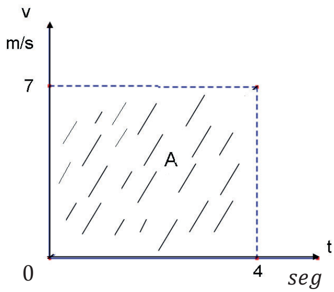
2 ANEXO

A2.1 COMO GALILEU DESCOBRIU A ACELERAÇÃODA GRAVIDADE

Coloque uma bola rolando sobre um plano horizontal com velocidade constante, por exemplo, v = 7 m/s, durante 4 s.

Graficamente:



A área $A = 7 {}^{m}\!/_{s}$ x $4\, seg = 28m$ representa a distância percorrida.

Galileu observou uma bola ganhar velocidade enquanto descia por um plano ligeiramente inclinado. Na tábua sulcada, ele foi marcando as sucessivas posições que a bola atingia enquanto cantarolava em ritmo regular. Quando julgou obter precisão, mediu as distâncias da bola em cada intervalo. Usando a primeira distância como unidade, constatou que as distâncias percorridas em tempos iguais seguiam a sequência: $1, 3, 5, 7, 9$, 11, 13, 15.

A seguir, percebeu que as somas cumulativas: $(0+1)$, $(1+3)$, $(1+3+5)$,... constituíam em $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\ e\ 64$, os quadrados dos n^{os} 1 a 8, isto é, as distâncias são proporcionais aos quadrados dos tempos decorridos.

Para aumentar a exatidão dos intervalos de tempo, Galileu conseguiu iniciar e deter um fluxo tênue de água, coletando e pesando a quantidade de água, medindo em grãos no sistema *troy*, utilizado pelos joalheiros, em que 1 grão $= 0{,}0648g$. A unidade de tempo é aproximadamente $1/100\ s$ e a unidade de comprimento é bem próximo de 1 mm.

Galileu cronometrou pêndulos, observando que o de 0,818 m de comprimento tinha um período de ida e volta de 0,45 s e outro, de 1,636 m, 0,64 s, sendo que ambos sempre conservavam o mesmo período. Ele foi o primeiro a observar isso.

Inclinando o plano e medindo tempos e distâncias, usou o primeiro intervalo de tempo como unidade de tempo e o primeiro intervalo de distância como unidade de distância. Usou primeiro para medir o tempo um relógio de água e, depois, um pêndulo. Em resumo, Galileu inventou um relógio de água cujos erros eram menores do que 1/100 s.

Após tomar os valores médios de várias medições, obteve a Tabela a seguir, arredondando os valores:

Tempo	Distâncias em unidades de tempo	Distância desde o início	Velocidade Distância/Tempo
0	0	0	0
1	1[1]	1	1
2	3	4	2
3	5	9	3
4	7	16	4
5	9	25	etc.
6	11	36	
7	13	49	
8	15	64	

Fazendo a relação:

$Velocidade/Tempo$: $\dfrac{v}{t} = k$ (1)[2]

Observamos que k é constante.

[1] Toma-se como unidade de distância aquela percorrida na primeira unidade de tempo de 0 a 1. O valor da constante de proporcionalidade k depende das unidades escolhidas para distância e tempo, como também da inclinação da rampa de rolamento. Assim, para unidades métricas e queda vertical, teremos 9,8 m/s^2, e o mesmo para as unidades inglesas, $32{,}174 \, {}^{ft}/_{s^2}$.

[2] Nesse caso, o valor de k é 1, mas, em geral, k não tem esse valor (ver exemplos na Equação 1, Seção 1.2.1 e a Equação 4; ver Equação 1a a seguir).

Da tabela, se obtém:

$1 = 0 + 1$

$4 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

$9 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$16 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

36 = ... = $36 = 6^2$

49 = ... = $49 = 7^2$

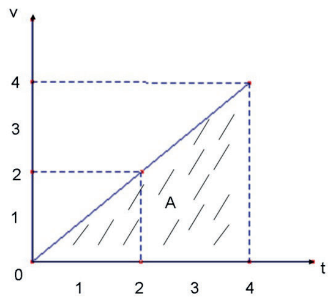
64 = ... = $64 = 8^2$

Conclusões: a velocidade é diretamente proporcional ao tempo, conforme (1), e as distâncias percorridas são proporcionais aos quadrados do tempo.

Então, temos: $v = kt$.

Para a distância, fazendo um gráfico: v contra t, raciocinando do mesmo jeito de quando a velocidade era constante, concluímos que a área do triângulo A representa a distância percorrida.

Portanto:



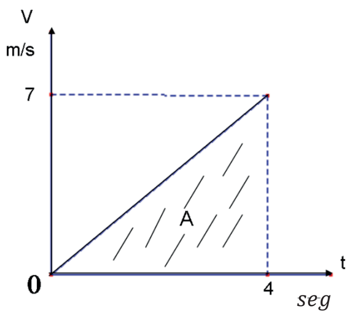
Distância $e = \frac{1}{2} vt$ (2)[3]

Substituindo com (1), obtemos: $e = \frac{1}{2} kt \times t = \frac{1}{2} kt^2$ (3) o qual[4] concorda com a conclusão anterior, isto é, que a distância é proporcional ao quadrado do tempo.

[3] Recorde-se que a área do triângulo é : $1/2 \times altura \times base\ do\ triângulo$.

[4] A constante k é denominada "aceleração".

Exemplo: se a velocidade variasse, com uma relação constante k, de 0 a 7 $m\ /\ s$, de 0 a 4 s, podemos obter (ver Figura):



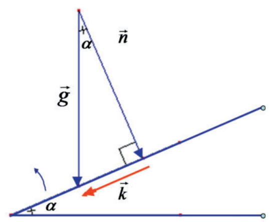
Como vimos anteriormente, a área A (Equação 2) é: $A = 7m/s \times 4s \times \frac{1}{2} = 14m$ $\therefore\ e = 14m$

Comparando com o caso em que v era constante, representa a distância percorrida.

Por (1): $k = \frac{v}{t} = \frac{7m/s}{4s} = \frac{7}{4}\, m/s^2$ (1a)

Aplicando: $e = \frac{1}{2} k\ t^2 = \frac{1}{2}\ \frac{7}{4}\ m/s^2 \text{ x } 4^2\ s^2 = 14m$

$\therefore\ e = 14m$, o mesmo resultado obtido anteriormente.



Agora, considerando o ângulo α entre a superfície rolante e o plano horizontal, aumentando α, a aceleração $\vec{k}$ também aumenta até atingir 90°, quando $\vec{k}$ se torna $\vec{g}$, denominada aceleração da gravidade (ver Figura acima).

Galileu realizou medições experimentais com objetos caindo verticalmente, em queda livre, ou seja, quando α = 90°, obtendo um valor equivalente, no sistema métrico, próximo de 10 m / s^2 (na época de Galileu, o sistema métrico ainda não existia). Modernamente o valor obtido para o g é 9,8 m / s^2 (4) ao nível do mar e a 40° de latitude N.

Na época, Galileu mostrou seus resultados em uma forma de razões matemáticas, não em forma algébrica.

Conhecendo $\vec{k}$ e α, é possível calcular $\vec{g}$ por trigonometria. Por cálculo vetorial, decompomos: $\vec{g} = \vec{n} + \vec{k}$. A componente $\vec{n}$, vertical à superfície, não promove movimento no objeto, mas a componente $\vec{k}$ produz um movimento no plano inclinado.

Portanto, por trigonometria teremos: sen $\alpha = \frac{k}{g}$.

Então: $g = \frac{k}{\operatorname{sen}\alpha}$ é a aceleração da gravidade.

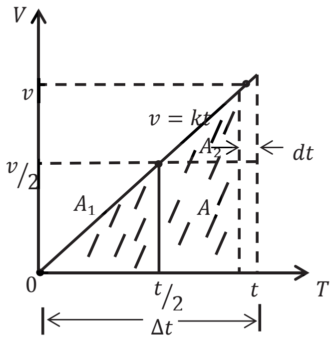
Modernamente, após obter $v = k\ t$ (ver Equação 1), usaríamos o cálculo integral para obter a distância *e*.

V, T são as grandezas velocidade e tempo.

v, t são os valores das grandezas.

A distância será dada pela área sob a curva.

v = kt (em nosso caso, uma linha reta):



$v = \frac{de}{dt}$ $\quad$ $de = vdt$, integrando:

$e = \int_0^e de = \int_0^v vdt$, pelo "Teorema do valor médio do cálculo integral":

$A_1 = A_2 = v_m\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ $\quad$ $A = v_m\Delta t = A - A_1 + A_2$, em que: $v_m = \frac{1}{2}v$, valor médio de v, $\Delta t = t - 0 = t$, $\int_0^v vdt = v_m\ \Delta t$ (ver Figura)

Então: $e = \frac{1}{2}vt$, o mesmo resultado que a Equação (2)

Também por cálculo integral: $v = \frac{de}{dt} = kt$, portanto: $de = ktdt$, como visto na Equação 1.

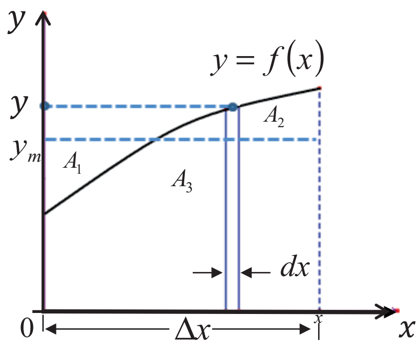
Assim, diretamente se obtém: $e = \int ktdt = k\int tdt$ e $e = \frac{1}{2}kt^2$ [5], obtida na Equação (3)

(GALILEU, 1634; MACLACHLAN, 2008)

Ref.: "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze" (Teorias e provas matemáticas sobre duas novas ciências), Galileu Galilei, 1634

Galileu Galilei: O primeiro Físico, MacLachlan, James; Cia das Letras, 2008

A2.2 TEOREMA DO VALOR MÉDIO DO CÁLCULO INTEGRAL



A área sob a curva $y = f(x)$ é obtida pela integral:

$A = \int_0^x ydx$ e $A = A_2 + A_3$ (ver Figura)

As áreas: $A_1 = A_2$

Subtraindo A_2 de A

Obtemos: $A_3 = A - A_2 \quad \therefore A = A_2 + A_3$

[5] Ver demonstração no Anexo 7, secção A 7.2, adendo matemático, Equação 1.

Porém, $A_1 = A_2$, assim, $A = A_1 + A_3$

Da Figura, vemos que:

$$A_1 + A_3 = y_m \Delta x$$

Portanto: $A = \int_0^x y dx = y_m \Delta x$, também: $y_m = \dfrac{\int_0^x y dx}{\Delta x}$, valor médio.

Tomando-se $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$ Obtemos: $y_m = \lim_{n \to \infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i}$ [6]

q.e.d. (que era para ser demonstrado).

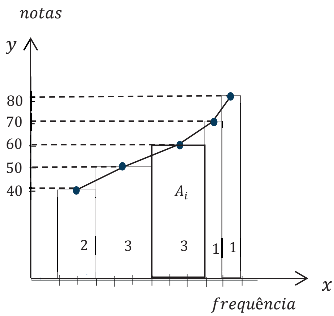
Ref: Elementos de Calc Dif e Integr, Smith, Longley, Granville

(GRANVILLE, SMITH, LONGLEY, 1956)

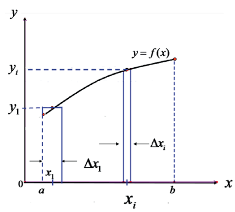
Recordemos a média aritmética ponderada esclarecendo, como exemplo, calcular a média das notas citadas a seguir.

Total: $\sum_{i=1}^{5} y_i \Delta x_i = 40 \times 2 + 50 \times 3 + 60 \times 3 + 70 \times 1 + 80 \times 1 = 560$

(Soma das áreas elementares = A)



[6] Recordemos o teorema fundamental do cálculo integral , isto é, a "Integração como processo de soma", em que: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ porém: $y = f(x)$ então, $y_i = f(x_i)$.



Consequentemente: $\int_a^b y dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i$

Em nosso caso, como $a = 0$, então:

$\int_0^x y dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i$ como visto anteriormente (ROTH).

Soma das frequências:

$$\sum_{i=1}^{5} \Delta x_i \; = 2 + 3 + 3 + 1 + 1 = 10$$

Largura total das áreas A_i na dimensão x.

Média aritmética ponderada:

$$\sum_{i=1}^{5} y_i \Delta x_i \Big/ \sum_{i=1}^{5} \Delta x_i = \frac{\mathbf{560}}{\mathbf{10}}$$

$\therefore y_m = 56$ (comprimento da área na dimensão y que, multiplicado por $\sum \Delta x_i$, fornece a área total A)

A diferença entre essa média e o valor médio do cálculo integral é que a segunda é determinada fazendo a quantidade de termos n crescer indefinidamente, $n \to \infty$, transformando as somatórias em integrais, isto é, a média ponderada, de $y_m = {\sum y_i \, \Delta x_i}\big/{\sum \Delta x_i}$ (de $i = 1$ até $i = n$) se torna:

$$y_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\int_a^b y\mathrm{d}x}{\int_a^b \mathrm{d}x}$$

Área $A = y_m \int_a^b \mathrm{d}x = \int_a^b y\mathrm{d}x$, ver a Figura da página anterior, em teorma do valor médio do cálculo integral.

Dessa forma, o valor médio do cálculo integral seria uma forma particular de média ponderada, em que os intervalos Δx_i tendem a zero: $\Delta x_i \longrightarrow 0$, isto é, as frequências se tornam infinitesimais.

Se em vez de chamarmos de frequência, chamarmos de peso ou, ainda, de porcentagem, o conceito fica mais compreensível.

Suponhamos que o rei Hierão, em Siracusa, procurasse saber a porcentagem de prata na coroa, supostamente de ouro.[7] Determinaríamos, primeiramente as densidades do ouro puro e da prata pura, e em seguida a amostra da coroa.

Por exemplo: densidade do ouro $d_{Au} = 19{,}28\,\mathrm{g/cm^3}$, da prata: $d_{Ag} = 10{,}47\,\mathrm{g/cm^3}$, da amostra da coroa: $d_{coroa} = 17{,}52\,\mathrm{g/cm^3}$

$$d_{coroa} = \Delta x d_{Au} + \Delta y d_{Ag} = 17{,}52\,\mathrm{g/cm^3}$$

$$\Delta x + \Delta y = 100\%$$

Resolvendo o sistema de equações, encontraríamos: $\Delta x = 80\%$ e $\Delta y = 20\%$.

A coroa seria constituída de 80% de ouro e 20% de prata.

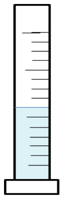
[7] Hierão havia pedido para Arquimedes solucionar a questão. Este, ao tomar banho de banheira, observou a água transbordando para fora. A água derramada era equivalente ao volume de seu corpo. Diz a lenda que ele saiu correndo pelas ruas, gritando: "*Eureka*! *Eureka*!" [Achei! Achei!].

E assim para ligas metálicas mais complexas, com mais elementos.

A2.3 COMO CALCULAR A DENSIDADE DE UM SÓLIDO?

Por exemplo, deseja-se descobrir a densidade de um objeto. Depois de achar a massa m em gramas g, determinamos seu volume V em cm^3.[8]

Coloca-se determinado volume de água em uma proveta, ou vasilha transparente, graduada em cm^3. Mergulha-se o objeto na proveta ou vasilha, a fim de que esteja totalmente submerso.



Determina-se a variação do volume, que será o volume do objeto ΔV.

Calcula-se a densidade: $d = \frac{m}{\Delta V}$

Por exemplo: se $m = 39{,}5g$, e $\Delta V = 5cm^3$

Obtemos: $d = \frac{39{,}5}{5} = 7{,}9\,g/cm^3$ que é a densidade do ferro a 20°C.

Há uma forma de obter essa densidade com maior precisão por meio do princípio de Pascal: a pressão aplicada a um fluido é transmitida a todos os pontos do fluido e às paredes que o contém. Então, o volume de fluido deslocado que chamaremos de V, que além de exercer pressão sobre o objeto submerso, exercerá pressão no fundo do recipiente, ocasionando um acréscimo no peso do recipiente, proporcional à massa do líquido deslocado: $m_L = Vd_L$, sendo d_L a densidade do líquido.

Denotando a densidade do objeto por $d_c = \frac{m_c}{V}$, com m_c, massa do objeto.

Logo: $V = \frac{m_L}{d_L}$, substituindo na equação anterior: $d_c = \frac{m_c}{m_L} d_L$.

Também com essa equação, podemos encontrar a densidade do líquido, conhecendo a densidade do corpo submerso: $d_L = \frac{m_L}{m_c} d_c$.

O procedimento é: primeiro se pesa o recipiente sem a amostra e, depois, pesa-se com a amostra submersa[9], tomando-se o cuidado de não deixar o objeto encostar nas paredes ou no fundo. A diferença

[8] Aplicaríamos o princípio descoberto por Arquimedes: todo corpo imerso em um fluido (líquido ou gasoso), recebe um impulso de baixo para cima, igual ao peso do fluido deslocado (estendido também para gases).

[9] Naturalmente, após encontrar o peso m_c da amostra, fora do recipiente.

de pesos, conforme o princípio de Arquimedes, fornecerá o empuxo devido ao peso do fluido deslocado: $E = m_L g$, sendo g a aceleração da gravidade.

Nesse segundo caso, utilizamos somente as massas e, por meio da balança analítica, podemos melhorar a precisão.

E se o corpo flutuar no líquido, como determinar sua densidade?

Por exemplo, um bloco de madeira flutuando na água com $^2/_3$ de seu volume submerso. Nesse caso, como o peso do bloco iguala o empuxo, pois estão em equilíbrio: $d_m = \frac{V_a}{V_m} d_a$

Tomando a densidade da água: $d_a = 1\ ^g/_{cm^3}$

Teremos: $d_m = \frac{2}{3} d_a = 0{,}666\ g/cm^3$.