Apêndice A

Material da formação específica: as concepções de números fracionários

1 Introdução

1.1 Significado

Em nossas atividades para elaboração de uma sequência de atividades que desse conta do ensino dos números fracionários, para a quinta série, o primeiro ponto importante levantado foi a necessidade de que as crianças dessem significado a esse conhecimento. Vimos também que muitas situações permitiam interpretações diferentes para os números fracionários e o quanto seria importante trabalhar com essas interpretações seria importante para o aprendizado da criança. Chamamos essas interpretações de concepções e as discutiremos considerando suas principais características em situações que as associam, bem como o tratamento necessário para a resolução de cada uma dessas situações. Veremos as seguintes concepções parte/todo, medida, quociente, razão e operador.

1.2 Quantidades

Quantificar significa associar um número, por meio de contagem ou medição, a alguma grandeza. Historicamente o conjunto dos números naturais surge para quantificar grandezas discretas e o conjunto dos números reais para quantificar grandezas contínuas. Boyer (1974, p. 52) diz que:

> Originalmente, nos círculos pitagóricos, as grandezas eram representadas por pedrinhas, [...] mas na época de Euclides surge completa mudança de ponto de vista. As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta. Em Os elementos os próprios inteiros

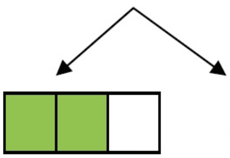
> são representados por segmentos. O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas [...] era algo à parte dos números e devia ser tratado por métodos geométricos.

Ainda, de acordo com Boyer (1974), isso se deve, provavelmente aos paradoxos de Zeno e outros. O mais conhecido é o da corrida de Aquiles com a tartaruga. Como esta sai com vantagem Aquiles por mais depressa que corra nunca a alcançará. *Os pitagóricos tinham assumido que o espaço e o tempo podem ser pensados como consistindo de pontos e instantes; mas o espaço e o tempo têm também uma propriedade, mais fácil de intuir do que de definir, conhecida como "continuidade"* (p. 51).

1.3 Representações

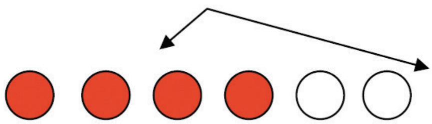
Além, da linguagem natural que utilizamos normalmente para descrever as situações, duas representações visuais se apresentam: o símbolo *a/b* que representa numericamente a situação e a figura, de regiões ou conjuntos divididos em partes de mesma quantidade, que ajuda a entender ou pesquisar a solução da situação. Observe os seguintes exemplos:

Dois terços do retângulo é verde



$\frac{2}{3}$

Quatro sextos das bolinhas são vermelhas



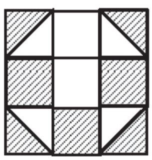
$\frac{4}{6}$

2 Concepções

2.1 Parte/todo

1) Pintar dois terços da figura abaixo.

2) Que fração da figura está pintada?



3) Pintar dois terços das bolinhas abaixo.

2.2 Características

As situações, que associam essa concepção evidenciam partes de alguma quantidade, que é considerada como um todo ou inteiro, presentes em todas as discussões que envolvem o desenvolvimento do conceito de número fracionário. Esta interpretação depende da divisão de uma quantidade contínua (área, massa, tempo, ...) ou de uma quantidade discreta (coleção de objetos) em partes ou subconjuntos de mesma quantidade.

O número *a/b* é usado para descrever uma divisão em que o inteiro ou todo foi dividido em *b* partes e dessas foram consideradas *a* partes. Desse ponto de vista o número *a* não pode exceder o número total de partes *b*, isto é, a fração *a/b* deve ser menor ou igual a 1.

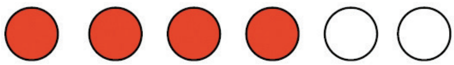
Nas situações que associam a concepção parte-todo, três pontos merecem atenção: a natureza do inteiro, como ele pode ser dividido e o que será considerado uma parte, pois remetem à diferenças de tratamento da situação.

2.3 Caso discreto

Aqui o inteiro (todo) pode ser representado por um conjunto de objetos idênticos, e neste caso, a situação parte/todo é tratada por números naturais que representam as quantidades de objetos que podem ser contados, agrupados ou distribuídos. Podemos considerar três tipos de situações.

a) Situações de contagem

Que fração das bolinhas é vermelha?



Quando efetuamos essa pergunta consideramos o conjunto das cinco bolinhas como um inteiro e pedimos a representação pelo número 4/6 da relação que existe entre o número de bolinhas vermelhas e o número total de bolinhas. Entendemos então que “quatro sextos das bolinhas são vermelhas” e que para obter a resposta, primeiro contamos o total de bolinhas e depois as bolinhas que são vermelhas. Este procedimento é chamado de dupla contagem das partes.

b) Situações de agrupamento

Se Pedro tem três bolinhas de gude, João tem 4 e Marcos tem 5 bolinhas, qual a fração do total de bolinhas que cada um possui?

Nesta situação o inteiro passa a ser o conjunto formado pelas bolinhas dos três meninos e as frações obtidas: 3/12, 4/12 e 5/12 representariam a relação entre a quantidade de bolinhas de cada um dos meninos e a quantidade total de bolinhas. Para chegar à resposta foi necessário obter a soma 3 + 4 + 5 e relacioná-la com o número de bolinhas de cada um.

c) Situações de distribuição

Pintar 3/4 das bolinhas abaixo.

Nesta situação, o número que representa a quantidade total de bolinhas deverá ser dividido em quatro partes, de mesma quantidade, para que dessas sejam consideradas três para serem pintadas.

Para resolver o problema contamos o total de bolinhas e efetuamos sua distribuição em 4 grupos ou dividimos o total por quatro, percebendo que cada parte contém 3 bolinhas, isto é um quarto das bolinhas corresponde a três. Como queremos três quartos teremos então que pintar 3 dessas partes, ou seja, 9 bolinhas. Na verdade as situações que envolvem a concepção parte/todo no discreto nos remetem diretamente à divisão nos naturais ou ainda à concepção de razão se entendermos que *"de cada quatro bolinhas temos que considerar três"*.

Cabe destacar que:

Existem situações que associam a concepção parte-todo em contextos discretos que não têm solução. Por exemplo, não podemos dividir igualmente quinze bolinhas em quatro partes, porque o número de bolinhas não é um múltiplo de 4. Aqui, a linguagem fracionária é inadequada porque a situação se encaixa nas divisões com resto dos números naturais, pois não podemos dividir uma bolinha de gude. É importante perceber que uma flor, ou um carro, ou um botão etc. não podem ser divididos porque caso o fizéssemos esses objetos perderiam suas características, por exemplo, o botão deixaria de ser botão e isto é inerente às grandezas discretas que são tratadas por números naturais e não por fracionários.

Por outro lado, temos situações em que impropriamente utilizamos a fracionária para objetos diferentes. Por exemplo, quando dizemos que metade dos peixinhos do aquário é vermelho, na realidade não estamos nos referindo a fracionários, mas a divisão de números naturais.

2.4 Caso contínuo

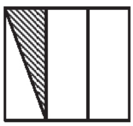
Quando apresentamos uma superfície, previamente dividida em partes congruentes, para identificar o número fracionário que corresponde a alguma parte dessa superfície, só precisamos contar duas vezes, uma para identificar o total de partes e outra para contar as partes que serão consideradas. Na verdade estamos discretizando o contínuo para utilizar somente a contagem, da mesma forma que fizemos no caso discreto.

Um ponto a ser discutido, neste caso, é o que entendemos por igualdade das partes. As apresentações de superfícies totalmente divididas em partes congruentes induzem ao entendimento de que a igualdade das partes implica na igualdade da forma e da área (partes congruentes) o que não é verdade.

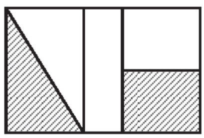
2.5 Forma das partes

Como o ensino enfatiza nas situações que associam a concepção parte-todo em contextos contínuos a contagem das partes de figuras previamente divididas em partes congruentes, não possibilita discussões a respeito de área e forma.

Em situações de divisões não usuais, como as apresentadas abaixo, é comum a alegação da não possibilidade da identificação da fração que representa a parte pintada da figura, sob o argumento de que a figura não está dividida em partes "iguais".

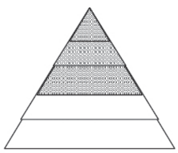


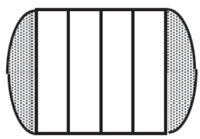
$\frac{1}{6}$



$\frac{2}{5}$

Por outro lado, em figuras como as abaixo, pode acontecer o contrário. A contagem das partes enfatizada no ensino pode conduzir a não percepção de que as partes não são "iguais", nem em forma, nem em área e, a identificação das partes pintadas pelas frações 3/5 e 2/6, respectivamente.

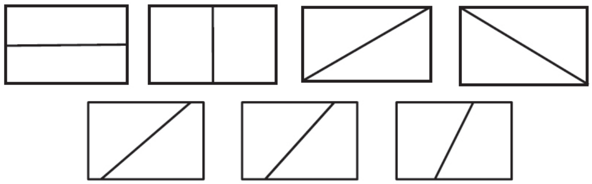




Com certeza esses tipos de erros, poderiam ser evitados se o enfoque para a construção da concepção parte-todo em contextos contínuos, não se resumisse à contagem das partes de figuras já divididas, mas sim na relação entre áreas, a partir de tarefas que solicitassem a divisão de figuras, que conduziriam naturalmente também à percepção da equivalência tanto de áreas, quanto dos números fracionários que as representam.

2.6 Divisão do inteiro

Se tomarmos um retângulo para dividir em duas partes de mesma área, por exemplo, existiriam várias possibilidades para essa divisão. Entre elas podemos considerar, por exemplo, as possíveis por um único traço.



Ou, as possíveis com mais traços ou linhas curvas.

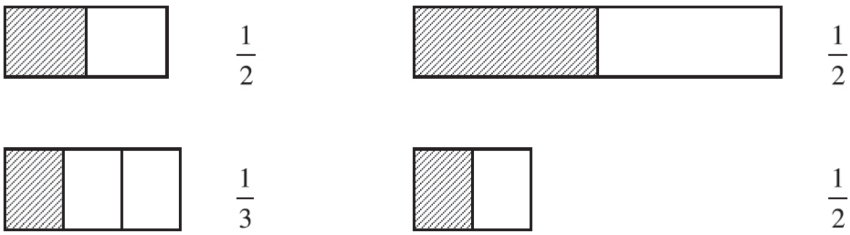
A tarefa de solicitar a divisão de inteiros encaminha para a necessidade de um planejamento e tomada de decisão para desenhar os traços que dividirão a figura.

Embora o círculo seja, normalmente, usado para representar fracionários e muitos materiais manipulativos desenvolvidos para o ensino empregam essa forma, dividi-lo em partes iguais não é tarefa simples, pois exige a identificação de seu centro e algumas técnicas de desenho geométrico para decidir onde desenhar as linhas, a não ser que utilizemos essa forma para ser dividida por meio de dobraduras.

Cabe destacar que:

Em muitos casos, o aluno, ao observar as divisões e utilizar a contagem para identificação de partes, perde a referência do inteiro, principalmente em situações de comparação.

Observe, nas duas primeiras figuras abaixo que, embora a parte pintada de ambas possa ser representada pelo mesmo número, a área não é a mesma, porque a área dos inteiros é diferente. Nas outras figuras, acontece o contrário, embora a área pintada seja a mesma, o número fracionário que as representa é diferente porque a área dos inteiros é diferente.



É frequente, em livros didáticos, aparecer ilustrações com divisão de frutas, pães, bolos etc. em “partes iguais”, considerando uma divisão visual supostamente de “mesma área”. No caso de um bolo, a igualdade não pode ser a “área” de cada pedaço, mas sim a quantidade de bolo que tem em cada pedaço que só poderia ser determinada pelo seu “peso” (massa). É o caso também da pizza, exemplo clássico do ensino de frações. Não estamos aqui, descartando esses modelos, que são úteis para que as crianças deem significado à necessidade dos novos números, mas questionando a igualdade das partes tão enfatizada no ensino. Nesses casos temos que supor e não afirmar que as partes são iguais.

2.7 Medida

1) Qual a distância entre o ponto A e o zero?

2) Qual a distância entre os pontos A e B?

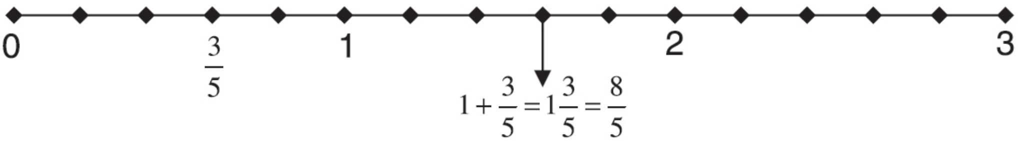
Nesta concepção a fração *a/b* é associada a uma unidade de medida que foi dividida em *b* partes de mesma medida, das quais foram consideradas *a* partes. Podemos, por exemplo, associar a fração *a/b* a um ponto de um segmento de reta tomado como unidade, que foi dividido em *b* partes congruentes (ou em um múltiplo de *b*), dos quais foram consideradas *a* partes. Na verdade, a divisão da unidade caracteriza uma relação parte-todo no contínuo.

2.8 Características

A principal característica da concepção de fracionários como medida, é a utilização repetida da fração *1/b* para determinar uma distância. Normalmente, solicita-se a medida da distância entre dois pontos usando *1/b* como unidade de medida e utiliza-se a representação da figura de uma reta numérica ou de uma régua. Para essas representações é necessário algum conhecimento de escala, a presença do zero como ponto de partida e intervalos de medidas iguais. O principal desafio será entender que a fração *1/b* é uma unidade de medida que deve ser usada repetidamente para determinar o comprimento desejado e que este, no final, pode ser representado por uma fração *a/b* que, por sua vez, representará $a\times\frac{1}{b}$, ou seja, *a* vezes a ocorrência da unidade *1/b*.

Nas situações de medida, é preciso a determinação de uma unidade de medida invariável, a especificação dos pontos de início e de final da medição a ser realizada e números fracionários para que se concretize o ato de medir.

Tomando um segmento com mais de uma unidade podemos obter a ocorrência da fração efetivamente como um número e perceber que 3/5 é um número entre o 0 e o 1 e, ainda, que $1\frac{3}{5}$, por exemplo, é um número entre 1 e 2. Além disso, entender que o conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos números naturais observando que os números racionais preenchem os "vazios" entre os números naturais.:



Outro ponto importante das situações que associam a concepção de medida, que não ocorre satisfatoriamente na concepção parte-todo, é a ocorrência, de forma natural, de frações maiores que a unidade, da notação de números mistos e da soma de duas medidas, o que favorece a percepção da equivalência no reconhecimento de que a mesma medida recebe nomes diferentes em função de novas divisões da unidade.

Cabe destacar que:

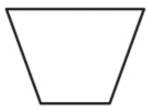
Historicamente muitos povos sentiram a necessidade de outros números, que não os naturais, para poder representar resultados, principalmente de medições, conduzindo-os a buscar uma unidade que não exigisse a representação fracionária, no entanto, diante da impossibilidade de realizar essa tarefa cada construiu suas próprias unidades. Um consenso parcial ocorreu somente em 1792 com a criação do sistema métrico decimal que se consolidou, principalmente, para facilitar as relações comerciais entre povos diferentes.

A concepção de medida é necessária no ensino porque ajuda os alunos a perceber a necessidade dos números fracionários, a lhes dar significado e a construir um novo campo de conhecimentos. Mas, isto só acontecerá se eles puderem escolher unidades de medidas não padronizadas e a perceber a necessidade de sua subdivisão para poder associar um número à grandeza que está sendo medida. Em medidas de comprimento isto pode ser facilmente obtido a partir de tiras de papel consideradas como unidade. O uso de réguas, neste caso, seria desaconselhável, em um primeiro momento, porque como as divisões já estão explícitas as crianças não percebem as subdivisões da unidade voltando a tratar as situações de medição somente com a contagem.

2.9 A reconstituição do inteiro

Podemos apresentar aos alunos tarefas em que as figuras representem partes e solicitar que o inteiro seja reconstituído. Uma boa compreensão de frações deve permitir que a partir do inteiro se identifique qualquer parte desse inteiro, mas também, que a partir de partes se reconstruia o inteiro. As duas concepções estudadas nos permitem elaborar atividades desse tipo:

1) Se a figura abaixo é um terço do inteiro, desenhe o inteiro.



2) Se 2/7 das bolinhas de Sérgio são brancas e ele tem 12 bolinhas brancas, qual o total de bolinhas que Sérgio possui?
3) Se o desenho abaixo representa 2/3 da unidade qual é a unidade?

Este caminho de volta permitirá a constatação de que no caso da concepção parte/todo associada a superfícies podemos obter inteiros com formas diferentes como resposta, o que não acontecerá no caso discreto ou na concepção de medida, em que encontramos uma única solução. Além disso ajuda a desenvolver a percepção visual de figuras e seu tratamento a partir da composição, aprofunda a compreensão das concepções envolvidas e da reversibilidade de situações.

2.10 Quociente

1) Se temos três pizzas para distribuir igualmente entre quatro crianças, quanto cada uma vai receber?
2) Se temos nove bolinhos para distribuir igualmente entre cinco crianças, quanto cada uma vai receber? Qual a sentença matemática que representa essa ação?

3) João tem 25 bolinhas de gude e quer distribui-las entre seus três sobrinhos. Quando cada um irá receber?
4) Tenho três pizzas e quero dar metade de cada uma delas para cada criança. Para quantas crianças posso distribuir as pizzas.

2.11 Características

Historicamente alguns povos associaram os fracionários diretamente à divisão de naturais em situações de distribuição desenvolvendo técnicas para obter tais resultados.

A concepção de fracionários enquanto quociente é associada diretamente a atos de distribuição ou de divisão em que a fração *a/b* representa que *a* foi distribuído ou dividido em *b* partes. Nesta concepção o numerador *a* não representa partes do inteiro ou da unidade, mas algo que será dividido em um número *b* de partes. Nestes casos o número *a* pode ser menor, maior ou igual a *b*.

Nas situações que associavam as concepções anteriores estávamos quantificando e trabalhando com uma única variável: o inteiro ou a unidade de medida, agora podemos ter duas variáveis, por exemplo: pizzas e crianças, embora a concepção parte-todo seja mobilizada na distribuição solicitada. A principal característica das situações que associam a concepção de quociente seja a representação do fracionário pela operação de divisão.

2.12 Caso discreto

A distribuição de 12 bolinhas entre 3 meninos, por exemplo, implica na mesma quantidade de bolinhas para cada um e pode ser representada por $12 \div 3$. Na realidade, trata-se de uma situação que envolve a divisão de números naturais.

Cabe destacar que:

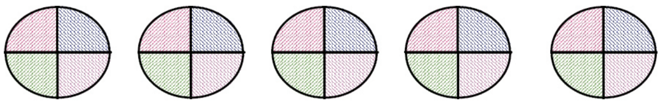
Situações que associam a concepção de quociente em contextos discretos solicitam, na realidade, a mobilização da divisão euclidiana, no exemplo (3) teríamos: $25 = 3 \times 8 + 1$, cada criança recebe oito bolinhas e sobrará uma. As crianças provavelmente determinarão algum critério para distribuir a bolinha que resta, pois com certeza não tentarão partir a bolinha porque sabem que obterão pedaços de vidro e não bolinhas.

As crianças, normalmente, realizam com facilidade tarefas de divisão em contextos discretos, porque estas podem ser realizadas por procedimentos diretos de contagem, como é o caso da divisão em seu aspecto partitivo: dada a quantidade de inteiros e o número de partes em que se quer dividir essa quantidade, solicita-se a quantidade de cada parte. Algumas dificuldades podem surgir se a tarefa apresentada se relacionar ao aspecto da divisão por cotas: quando é dada a quantidade de inteiros e a quantidade de cada parte e solicita-se a quantidade de partes possíveis.

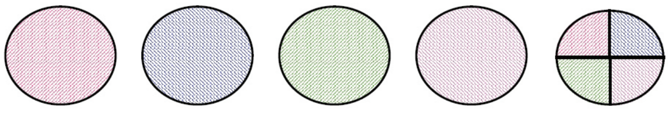
2.13 Caso contínuo

Como as situações na concepção de quociente solicitam uma divisão, as dificuldades na procura de partes que têm mesma área, já vista na situação parte/todo, permanecem, sendo necessário um plano de ação com procedimentos de estimativa, de tentativa ou mesmo de operações aritméticas para determinar a solução do problema.

As situações que associam esta concepção em contextos contínuos se prestam satisfatoriamente à divisão de várias regiões ao mesmo tempo, como por exemplo: Dividir cinco pizzas igualmente entre quatro pessoas. Este é um tipo de problema que pode apresentar, entre outros, dois caminhos de solução: a divisão de cada pizza em quatro, destinando para cada pessoa cinco partes ou a distribuição de uma pizza inteira para cada uma e a divisão de uma das pizzas em quatro partes. As duas soluções nos levam ao mesmo resultado, mas podem ser representadas de maneiras diferentes. O código misto e a operação de divisão aparecem na equivalência com a fração maior que um encontrada na distribuição.

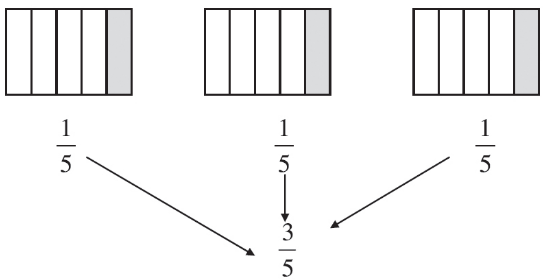


$$5 \div 4 = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$



$$5 \div 4 = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Já para *dividir três barras de chocolate igualmente entre cinco crianças* é necessária a divisão dos três chocolates, sendo que uma das possibilidades pode ser representada por:



Nas duas situações podemos perceber que a partir da divisão satisfatória de uma das pizzas ou de um dos chocolates, o processo pode ser repetido para a divisão dos restantes.

Essas situações favorecem a construção de significados diferentes, pois a ação de dividir uma unidade em cinco partes e tomar três delas (3/5 como parte/todo ou medida) é diferente da ação de dividir três inteiros em cinco, embora as duas sejam representadas pelo mesmo número fracionário.

Cabe destacar que:

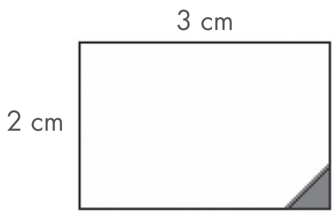
Quando utilizamos pizzas, chocolates, bolos, ... para as situações de ensino pretendemos que a partir delas as crianças deem significado às novas quantidades encontradas. Quando dividimos uma pizza em quatro partes e associamos a cada uma a fração 1/4 estamos considerando apenas o aspecto visual da igualdade das partes pois esta só poderia ser obtida a partir do “peso” da pizza inteira e das partes o que não faz sentido algum na realidade. O mesmo acontece nas situações que envolvem chocolates pois a maioria destes já são fabricados dividido em partes “iguais”.

2.14 Razão

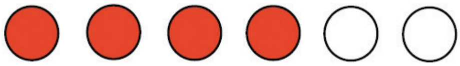
Diferente das situações anteriores, as que associam a concepção de razão não são representadas por uma partição ou medição ou distribuição, mas pela comparação de duas quantidades (do mesmo objeto ou de objetos diferentes), isto é, as razões podem ser utilizadas como um índice comparativo entre duas quantidades.

2.15 Algumas situações

1) Uma receita pede 2 copos de açúcar para 3 copos de farinha. Quanto de farinha é necessário para fazer uma receita utilizando 15 copos de açúcar? Quantas receitas poderiam ser feitas?
2) Em um saco existem quatro bolas pretas e cinco bolas brancas. Tirando aleatoriamente uma bola qual é a probabilidade de que seja preta?
3) Em uma caixa existem três bolas vermelhas e duas azuis. Qual é a razão das bolas vermelhas para as bolas azuis?
4) Qual a fração do retângulo abaixo que está pintada?



5) Que fração das bolinhas é vermelha? Qual a razão das bolinhas vermelhas para o total de bolinhas?



6) Se um jogador de basquete acerta uma bola em cada duas que arremessa em um jogo e três em cada quatro no jogo seguinte. Qual é a sua performance nos dois jogos?
7) Se em uma sala de aula temos dois meninos para cada três meninas qual a porcentagem de meninos nessa classe?
8) Qual a velocidade em km/h de um carro que percorre 4 km em 6 minutos?

2.16 Características

Uma das características dos números fracionários enquanto razão é a predominância da ideia de par ordenado de números naturais, descrito de acordo com a situação por um fracionário *a/b* ou por *a : b*. Por sua vez, esta razão determina uma proporção, visto que qualquer alteração feita em *a* provocará uma mudança previsível em *b*.

Por exemplo, se identificamos em uma situação a razão 3/4 (ou 3 para 4) teremos consequentemente as razões 6/8 ou 9/15 e assim por diante, que nos permite definir a proporção como a igualdade entre duas razões e representá-la genericamente por *a/b* = *c/d ou a : b :: c : d*, que se lê "*a* está para *b*, assim como *c* está para *d*". A descrição inicial obtida da situação apresentada pode ser entendida como uma constante que se conserva na proporcionalidade.

Sob este ponto de vista nem sempre se pode identificar um inteiro, embora nas comparações realizadas além da relação parte/todo podem ser detectadas relações do tipo todo/todo ou parte/parte.

O trabalho com razões pode encaminhar os alunos a perceber a equivalência de números fracionários, a desenvolver o pensamento proporcional, além de poder se tornar uma excelente ferramenta para a resolução de problemas.

Cabe destacar que:

A importância da razão está na quantidade de situações da realidade em que aparecem:

– A razão pode transmitir uma noção de grandeza relativa quando define uma nova grandeza a partir de duas outras grandezas apresentadas, como por exemplo, a velocidade média que relaciona espaço e tempo. Nestas situações podemos ter situações que exigem simplesmente a comparação entre o espaço e o tempo ou a busca de valores adicionais para uma proporção obtida (regra de três).

- As escalas nos mapas planos e miniaturas são representadas por razões que relacionam as medidas utilizadas nos mapas (ou miniatura) com as medidas reais.
- As receitas culinárias e misturas de líquidos também envolvem diretamente a ideia de razão.
- A densidade demográfica também é um exemplo da utilização de razão, pela comparação da quantidade de habitantes por km^2 de uma região.
- Na probabilidade a utilização da razão lhe dá um caráter de simples cálculo aritmético quando se compara a quantidade de casos favoráveis com a quantidade de casos possíveis.
- Na porcentagem podemos estabelecer uma razão a partir da comparação entre um número dado e conjuntos de 100 partes. Por exemplo, um desconto de 15% em um objeto que custa 300 reais poderia ser entendido por:

15,00 ----------- 100,00
15,00 ----------- 100,00
15,00 ----------- 100,00

O que leva a perceber que existe a mesma relação entre15 e 100 e 45 e 300. A diferença entre a concepção de razão e a parte/todo é bastante sutil.

A razão entre medidas de áreas permitirá identificar uma relação parte/ todo em situações que a parte em questão do inteiro não permite o recobrimento total desse inteiro considerado com partes congruentes à inicialmente dada do tipo do exemplo 4, apresentado acima.

2.17 Dificuldades

Algumas situações que associam a ideia de razão apresentam obstáculos de caráter operatório. Por exemplo, quando pensamos em triplicar a quantidade de ingredientes de uma receita de bolo, podemos pensar em multiplicar a quantidade de ingredientes por 3 ou somar três vezes a quantidade dos ingredientes da receita. Tal interpretação pode levar o aluno a operar de forma errônea com números fracionários e entender que $3\times\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ ou que $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$.

Outra questão que surge com a concepção de razão é a possibilidade de representá-la pelo quociente de dois números. Existem situações em que a divisão dos dois números envolvidos aparece de forma natural. Este é o caso de dizer que um carro que percorre 300 km em 5 horas percorreu essa distância a uma velocidade média de 60 km/h. O mesmo não acontece no caso da receita de bolo, pois não faz sentido dizermos que usamos aproximadamente 0,67 açúcar/farinha.

Existe uma crença de que razão é divisão, e em alguns casos isso é verdade e tem significado, mas em outros casos isso não se aplica.

Talvez por tais obstáculos houve um tempo em que as razões e proporções eram representadas somente por $a : b : c : d$, provavelmente para assinalar que temos uma ação específica de comparação entre dois números e não um número fracionário, embora em outras situações a representação fracionária para comparações não causem esse tipo de problemas.

2.18 Operador

1) Se 2/3 de 12 é 8, por quanto tenho que multiplicar o 8 para obter 12?
2) Se minha receita de bolo pede 3 copos de leite mas eu só tenho 2, quanto devo tomar dos outros ingredientes para fazer o bolo usando esses 2 copos de leite?
3) Dado um retângulo com medidas 4 e 6 centímetros obter um novo retângulo que tenha as medidas dos lados iguais a ¾ das medidas originais.

2.19 Características

Em situações que associam a concepção de operador o número fracionário assume o papel de transformar uma situação inicial para produzir uma situação final adquirindo um caráter funcional de transformação.

Esta interpretação pode nos conduzir a entender esse número fracionário como uma máquina de transformação. No terceiro exemplo acima, a fração ¾ atua sobre as medidas dos lados do retângulo assumindo o papel de transformar as medidas iniciais do retângulo dado nas medidas dos lados do novo retângulo. É como se tivéssemos uma máquina que transforma o que entra em seus ¾.

Essa ideia apresenta um contexto natural para o desenvolvimento da noção de composição de transformações, de inverso de um fracionário a partir do operador que reconstrói o estado inicial e também da noção de identidade com o operador que não modifica o estado inicial.

Assim, percebemos que o número fracionário é considerado como um número e não como um par de números e que as situações que associam o fracionário como operador pode envolver:

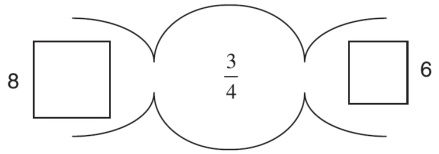
– um operador que produz situações finais diferentes dependendo da situação inicial;
– *operadores diferentes que produzem a mesma situação final (operadores equivalentes);*
– *operadores que voltam a situação inicial (operador inverso);*
– *o operador que não altera a situação inicial (operador idêntico).*

Nessas situações podemos associar a operação de multiplicação, tanto de um inteiro por um fracionário, quanto entre fracionários, traduzindo por exemplo, o dobro de 1/5 por $2\times\frac{1}{5}$ ou ainda, a metade de dois terços por $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$, sendo que esta, geralmente, é chamada de fração de fração e interpretada como a ação do fracionário ½ sobre a fração 2/3 que produz o estado final de 2/6.

2.20 Caso contínuo

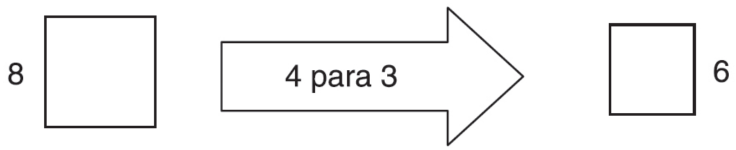
Em contextos contínuos, o fracionário *a/b* pode ser considerado um operador que reduz as medidas de uma figura (comprimento ou área) se $a < b$ e a amplia nos casos em que $a > b$. No exemplo, a seguir, o operador que transforma a figura é ¾, também, chamado de razão de semelhança, embora a razão que reduz as medidas da figura inicial seja "de 4 para 3".

Associando a esse exemplo uma máquina de transformação que operara com ¾. temos:



$$\frac{3}{4}\times 8 = 6$$

Utilizando razão temos:



Com as duas maneiras de proceder obteremos como situação final, um quadrado com 6 cm de lado. Fica implícito nessa ação que primeiro atua a operação de divisão (8 : 4 = 2) e depois a de multiplicação (2 × 3 = 6) que serão representadas por $\frac{3}{4}\times 8 = 6$, porque queremos encontrar ¾ de 8 cm".

Com a razão entendemos que para cada 4 cm da figura inicial consideramos 3 cm na nova figura. Assim, com o devido cuidado podemos, a partir das concepções de operador e razão desenvolver as noções de ampliação e redução de figuras, por exemplo.

2.21 Caso discreto

Nas quantidades discretas a fração *a/b* produz sobre a quantidade de elementos de um conjunto um efeito que resulta em *a/b* vezes a quantidade de elementos do conjunto inicial, ¾ de 16 bolinhas é um conjunto com $\frac{3}{4}\times 16$ bolinhas, que resulta em 12 bolinhas. Se pensarmos na razão entre o número de bolinhas do conjunto de partida para o número de bolinhas do conjunto de chegada temos que de 4 bolinhas do conjunto inicial foram tomadas 3. Mas, só podemos ter um fracionário operando sobre o número de elementos de um conjunto se esse número for múltiplo de *b*.

As porcentagens podem ter a característica de operador se interpretarmos, por exemplo, que 60% de 35 corresponde ao fracionário 60/100 atuando sobre 35 e representarmos tal ação por $\frac{60}{100}\times 35$.

O fracionário atuando como operador descreve um estado a partir da situação dada e uma ordem a partir da ação realizada estabelecendo duas formas de equivalência:

a) de operadores diferentes que atuam sobre o mesmo estado inicial produzindo o mesmo estado final.

Estado inicial	Operador	Estado final
12	$\times\frac{2}{3}$	8
12	$\times\frac{4}{6}$	8
12	$\times\frac{8}{12}$	8

Esta infinidade de operadores serão chamados de equivalentes porque provocam o mesmo efeito no objeto em que são aplicados e permitem estabelecer a relação $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\ldots$

b) de estados: quando o mesmo operador atua sobre estados iniciais diferentes produzindo a mesma transformação.

Estado inicial	Operador	Estado final
12	$\times\frac{2}{3}$	8
24	$\times\frac{2}{3}$	16
54	$\times\frac{2}{3}$	36

A equivalência aqui surge na comparação do estado inicial e do estado final e permite estabelecer a relação $\frac{12}{8}=\frac{24}{16}=\frac{54}{36}=\ldots$