplo produto vetorial será nulo quando 2 dos 3 vetores forem paralelos pois nesse caso o volume do paralelepípedo formado pelos 3 vetores será nulo.

d) Um planeta é atraído pelo Sol. Conforme a lei da gravitação de Newton:
$F = GM\,m/r^2$, G constante universal.

$\therefore m\,{d^2\vec{r}}/{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2} \Longrightarrow {d^2\vec{r}}/{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}$, considerando desprezível a influência dos outros planetas.

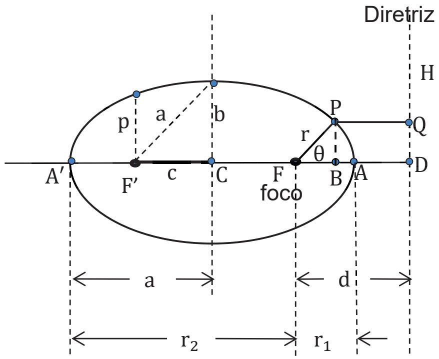
Conforme item c, o planeta se move com raio vetor varrendo áreas iguais em tempos iguais. Essa é a 2ª lei de Kepler, deduzida empiricamente com dados compilados por Tycho Brahe. Possibilitou a Newton a formulação da sua lei da gravitação.

Ref: Spiegel

---

14 Recorde que: $rH\cos 90^0 = 0$, de vez que $\cos 90^0 = 0$. Veremos adiante em "Momento angular", equ1 e 2, que, sendo $\vec{H} = \frac{\vec{L}}{m} = \frac{1}{m}\vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{H}$ é perpendicular a $\vec{r}$ e a $\vec{p} = m\vec{v_\theta}$, portanto $\perp$ ao plano xy. Lembrar que o resultado do produto vetorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ é um vetor $\perp$ ao plano formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

A9.3.1.2 Observação: cônicas



Excentricidade $\varepsilon = {}^{PF}/_{PQ}$

$PF = r \quad FD = d$

$PQ = FD - FB = d - r\cos\theta$

$\therefore \varepsilon = {}^{r}/_{(d - r\cos\theta)} \Longrightarrow \varepsilon d - \varepsilon\, r\cos\theta = r \Rightarrow \dfrac{\varepsilon d}{r} = 1 + \varepsilon\cos\theta$

$\varepsilon\, r\cos\theta + r = \varepsilon\, d \Rightarrow r = \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon\cos\theta}$

No caso de uma elipse, que é uma curva fechada, o ponto A corresponde a $\theta = 0$ e A', $\theta = \pi$.

De acordo com a equação polar, teremos: $r_1 = \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}$ para $\theta = 0$ e $r_2 = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon}$ para $\theta = \pi$

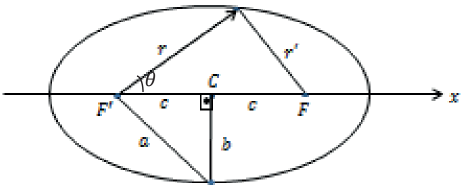
$r_1 + r_2 = 2a \Longrightarrow a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2}$

Fazendo excentricidade: $e = c/a = CF/CA$, obtemos:

$b = a\sqrt{1 - e^2}$, pois: $b^2 = a^2\left(1 - {}^{c^2}/_{a^2}\right)$ $e: a^2 = b^2 + c^2$ Área da elipse: $S = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1 - e^2}$, ver eq. 8a em "Dedução da 3ª Lei de Kepler", secçaõ A9.5, para excentricidade $e = \frac{c}{a}$

Círculo, elipse especial em que a excentricidade sendo $e = \frac{CF}{CA}$, quando $e = 0$

A equação polar da elipse quando C está no eixo x e o polo O no foco F′ será (ver fig.):



$$c = ae$$

$$r + r' = 2a$$

$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$, deduzida pela. Lei dos cossenos: $r'^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr\cos\theta$

$= r^2 + 4a^2e^2 - 4rae\cos\theta$

Substituindo: $r' = 2a - r$, cancelando r'^2 de ambos os lados e dividindo por 4a, temos:

$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4a^2e^2 - 4rae\cos\theta \Rightarrow a(1 - e^2) = r(1 - e\cos\theta) = p$

$r(1 - e\cos\theta) = a(1 - e^2) = p \;\therefore r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$ (ver eq.1 ao pé da pag. de "Momento angular" secção A9.4)

Referência: Arfken-Weber

p igual ordenada no foco: $p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}$ (1) (Ver Malavasi)[15]

$r' = a - cx,\ r = a + cx,\ r + r' = 2a$

$x = r\cos\theta$

Raio máximo: F'A = a + c, raio mínimo: F'A' = a − c (ver 1ª figura) ([16])

Ref.: Alonso Finn

Nesse caso:	Elipse	$e < 1$	
	Parábola	$e = 1$	(Ver Tabelas Spiegel)
	Hipérbole	$e > 1$	

A9.4 MOMENTO ANGULAR

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, onde $\vec{r}$ = raio vetor, $\vec{p}$ =quantidade de movimento $= m\vec{v} = m\vec{r}\frac{d\theta}{dt}$ (1)

---

[15] De fato: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, equação da elipse $\Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ $\Rightarrow p = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$ mas: $b^2 = a^2 - c^2$ (ver fig), logo $p = \frac{b}{a}b = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = a\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) = a(1 - e^2)$

[16] Quando $\theta = 0^0$, $x = r$, quando $\theta = 180°$, $x = -r = r'$. Re: FIC

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Componentes do vetor unitário } \vec{u} \\ \longrightarrow \text{Módulos das componentes do vetor } \vec{r} \\ \longrightarrow \text{Componentes do vetor } \vec{p} \end{array}$$

Quando a força é central, o momento angular relativo ao centro é constante.

Retornando ao item c da "Resolução Moderna" secção A9.3.1.1, equação de "velocidade de área" equação 1:

$$\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{cte}$$

Como se pode ver da fig. no item b da "Resolução moderna", $\vec{r}$ é perpendicular a $d\vec{r}$,então $H = \frac{1}{2} r \frac{dr}{dt}$sen 90°, $\vec{r}$ e $d\vec{r}$ estão no plano xy , logo $\vec{H}$ será ⊥ ao plano xy, pois quando:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B},\ \vec{C} \text{ é } \perp \text{ ao plano } \overrightarrow{AB}.$$

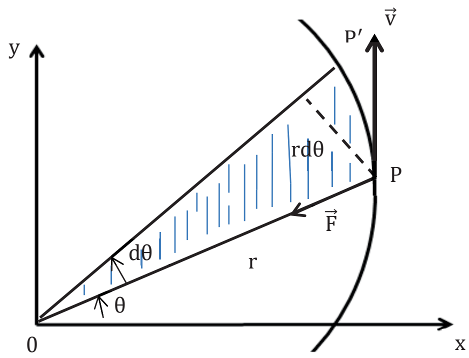
$\therefore H = \frac{1}{2} r \frac{dr}{dt}$. Também temos que $\lim\limits_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta r}{r} = d\theta$ da definição de ang. em rad.[17]

Logo: $H = \frac{1}{2} r^2 \frac{dr}{r} \frac{1}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$, mas velocidade angular: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

$$\therefore H = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

$\vec{p} = m\vec{v}$, $\vec{v} = \vec{v}_\theta + \vec{v}_r$·, onde $\vec{v}_\theta$ velocidade tangencial e $\vec{v}_r$, velocidade radial. Como $\vec{v}_r$ é colinear com $\vec{r}$, $\vec{r} \times \vec{v}_r = 0$

$$\therefore \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times (\vec{v}_\theta + \vec{v}_r) = \vec{r} \times \vec{v}_\theta$$



$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cte} = r^2 \omega$$

[17] No nosso caso, seria ângulo elementar dθ. Ângulo é a relação entre o arco e o raio. Quando $\Delta r \to 0$, a secante Δr, se torna tangente dr, confundindo-se com o arco elementar.

r varre na unidade de tempo:

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$ = cte (ver fig.) (1a), veja também equação 0, em "Demonstração elegante", secção A9.1.1.

É a 2ª Lei de Kepler: área varrida no tempo é constante.[18]

$\vec{L} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{L}{m} = r^2 \frac{d\theta}{dt}$, pois $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}_\theta$ (2) e $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$ $L = mr^2\omega$ (2a)
$\overrightarrow{e_\theta}$ = vetor unitário

$\vec{r} = r\vec{e}$ $\overrightarrow{e_r}$ = vetor unitário ⊥ a $\overrightarrow{e_\theta}$ $\therefore \overrightarrow{e_\theta} \times \overrightarrow{e_r} = 1$, componente radial:

$\overrightarrow{L_r} = mv_r \ \overrightarrow{e_r} \times r\overrightarrow{e_r} = 0$ ∴ nula.

Exemplo: Estimar o momento angular da Terra relativo ao Sol e o de um elétron relativo ao núcleo de um átomo de hidrogênio, no raio mínimo da órbita eletrônica.

Massa da Terra: $5{,}98 \times 10^{24}$kg

Distância média do Sol: $1{,}49 \times 10^{11}$m

Período de revolução da Terra em torno do Sol é: $3{,}16 \times 10^7$seg (1 ano)

Velocidade angular média da Terra: $\omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{3{,}16\times10^7 seg} = 1{,}98 \times 10^{-7} seg^{-1}$

Momento angular da Terra relativo ao Sol:

$$L = mr^2\omega = (5{,}98 \times 10^{24}kg)(1{,}49 \times 10^{11}m)^2(1{,}98 \times 10^{-7}seg^{-1})$$
$$= 2{,}67 \times 10^{40} m^2 kg\ s^{-1}$$

Momento angular do elétron no átomo de hidrogênio:

$$L = mr^2\omega = (9{,}11 \times 10^{-31}kg)(5{,}29 \times 10^{-11}m)^2(4{,}13 \times 10^{16}s^{-1})$$
$$= 1{,}05 \times 10^{-34} m^2 kg\ s^{-1}$$

Multiplicando por 2π, obtemos a constante de Planck h:

$$h = 2\pi \times 1{,}05 \times 10^{-34} = 6{,}62 \times 10^{-34}\ kg\ m^2/s = 6{,}62 \times 10^{-27} erg\ seg$$

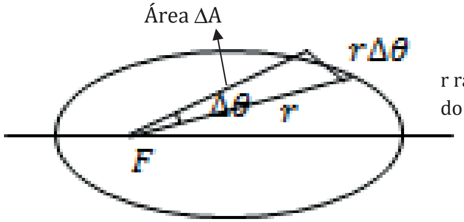
Calculado para o raio mínimo da órbita eletrônica.

O valor de L do elétron no átomo de hidrogênio é chamado de ℏ (agá cortado)[19]

$$L = n\hbar = n\frac{h}{2\pi} \qquad (3)$$

[18] O planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

[19] Recordar nas equações 0a e 0b da "Teoria atômica de Bohr," secçaõ A6.3. Quando falamos de quantidade de movimento angular $L = n\,{}^{h}/_{2\pi}$, relacionado com a constante de Planck; ℏ com n = 1 , é o menor valor possível de energia, chamado "estado fundamental".



r raio médio
do setor ΔA.

r é o raio da menor órbita possível para o Hidrogênio.

$h = 2\pi\hbar$ constante de Planck

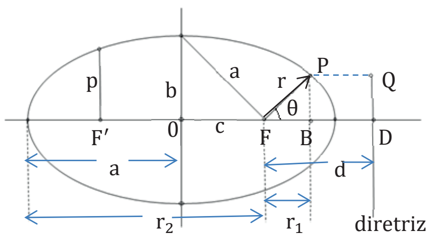
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega$$

$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ Momento angular é conservado

2ª Lei de Kepler é equivalente à lei da conservação do momento angular.

Momento angular é constante: $r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}$ ou $r^2 d\theta = \frac{L}{m}dt$

A9.5 DEDUÇÃO ALGÉBRICA DA 3ª LEI DE KEPLER



Excentricidade: $\varepsilon = \frac{PF}{PQ}$

PF = r, raio vetor, distância ao foco F

FD = d, distancia do foco F à diretriz

PQ = FD − FB, como FB = r cosθ

$\therefore\ \varepsilon = {}^{r}\!/_{(d - r\cos\theta)} \Rightarrow \varepsilon d - \varepsilon\, r\cos\theta = r$

$\varepsilon\, r\cos\theta + r = \varepsilon\, d \Rightarrow \frac{\varepsilon\, d}{r} = 1 + \varepsilon\cos\theta \quad (1)$

Quando $\theta = 90°$, $\cos 90° = 0 \quad \therefore\ \varepsilon\, d = r = p \Rightarrow \varepsilon\, d = p \qquad (2)$

Quando $\theta = 0°$, $\cos 0° = 1 \Rightarrow r_1 = \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}$ e quando $\theta = \pi, \cos\pi = -1 \Rightarrow r_2 = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon}$

$r_1 + r_2 = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{\varepsilon\, d}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)} \Rightarrow a = \frac{\varepsilon\, d}{(1-\varepsilon^2)} \qquad (3)$

$c = a - r_1 = \frac{\varepsilon\, d}{(1-\varepsilon^2)} - \frac{\varepsilon\, d}{(1+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon\, d(1-1+\varepsilon)}{1-\varepsilon^2} \Rightarrow c = \frac{\varepsilon^2\, d}{1-\varepsilon^2}$, introduzindo 3: $c = \varepsilon\, a \quad (3a)$

A Energia conservada, isto é, é constante, e igual à energia cinética mais energia potencial:

$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r)$, a energia potencial é função de r.

A velocidade se compõe de uma componente radial e outra, tangencial, a tangencial é:

$v_\theta = \omega r$, onde ω, velocidade angular.

$\therefore$ utilizando o teorema de Pitágoras: $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

A quantidade de movimento angular é constante:

$$L = mr^2\, {}^{d\theta}\!/_{dt} = \text{cte} \Rightarrow r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{(mr)^2} \qquad (4)$$

$\therefore v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{(mr)^2} \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r) \Rightarrow E - E_p(r) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$

Como: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} = \omega =$ velocidade angular $\Rightarrow \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{dt}{d\theta}\right)\right]^2 = \frac{m^2r^4}{L^2}\,\frac{2}{m}\left\{\left[E - E_p(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right]\right\}$

$$\therefore \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{m^2r^4}{L^2}\left\{\frac{2[E-E_p(r)]}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2}\right\} \qquad (5)$$

Derivando 1 em θ: $-\frac{\varepsilon d}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon\,\text{sen}\theta \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4\text{sen}^2\theta}{d^2}$, substituindo em 5:

$\text{sen}^2\theta = \frac{d^2m^2}{L^2}\left\{\frac{2[E-E_p(r)]}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2}\right\} \quad (6) \qquad$ Da equação 1: $\cos\theta = {}^{d}\!/_{r} - {}^{1}\!/_{\varepsilon}$

$\therefore \text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{d}{r} - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 = 1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{\varepsilon r} - \frac{1}{\varepsilon^2}$, substituindo em 6, resulta:

$1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{\varepsilon r} - \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{2d^2mE}{L^2} - \frac{2d^2mE_p(r)}{L^2} - \frac{d^2}{r^2}$. Eliminando $\frac{d^2}{r^2}$, igualando os termos constantes e os que dependem de r, E é conservado, não depende de r, mas $E_p(r)$ varia, depende de r. Separando os termos constantes dos variáveis, se obtém:

$$\frac{2d^2mE}{L^2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow E = \frac{L^2}{2d^2m}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \quad (6a)$$

$$-\frac{2d^2 m E_p(r)}{L^2} = \frac{2d}{\varepsilon r} \Longrightarrow E_p(r) = -\frac{L^2}{m\varepsilon d r} \quad (7)$$

Da secção 4.7, Energia Potencial Gravitacional, equação 2: $E_p = -\gamma\frac{mm'}{r}$, substituindo em 7: $\frac{L^2}{m\varepsilon dr} = \gamma\frac{mm'}{r} \Longrightarrow L^2 = \gamma m^2 m'\varepsilon d$, introduzindo a equação 3: $\varepsilon d = a(1-\varepsilon^2)$, obtemos:

$L^2 = \gamma m^2 m' a(1-\varepsilon^2)$ (7a). Retomando a equação 4: $r^2 d\theta = \frac{L}{m}dt$. Da equação 1b do Momento angular secção A9.4, verificamos que: $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ é a área elementar do Setor da elipse, ver figura, integrando entre 0 e 2π, encontramos a área da elipse:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta = \frac{L}{2m}\int_0^{p} dt = \frac{LP}{2m} \qquad (8),\ P \text{ é o período.}$$

Observando a figura acima, da elipse, vemos como resolução de um triângulo retângulo:

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2$, introduzindo a equação 3a:

$b^2 = a^2 - a^2\varepsilon^2 \Longrightarrow b^2 = a^2(1-\varepsilon^2) \Longrightarrow$ Recorde-se: ${b^2}/{a} = p$, equação 1 da secção A9.4, Momento angular.

Sabemos da Geometria que a Área da elipse é: $S = \pi ab$ [20] (8a)

$$\therefore S = \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2} \qquad (9)$$

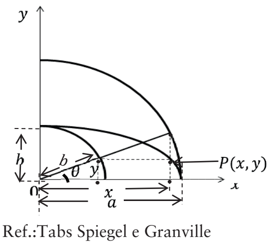
Igualando 8 com 9: $\pi^2 a^4(1-\varepsilon^2) = {L^2P^2}/{4m^2}$, introduzindo 7a: $\pi^2 a^3 = \frac{1}{4}\gamma m' P^2$

$\therefore P^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m'}a^3$ (10), 3ª Lei de Kepler: O quadrado do Período é proporcional ao cubo do eixo maior. Essa fórmula concorda com a da órbita circular, deduzida na secção 4.6, equação 1.

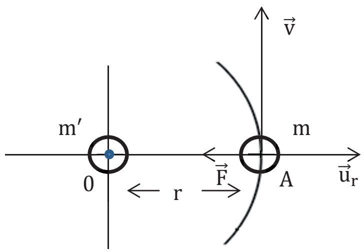
[20] Também em Cálculo integral: $x = a\cos\phi$, $y = b\,\mathrm{sen}\phi$, $dx = -a\,\mathrm{sen}\phi\, d\phi$.
Quando $x = 0$, $\phi = {1}/{2}\,\pi$ e $x = a, \phi = 0,\ {\text{área}}/{4} =$

$$= \int_0^a y dx = -ab\int_{\pi/2}^{0} \mathrm{sen}^2\phi\, d\phi,\ \int \mathrm{sen}^2\phi d\phi = {1}/{2}\left(\phi - {1}/{2}\,\mathrm{sen}2\phi\right) + C$$

$$= -\left[{1}/{2}\,(\phi - \mathrm{sen}\phi\cos\phi)\right]_{\pi/2}^{0} ab = \left[\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right] ab = \frac{\pi ab}{4} \Rightarrow \text{Área} = \pi ab$$



Ref.:Tabs Spiegel e Granville



Ref.: Alonso – Finn

Os quadrados dos períodos de revolução são proporcionais aos cubos das distâncias médias do Sol aos planetas: $P^2 = kr_{med}^3$ onde k é uma constante de proporcionalidade.

Há uma maneira mais fácil de deduzir a fórmula:

Da 2ª Lei e Gravitação Universal secção A9.3, no cálculo da massa do Sol, equação 1, temos: $\omega^2 = G\frac{M}{r^3}$

Em nosso caso ω = velocidade angular: $\omega = \frac{2\pi}{P}$, equação 3c da secção 2.1.3, MHS.

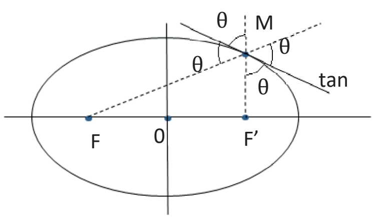
G é γ, constante gravitacional: $G = 6{,}67 \times 10^{-8}\, \mathrm{dina.cm^2}/_{g^2}$

M é m′: massa do Sol

r, raio médio proporcional a "a".

Substituindo: $\frac{(2\pi)^2}{P^2} = G\frac{M}{r^3} \Rightarrow P^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$, semelhante à fórmula acima.[21]

Como vimos na eq.2, Secção.4.6, Newton testou a validez da lei da gravidade aplicando-a na Lua orbitando a Terra.



[21] A fórmula $P^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m'}a^3$ é mais geral, pois foi deduzida levando em conta a área da elipse. A fórmula $P^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m'}r^3$ se adapta melhor quando a órbita for praticamente circular como, por exemplo, a da Terra e a da Lua.

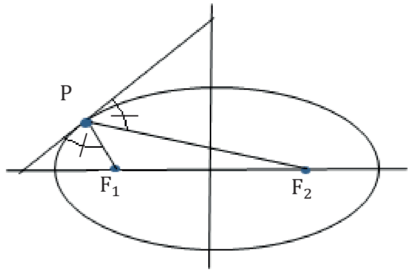
Complementando as características da Elipse: a tangente é a bissetriz das duas semirretas MF e MF′

∴ os 4 ângulos θ são iguais.

A tangente é uma bissetriz, isto é, divide o ângulo em 2 partes iguais.

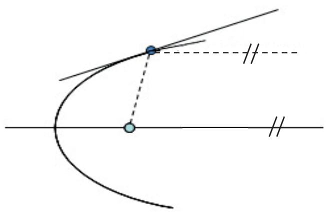
Ref.: Larousse e FIC

Em consequência, um raio de luz partindo do foco F, refletindo-se na tangente, atingirá o foco F' e vice versa.



"Na Casa Branca, existe o famoso salão oval, que tem a forma de uma elipse. Em salões assim, se você coloca uma pessoa num dos focos da elipse e outra no outro foco, as duas se ouvem mesmo que falem em voz baixa. Isso se deve a uma propriedade das elipses". Essa propriedade funciona assim: caso se trace uma linha reta de um dos focos da elipse até um dos pontos na curva da elipse, meça o ângulo entre essa linha e a reta tangente, a linha refletida passará pelo outro foco, como mostra a figura. "A catedral metropolitana de Brasília também é assim". Para quem não sabe matemática, a ampliação da voz talvez pareça sobrenatural. Para quem sabe, o mecanismo se revela visível – as ondas sonoras emitidas num dos focos viajam em todas as direções, mas batem nas paredes e vão para o outro foco.

Também, como consequência, sabendo que a parábola, sendo um caso particular de elipse na qual um dos focos vai para o infinito, nesse caso, para que o raio de luz atinja o outro foco, ele se torna paralelo ao eixo da parábola. Essa propriedade é utilizada, por exemplo, nos faróis de automóvel para refletir os raios de luz da lâmpada colocada no foco, dirigindo a luz paralelamente ao eixo do refletor parabólico.



Ref.: FIC e Sist Consulta Interativa

Recorde-se a definição de 2 retas paralelas: São aquelas que não têm ponto em comum (Euclides). Modernamente diríamos que são aquelas que se encontram no infinito (Gauss e Riemann).

A esse propósito devemos dizer que a ideia de infinito se deve ao matemático hindu Bhaskara (nascido em 1114) que descobriu considerando uma laranja, dividindo-a ao meio, temos 2 pedaços, depois em 3 e etc... Dividindo-a indefinidamente, obtemos infinitos pedaços. Portanto, qualquer número dividido por 0 dá, ∞, exceto o $^0\!/_0$ que é indeterminado.

Aliás, a ideia do zero, isto é, vazio, está vinculada à teologia hindu que a venera.

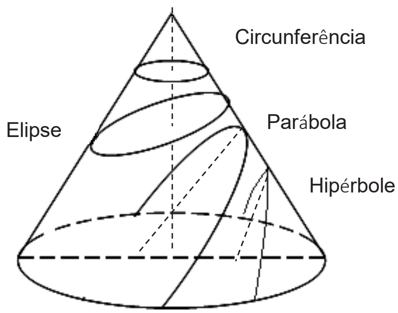
Os hindus foram os primeiros a simbolizar o vazio, adicionando aos números chamados hindus - arábicos. Nem gregos, egípcios ou mesopotâmicos tinham um símbolo para o vazio. Quanto menor o pedaço de laranja mais se aproxima de nenhuma laranja. Bhaskara descobriu a resolução da equação de 2º grau.

A9.6 UMA PEQUENA ETIMOLOGIA E FILOLOGIA DAS CÔNICAS

Antes um breve histórico. O primeiro a tratar da questão foi Menecmo (meados do séc. 4º a. C.). Considerou as curvas que se obtém cortando um cone circular reto com um plano perpendicular à geratriz. Conforme a abertura do cone se obtém três tipos de curvas: se o ângulo no vértice do cone for reto, a secção será uma "parábola", cujo significado em grego é superposição, ou seja, igual ao plano paralelo à geratriz; se o ângulo for agudo, se obtém uma "elipse", que significa plano "aquém de"; e se o ângulo for obtuso, será uma "hipérbole", significando que o plano situa-se "além de", isto é, com relação ao plano perpendicular à geratriz.

No início do séc. 3º a. C., Aristeu e Euclides sistematizaram as cônicas, embora a hipérbole de 2 ramos ainda não tivesse sido reconhecida.

A seguir Arquimedes (287 a 212 a. C.), após Euclides é uma referência importante, antes de Apolônio de Perga (262 a 190 a. C.).



Apolônio escreveu oito livros intitulados “Cônicas”, dos quais os 4 primeiros se tornariam referência. As inovações de Apolônio condenaram ao esquecimento os escritos anteriores.

Apolônio fez importantes alterações. Em lugar de variar a abertura do ângulo do cone, determinou como fazemos hoje em dia, as curvas que se obtém modificando o ângulo do plano secante a um cone reto. Quando o plano for perpendicular ao eixo do cone, obtemos um círculo. Quando for paralelo à geratriz, parábola. Se o plano for entre o da circunferência e o da parábola, se obtém elipse; e se for entre o da geratriz e o eixo do cone, hipérbole. Ver fig. Anexa. No caso da hipérbole, o plano corta as 2 folhas do cone. Ou melhor: ⊥ ao eixo, circunferência; inclinado, mas entre o eixo e a geratriz, aquém da geratriz, Elípse; // à geratriz, Parábola e além da geratriz, Hipérbole.[22]

Ref.: Scientific American, Sist de consulta interativa, FIC.

A9.7 GÊNESE DA FORÇA

Partindo do conceito de energia

A energia de um sistema pode ser representada como a soma de 2 parcelas: energia cinética, que depende da velocidade e energia potencial[23], que depende das coordenadas, ou seja, da posição.

$$\mathrm{E} = \mathrm{E_k} + \mathrm{E_p} \qquad \mathrm{E_k} = \frac{1}{2}\,\mathrm{mv}^2 \qquad \mathrm{E_p} = \mathrm{f(x, y, z)} = \mathrm{m}\varphi$$

Ref.: Landau em Mecânica

Expressando a gravitação[24] $\vec{g}$ como: $\vec{g} = -grad\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\vec{e}_1$ (1), onde φ é o potencial gravitacional, que é a energia potencial E_p por unidade de massa. (ver Observação na página seguinte)

Verificamos semelhanças formais com o Campo eletromagnético:

Tomando-se ρ como densidade de carga elétrica e $\vec{E}$, campo elétrico: $\vec{E} = -grad\varphi$, onde φ é o potencial elétrico escalar. No campo eletromagnético se obtém: $\varphi = \int\frac{\rho dV}{r}$[25] onde r é a distância do elemento de volume dV ao ponto de observação do Campo.

Por semelhança teremos no Campo gravitacional: $\varphi = \gamma\int\frac{\rho dV}{r}$

Ou para massa m: $\varphi = \gamma\frac{m}{r}$ (ver seção 5.15, Ex. ilustrativo, Secção 4a: $u = k\frac{m}{r}$, potencial)

Como $\vec{g} = -grad\varphi$, teremos: $F = m'\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, pela 2ª lei de Newton: $F = ma$, desde que $g = a$ e m' é a massa onde a gravitação está agindo.

Daqui obtemos: $F = -\gamma\frac{mm'}{r^2}$, que é a lei da gravitação de Newton.

---

[22] Isto é, função da posição em relação à geratriz e ao eixo do cone.

[23] Ver secção 4.7, equação 2a, secção 4.8, eq. 1 e anexo 3, eq.1

[24] Aceleração gravitacional

[25] Ver secção 5.17.1, eq. 1 onde o potencial é $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\mathrm{r}}$ e $\vec{\mathrm{E}} = -\mathrm{gradV}$ secção 5.17.1, eq. 1a $\mathrm{dQ} = \rho\mathrm{dV}$ carga elementar, $4\pi\varepsilon_0$ é a constante de proporcionalidade utilizada no sistema MKS.

Para mais informações, ver secção 4.6, eq.0.

Ref.: Landau em Teoria do Campo, Jun' ichi, Max Born, Rainich

Para simplificar, notamos da secção 4.8, eq. 0 que se: $\vec{F} = -grad\ E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\ \vec{u}_r$

Então se tomarmos: $E_p = -\gamma \frac{mm'}{r}$, da secção 4.7, eq. 2 obtemos: $F = \gamma \frac{mm'}{r^2}$

Outras semelhanças que podemos verificar:

A lei de Coulomb: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{QQ'}{r^2}$ é também uma lei do inverso do quadrado de r e em lugar da massa m, temos a carga elétrica Q.

Acima está no Sistema MKS, no Sistema cgs seria: $F = \frac{QQ'}{r^2}$

O Campo elétrico: $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{F}{Q'}$ compare com: $g = \frac{F}{m}$

O Potencial: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$ [26], compare com: $\varphi = \gamma \frac{m}{r}$

Equação de Poisson: $\Delta\varphi = -4\pi\rho$, compare com: $\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho$, onde: $\Delta\varphi$ é o laplaciano de φ : $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

A9.7.1 Observação

Tomando o potencial: $\varphi = \gamma \frac{m}{r}$ e derivando, obtemos: $g = -\gamma \frac{m}{r^2} = \frac{F}{m'}$ pois $F = -\gamma \frac{mm'}{r^2}$
$\therefore \vec{g} = -grad\ \varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\ \vec{u}_r$

O potencial gravitacional: $\varphi = \frac{E_p}{m}$ é energia potencial por unidade de massa.

Do anexo A 3, eq. 1a podemos tirar:

Tomando a equação diferencial: $dE = Fdx$

Daqui concluímos: $F = \frac{dE}{dx}$ que é o gradiente da Energia E, na direção x.

Tomando-se: $mgh_2 - mgh_1 = -\Delta E_p$,conforme anexo 3, eq.1, variação da energia potencial, $E_p = mgh$, dividindo por m, obtemos o potencial: $\varphi = -\frac{E_p}{m} = -gh$ e dividindo por h, obtemos: $g = -\frac{\varphi}{h}$, pois $grad\ \varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ \vec{e}_x$

De fato: $\Delta E_p = -\Delta(mgh) \Rightarrow \frac{\Delta E_p}{m} = -\Delta(gh) \Rightarrow \Delta\varphi = -\Delta(gh)$ [27]

---

[26] Ver secção 5.17a, eq. 1

[27] Note bem: Como $\Delta E_p = -\Delta(mgh) \Rightarrow -\frac{\Delta\varphi}{\Delta(gh)} = 1$, logo: $-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial h} = 1 \quad \therefore g \times 1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial h}$
$\Delta\varphi = {}^{\Delta E_p}/_{m}$

$$\therefore \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta(gh)} = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial h}$$

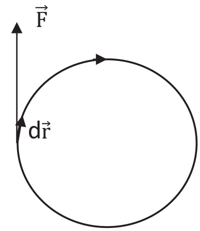
pois g é constante, pontualmente falando, isto é, para uma determinada altura h (g depende de h).

Logo:

$\vec{g} = -grad\ \varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial h}\vec{u}_h$, confirmando o que dissemos inicialmente, pois nesse caso, $h = x$.

Observe que: m, massa, $F = mg$, conforme 2ª lei de Newton e $W = -mgh$, trabalho para produzir a energia potencial $E_p = -W$. (ver anexo 3).

A9.8 CIRCULAÇÃO, TRABALHO, ENERGIA POTENCIAL, GRADIENTE DE E_P, FUNÇÃO PRIMITIVA DE $\vec{F}$



Seja um processo realizado por um ciclo fechado, que volta ao estado inicial. O trabalho W, realizado durante o ciclo será expresso como (ver anexo A4, indicação 2a, em "Energia Interna"):

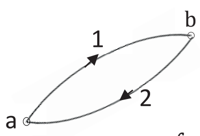
$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Esse trabalho está relacionado com a energia potencial:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

A integral é denominada Circulação e denotada: $\Gamma = W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Nesse caso como vimos no anexo A4, eq.2b:



$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_a^b dE_p = -(E_{pb} - E_{pa}) = E_{pa} - E_{pb}$$

Como:

$$W = \int_1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = +\int_2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad \therefore \int_1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Então o trabalho entre "a" e "b" não depende do caminho percorrido. A diferencial dE_p é denominada "diferencial exata".

Também, da integral acima, obtemos:

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i}\vec{e}_i = -gradE_p, \text{ pois } dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Matematicamente podemos dizer da integral:

$$E_{pa} - E_{pb} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}, \text{ } E_p \text{ será denominada função primitiva de } \vec{F}.$$ [28]

Ref.: Alonso – Finn, Shames, Courant.

Também temos: $\int pdx = S + C$, logo a ação S é uma função primitiva da quantidade de movimento p, ver anexo A 3.

Mas: $dp = mdv = Fdt$, ver anexo 3, integrando: $p = \int mdv + C_1 = \int Fdt + C_2$, logo a quantidade de movimento p é uma função primitiva, seja da massa m, como também da força F. Sabemos da Relatividade que a massa m pode ser determinada em função da velocidade v como: $m = \gamma m_0$, onde $m_0 = massa\ de\ repouso$,isto é, quando $v = 0$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ sendo $\beta = {}^{v}/_{c}$ e $c = velocidade\ da\ luz$, ver par 7.4.

Por outro lado, derivando a expressão acima em t, obtemos: $F = \frac{dp}{dt}$, concordando com a 2ª Lei de Newton, ver par. 4.3.

Exemplos de Ciclos fechados: órbitas planetárias, órbitas de cometas, Ciclos de vapor, Otto e Diesel. Somente ressalvamos que esses ciclos não sendo reversíveis não obedecem exatamente o que vimos acima. Os ciclos astronômicos não são idealmente fechados de vez que o periélio avança, como veremos no livro 2 e os ciclos termodinâmicos têm perdas que devem ser consideradas como vimos nas equações 1 e 2 do anexo 5, secção A5.1.6.

Além disso, o Sol não está parado, mas em translação pela Galáxia da Via Láctea, fazendo que as órbitas dos planetas e cometas não sejam fechadas, mas sim helicoidais. Também os ciclos termodinâmicos têm perdas e para torna-las fechadas é necessário reposição de energia das perdas fazendo que a entropia desses sistemas cresça sempre (ver equações 1 e 2 do anexo 5). (Desigualdade de Clausius), secção A5.1.6

A9.8.1 Exemplo de aplicação da fórmula

$P^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)a^3$, 3ª lei de Kepler.

O cometa de Halley tem um período P de $76\ anos$ e em 1986 teve uma distância de máxima proximidade ao Sol, chamada "periélio R_p" de $8{,}9 \times 10^{10}m$. Esta distância está entre as órbitas de Mercúrio e Vênus.

a) Qual é o valor de R_a, maior distância do cometa ao Sol, chamada "afélio"?

$G = 6{,}67x10^{-11}m^3/kgs^2$

---

[28] Ou melhor, levando em conta a integral indefinida: $\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = E_p + C$, cuja derivada em relação à $\vec{r}$ é: ${}^{d}/_{d\vec{r}}(E_p + C) = \vec{F}(\vec{r})$, sendo C uma constante.

Solução: semieixo maior da órbita $a = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{6{,}67\times10^{-11}\times1{,}99x10^{30}\times2{,}4^2x10^{18}}{4\times3{,}1416^2}\right)^{1/3}$

Massa do Sol: $1{,}99 \times 10^{30} kg$, período: $76\ anos = 2{,}4 \times 10^9 s$

Se deduz: $a = 2{,}69 \times 10^{12}\ m$

Como: $e = \frac{c}{a}$, $R_p = a - ae$, $R_a = a + ae$

Somando, obtemos:

$$R_a = 2a - R_p = (2)(2{,}69 \times 10^{12}\ m) - 8{,}9 \times 10^{10}\ m = 5{,}3 \times 10^{12}\ m$$

É ligeiramente menos que o semieixo maior da órbita de Plutão.

b) Qual a excentricidade e da órbita?

Solução: Subtraindo R_a e R_p

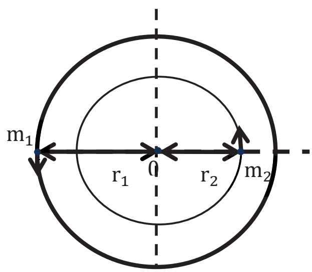
$e = \frac{R_a - R_p}{2a} = \frac{5{,}3\times10^{12}\ m - 1{,}9\times10^{10}\ m}{(2)(2{,}7\times10^{12}\ m)} = 0{,}976$, o Periélio fica próximo do Sol e o Afélio muito afastado.

Excentricidade próxima da unidade. É uma elipse bastante alongada.

Referência: Halliday, Resnick e Walker, v.2

A9.8.2 Outro exemplo

Observando-se a luz de uma estrela houve indícios de se tratar de um sistema binário (de 2 estrelas).A estrela visível tem uma velocidade orbital de $v = 270\ {}^{km}/_{s}$, período orbital $P = 1{,}7\ dias$ e massa $m_1 = 6M_S$.[29] onde M_S é a massa do Sol: $1{,}99 \times 10^{30} kg$. Supondo que a estrela visível e sua companheira, que é escura, estejam em órbitas circulares, determine a massa aproximada m_2 da estrela escura.



(3)

[29] A massa pode ser calculada pelo efeito Doppler de sua radiação. Vide Landau, $\Delta\omega = \omega(\varphi_1 - \varphi_2)/c^2$, ω = frequência angular = $2\pi/P$ e $\omega = \omega_0\left(1 - {}^{\varphi}/_{c^2}\right)$, $\dot{v}$ = grad φ, φ = potêncial gravitacional, $\varphi = {}^{-km}/_{r}$. Onde $k = G = 6{,}67 \, .\, 10^{-8}\ {}^{cm^3}/_{(gs^2)}$, constante gravitacional. Ver secção 2.1, MHS, eq. 3c $\omega = 2\pi\nu$ $\nu = frequência$

φ_1 e φ_2 são os potenciais gravitacionais respectivamente no ponto de emissão e no ponto de observação do espectro. É o fenômeno denominado “Desvio para o Vermelho” (“Red Shift”).

Solução: O centro de massa das 2 estrelas está na linha que conecta os seus centros (ver figura 3). Sendo $r = r_1 + r_2$, a separação máxima entre as estrelas.

Força gravitacional ocasionada pela companheira escura sobre a estrela visível: $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$

Pela 2ª lei de Newton: $F = ma$, se obtém $\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1a = (m_1)(\omega^2 r_1)$ (3a), sendo ω a velocidade angular da estrela visível e $\omega^2 r_1$, sua aceleração centrípeta na direção de O. Ver equação 3a1, seção2.1.

Obtemos outra equação para calcular a posição do centro de massa O, ver equação 3a1 Secção 2.1.

$r_1 = \frac{m_2 r}{m_1+m_2}$ [30], vide em: par. 4.7, Observações sobre massa reduzida, o que implica em: $r = r_1 \frac{m_1+m_2}{m_2}$

Introduzindo r na equação (3a) e o valor de $\omega = {}^{2\pi}/_{P}$, ficamos com:

$$\frac{m_2{}^3}{(m_1+m_2)^2} = \frac{4\pi^2}{GP^2} r_1{}^3 \qquad (3b)$$

Sobram 2 incógnitas, m_2 e r_1. Tomando-se o período orbital P e relacionando com o movimento orbital da estrela visível: $P = \frac{2\pi r_1}{v}$

$$\therefore r_1 = \frac{Pv}{2\pi}$$

substituindo $m_1 = 6M_S$ em (3b), resulta:

$$\frac{m_2{}^3}{(6M_S+m_2)^2} = \frac{Pv^3}{2\pi G} = \frac{\left(2{,}7\times10^5\ {}^{m}/_{s}\right)^3 (1{,}7\ \text{dias})\left(86400\ {}^{s}/_{\text{dia}}\right)}{(2\pi)\left(6{,}67\times10^{-11} {}^{N.m^2}/_{kg^2}\right)} = 6{,}9\times10^{30}\text{kg} \quad \text{ou}$$

$\frac{m_2{}^3}{(6M_S+m_2)^2} = 3{,}47\ M_S$ (3c), podemos resolver a equação de 3º grau em m_2, mas como estamos trabalhando com massas aproximadas, podemos substituir por múltiplos inteiros de M_S para m_2, encontrando: $m_2 \cong 9M_S$.

Para maior exatidão, procedemos como a seguir:

Tomando a equação 3c, organizamos a tabela abaixo:

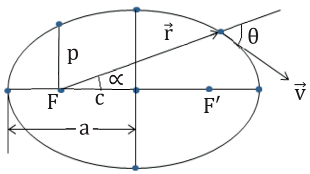
$m_2 = nM_s$ n	$\frac{m_2^3}{(6M_S+m_2)^2} = pM_S$	${}^{3,47}/_{p}$	Erro %
9,00	3,24M_S	1,07	7
10,00	3,91M_S	${}^{1}/_{1,13}$	-13
9,30	3,44M_S	1,01	1
9,40	3,50M_S	${}^{1}/_{1,01}$	-1
9,35	3,47M_S	1,00	0

Logo, um valor mais preciso, seria: $m_2 = 9{,}35M_S$

[30] Aplica-se a fórmula: $x = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$, que é uma média ponderada de x_1e x_2, onde os pesos são representados pelas massas. Fazendo, a origem do sistema de coordenadas, passar por m_1, teremos: $x_1 = 0$, $x_2 = r_1 + r_2 = r$ e $x = r_1$, obtemos: $r_1 = \frac{m_1(o)+m_2(r)}{m_1+m_2} = \frac{m_2 r}{m_1+m_2}$.

Pergunta-se: como se obteve a velocidade orbital v e o período P?

Como explicado pelo efeito Doppler que foi dado no rodapé da página inicial desse exemplo, quando se suspeita que a estrela tem uma companheira, observa-se que a estrela tem uma variação cíclica (que se repete em tempos iguais) no seu espectro característico, significando que determinada frequência se repete ciclicamente. Isto significa que a estrela está orbitando em torno de um centro comum de uma companheira com um período P. Conhecendo P e a massa m da estrela, determina-se o semieixo a da órbita elíptica ou raio r, se for circular, com a 3ª Lei de Kepler: $P^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) a^3$, a seguir calculamos a velocidade tangencial $\vec{v}$ da órbita da estrela. Se a velocidade for constante em toda a trajetória: temos uma órbita circular, se houver dois trechos mais rápidos entremeados com dois trechos mais lentos, conclui-se que a órbita é elíptica. Para calcular a velocidade $\vec{v}$, empregamos a 2ª Lei de Kepler:



O Astro descreve Áreas iguais em tempos iguais.

$$\frac{dA}{dt} = cte, \text{ isto é, a velocidade de área}$$

$\vec{H} = {}^1\!/_2\, \vec{r} \times {}^{d\vec{r}}\!/_{dt}$ [31]

$\vec{H} = {}^1\!/_2\, \vec{r} \times \vec{v} = {}^1\!/_2\, rv\, sen\theta,$ onde θ =ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{v}$.

$\vec{H}$ é cte $\quad \therefore v = \frac{2\, cte}{r\, sen\theta}$, para órbita circular:

$$v = {}^{2\pi r}\!/_{P}.$$

Veja Tyson e Goldsmith em Origens, livro editado recentemente.

Equação polar da elipse: $r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\, cos\propto} = \frac{p}{1-e\, cos\propto}$, $e = \frac{c}{a}$ excentricidade

Os dados se referem ao Sistema $LMCX - 3$ da Grande Nuvem de Magalhães. Com outros dados, sabemos que a estrela escura é muito compacta. Pode ser uma estrela que colapsou por sua própria atração gravitacional, tornando-se uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. Como uma estrela de nêutrons não pode ter massa maior do que cerca de $2M_S$, o resultado $m_2 \cong 9M_S$ sugere que o objeto escuro deve ser um buraco negro.

[31] ${}^{dA}\!/_{dt} = |\vec{H}| = {}^{\pi ab}\!/_{P} = cte$, $A = \pi ab$, Área da elipse e P =período.

A9.9 LEI DE TITIUS – BODE

Relação empírica que fornece aproximadamente as distâncias médias dos principais planetas ao Sol. Descoberta em 1741 pelo astrônomo alemão Wolf, retomada por D. Titius e publicada por Bode em 1772. Tomando como unidade a distância da Terra ao Sol, as outras distâncias são obtidas com a série geométrica: $0, 3, 6, 12, 24, 48, 96 \ldots$ (razão $q = 2$), soma-se 4 a cada termo e se divide por 10: $0 + 4$; $3 + 4$; $6 + 4$; $12 + 4$; $24 + 4$; $48 + 4$; $96 + 4$; $192 + 4 \ldots$[32]. Havia uma lacuna em $24 + 4$, entre Marte e Júpiter e Bode previu a existência de planeta nessa região, quando se descobriu o planetoide Ceres, para satisfação de Johann Elert Bode (1747-1826 foi diretor do Observatório de Berlim, autor de um catálogo de Estrelas em 1801).

De acordo com Fritz Kahn, temos diante de nós um "modelo atômico" com uma escala de Balmer, faltando um Bohr para decifrá-la e demonstrar que o Sistema solar é um átomo cósmico. Os planetas devem estar nos pontos, segundo a lei dos "quanta", sendo nodos em que as massas vibrantes se condensam em planetas e luas, conforme a "lei estabelecida".

Referência: Larousse, R. Thiel, F. Kahn.

[32] Compare-se com: 3,9/7,2 / 10,0/15,2 / 26,5/52,0 / 95,4/192,0 / 307,0; respectivamente: Mercúrio, Vênus, Terra, Planetoides, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno.