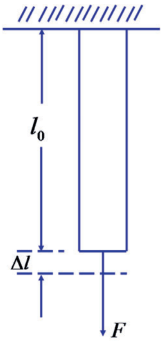
7 ANEXO

A7.1 RESILIÊNCIA



A7.1.1 Elasticidade

Tensão é a relação entre força F e a secção A onde a força é aplicada. Pode ser de tração ou compressão.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Deformação é a relação entre a variação no comprimento e o comprimento inicial quando o corpo é sujeito a uma força F .

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$$

Módulo de elasticidade é a relação entre a tensão e a deformação.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta \ell / \ell_0}$$

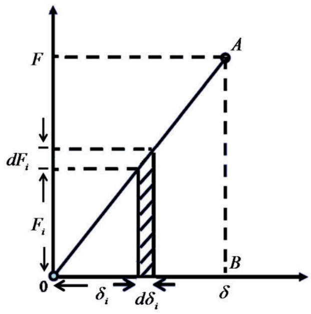
A7.1.2 Explicitando *F*

$$F = \frac{EA}{\ell_0}\Delta\ell \qquad \therefore\ F = kx \ (1)$$

Essa é a Lei de Hooke em que k é a constante elástica, ver Capítulo 3, Equação 1.

Isto é, a força aplicada F é proporcional à deformação ocasionada $\Delta\ell$ ou x.

A7.2 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO



$$W = \int F_i d\delta_i \ \text{ mas } \ F_i = \frac{EA}{\ell_0}\delta_i \ (1a) \qquad \therefore W = \frac{EA}{\ell_0}\int_0^\delta \delta_i d\delta_i = \left[\frac{EA}{\ell_0}\frac{\delta_i^2}{2}\right]_0^\delta$$

δ_i é a posição genérica F_i é o esforço genérico (conforme Figura e Equação 2)

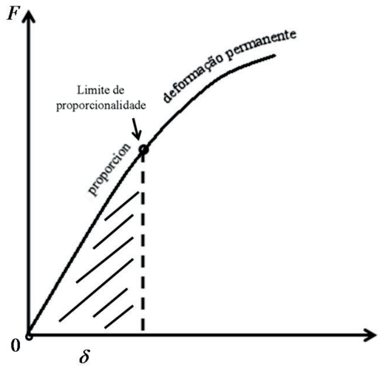
Quando F_i atinge a carga total F, se obtém:

$\delta_i = \delta$ e $F = \frac{EA}{\ell_0}\delta$

e

$$W = \frac{EA}{\ell_0}\delta\frac{\delta}{2} = F\frac{\delta}{2}$$

Também se obtém graficamente, ver Figura, pois a energia total W é igual à área do triângulo OAB.



A7.2.1 Resiliência

É a capacidade de um corpo armazenar energia sem deformação permanente, ou seja, dentro da Lei de Hooke.[1]

Além desse ponto, quando a carga é retirada, o corpo não volta à situação inicial (a deformação é permanente, conforme Figura e texto 1b).

Também a natureza tem resiliência. Isto é, pode-se voltar à situação inicial até certo limite (limite de proporcionalidade). Até esse limite a natureza se regenera, além dele, não haverá regeneração, e sim, degeneração. Por exemplo: o homem ultrapassou os limites de proporcionalidade em: poluição dos rios, como Tietê e Pinheiros da cidade de São Paulo; extinção de várias espécies animais: pássaro gigante Moa, da Nova Zelândia; quase extinção do búfalo americano, que atualmente só existe na reserva de Yellowstone, e do Peixe-Boi; aquecimento global, ocasionando modificações climáticas desastrosas como derretimento das geleiras, chuvas excessivas, furacões inesperados, entre outros, principalmente por intermédio do efeito *El Niño* (aquecimento dos oceanos), causando efeitos como furacão no Estado de Santa Catarina, nunca ocorrido até então; possível extinção do mamute, pelo homem primitivo ajudado pelo homem de Neanderthal, espécie paralela de hominídeo que conviveu com o *Homo sapiens*; extinção ou assimilação (ainda se discute) do homem de Neanderthal pelo *Homo sapiens*.[2]

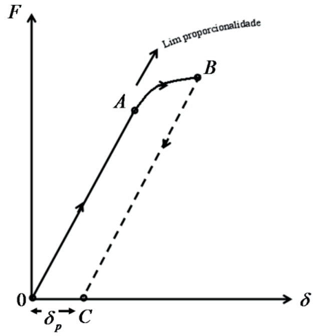
Isto é, se não tomarmos cuidado desde já, não será o planeta que estará ameaçado, mas sim, nós os seres humanos.

Referência: S. Timoshenko, v. 1, Strength of Materials
Evaristo Valladares Costa, v. 2, Curso de Resistência dos Materiais
Fritz Kahn, O Livro da Natureza

---

1 Conceito mais fisiológico (biológico) do que físico: é a capacidade de suportar estresse ("stress").

2 Diversas contaminações ambientais causadas pelo homem em rios e mares: vazamentos de barragens de rejeitos de minérios, contaminação por mercúrio de garimpos, vazamentos de oleodutos, lançamentos de esgoto, lançamento de produtos plásticos.

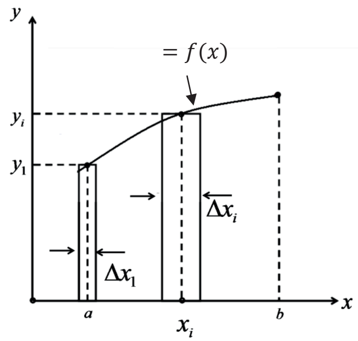


Fazemos o esforço ir de 0 até A, o limite de proporcionalidade. Ultrapassamos esse limite até B, e em seguida aliviamos o esforço até atingir $F = 0$ e chegar ao ponto C. Temos, então, uma deformação permanente δ_p, que não é o estado inicial, portanto, não houve regeneração, e sim degeneração do corpo sujeito à deformação.(1b)

A7.3 ADENDO MATEMÁTICO

A7.3.1 Observação: integração

Recordemos o "Teorema fundamental do cálculo integral", ver Anexo 2, isto é, Integração como um Processo de soma.



$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x_i$$

porém, $y = f(x)$, então $y_i = f(x_i)$

$$\therefore \int_a^b ydx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i$$

Em nosso caso: $y = F \quad y_i = F_i \qquad a = 0 \qquad b = \delta$ ver figura e nomenclatura na Secção A7.2

Então, a energia de deformação é: $W = \int_0^{\delta} F_i d\delta_i$

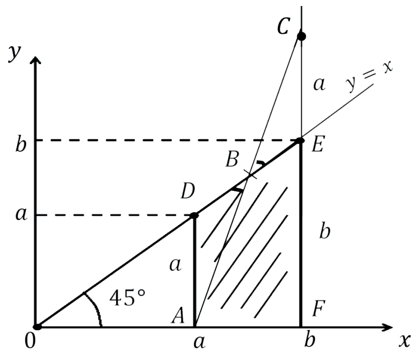
Como: $F_i = \dfrac{EA}{\ell_0}\delta_i$ (2) (ver Equação 1a) e $F_i = f(\delta_i)$

$$\therefore W = \frac{EA}{\ell_0}\int_0^{\delta}\delta_i d\delta_i = \frac{EA}{\ell_0}\lim_{n\to\infty}\sum_{i-1}^{n}\delta_i\Delta\delta_i = \left[\frac{EA}{\ell_0}\frac{\delta_i^2}{2}\right]_0^{\delta} = \frac{EA}{\ell_0}\left(\frac{\delta^2}{2}-0\right) = \frac{EA}{\ell_0}\delta\frac{\delta}{2} = F\frac{\delta}{2}$$

Pois: $F = \dfrac{EA}{\ell_0}\delta$ (ver Elasticidade, Capítulo 3, Equação 0; ver também Equação1a)

Verifiquemos: $\int_a^b xdx$

É a área do trapézio assinalado na Figura.[3]



$$\int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b-a)(b+a) = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

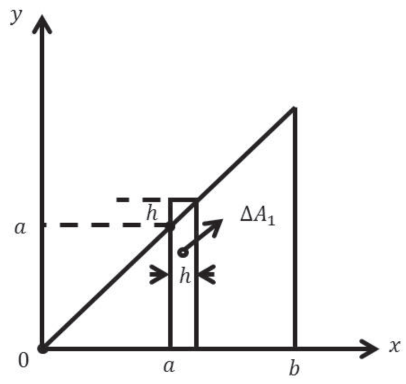
'Usando o processo limite da integral como soma, fazendo: $h = \dfrac{b-a}{n}$

Calculemos a área ΔA_1:

---

[3] Traça-se uma reta *AC* passando pelo ponto médio *B* do trapézio. Os ângulos opostos em *B* são iguais. Os ângulos agudos em *A* e *C* são iguais (originados por reta cortando 2 paralelas). Os lados *BD* e *BE* são iguais (metade *DE*). Os triângulos *ABD* e *BCE* serão, portanto, iguais. Logo: área do trapézio: *A* = (*b* - *a*) (*a* + *b*)/2 (Área do triângulo *ACF*).

$$\Delta A_1 = h\left(a + \frac{1}{2}h\right)$$



Da mesma forma, ΔA_2:

$$\Delta A_2 = h\left(a + h + \frac{1}{2}h\right)$$

Idem para ΔA_3: $\Delta A_3 = h\left(a + 2h + \frac{1}{2}h\right)$

Para $\Delta A_n = h\left[a + (n-1)h + \frac{1}{2}h\right]$

Área total:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = h\left[na + \frac{n}{2}h + h(1 + 2 + \cdots n - 1)\right]$$

Como a soma de uma progressão aritmética é: $S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ [4]

$$\text{E} \quad a_1 = 0,\ a_n = n - 1$$

Teremos: $1 + 2 + \cdots n - 1 = \frac{n}{2}(0 + n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$ (0)

Então: $\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = nh\left[a + h\left(\frac{1}{2} + \frac{1 + 2 + \cdots n - 1}{n}\right)\right] =$

[4] Há uma demonstração interessante, devida a Gauss, no fim deste Anexo.

$$= (b-a)\left[a + h\left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\right)\right] = (b-a)\left[a + h\left(\frac{n}{2}\right)\right] = (b-a)\left[a + \frac{(b-a)}{2}\frac{(n)}{n}\right]$$

Teremos: $(b-a)\left[a + \frac{1}{2}(b-a)\right] = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$

Logo: $\int_a^b x dx = 1/2\left(b^2 - a^2\right)$

c.q.d. (como queríamos demonstrar).

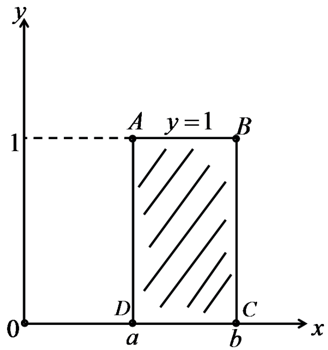
Observação

Vimos que $\int_a^b x dx = 1/2\left(b^2 - a^2\right)$, ou seja: $\int x dx = \frac{x^2}{2} + cte$ (1) Integral indefinida

Podemos generalizar a fórmula. De fato, se fizermos em $y = x^n = x$, em que $n = 1$

Se n=0, teremos $x^n = 1$ e $\int_a^b dx = b - a$ ou seja: $\int dx = x + cte$

Graficamente: $\int_a^b y dx = \int_a^b dx = 1(b-a)$



Isto é, a integral será a área $ABCD$ da Figura.

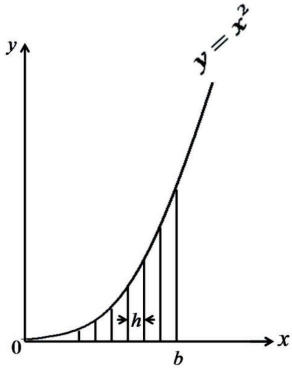
Por outro lado, se $n = 2$, teremos $y = x^2$.

Calculemos a integral $\int_0^b x^2 dx$

Dividindo o intervalo $b - 0$ em n partes iguais: $h = \frac{b}{n}$

A área será dada por:

$$h\left(h^2+2^2h^2+3^2h^2+\cdots+n^2h^2\right)=h^3\left(1^2+2^2+3^2+\cdots n^2\right)$$



A soma dos termos será:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(ver Equação 2)

Substituindo e reescrevendo a fórmula:

$$\frac{b^3}{6n}n\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)=\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Quando $n\to\infty$, $\frac{1}{n}\to 0$ logo: $\int_0^b x^2dx=\frac{1}{3}b^3$ ou $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+cte$

Então, genericamente, teremos: $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+cte$, como Integral indefinida.

Válida para números inteiros, exceto $n=-1$, pois nesse caso teríamos:

$$\int\frac{dx}{x}=\frac{x^0}{0}+cte$$

Prova-se nesse caso:

$$\int\frac{dx}{x}=\ell nx+cte$$

Pois: $d(\ell nx) = \frac{dx}{x}$,integrando, obtemos a equação anterior.[5]

Também podemos estender para n racional e irracional (COURANT,1951).

Vimos na Equação 0 que a soma dos n primeiros inteiros é: $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{1}{2}n(n+1)$, é uma função de n. Da mesma forma, a soma dos n primeiros quadrados: $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2$ é também uma função do inteiro n. Observe que temos $n + 1$ termos, sendo o primeiro: $a_1 = 0$, e o último: $a_{n+1} = n$.

Partindo da fórmula: $(\nu + 1)^3 = \nu^3 + 3\nu^2 + 3\nu + 1$

$$\therefore (\nu+1)^3 - \nu^3 = 3\nu^2 + 3\nu + 1$$

Para $\nu = 0$: $\cancel{1^3} = 1$

Para $\nu = 1$: $\cancel{2^3} - \cancel{1^3} = 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1$

Para $\nu = 2$: $\cancel{3^3} - \cancel{2^3} = 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1$

Para $\nu = 3$: $4^3 - \cancel{3^3} = 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1$

Etc. até

Para $\nu = n$: $(n+1)^3 - \cancel{n^3} = 3n^2 + 3n + 1$

Somando todas essas expressões: $(n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + n + 1$ e substituindo

$$S_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

---

5 $y = \ell nx \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \ell n\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x} \ell ne$

$\Delta y = \ell n(x + \Delta x) - \ell nx = \ell n\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$

Quando $\Delta x \to 0, \to n = \frac{x}{\Delta x} \to \infty \therefore \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$ $\ell ne = 1$, a base de ℓn é "e", $e^1 = e$

$\therefore dy = d(\ell nx) = \frac{dx}{x}$ recorde − se $\ell n = \log_e$, o índice e indica a base.

Desenvolvendo pelo binômio de Newton: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^n + n1^{n-1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots =$

$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots$, fazendo $n \to \infty$ temos: (1a)

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots = 2{,}718281 \ldots = e$, assim denominado em homenagem a Leonard Euler (1707-1783).

$$\therefore\ 3S_2 = (n+1)\left[(n+1)^2 - 1 - \frac{3}{2}n\right] = (n+1)\left(n^2 + \frac{1}{2}n\right) =$$

$$= (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1) =$$

$$= (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1\right] =$$

$$= (n+1)\left(n^2 + 2n + 1 - \frac{3}{2}n - 1\right) =$$

$$= (n+1)\left(n^2 + \frac{1}{2}n\right) =$$

$$= (n+1)\left[n\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] =$$

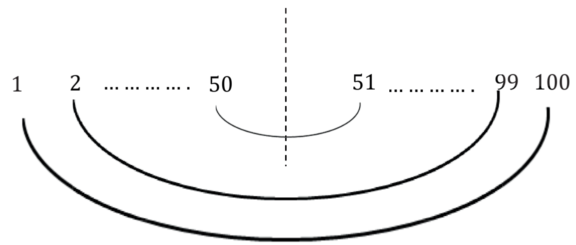
$$= (n+1)\left[n\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right]$$

$$\therefore\ S_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad (2)$$

c.q.d.

A história conta que Carl Friedrich Gauss[6], conhecido como o Príncipe da Matemática, defrontou-se com o seguinte problema: quando o professor de Matemática perguntou à classe, "quanto é a soma dos cem primeiros números naturais diferentes de zero?" Gauss, quase imediatamente, respondeu, 5.050. Como ele chegou a esse resultado?

Veja a Figura a seguir:



Temos uma progressão aritmética em que o 1º termo é $a_1 = 1$, e a razão $r = 1$.

A soma dos elementos equidistantes é constante.

[6] Ele tinha 10 anos na época.

Somando os pares, 50 + 51 = 101 e multiplicando pelo número total dos pares, 50, concluímos que a soma é 5050.

Observe:

$$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad a_4 \qquad\qquad a_n$$

$$S = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) \dots\dots\dots\dots\dots [a_1 + (n-1)r]$$

$$S = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + (a_n - 3r) \dots\dots\dots\dots\dots [a_n - (n-1)r] \qquad ([7])$$

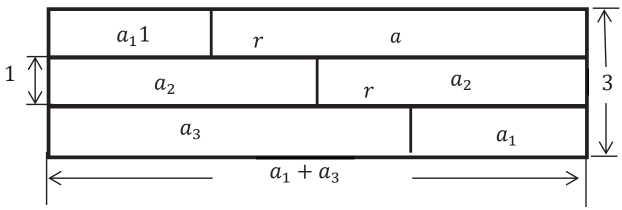
Somando, obtemos:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots\dots\dots\dots (a_1 + a_n)$$

$$\therefore 2S = (a_1 + a_n)n \Longrightarrow S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Veja que r desaparece, ∴ a fórmula vale para qualquer que seja r.

Graficamente, por exemplo, para $n = 3$:



A área do retângulo maior é o dobro da soma S:

$$2S = (a_1 + a_3)3 \Longrightarrow S = \frac{a_1 + a_3}{2} 3$$

O que confirma a fórmula anterior.

Ref.: Sistema de Consulta Interativa

Definição de resiliência: mais fisiológica do que física, é a capacidade de resistir ao stress.

[7] Se n for impar, por exemplo, 99, multiplicamos (1 + 99) por 49 pares e meio: (1 + 99) 49,5 = 4950