Segunda parte

Estudos preliminares para a formação

Nesta parte de nossa pesquisa, mostramos três estudos sobre números fracionários que servirão de base teórica para a formação dos professores. O primeiro, diz respeito à terminologia utilizada para identificar o objeto matemático em estudo e seus significados que se justifica pela confusão conceitual provocada pelos termos: fração, número fracionário e número racional.

O segundo consiste de um estudo epistemológico que busca as concepções de números fracionários mobilizadas na gênese desses números, que se justifica pela necessidade de identificar a razão de ser desses números e o caminho percorrido por sua construção conceitual.

Finalmente, o terceiro versa sobre uma Organização Matemática, que se apóia no estudo epistemológico, nas diversas concepções de números fracionários e em resultados de pesquisas anteriores, justificado pelo nosso interesse em permitir o acesso de tais resultados a professores em atuação e a necessidade de um referencial teórico a respeito do objeto em estudo para a formação pretendida.

1 Uma questão de terminologia e significados

Afinal, frações, números racionais ou números fracionários?

A questão nos persegue desde o início de nossos estudos, quando percebemos, em contatos com professores, que muitos não aceitam como número fracionário, um número irracional escrito na forma a/b, $(b \neq 0)$, como $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pois um irracional não pode ser escrito na forma de fração, mas aceitam $\frac{1}{\sqrt{2}}$ como fracionário, pois temos de racionalizar o denominador.

Às vezes, levam um tempo para perceber que se trata do mesmo número. Por outro lado, aceitam as "frações algébricas", em $\Re$, como representação fracionária, mas emudecem, quando se substitui o x por um número irracional qualquer.

Provavelmente, o fato justifique-se pela identificação do conjunto dos racionais, como sendo o "conjunto das frações", embora durante o Ensino Fundamental e Médio trabalhem com números fracionários do tipo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{x+1}{x}$ ou $\frac{2+3i}{5}$, aplicando inclusive as mesmas regras operatórias.

Assim, procuramos em textos de matemática ou de seu ensino, algum consenso para essa terminologia que apresentaremos, a seguir, com os termos empregados pelos autores.

Nicolas Rouche em seu livro *Pourquoi ont-ils inventé les fractions?* Mostra poeticamente em sua introdução, o quão complexo é o entendimento do que é *fração*:

> Uma fração é uma coisa bem pequena: uma barra horizontal, um número em cima e um número embaixo. Mas que representa esta coisa? Um pedaço de torta? Uma razão? Uma nova espécie de números? A resposta está longe de ser clara para todo mundo. (ROUCHE, 1998, p. 1, tradução nossa)

O autor fala da dificuldade de esclarecer o que queremos e apresenta o termo fração associado à representação simbólica: *"um número em cima e um número embaixo"* e a contextos em que pode ser identificada como novo número.

Bell (1996) discorrendo a respeito da ampliação do sistema de números naturais associa o termo frações a uma nova classe de números, embora coloque a palavra número entre aspas:

> As primeiras ampliações do sistema de números naturais foram às frações babilônicas e egípcias. Estas ilustram um prolífico método de engendrar os novos números a partir dos já aceitos, e com seu mesmo conceito, a inversão. Para resolver o problema "por qual número há que se multiplicar 6 para que produza 2?" Há que se inventar uma nova classe de "número", a fração 1/3. (Ibid, p. 182, tradução nossa)

Por outro lado, Paul Karlson trata as frações do ponto de vista de notação e seu caráter operatório, quando afirma que:

> O cálculo com frações simples desenvolveu-se antes mesmo da regulamentação definitiva da divisão, que realmente era – cumpre dizê-lo – trabalho fácil enquanto faltava uma notação numérica adequada. Todas as velhas civilizações, desde os egípcios e babilônios até hindus e chineses, conheciam sem exceção as frações, sabendo mesmo manejá-las, com relativa destreza. (KARLSON, 1961, p. 51)

No entanto, o autor associa o termo frações aos números não racionais quando apresenta a expressão $\frac{1}{2\pi}$ e a fórmula: $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} B \cdot b$ para o volume da pirâmide, considerando *B* a medida da área da base triangular e *b* a medida da altura dessa pirâmide. Logo a seguir escreve: *"o volume de uma pirâmide é, portanto, igual ao produto da base pela altura, dividido por 3"* (p. 149). Vemos que no discurso substitui o número fracionário 1/3, utilizado na fórmula, por "divisão por 3".

O mesmo acontece, quando trata de trigonometria, apresenta a relação $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + tg^2 \alpha$ e escreve: *"basta que invertamos a fração e extraíamos a raiz. Resulta então:* $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}$" (Karlson, 1961, p. 248). Claramente, podemos perceber que embora o autor tenha, a princípio, associado o termo fração aos números racionais, apresenta também escritas fracionárias para números irracionais.

Ao discutir a respeito de expressões numéricas referentes a medições, Caraça apresenta o número fracionário $\frac{11}{3}$ como razão de dois números, que sempre será tratada como quociente desses dois números, na seguinte definição:

> Sejam os dois segmentos de recta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento *u* – $\overline{AB}$ contem *m* vezes e $\overline{CD}$ contém *n* vezes o segmento *u*. Diz-se, *por definição*, que a medida do segmento $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o *número* $\frac{m}{n}$, e escreve-se $\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$ quaisquer que sejam os números inteiros *m* e *n* (n não nulo) [...] o número $\frac{m}{n}$ diz-se *fraccionário*. (Ibid, p. 35)

A seguir, apresenta o que chama de campo racional:

> Encontramo-nos com um novo conjunto numérico – o conjunto dos números racionais ou campo racional – que compreende o conjunto dos números inteiros e mais o formado pelos números fracionários, estes são de facto, os números novos. (Ibid, p. 36)

Para Caraça, os inteiros são racionais, mas não são números fracionários, embora apresente no estudo dos números racionais os inteiros escritos na forma *a/b*, tal fato fica claro quando apresenta a seguinte classificação para os números reais:

$$\textit{Números reais} \begin{cases} \textit{racionais} \begin{cases} \textit{inteiros} \\ \textit{fraccionários} \end{cases} \\ \textit{irracionais} \end{cases}$$

(CARAÇA, 1984, p. 83)

Entretanto, quando define seno de um ângulo, transfere a possibilidade da escrita fracionária e do quociente para os irracionais.

> Chama-se seno do ângulo α, e representa-se por **senα**, ao cociente do segmento $\overline{PM}$ (orientado, sempre com origem em P, qualquer que seja a posição de M) pelo raio r: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PM}}{r}$. (Ibid, p. 145)

Já, Davis e Hersch (1985, p. 458) chamam os racionais de fração, quando definem o número racional como: ”*qualquer número que seja a razão de dois inteiros: 1/1, – 6/7, 21/102, 4627/1039. Uma fração”*.

Chevallard, Bosch e Gascón (2001) apresentam a seguinte questão: *“Racionalizar o denominador das seguintes frações:”* explicitando que se trata de tornar racional o denominador de uma fração, apresentando como primeiro exemplo $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$.

Alphonse, ao tratar de problemas didáticos ligados às escritas dos números, tenta a princípio diferenciar frações de números, associando a fração a um operador de fracionamento.

> A priori as frações não são números. Mas, no contexto, são operações de medidas, associadas de maneira natural às grandezas fracionadas. Uma fração evoca, então, um operador de fracionamento. Esta origem subsiste igualmente no enunciado: $\frac{3}{4}$ não se lê “três sobre quatro”, mas, “três quartos”. Para Euclides também as razões de grandezas não são números. Aliás, uma escrita antigamente corrente, *a:b :: c:d* que significa *a* está para *b* assim como *c* está para *d*, leva a não considerar as razões de grandezas como números. (ALPHONSE, 1995, p. 36, tradução nossa)

Apresenta também a possibilidade da fusão de fração e razão: Mas temos igualmente uma aparição de frações em um contexto aritmético como: a fração é um elemento do resultado de uma divisão que não termina. Quando as “frações” adquirem o estatuto de número, com a escrita $\frac{a}{b}$, algumas propriedades serão introduzidas. Obtém-se igualmente uma articulação entre a notação e a concepção de um lado e de outro, as operações, em consequência um tipo de fusão entre fração e razão que se opera. Por outro lado, a noção de número racional feita historicamente muito tardia toma, também, a designação canônica $\frac{a}{b}$ (ALPHONSE, 1995, p. 37, tradução nossa).

Nunes e Bryant, quando tratam das dificuldades do ensino de frações, diferenciam os termos número racional e frações, dizendo que:

> Esses estudos servem como uma advertência dos perigos que existem por trás da complexidade e da diversidade dos conceitos envolvidos em

> frações e números racionais. (Usaremos a expressão "números racionais" de uma forma mais geral e frações apenas quando nos referirmos a problemas parte-todo). (NUNES e BRYANT, 1997, p. 193)

Tratando da sofisticação da ideia de números fracionários, D´Augustine afirma que:

> A ideia de números fracionários é um conceito sofisticado, que requer da criança mais maturidade e maior base matemática do que o conceito de número natural. Enquanto um número natural é a propriedade de um determinado conjunto, um número fracionário pode ser associado a:
> 1. A partilha de um conjunto determinado.
> 2. A razão das propriedades numéricas de dois conjuntos.
> 3. Um número associado à partilha de um conjunto contínuo.
> 4. Um número que representa o cociente de dois números naturais (sendo o divisor diferente de zero). (D´AUGUSTINE, 1976, p. 144)

Observamos que o autor associa os números fracionários à distribuição de grandezas discretas e contínuas, embora esta última possa levar a representação fracionária de números reais. No entanto, diferencia número fracionário de fração na seguinte definição:

> Define-se número fracionário como o cociente de dois números naturais, de modo que o divisor seja diferente de zero, isto é, um número fracionário é qualquer número que pode ter o nome $^{a}/_{b}$, onde a e b são números naturais e $b \neq 0$. Uma fração pode ser definida como o símbolo ou o nome para o número fracionário e pode ter a forma $^{a}/_{b}$, em que a e b designam números naturais. É importante saber que uma fração designa um número fracionário, bem como é também importante saber quando duas frações designam o mesmo número fracionário. (D´AUGUSTINE, 1976, p. 146)

Entendemos que, para o autor, o número fracionário ou racional pode ser representado por uma classe de frações, isto é, as frações são representações de um número racional. Já, quando trata de razão, o autor a apresenta relacionada a problemas da realidade:

> Há muitas ocasiões que, em nossa sociedade, estamos interessados em estabelecer a correspondência vários-a-vários. Por exemplo, se se vendem balas à razão de três por dez centavos… Quando usamos um par de

> números em correspondência vários-a-vários numa situação social referimo-nos a este par de números como um par de razões. Definimos dois pares de razão $a/_b$ e $c/_d$ como sendo equivalentes somente se $a \times d = b \times c$. (D´AUGUSTINE, 1976, p. 238)

Associa, também, o número fracionário à porcentagem, dando a esta seu caráter notacional e de aplicação comercial.

> A notação de percentagem é muito usada em nossa sociedade. Como ela é muito útil para reduzir os dados estatísticos a uma forma mais fácil de ser entendida e para comunicar as relações da aplicação comercial do número, será importante desenvolver não apenas o significado matemático de percentagem (percentagem é uma outra notação usada para representar números fracionários), mas também a sua função de comparação. (D´AUGUSTINE, 1976, p. 240)

Entendemos que, para Alphonse, o número fracionário é representado por uma classe de frações e que razão não é número, mas, uma relação entre dois números inteiros, embora possa ser representada na forma de fração.

Niven afirma que nem o conjunto dos naturais nem o dos inteiros são "*fechados em relação à divisão, porque a divisão de inteiros pode produzir frações como 4/3, 7/6, – 2/5, etc.*" e acrescenta que "*o conjunto de todas as frações como estas é o conjunto dos racionais*". A seguir, define: "*um número racional (ou uma fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma a/d, onde a e d são inteiros e d não é zero*" (NIVEM, 1984, p. 30).

Mais à frente, o autor observa que "*enquanto os termos número racional e fração ordinária são, às vezes, usados como sinônimos, a palavra fração, sozinha é usada para designar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador como por exemplo:* $\sqrt{3}/_2$, $17/_x$ *ou* $\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}$" (p. 31).

Esclarece ainda que a inclusão das palavras "*pode ser colocado na forma a/d*" na definição de número racional, é para que sejam incluídos, nessa definição, os infinitos modos de descrever um dado número racional (por exemplo, 2/3 pode ser escrito como 4/6, 6/9, ... ou $2\pi/_{3\pi}$ ou $2\sqrt{3}/_{3\sqrt{3}}$ ou $\frac{-10}{-15}$, mencionando, apenas alguns). Acrescenta que:

> Uma fração é definida de tal modo que, se multiplicarmos seu numerador e denominador por uma mesma quantidade, a nova fração representará o mesmo número, assim só de olhar para uma expressão, nem sempre podemos dizer se ela representa ou não um número racional. Considere, por exemplo, os números $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ e $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$, nenhum dos quais está na forma a/d com

a e d inteiros. Podemos, porém, efetuar certas manipulações aritméticas com a primeiro expressão e obter 2 e, portanto, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ é racional, o que não acontece com $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ que representa $\sqrt{5}$. (NIVEM, 1984, p. 32)

Conforme as concepções de números fracionários, Ciscar e Garcia (1998), afirmam na introdução de seu livro que:

> A ideia de fração apoiada em situações em que está implícita a relação parte-todo. Esta relação é uma das possíveis interpretações da fração. Mas por outro lado, também podemos representar, mediante uma fração, situações em que está implícita uma relação parte-parte (ou todo-todo), que nos levam a interpretação da fração, como razão. Ainda existem outras interpretações das frações: operador, quociente de dois números, etc. O constructo teórico que sintetiza todas elas, constitui o número racional. Há, portanto, um grande caminho a percorrer entre as primeiras ideias intuitivas de "metades" e "terços" até a consideração das frações como elementos integrantes de uma estrutura algébrica. (Ibid, p. 1, tradução nossa)

Buscando a fração, como elemento integrante de uma estrutura algébrica, encontra-se em Hernstein (1970) a seguinte definição:

> O corpo de frações de um anel de integridade: Recordemos que um anel de integridade é um anel comutativo D com a propriedade adicional de não possuir divisores do zero, isto é, se $ab = 0$ para certos $a,b \in \Re$, então pelo menos a ou b é necessariamente zero. O anel dos inteiros é, evidentemente, um exemplo padrão de um anel de integridade. O anel dos inteiros possui a característica atraente de que podemos estendê-lo para o conjunto dos racionais, que é um corpo. Podemos efetuar uma construção semelhante para qualquer anel de integridade? (Ibid, p. 122-123)

A resposta a essa questão vem quando apresenta e demonstra o seguinte teorema: *"todo anel de integridade pode ser imerso num corpo"*.

> Demonstração. Antes de proceder formalmente com os detalhes da demonstração, tomemos um ponto de vista informal do problema. Seja D nosso anel de integridade; em termos não rigorosos, o corpo que procuramos deve ser constituído de todas as frações $\frac{a}{b}$ onde $a, b \in D$ e $b \neq 0$. Evidentemente, em D, $\frac{a}{b}$ pode muito bem não ter sentido. O que devemos exigir destes símbolos $\frac{a}{b}$? Evidentemente, precisamos ter uma resposta às três perguntas seguintes: (1) Quando é $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$? (2) O que é $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

> (3) O que é $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$? Para responder (1), nada mais natural do que afirmar que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$? Quanto a (2) e (3), por que não tentar o óbvio, isto é, definir $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$?
>
> De fato, no que se segue faremos destas considerações nosso guia. Portanto, deixemos de heurística e entremos no domínio da matemática, com definições precisas e deduções rigorosas. (HERNSTEIN, 1970, p. 124)

O autor conclui que sendo F um corpo de frações e D um anel de integridade: "F é usualmente denominado o corpo de frações de D. No caso particular em que D é o anel dos inteiros, o F assim construído é, evidentemente, o corpo dos números racionais" (Ibid, p. 125).

Mas, se todo corpo é um anel de integridade e sabemos que Q, $\mathfrak{R}$ e C são corpos, podemos, então, construir o corpo de frações desses anéis e falar de frações para números racionais, reais e complexos. Acrescentando os anéis de polinômios, podemos construir o corpo de frações dos polinômios que nos levam às frações algébricas que são tratadas com esse nome no Ensino Fundamental.

As questões da introdução das frações nas séries iniciais são delicadas e obrigam a buscar situações apropriadas para fazê-lo, sem excluir a questão da nomenclatura utilizada. Esta, por sua vez, está impregnada da crença milenar de que fração não é número e da enfática afirmação de que o conjunto dos racionais é o conjunto das frações ou dos números fracionários que provocam distorções na formação que leva muitos professores a situações de conflito, quando se fala de números fracionários ou de frações que não sejam racionais, o que, certamente, refletir-se-á no ensino.

Assim, no intuito de distinguir o objeto de suas diferentes representações e, de adotar um termo que não deixe dúvidas e que seja, suficientemente, abrangente, utilizaremos o termo número fracionário para indicar aquele que pode ser representado por uma classe de frações, $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ e a, b pertencentes a um anel de integridade. Como, neste trabalho, estamos interessados no Ensino Fundamental, a e b podem ser números reais ou polinômios. Por exemplo, o número fracionário $\frac{\sqrt{2}}{2}$ poderá ser representado por uma classe de frações: $\frac{2\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\pi\sqrt{2}}{2\pi}$, ... e no caso dos polinômios, consideraremos a fração algébrica como um polinômio escrito na forma de fração e, por exemplo, a fração algébrica $\frac{x+3}{5}$, pode ser representada, também, por uma classe de frações algébricas: $\frac{2x+6}{10}$, $\frac{3x+9}{15}$, ... que, por sua vez, poderá ser associada a uma classe de números fracionários, dependendo do valor que x pode assumir.

Daqui em diante, trataremos por números fracionários todo elemento do conjunto dos reais ou do conjunto dos polinômios que pode ser representado por uma classe de frações.

Mas, além da questão da terminologia, que acabamos de apresentar, abordaremos ainda a origem da palavra fração e de seus significados culturais e em outras áreas de conhecimento, pois, algumas dessas ideias podem estar presentes no cotidiano das pessoas.

A palavra árabe que designa fração, *al-kasr*, é derivada do radical do verbo que significa "quebrar" que, com o passar do tempo, levou os termos fração e "número quebrado" a serem utilizados como sinônimos. Isso se deve, provavelmente, ao fato de a maioria das aritméticas americanas antigas utilizavam o termo "número quebrado" para distinguir as frações ordinárias das frações decimais.

As formas latinas *fractio* e *minutum ruptus* eram traduzidas, por antigos autores da língua inglesa, como "broken numbers" (números quebrados). Buscando a etimologia da palavra fração, Cunha (1997), cita que sua origem está na palavra fraccion que significa o ato de partir, quebrar, dividir ou à parte de um todo que faz associar à palavra fração uma ação de partição.

Segundo Ferreira, o termo fração é usado atualmente para designar, entre outros:

> Fração [Do lat. Fractione.] S. f. 1. Ato de partir, rasgar ou dividir. 2. Parte de um todo: "Com o movimento do ônibus, há um instante, uma fração de segundo em que o vitral chameja" (Osmã Lins, *Nove, Novena*, p. 198). 3. Facção (4). 4. *Arit.* Número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais; número fracionário. 5. Quím. Qualquer mistura parcial que se obtém num processo de separação dos componentes de um sistema.
> Fração contínua. *Mat.* Sequência que se obtém mediante frações nas quais o denominador se forma pela adição, em cada uma, de uma fração própria ao denominador da antecedente. Fração decimal. *Mat.* Fração própria cujo denominador é uma potência de dez. [Tb. se diz apenas decimal.] Fração de empacotamento. *Fís. Nucl.* Quociente da diferença entre a massa atômica e o número de massa de um elemento pelo número da massa deste. Fração do pão. *Rel.* 1. A missa. 2. A comunhão. Fração Molar. *Fís.-Quím.* Medida da concentração de um componente numa mistura, igual ao quociente do número de moles do componente pelo número total de moles da mistura. (FERREIRA, 1986, p. 806)

Podemos notar que o termo fração significa, tanto uma ação de partição como é sinônimo de número fracionário; ao mesmo tempo, em que significa uma medida na Química ou um quociente na Física, ou ainda, uma sequência na Matemática. Por outro lado, embora alguns afirmem que a ideia de fração não faz parte do dia-a-dia das pessoas, podemos encontrar, em rápida incursão na internet, o termo associado a muitos temas da atualidade como, por exemplo:

– fração do bilhete de loteria.
– fração amostral utilizada no censo.
– fração ideal do solo e das partes comuns de um edifício
– fração lipídica (óleo bruto) de grãos de soja.
– reciclagem da fração mineral dos resíduos de construção e demolição.
– fração de espalhamento na região de mamografia.
– fração de bonificação em aplicações
– remédios fracionados estarão disponíveis nas farmácias.

O fato nos leva a supor que o ensino de frações deve tentar construir seus inúmeros significados diferenciando, o objeto número fracionário, de sua representação: classe de frações equivalentes.

Assim, é necessário perceber nessa construção que é diferente do inteiro, em que fica clara a distinção entre um número e suas representações, pois, quando nos referimos ao número cinco, por exemplo, sabemos que representações como: "cinco" ou "5" ou "V" ou "|||||" evocam o referido número, mas não o próprio número, pois este não passa de uma ideia. Quando operamos com os inteiros, realizamos o cálculo com base na manipulação da representação escolhida: 2 + 3 = 5 ou II + III = V, por exemplo, o que não acontece com os fracionários. Nesse caso, manipulam-se representações do mesmo tipo para indicar um mesmo número, por exemplo, $\frac{4}{8}, \frac{3}{6}, \frac{9}{18}$… todas são frações que representam o número fracionário $\frac{1}{2}$.

Feita a escolha, em termos de terminologia, e uma breve introdução a respeito da origem do termo fração e alguns de seus significados; em continuidade, apresentaremos um breve estudo da gênese dos números fracionários no sentido de buscar as situações que estão na razão de ser desses números.

2 Breve estudo da gênese de número fracionário

Nesta parte da pesquisa, faremos um breve estudo da gênese dos números fracionários, no sentido de identificar a emergência das concepções relacionadas com tal saber.

Este estudo apóia-se em Artigue (1990) para quem a análise epistemológica, ancorada no desenvolvimento histórico do conceito, conduz o pesquisador em Educação Matemática a diferenciar uma variedade de concepções, sobre um dado objeto, e a reagrupá-los em classes pertinentes para a análise didática.

Conforme a autora citada (p. 245), esta análise ajuda o pesquisador *"a se desprender da ilusão de transparência dos objetos que manipula em nível do saber e o ajuda a se libertar de representações epistemológicas errôneas que tendem a induzir sua prática de ensino"* (tradução nossa). Além disso, acredita que *"os* *problemas que motivaram a introdução, de um ou outro conceito e aqueles que governaram sua evolução, são constitutivos da significação deste conceito e o pesquisador em didática confronta-se necessariamente com o problema da significação dos conceitos"* (Ibid, p. 246, tradução nossa).

Dessa forma, decidimos identificar os tipos de tarefa que pedem a mobilização das concepções de números fracionários em textos da História da Matemática.

Para realizar este estudo, apoiamo-nos na Teoria Antropológica do Didático (TAD), porque situa a atividade matemática e, em consequência, a atividade de estudo da matemática, no conjunto de atividades humanas de instituições sociais. Conforme Chevallard (1999, p. 223), nessa teoria *"uma obra matemática, como toda obra humana, surge sempre como resposta a um conjunto de questões e como meio de realizar determinadas tarefas problemáticas em determinada instituição"*.

Segundo a TAD, o saber matemático, como forma particular de conhecimento, é resultado da ação humana em instituições que produzem, utilizam ou ensinam tal saber, embora este possa migrar de uma instituição para outra. A noção de praxeologia vem como um método que permite a análise de práticas sociais tanto por sua descrição como pelo estudo das condições em que tais práticas se realizam.

Consideramos, então, como instituição, as publicações a que se teve acesso desde a Antiguidade como, voltadas ao ensino de Matemática, apoiando-nos para esta consideração em Schubring (2003), quando afirma que há evidência da existência do ensino institucionalizado de matemática na Mesopotâmia, a partir da necessidade da função de escriba e de centros para sua formação. O autor cita os papiros de Rhind e de Moscou, como os mais antigos textos conhecidos destinados ao ensino, e os *"Dez Manuais Matemáticos"* ou *"Dez Clássicos"*, como sendo a primeira lista oficial de livros textos autorizados na China em 656.

> Provavelmente o mais antigo e conhecido dos "Dez Clássicos" seja os "Nove capítulos sobre a arte de calcular". A tradição da matemática chinesa está fundamentada nesse manual que apresenta 246 problemas com a apresentação feita em três níveis: propor o problema, dar sua solução numérica, fornecer a regra pronta para calcular a solução com base nos dados. (Ibid, p. 28)

De acordo com Bosch e Chevallard (1999), a TAD parte do princípio de que podemos analisar uma prática institucional, de diferentes pontos de vista e formas, a partir de um sistema de tarefas que, para serem realizadas exigem que se coloque em ação uma técnica.

Um certo tipo de tarefas determinará uma maneira de cumprir ou realizar as tarefas desse tipo, o que significa que tal organização deve conter, pelo menos, uma técnica que identifica um certo saber-fazer.

A produção de técnicas para realizar determinadas tarefas implica a produção de praxeologias, matemáticas ou didáticas, que se compõem de dois aspectos: o prático constituído pelas tarefas ou questões que se colocam, e as técnicas que se usam para resolver essas tarefas (bloco técnico-prático). O discurso racional sobre essa prática apresenta dois níveis, um tecnológico, que justifica as técnicas e outro teórico, que justifica o nível tecnológico (bloco tecnológico-teórico).

Chevallard (1999) define uma praxeologia ou organização pontual (OMP), em uma instituição, quando a organização trata de um único tipo de tarefas, que poderá se combinar em organizações locais (OML), quando centradas sobre uma determinada tecnologia e depois, em organizações regionais (OMR) ao redor de uma teoria. Para o autor, toda atividade matemática institucional pode ser analisada em termos de praxeologias matemáticas de complexidade crescente.

Mediante o exposto, pretendemos identificar os tipos de tarefas que estão na gênese dos números fracionários, que têm suas técnicas justificadas pelas concepções de números fracionários, detendo-nos sobretudo no bloco técnico-prático, geralmente, sem explicitar o bloco tecnológico-teórico, porque segundo Chevallard (1999) na aritmética elementar o discurso tem dupla função: porque permite, ao mesmo tempo, encontrar o resultado solicitado (função técnica) e justificá-lo como correto (função tecnologia).

Assim, pretendemos neste estudo identificar nas publicações que tivemos acesso, os tipos de tarefas que, provavelmente, deram origem ou utilizaram números fracionários agrupados de acordo com as concepções que lhes podem ser associadas, ou relações entre elas.

Essas concepções baseiam-se na classificação de Behr e outros (1983), quando considera que o conceito de número racional se constrói com base nas interpretações: parte-todo, medida, quociente, razão e operador que serão estudadas em detalhes na Organização Matemática que escolhemos para a formação dos professores.

Analisaremos cada tópico desta parte do trabalho apresentando alguns exemplos, preferencialmente aqueles que apresentem a técnica explícita utilizada, embora muitos do mesmo tipo possam ser encontrados em épocas diferentes da história.

2.1 As situações de medições e seus registros escritos

Desde a Antiguidade, encontramos na gênese da numeração fracionária algumas práticas sociais, como as medições realizadas pela determinação de unidades que permitissem quantificar a grandeza a ser medida e a comparação dessa unidade com o objeto a ser medido. O número fracionário surge, então, da necessidade de dividir a unidade escolhida, para que a medição se concretize.

Os egípcios antigos empregavam os nomes de partes do corpo para nomear suas unidades de medida de comprimento, sendo a principal o *cúbito* (52,3 cm) que era dividido em sete *palmos* que, por sua vez, era dividido em quatro *dedos*. Utilizavam, também, a unidade *khet* para representar 100 cúbitos e, neste caso, 1 cúbito corresponderia a 1/100 do khet.[1]

Na China antiga, identificamos, já no século II a.C. nos *"Nove capítulos sobre os procedimentos matemáticos"*, a presença de unidades utilizadas, geralmente, para medir tecidos, como o *pi* que equivale a 4 *zhang* que, por sua vez, equivale a 10 *chi*. Em alguns problemas, relacionados à medição de seda, encontra-se ainda a unidade *jin* que corresponde a 16 *liang* que, por sua vez, equivale a 24 *zhu*. Para medições de terras, utilizavam o *bu* para comprimentos e o *mu* para áreas que corresponde a 240 bu (quadrados) além do *ging* que equivale a 100 mu.

Nota-se que o estabelecimento de unidades para medições fez emergir a criação de tabelas de conversões, tanto para as unidades e suas subunidades como para unidades diferentes, necessárias principalmente nas relações comerciais.

No início da obra *Lilavati* de Bhaskara (nascido na Índia em 1114), uma tabela para conversão de algumas unidades de medidas de comprimento como a *angula* (digito) que corresponde a oito *yavodaras*, uma *hasta* (cúbito) que são quatro vezes seis *angulas*, a *danda* (vara) que equivale a quatro *hastas* e a *krosa* que corresponde a duzentas *hastas*, entre outras.

Nessa mesma época, na Inglaterra, o rei Henrique I oficializava a *jarda* como padrão de medida de comprimento, porque era uma unidade amplamente utilizada por alfaiates para medir tecido que corresponde a distância da ponta do nariz ao polegar do rei com o braço esticado. Algumas subunidades da *jarda*, foram estabelecidas e tornaram-se obrigatórias para medições de comprimentos: 1 *milha terrestre* a 1760 jardas, 1 *jarda* equivale a 3 pés e 1 *pé* equivale a 12 *polegadas*, ainda utilizadas atualmente.

No ano de 1590, foi criada a *Aula da Esfera*, no Collégio da Companhia de Jesus de Santo Antão, em Portugal que, segundo Valente (2002) era direcionada à formação de pilotos do mar.

Com o passar do tempo esse curso deixando de ser um curso prático, passa a oferecer o ensino de Matemática. Em fragmentos de apostilas, manuscritas pelo Padre Gonzaga, professor da *Aula da Esfera* a partir de 1700, encontramos a *scala mensoria* que trata das unidades de medidas dos antigos romanos, gregos, hebreus, árabes e modernos.

1 Os problemas apresentados nesta parte do trabalho, que não apresentam referência específica, foram retirados do site http://www.malhatlantica.pt.mathis/ acessada em 16/06/2004.

No Brasil, o *Exame de Artilheiros* de 1744 e o *Exame de Bombeiros* de 1748, considerados os primeiros livros didáticos brasileiros e ambos escritos por Alpoim, eram estruturados por meio de perguntas e respostas. Neles, alguns exemplos de números fracionários são apresentados baseados na conversão de unidades do antigo sistema de medidas como, por exemplo:

> 68. Querendo reduzir arrobas a arratéis, como cada arroba tem 32 arratéis, multiplicaremos o número das arrobas, por 32 arratéis e temos reduzido; como quero reduzir 6 arrobas a arratéis, multiplicando 6 por 32, produz 192 arratéis e tantos tem 6 arrobas.
> 69. Pode-se reduzir uma grandeza inteira a quebrado de um certo nome, por exemplo, temos a grandeza inteira 4, que queremos reduzir a quebrado, que tenha o nome 6; multiplicando 4 por 6, o produto 24 será o numerador e o denominador 6, como se pedia, desta sorte 24/6. Esta grandeza reduzida a quebrado fica sempre com o mesmo valor, 24/6 é igual a 4 inteiros. (VALENTE, 2002, p. 52-53)

Podemos supor que necessidades sociais provocaram a exigência de medir grandezas contínuas que, por sua vez, fez emergir o objeto matemático: números fracionários com a concepção de medida.

Assim, as tarefas de medições eram resolvidas pela escolha de uma unidade de medida e sua divisão em subunidades, mas, para que essa técnica se tornasse rotineira foi necessário a criação de tabelas que relacionassem, tanto as subunidades de uma determinada unidade como unidades diferentes para uma mesma grandeza.

Tendo em vista a necessidade do fracionamento da unidade de medida, emergiu naturalmente a concepção *parte-todo*, pois a unidade que será utilizada deve ser dividida em partes de mesma medida para garantir a realização do ato de medir.

Por outro lado, visto que se colocam paralelamente, desde a Antiguidade, as necessidades de medir e registrar, por meio da escrita os resultados dessas medições, estudaremos, a seguir, o desenvolvimento dessas representações escritas, em algumas sociedades antigas.

2.1.1 Egito

Embora o sistema de numeração egípcio fosse de base 10, com símbolos distintos para as potências de 10, foi desenvolvido para registrar os novos números, um sistema de representações fracionárias unitárias e toda uma aritmética para calcular com tais números.

Desse modo, os números 1/2, 1/3, 1/4 e 2/3 tinham símbolos especiais e aos outros colocavam, inicialmente, uma pequena elipse (que significava parte), acima do símbolo de um número natural utilizado como denominador. Com o tempo, a elipse transformou-se em um ponto e com os símbolos numéricos atuais, por exemplo, 1/5 seria representado por $\dot{5}$. Os registros encontrados nos papiros não justificam a escolha por tais representações.

Para os egípcios, não existia um símbolo para o número 2/5, por exemplo, para representá-lo utilizavam a soma 1/3 + 1/15, o que obrigava o desenvolvimento de uma técnica para o cálculo da soma de fracionários unitários.

Provavelmente, para tornar essa tarefa rotineira, encontramos no papiro de Rhind (1600 a.C.) uma tabela que apresenta a decomposição em fracionários unitários de números do tipo n/10, com n variando de 1 a 9, representada no Quadro 2.

Quadro 2 – conversão egípcia de números do tipo n/10 em soma de fracionários unitários.

n	n/10	n	n/10
1	1/10	6	1/2 + 1/10
2	1/5	7	2/3 + 1/30
3	1/5 + 1/10	8	2/3 + 1/10 + 1/30
4	1/5 + 1/5	9	2/3 + 1/5 + 1/30
5	1/2		

Outra tabela encontrada no papiro de Rhind, representada em parte no Quadro 3, é para números do tipo 2/n, com denominador ímpar entre 5 e 101.

Quadro 3 – conversão egípcia de números do tipo 2/n em fracionários unitários.

n	2/n	n	2/n
5	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	17	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$
7	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	19	$\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$
9	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$	21	$\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$

(continua)

Quadro 3 – conversão egípcia de números do tipo 2/n em fracionários unitários. *(continuação)*

n	2/n	n	2/n
11	$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$	23	$\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$
13	$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$	25	$\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$
15	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$	27	$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$

De acordo com Struick (1997), essa representação egípcia foi utilizada por séculos e pode ser encontrada ainda na *Métrica* de Heron (100 d.C. aproximadamente), em que uma aproximação para $\sqrt{63}$ é representada por $7+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$. Já para Eves (2004), no papiro de Ackmin (uma cidade junto ao rio Nilo) escrito entre 500 e 800 d. C., aparece um algoritmo para se obter a decomposição em fracionários unitários: $\frac{z}{pq}=\frac{1}{pr}+\frac{1}{qr}$, em que $r=\frac{p+q}{z}$ (p. 82). A preferência por representações fracionárias unitárias, segundo Struik (1997) persistiu até a Idade Média, quando Fibonacci a utilizou em seu *Líber Abaci* de 1202.

2.1.2 Babilônia

Partindo de um sistema de numeração posicional de base 60, em sua escrita cuneiforme, os babilônios criaram um sistema posicional ambíguo para representar os números fracionários, pois o símbolo , por exemplo, poderia representar $1 \times 60 + 30$ ou $1 + \frac{30}{60}$. Tudo leva a crer que a utilização de números fracionários, pelos babilônios, deveria ser frequente, porque aparece diversas vezes no Código de Hamurabi (1694 a.C.) em algumas leis, como valores de multas:

> 29. Se seu filho for muito jovem e não puder tomar posse, 1/3 do campo e jardim deverá ser dado à sua mãe, que deverá educar o menino
> 276. Se alguém alugar um navio de frete, ele deverá pagar 2 1/2 gerahs por dia.
> 277. Se alguém alugar um navio de sessenta gur, ele deverá pagar 1/6 de shekel em dinheiro de aluguel por dia[2].

2 Retirado do site: http://www.geocities.com/CollegePark/Quad/8357/hamurabi.htm acessado em 16/06/2004.

Estas representações, de alguma forma, revelaram-se mais apropriada para alguns estudos como, por exemplo, a astronomia. Em *O Almagesto*, do ano 150, Ptolomeu de Alexandria explicita sua preferência pela representação fracionária sexagesimal em detrimento da representação para fracionários utilizada pelos gregos.

2.1.3 China

Os chineses usavam nove dígitos diferentes para representar os números de um a nove e outros para representar os nove primeiros múltiplos de dez, em seu sistema de "numerais em barra". Com base nesses 18 símbolos alternadamente, em posições contadas da direita para a esquerda, escreviam números tão "grandes" quanto desejassem.

Os "numerais de barra" de 300 a.C. não eram apenas uma notação para escrever o resultado de um cálculo, mas verdadeiras barras de bambu, marfim ou ferro carregadas em uma sacola pelos administradores para auxiliarem nos cálculos. "*Na numeração de barras, a escrita do número 12* | || *podia ser confundida com a de 3 ou de 21, a de 25* || |||||, *com a de 7, 34, 43, 52, 214 ou 223, além da confusão pela ausência de um sinal especialmente concebido para o zero*" (IFRAH, 1997, p. 581).

Posteriormente, desenvolveram uma escrita decimal utilizada, em especial, para pesos e medidas, representada por números fracionários. Para Boyer:

> Nenhuma descrição da numeração chinesa seria completa sem uma referência ao uso de frações. Os chineses conheciam as operações sobre frações comuns, para as quais achavam o mínimo denominador comum. Como em outros contextos, viam analogias com as diferenças entre os sexos, referindo-se ao numerador como "filho" e ao denominador como "mãe". [...] também na china a adesão à ideia decimal em pesos e medidas teve como resultado um hábito decimal no tratamento de frações que pode ser encontrado já no século quatorze a.C. (BOYER, 1974, p. 145-146)

2.1.4 Grécia

Os gregos utilizavam os números fracionários em tratados teóricos e demonstrações que aparecem inseridas em textos matemáticos de cálculos e em documentos da prática como: declaração de propriedade, cálculos e registros de câmbio de moedas, taxas, realizações da arquitetura, etc.

Representavam os números por um sistema alfabético de base 10, para os números fracionários colocavam um pequeno traço vertical ao alto e à direita dos símbolos dos números inteiros que representava o denominador de fracionários unitários.

Os fracionários não unitários eram representados pelo numerador seguido do denominador acentuado. Posteriormente, os números fracionários passaram a ser escritos de maneira mais próxima à notação moderna – um numeral sobre o outro – com o denominador na parte superior e, geralmente, sem nenhum traço entre numerador e denominador, conforme Gundlach (1992).

Segundo Boyer (1974, p. 41) da mesma forma que os egípcios, os gregos sentiram-se tentados a usar *frações unitárias*, mas passam a utilizar a representação fracionária sexagesimal, sobretudo em tabelas astronômicas.

2.1.5 Índia

Há indícios do sistema posicional de base 10 na obra de Aryabhata (n. 476) quando diz: *"de lugar para lugar cada um vale dez vezes o precedente"*, embora não se saiba exatamente como efetuava seus cálculos (Boyer, 1974, p. 144). Mas, para Struik (1997), a referência mais antiga ao sistema de valor de posição dos hindus, fora da Índia, encontra-se em um trabalho de 662, escrito pelo bispo sírio Severus Sebokt.

No século IX, Al-Khwarizmi (entre 780-830 a 850) introduziu, em seu Tratado de Aritmética, os nove símbolos indianos para representar os algarismos e um círculo para representar o zero, explicando como escrever um número no sistema decimal de posição utilizando esses símbolos. Alguns séculos depois, Bhaskara (1114 – cerca de 1185) também trata do sistema de numeração indiano nos primeiros versos de seu livro Lilavati.

No entanto, conforme Ifrah (1989) cita, por causa de suas notações, os antigos, não foram capazes nem de unificar a noção de fração, nem de construir um sistema coerente para suas unidades de medida.

2.1.6 Europa

Na Europa, onde os algarismos romanos predominavam, foi lenta e gradativa a aceitação do sistema de escrita posicional de base 10, com os símbolos indianos. A primeira referência a tal sistema é creditada a Leonardo de Pisa (cerca de 1180 a 1250), conhecido como Fibonacci, em seu livro *Líber Abaci* de 1202, no qual apresentava tanto a escrita fracionária quanto a terminologia que utilizamos atualmente.

Quando, acima de um número qualquer aparecer uma barra (uirgula), e, acima dessa, for escrito outro número qualquer – o número superior está para o inferior – , o inferior é chamado denominador, e o superior, numerador.

Nominan Denominatus	Numeratore Denominatore
Latim	Italiano

Numerum (número) nominator (superior) Numerum (número) denominante (inferior)
Latim

Figura 2 – *Liber Abbaci* de Leonardo de Pisa (1202)[3].

Mesmo, considerado o mais produtivo matemático do século XIII, segundo Boyer (1974), Fibonacci preferia a representação fracionária unitária, pois em seu *Liber Abaci* que serviu de modelo a praticamente todas as aritméticas comerciais das épocas medieval e renascentista, apresentava tabelas de conversões *de frações comuns* para unitárias.

> Um estranho capricho de sua notação levou-o a exprimir a soma de 1/5, 3/4 e 1/10 2/9 como $\frac{1\ \ 6\ \ 2}{2\ \ 9\ \ 10}1$, a notação $\frac{1\ \ 6\ \ 2}{2\ \ 9\ \ 10}1$, significando nesse caso: $\frac{1}{2\cdot 9\cdot 10}+\frac{6}{9\cdot 10}+\frac{2}{10}$. É uma das ironias da história que a vantagem principal da notação posicional – sua aplicabilidade a frações – escapasse quase completamente aos que usavam os numerais indo-arábicos durante os primeiros mil anos de sua existência. [...] Fibonacci [...] usou três tipos de frações – comuns, sexagesimais e unitárias – mas não frações decimais. Usou muito as comuns e as unitárias. (BOYER, 1974, p. 185)

Em 1579, Vietè utilizava uma barra vertical para separar a parte inteira da fracionária e recomendava a representação de fracionários decimais no lugar dos sexagesimais. Em 1585, Simon Stevin, para representar décimos, centésimos, milésimos, etc. colocava em um círculo, acima ou depois de cada dígito, a potência de dez assumida como divisor e recomendava o sistema posicional decimal, tanto aos números fracionários como aos inteiros.

Embora os europeus utilizassem os símbolos indianos para registrar o numerador e o denominador de números fracionários, o sistema posicional decimal

3 Em http://www.prandiano.com.br acessado em 10/06/2004.

não justifica a escrita do número fracionário, propriamente dito, pois este é um número escrito por dois números.

Conforme Struik (1997), ainda no século XVI o sistema decimal posicional não se estendia aos números fracionários, pois em tabelas astronômicas e trigonométricas os autores limitavam-se aos inteiros escrevendo 1,753 como 1753 em termos de mil como unidade.

O uso de uma vírgula decimal como separatriz é atribuído, tanto ao cartógrafo G. A. Magim (1555-1617) em seu *De planis triangulis* de 1592 quanto ao jesuita Cristoph Clavius (1537-1612) que a utilizou em uma tabela de senos de 1593. O ponto decimal tornou-se realmente popular quando Napier o usou mais de vinte anos depois no desenvolvimento dos logaritmos, tornando-se padrão na Inglaterra a partir de 1619, de acordo com Boyer (1974).

Entendemos que a necessidade de administração do estado foi o que, provavelmente, propôs a tarefa de medir grandezas, bem como a de registrar os resultados dessas medições que, na maioria das vezes, se tratava de medir quantidades de terra, para que pudessem ser tributadas. A primeira foi resolvida a partir da determinação de unidades e subunidades de medidas. Mas, a segunda, da escrita dos fracionários resultantes das medições, nem sempre foi cumprida de maneira satisfatória, embora geralmente, se justifique pelo sistema de escrita dos números desenvolvidos em cada sociedade.

Em consequência, à medida que as tarefas de medições e os registros e cálculos de seus resultados tornaram-se rotineiros e mais necessários, tiveram que migrar para instituições de ensino, para que outros pudessem aprender a resolver tais tarefas. Isso ocorre desde a Antiguidade, fazendo com que as técnicas de medições e a escrita e cálculos de seus resultados percorra outro caminho que não o da prática.

Assim, na sequência de nosso estudo epistemológico identificamos tarefas que associam as concepções de números fracionários, bem como as técnicas desenvolvidas para cumpri-las.

2.2 Consequências da emergência da concepção de medida

O ensino, provavelmente, impôs a necessidade de elaborar, além das tabelas egípcias já vistas, situações que associassem a concepção de medida, para a aprendizagem de cálculos com os resultados de medições, além da busca de generalizações para cálculos de medidas como áreas e volumes. Nesse sentido, dois tipos de tarefas sobressaem-se: a solicitação do cálculo propriamente dito e a procura de valores desconhecidos.

2.2.1 Cálculo com números fracionários

Uma das primeiras consequências das medições e do registro de seus resultados foi a necessidade de se efetuar cálculos com tais resultados. Na aritmética egípcia:

> A redução à soma de frações unitárias era possível através de tabelas, que davam a decomposição de frações da forma 2/n – a única decomposição necessária por causa da multiplicação diádica. [...] O principio [...] não é claro (por exemplo quando n = 19, a redução é $\overline{12}$, $\overline{76}$, $\overline{114}$ e não $\overline{12}$, $\overline{57}$, $\overline{128}$?). Este cálculo com fracções deu à matemática egípcia um carácter complicado e pesado, mas apesar destas desvantagens, a maneira de operar com fracções unitárias foi praticada durante milhares de anos, não só no período grego, mas também na Idade Média. (STRUIK, 1997, p. 53)

Quanto à divisão envolvendo fracionários, Boyer (1974) discute o problema 70, do papiro de Rhind, que pede a divisão de 100 por 7 + 1/2 + 1/4 + 1/8 e apresenta como resultado 12 + 2/3 + 1/42 + 1/126, afirmando que tal resultado é obtido pela técnica da duplicação sucessiva do divisor. Primeiro obtemos 15 + 1/2 + 1/4, depois 31 + 1/2 e, finalmente, 63 que é 8 vezes o divisor. Mas, como dois terços do divisor dão 5 + 1/4, o divisor quando multiplicado por 8 + 4 + 2/3 dará 99 3/4 faltando 1/4 para o produto 100, que se deseja. Para Boyer, este foi um ajuste inteligente, pois, como 8 vezes o divisor dá 63, resulta que o divisor quando multiplicado por 2/63 produzirá 1/4. Da tabela para 2/n, sabe-se que 2/63 é 1/42 + 1/126; portanto, o quociente procurado é 12 + 2/3 + 1/42 + 1/126.

Para a multiplicação, os egípcios utilizavam duas técnicas. Mostraremos aqui a conhecida por método direto, que consiste em fazer a distributiva da primeira expressão pela segunda e, em seguida, a adição como, no exemplo:

> Problema do Papiro de Rhind, Egito, 1600 a.C.[4]
> Multiplicar a fração 1/2 + 1/14 por 1 + 1/2 + 1/4
> Resolução: Para multiplicar 1/2 + 1/14 por 1 + 1/2 + 1/4 o escriba multiplica cada fração da primeira expressão por cada uma da segunda.

1	1/2 1/14
1/2	1/4 1/28
¼	1/8 1/56
1 1/2 1/4	1/2 1/4 1/8 1/14 1/28 1/56

> Como 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/14 + 1/28 + 1/56 = 1, o produto da multiplicação inicial é 1. O método utilizado para somar é o seguinte: soma-se

4 Anotações baseadas em http://www.malhatlantica.pt/mathis/ acessado em 16/06/2004.

> 1/14+1/28+1/56 (= 1/8) e logo a soma inicial fica reduzida a 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/8. Depois, utilizando o método da redução temos: 1 1/4 1/8 1/8 = 1/2 1/4 1/4 = 1/2 1/2 = 1.

Na subtração de um número fracionário de uma unidade, escolhem um número adequado na realidade, um múltiplo dos denominadores e trabalham com a equivalência de frações, como podemos perceber no exemplo dado a seguir.

> Problema do Papiro de Rhind, Egito, 1600 a.C.
> Qual a quantidade que falta a 2/3 +1/15 para obter a unidade.
> Resolução: Ahmes toma como número vermelho o 15 (simplificando) e aplica
> 2/3 de 15 é igual a 10
> 1/15 de 15 é igual a 1
> Então temos que 2/3 de 15 mais 1/15 de 15 é 11. Como 15, o número vermelho, supera 11 em quatro unidades temos que calcular o número de partes de 15 que dá um total de 4, ou seja, dividir 4 por 15.
>
> | | |
> |---|---|
> | 1 | 15 |
> | 1/10 | 1 1/2 |
> | 1/5 | 3 |
> | 1/15 | 1 |
> | …… | |
> | 1/5 1/15 | 4 |
>
> A quantidade que falta é 1/5 1/15.

Nessas técnicas, notamos a associação da concepção de operador e de quociente e que a opção dos egípcios por representações fracionárias unitárias foi um complicador para a realização de cálculos com números fracionários. Por outro lado, sua utilização por um tempo tão longo mostra a dificuldade para encontrar uma notação fracionária mais adequada para o cálculo com esses números. As tarefas que pedem o cálculo com números fracionários, aparecem na Antiguidade em situações, de acordo com necessidades particulares de cada povo. Por exemplo, os chineses enfatizam as tarefas relacionadas com medições de terra, enquanto os mesopotâmios, as relacionadas com problemas de construção.

> Entre 2000 e 1700 a.C., Mesopotâmia.
> Uma parede. A largura é 2 cúbitos, o comprimento é 2,5 nindan[5], a altura 1,5 nindan. Quantos tijolos?

5 Um nindam equivale a 12 cúbitos (unidade de medida de comprimento).

Resolução: Multiplica 2 cúbitos, a largura, por 2,5 nindan, o comprimento. Verás 5/12 (a área). Multiplica 5/12 por 18, a altura. Verás 7,5 (7,5 sar de volume). Multiplica 7,5 por 6, o coeficiente da parede. Verás 45. Os tijolos são 45 sar_b[6]. O método.

Não podemos esquecer que, na época em que essas tarefas foram elaboradas, os fracionários não eram considerados números, mas sim, uma razão ou relação entre inteiros e que, tal quadro, permaneceu até a definição de números racionais como par de inteiros e classes de equivalência. Durante tal percurso, Aryabatha, em seu tratado de matemática de 499, apresenta todas as operações com números fracionários, calculando a adição e subtração após a redução ao mesmo denominador.

Cem anos depois, aproximadamente, Brahmagupta enuncia a divisão de fracionários: *"depois de ter invertido o denominador e o numerador do divisor, o denominador do dividendo é multiplicado pelo (novo) denominador e seu numerador pelo (novo) numerador"*. (Boyer, 1974, p. 144), o que já mostra a presença de um discurso tecnológico-teórico para a divisão de fracionários que se tornará explícito e formal só muito tempo depois.

O interesse em tornar rotineira a execução de cálculos com fracionários, isto é, encontrar técnicas práticas para esses cálculos fez com que, provavelmente, tenha surgido outro tipo de tarefa que propõe a procura de um valor fracionário desconhecido, que já apresentam os germes do cálculo algébrico.

2.2.2 Cálculo de valores desconhecidos

Tarefas desse tipo podem ser identificadas desde as tábuas babilônias, passando pelos papiros egípcios, pelos Nove Capítulos chineses, pelas obras de Aryabhata (499), de Alcuíno de York (782), de Bhaskara (1150), de Fibonacci (1202) até nossos dias. Os exemplos, a seguir, mostram tarefas que solicitam a procura de um valor desconhecido acompanhadas das equações do primeiro grau que as representariam em notações atuais.

1600 a.C., Egito, Papiro de Rhind (24)
Uma quantidade, 1/7 desta adicionada a esta, fica: 19.
Solução: 16 + ½ + 1/8

Equação: $x+\frac{1}{7}x=19$

6 4 1/6 $nindan^3$ equivale a 250 sar_b que por sua vez equivale a 2,5 iku_b.

1600 a.C., Egito, Papiro de Rhind (31)
A quantidade, os seus 2/3, a sua 1/2 e o seu 1/7, adicionadas, dão 33. Qual é a quantidade?
Solução: 14 +1/4 + 1/56 + 1/97 + 1/194 + 1/388 + 1/679 + 1/776
O escriba resolve o problema dividindo 33 por 1 + 2/3 + 1/2 + 1/7.

Equação: $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=33$

499, Índia, Aryabhata
Ó, bela donzela com olhos radiantes, diz-me, uma vez que compreendes o método da inversão, qual é o número que multiplicado por 3, aumentado por ¾ do produto, dividido por 7, reduzido em um terço do resultado, depois multiplicado por ele próprio, depois reduzido de 52, cuja raiz quadrada é então extraída antes de ser adicionado 8 e dividido por 10, dá o resultado final 2?

Equação: $\left(\sqrt{\left\{\left[\left(3x+\frac{3}{4}\times 3x\right)\div 7\right]\times\frac{1}{3}\right\}^2-52}+8\right)\div 10=2.$

Para resolver tal tipo de tarefa, identificamos três técnicas que associam sobretudo a concepção de operador:

2.2.2.1 Método da falsa posição

Esta técnica foi muito utilizada e consiste em supor um valor específico, provavelmente, falso para assumir o valor desconhecido. A primeira tarefa com equação $x+\frac{1}{7}x=19$, seria resolvida supondo que o valor de x é 7, por exemplo. Nesse caso, $x+\frac{1}{7}x$ dá 8, em vez de 19, como pede o problema. De acordo com Boyer (1974) a proporção utilizada para comparar esses resultados, hoje representada por $\frac{7}{8}=\frac{x}{19}$, encaminha à percepção de que como $8\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=19$ deve-se multiplicar 7 por $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ para obter a resposta: $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$.

2.2.2.2 Método da divisão

Esta técnica consiste em "fatorar a equação" e fazer uma divisão. O exemplo do papiro de Rhind, representado pela equação $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=33$ seria então, resolvido pela divisão de 33 por 1 + 2/3 + 1/2 + 1/7.

Essas técnicas como ações para cálculos com números fracionários tornaram-se obsoletas e foram substituídas por regras operatórias próprias para números fracionários. No entanto, visto que as situações são essencialmente de natureza algébrica, percebemos, por trás de tais técnicas, o embrião do discurso tecnológico-teórico das equações de primeiro grau que só viria a ser desenvolvido, explícita e formalmente, séculos depois com base no tratado de álgebra de Al-Khwarizmi, por volta de 830.

2.2.2.3 Método da inversão

Este método consiste em partir do final do problema e voltar a seu enunciado, aplicando as operações inversas às citadas. Na tarefa de Aryabatha, vemos o método explicitado em seu enunciado. Nesse caso, iniciando com o número 2 e operando para trás, obtemos $[(2)(10) - 8]^2 + 52 = 196$, como $\sqrt{196} = 14$, temos $(14)(3/2)(7)(4/7)/3 = 28$ que é a resposta. Para Eves (2004), a substituição de cada operação por sua inversa responde pelo nome inversão.

O método da inversão, no entanto, ainda pode ser encontrado no livro de Matemática de Osvaldo Sangiorgi, como resolução de um problema, apresentado apenas com números naturais, que teria como objetivo, provávelmente, o trato com esses números:

> (SANGIORGI, 1960, 1ª série ginasial, p. 62)
> Pensei em um certo número, a seguir acrescentei 7 a esse número e multipliquei o resultado por 4. Subtrai depois 6 e obtive o número 310. Que número pensei?
> Basta, para resolver o problema, partir do resultado encontrado 310 e fazer as operações inversas das que foram indicadas.
> Assim: $310 + 6 = 316$; $316 : 4 = 79$; $79 - 7 = 72$
> Logo: o número pensado foi 72.
> Prova: 72; $72 + 7 = 79$; $79 \times 4 = 316$; $316 - 6 = 310$.
> Equação: $[(x + 7)\times 4] - 6 = 310$

Mas, a tarefa de calcular com números fracionários, a partir da procura de valores desconhecidos, reserva outras facetas: uma delas é a que apresenta o despontar das equações de segundo grau, a partir do Teorema de Pitágoras que podem ser identificadas desde a Mesopotâmia, em tarefas que pedem a mobilização da concepção de medida para números fracionários:

> Entre 1650 e 1200 a.C., Mesopotâmia (9).
> Uma trave de comprimento 0,5 GAR está encostada a uma parede. O seu topo está 0,1 Gar abaixo do que deveria estar se estivesse perfeitamente direita.
> A que distância da parede está a sua parte de baixo?

<u>Resolução</u>: Faz o seguinte: quadra 0,5, obtendo 0,25. Subtrai 0,1 de 0,5 fica 0,4. Quadra 0,4 obtendo 0,16. Subtrai 0,16 de [0,25], ficando 0,09. Qual é a raiz quadrada de 0,09? A parte de baixo está a [0,3] da parede. Quando a parte de baixo está a 0,3 da parede, que distância é que o topo escorregou para baixo? Quadra 0,3, obtendo 0,09.
Nota: Este é um dos primeiros problemas envolvendo o teorema de Pitágoras.
1519, Europa, Gaspar Nicolas.
É uma árvore de 50 braças e está ao pé de um rio de 30 braças de largura e esta árvore quebrou por tal altura que foi a ponta além da borda do rio. Demando: por onde quebrou?

Figura 3 – Imagem do livro de Gaspar de Nicolas para teorema de Pitágoras.

Atualmente, encontramos problemas desse tipo nos livros didáticos, como a aplicação do Teorema de Pitágoras. Mas, a princípio a resolução resumia-se à procura do que chamamos hoje ternas pitagóricas.

Na tábua 322, dos babilônios, aparecem colunas ordenadas de listas de números que parecem se ajustar a lados de triângulos retângulos, visto que estão ordenados, segundo a expressão a/b, hoje, secante do ângulo C em um triângulo retângulo em A e de catetos medindo b e c. Não existe nada parecido com a medida de ângulos, o que leva a crer que seguiram critérios baseados em proporcionalidade de segmentos.[7]

A técnica de procura dessas ternas, fundamentada na prática, ainda não é justificada por um discurso tecnológico-teórico explícito e formal que incluiria o teorema de Pitágoras, embora já possa ser percebido com os chineses quando explicitam tal teorema pelo nome de *regra Gougu* com o seguinte enunciando:

7 Anotações baseadas em http://descartes.cnice.mecd.es/taller_de_matematicas/, acessado em 16/06/2004.

> Adiciona o quadrado do *gou* e do *gu*, tira a raiz quadrada [da soma] dando a *xian* [hipotenusa]. Para eles gou corresponde, normalmente, ao cateto menor do triângulo retângulo e gu ao maior.[8]

Uma outra faceta desse tipo de tarefa é procurar mais que um valor desconhecido em tarefas que pedem a mobilização da concepção de medida para números fracionários com base na resolução de equações de segundo grau, como as seguintes:

> Entre 2000 a 1600 a.C., Mesopotâmia.
> Adicionei onze vezes o lado do meu quadrado à sua área, obtive 25/4.
> Resolução: Multiplique 25/4 por 11, obtém 275/4. Parta 7 ao meio. Multiplique 7/2 por 7/2. Adicione 49/4 com 275/4, resultado 81. Este é o quadrado de 9. Subtraia 7/2, que multiplicou, de 9; resultado 11/2. O recíproco de 11 não pode ser encontrado. Por quanto devo multiplicar 11 para obter 11/2? Obtenho 1/2. O lado do quadrado é 1/2.
>
> Equação: $x^2 + 11x = \frac{25}{4}$
>
> 830, Al-Khwarizmi, árabe.
> Dividi dez em duas partes e dividi a primeira pela segunda e a segunda pela primeira e a soma dos quocientes é 2+1/6. Descobri as partes.
>
> Equações: $x + y = 10$ e $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 + \frac{1}{6}$.

Essas tarefas de natureza algébrica, provavelmente, tinham como objetivo tornar rotineira a tarefa do cálculo com fracionários baseadas em técnicas que mais tarde receberiam o nome de resolução de equações do segundo grau.

A concepção de medida para fracionários predomina nesses tipos de tarefas até o surgimento das notações algébricas, que permitirão a utilização de letras para representar tais valores desconhecidos, fazendo com que essas tarefas migrem para o campo algébrico.

Pode ser observado que tarefas desses tipos associam também a concepção de operador, isto é, a ideia de um número fracionário transformando grandezas contínuas ou discretas:

---

8 Os problemas desta parte do trabalho, sem referência, foram retirados do site http://www.malhatlantica.pt.mathis/ acessada em 16/06/2004.

> 1202, Europa, Líber Abaci de Fibonacci (11).
> Um certo jovem viveu alguns anos; se viver tanto como já viveu, e de novo a mesma quantidade de anos, e 1/4 e 1/3 dos anos que já viveu, e mais um ano, ele terá vivido 100 anos.

Outro ponto observado que merece ser mencionado, independente de tratar de fracionários é o fato de o ensino tratar de situações artificiais, fora da realidade. O mais antigo que encontramos, é o seguinte:

> Entre 1800 a 1600 a.C., Mesopotâmia.
> Encontrei uma pedra, mas não a pesei. Depois somei-lhe a sétima parte do seu peso e depois a décima primeira parte desse novo peso. Pesei o total: 1 *mana*. Qual é o peso original da pedra?
> Solução: O peso da pedra era 2/3 *mana* 8 *gin* 22 1/2 *še*[9].
>
> Equação: $\frac{1}{7}x+\frac{1}{11}\times\frac{1}{7}x=1$

Provavelmente, esse problema ocorra na transposição da tarefa da instituição de origem (administração do estado) para a instituição de ensino (formação de escribas) e pode ser observado até hoje em livros didáticos. Nossa suposição é reforçada por Miorim quando afirma que:

> Essas situações-problema, consideradas concretas por muitos autores, apresentam muitas vezes elementos improváveis para uma situação real. Isso pode indicar que o mais importante era o treino do algoritmo, ou melhor, o treino dos passos a serem seguidos para a obtenção da solução de um determinado tipo de problema, e não a sua concretude. (MIORIM, 1998, p. 11)

2.2.3 Evolução do discurso tecnológico-teórico para técnicas de medidas

Tarefas que solicitam a medição de áreas, volumes, capacidades, ... encaminham o aperfeiçoamento de técnicas para o cálculo de tais medidas buscando possíveis generalizações. Identificamos técnicas para o cálculo de medida da área de triângulos, trapézios, círculos, etc. em muitas situações, entre elas:

> Entre 200 e 100 a.C., China, Nove Capítulos (26).
> Tarefa 2: Dado um outro terreno triangular, com base 5 1/2 bu e altura 8 2/3 bu . Diz: qual é a área?

---

9 Um mana equivale a 60 gin, 1 gin equivale a 180 še.

Solução: 23 5/6 bu quadrados
Regra para terrenos triangulares: Multiplica metade da base pela altura.

1600 a.C., Egito, Papiro de Rhind (52)
Qual é a área de um triângulo truncado de 20 khet de lado, 6 khet de base e 4 khet de linha de secção?
Resolução: Ahmes resolve da seguinte maneira: soma a base do triângulo linha de secção, obtendo o valor 10. Para obter um retângulo, divide 10 por 2 obtendo 5. Em seguida, multiplica 5 por 20 e obtém a área desejada: 100.

De acordo com Boyer (1974) a regra egípcia para calcular a medida da área de uma superfície circular é considerada um dos maiores sucessos da época. A medida da área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado de 8 unidades, o que supõe para p uma aproximação de 3 + 1/6.

O autor afirma ainda que na resolução do problema 48 do Papiro de Rhind, Ahmes calcula a área de um círculo inscrito em um quadrado, aproximando-a pela área do octógono, conforme a Figura 4, que permite considerar para $\frac{\pi}{4}$ uma aproximação de $\frac{64}{81}$.

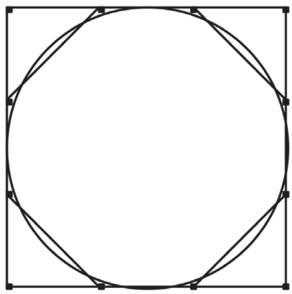


Figura 4 – Figura suporte para o cálculo aproximado da área de um círculo.

Identificamos, também, o embrião da fórmula para o cálculo da medida de volumes de um tronco de pirâmide já nos egípcios:

1890 a.C., Egito, Papiro de Moscou.
Se te é dito, um tronco de pirâmide tem 6 cúbitos de altura, 4 cúbitos de base, por 2 cúbitos no topo.
Resolução: Calcula com este 4, quadrando. Resultado 16. Dobra este 4. Resultado 8.
Calcula com este 2, quadrando. Resultado 4.

> Adiciona este 16 com este 8 e com este 4. Resultado 28. Calcula 1/3 de 6. Resultado 2.
> Calcula o dobro de 28. Resultado 56.
> É 56. Encontraste o resultado certo.[10]

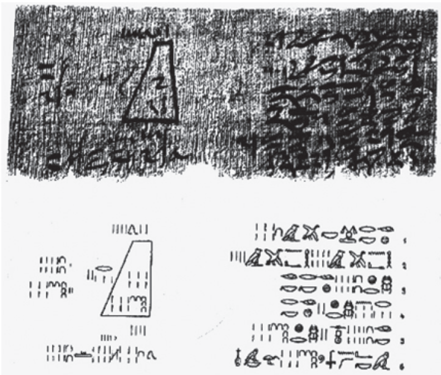


Figura 5 – Imagem do papiro de Moscou para um tronco de pirâmide.

Boyer (1974, p. 14) afirma que a medida do volume, nesse problema, foi calculada, de acordo com a fórmula moderna $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ sendo h a medida da altura e a e b as medidas das bases. Essa fórmula embora não apareça explicitamente, já era conhecida e utilizada pelos egípcios.

Outros problemas desse tipo podem ser encontrados como o cálculo do volume de um cilindro ou de um tronco de cone, entre outros.

Arquimedes, no livro do Método, afirma que Demócrito I, que viveu no fim no século V a.C., foi o primeiro a enunciar que o volume de um cone é 1/3 do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura, o que foi demonstrado por Eudoxo (409 a 356 a.C.) pelo método da exaustão.

Entretanto, é atribuída a Demócrito a demonstração de que o volume da pirâmide é igual a 1/3 da medida da área da base multiplicada pela medida da altura, embora este procedimento seja utilizado desde os egípcios.

Quando se analisam essas tarefas, entende-se a afirmação de Valente:

> Os cálculos numéricos imensos, contas e mais contas são uma imposição da prática para quem quer que seja. O antigo sistema de medidas está diretamente relacionado a isso. Um sistema complicadíssimo de unidades de medidas de difícil conversão. […] O cálculo, a conversão de unidades, a obtenção de montantes são uma necessidade fundamental dentro dessa realidade. (VALENTE, 2002, p. 82)

---

10 Imagem retirada do site http://www.matematica.br/historia/ acessado em 16/06/2004.

Com o passar do tempo, percebemos que tanto os tipos de tarefas que associam a concepção de medida como o estudo de sistemas de medidas e tabelas de conversões conquistaram um lugar próprio no ensino que permanece até hoje nos livros didáticos, ao passo que a representação fracionária de medidas é abandonada, quase completamente, para dar lugar à representação decimal.

A mobilização da concepção *parte-todo* de números fracionários permanece na determinação de subunidades de medida por meio do fracionamento do que se considera como unidade. A concepção de *operador*, por sua vez, mobilizada nas técnicas para cálculos ou associada diretamente na situação apresentada, tem sua esfera de mobilização ampliada nas generalizações do cálculo de certas medidas, como áreas e volumes.

2.2.4 A relação entre as concepções de medida e parte-todo

O fracionamento de uma unidade de medida dá lugar rapidamente ao fracionamento de um todo com base em alguma medida. A seguir, as situações nos mostram essa relação em contextos de medidas de comprimento e de tempo:

> Entre 200 e 100 a.C., China, Nove capítulos
> Um reservatório tem cinco canais que o enchem de água. Quando, apenas, o primeiro está aberto, o reservatório enche-se em 1/3 de um dia. O segundo canal enche o reservatório num dia, o terceiro canal em 2 1/2, o quarto em 3 dias e o quinto em 5 dias. Se se abrirem todos os canais, quanto tempo levará a encher o reservatório?
> <u>Solução</u>: Em 15/74 dias
> Século V, Antologia Grega
> Este é Polyphemus o ciclope de bronze, e se nele alguém fizer um olho, uma boca, e uma mão, interligando-os com canos. Quase parece que estava a deitar água, e também parece que a estar a jorrar da sua boca. Nenhuma das suas bicas é irregular, pois a sua mão, quando funciona, encherá uma cisterna em três dias, e o seu olho num dia, e a sua boca em dois quintos do dia. Dir-me-ás o tempo que demorará quando todos os três estiverem a funcionar.
> <u>Resposta</u>: 6/23 do dia de 12 horas
> 1960, Osvaldo Sangiorgi, 1ª série ginasial, p. 69
> O caminho da lesma (que não conhecia muito matemática!). Uma lesma quer chegar ao cimo de uma árvore de 14 metros de altura. Cada dia a lesma sobe 5 m e de noite o seu próprio peso a faz descer 4 m (caprichos de lesma!). Depois de quantos dias atingirá a lesma o seu destino? (Atenção para a resposta: não são 14 dias e sim….. 10).

1960, Osvaldo Sangiorgi, 1ª série ginasial, p. 153
Duas torneiras despejam água num mesmo tanque. A primeira sozinha o enche em 1/5 de hora e a segunda sozinha em 1/6 de hora. Em quanto tempo encherão o tanque as duas torneiras juntas?
Solução: 1ª torneira: Enche o tanque em 1/5 de hora ou 60/5 min = 12 min.
12 min → 1 tanque
1 min → 1/12 do tanque.

2ª torneira: Enche o tanque em 1/6 de hora ou 60/6 min = 10 min
10 min → 1 tanque
1 min → 1/10 do tanque
1ª + 2ª: 1 min → 1/12 + 1/10 = (5 + 6)/60 = 11/60

Logo: 11/60 do tanque → 1 min
1/60 do tanque → 1/11 do min
60/60 do tanque → 60/11 = 5 5/11 min.
Resposta: As duas torneiras enchem o tanque em 5 5/11 minutos.

Nos problemas acima, podemos perceber que o número fracionário está presente, ou no enunciado da tarefa ou no resultado encontrado e este, muitas vezes, não faz sentido no dia-a-dia. No penúltimo exemplo, o resultado obtido é $5\frac{5}{11}$ do minuto.

Nessas situações, podemos identificar a mobilização das concepções de operador e parte-todo para números fracionários na técnica utilizada na resolução do problema.

Este tipo de tarefa ainda é encontrado hoje, em alguns livros, geralmente, como desafio, mas, apresentado com números inteiros, provávelmente, porque o interesse não seja mais o treino do cálculo com números fracionários, mas a atenção do aluno em sua resolução, como se vê no penúltimo exemplo.

2.2.5 A relação entre as concepções de medida e razão

Identificamos ainda, neste estudo, tipos de tarefas que associam a concepção de medida, fazendo emergir a concepção de razão. No Egito encontramos tarefas que tratam da qualidade do pão ou da cerveja com base na quantidade de trigo ou de cevada utilizada em sua fabricação:

1600 a.C., Egito, Papiro de Rhind (69).
3+1/2 heqats de farinha são transformados em 80 pães. Descubra a quantidade de farinha em cada pão e o "pesu"[11].
Solução:
Multipliquemos 3+1/2 por 320, pois num heqat existem 320 ro e pretende-se saber o número de ro em 3+1/2.

1	320
2	640
1/2	160

Logo em 3+1/2 heqats existem 1120 ro.
Agora divide-se 1120 pelos 80 pães:

1	80
10	800
2	160
4	320

logo 1120 = 800+320 e 1120/80 = 10+4=14.
Então tem-se 14 ro por cada pão.
Para determinar o *pesu* de cada pão, divide-se 80 por 3+1/2.

1	3+1/2
10	35
20	70
2	7
2/3	2+1/3
1/21	1/6
1/7	1/2

Como 70+7+2+1/3+1/6+1/2 = 80, tem-se que 80/(3+1/2) = 20+2+2/3+1/21+1/7 = 22+2/3+1/21+1/7. O *pesu* é 22+2/3+1/21+1/7.

Para Struik (1997), esses problemas egípcios mostram a origem prática dessa aritmética pouco cômoda e de uma álgebra primitiva, mas entendemos que tais tipos de tarefas mostram a tentativa de trazer situações da realidade, não só para ensinar, mas, como tratar situações que envolvam o cálculo com números fracionários. A concepção de razão, por sua vez, quando mobilizada é tratada como o quociente de dois números.

Além do *pesu*, os egípcios criaram também o *seqt* para relacionar a altura de uma pirâmide a seu afastamento em relação à base (inclinação):

---

11 O pesu é a razão entre o número de pães confeccionados ou o número de jarros de cerveja produzidos com o número de héqats de cereal (trigo ou cevada) utilizado na sua produção.

1600 a.C., Egito, Papiro de Rhind (56).
Exemplo do cálculo de uma pirâmide.
Altura 250, base 360 cúbitos.
Qual é o seqt?
Resolução: Descobre ½ de 360, 180.
Divide 180 por 250, ½ + 1/5 + 1/50 cúbitos.
Agora um cúbito tem 7 palmos.
Então multiplica 7 por ½ + 1/5 + 1/50 cúbitos.
… 5 + 1/25. Este é o seqt.

Identifica-se na técnica utilizada a relação direta da razão à divisão e a utilização da conversão de unidades de medidas. As razões entre medidas aparecem também entre os babilônios, identificadas em uma tábua do grupo de Susa, em uma tabela que compara as áreas e os quadrados dos lados de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e sete lados. Para o caso do pentágono, apresentam 1;40 (ou $1\frac{40}{60}$) que está correto para dois algarismos significativos, de acordo com Boyer (1974).

Pode-se identificar, ainda, desde a Antiguidade, problemas financeiros que tratam de juros:

Entre 200 a 100 a.C., China, Nove Capítulos (20).
Um homem de negócios investiu dinheiro em Shu. Os juros eram 3/10. Ele levantou 14000 da primeira vez; 13000 da vez seguinte; 11000 da vez seguinte; 10000 da última vez. Depois dos 5 levantamentos, o capital que investiu e os juros esgotaram. Diz: o capital e os juros, quanto é cada um?
Solução: Capital 30468+84876/371293 moedas, juros 29531+286417/371293

1150, Índia, Lilavati de Bhaskara, verso 100.
A soma de 94 niskas, foram emprestadas em três partes com um juro de 1/20, 3/100 e 1/25, obteve-se um lucro igual de cada uma das partes, em 7, 10 e 5 meses, respectivamente. Diz, matemático a quantidade de cada parte.
Solução: 24, 28 e 42 niskas.

Percebe-se que essas tarefas associam a concepção de razão quando estipulam ou pedem uma taxa de aplicação, da mesma forma, que fazemos hoje, pode ser interpretada como operador e transformar-se em quociente durante o tratamento de suas representações.

Por outro lado, esses exemplos apresentam os resultados, mas não a técnica utilizada, supomos que, para resolver o primeiro exemplo, seja necessário encontrar qual o expoente de 6/5 que dê resultado 2. Segundo Eves (2004), os babilônios buscavam potências de 6/5 que dessem um valor menor e outro maior que 2, isto é $(6/5)^2$ e $(6/5)^4$ e, por proporcionalidade, obtinham a resposta procurada.

O autor afirma ainda que existem algumas tábuas babilônias que parecem representar tabelas de *an* para *n* variando de 1 a 10 e *a* valendo 9, 16, 100 e 225, que poderiam ser úteis para resolver equações exponenciais nesse tipo de tarefas.

No segundo exemplo, dos Nove Capítulos, também não sabemos a técnica aplicada, mas podemos ver que o resultado não faz sentido, o que mostra o distanciamento da realidade para situações de ensino, faz com que grandezas discretas, como é o caso das moedas, sejam tratadas como contínuas, produzindo respostas que seriam impossíveis em uma situação real.

2.3 As situações de distribuição

Além das práticas de medições, os antigos também sentiram necessidade de resolver problemas, envolvendo a distribuição de bens e heranças que propiciaram a emergência da concepção de quociente para números fracionários.

2.3.1 A concepção de quociente

Podemos identificar a emergência de tal concepção, desde a Antiguidade, em situações do tipo:

> Entre 200 e 100 a.C., China, Nove Capítulos
> Um dique com uma largura inferior de 2 zhang e uma superior de 8 chi, uma altura de 4 chi e um comprimento de 12 zhang e 7 chi. Diz: qual é o volume.
> <u>Solução</u>: 7112 chi (cúbicos)
> Cada trabalhador tem uma cota de Inverno pelo seu trabalho de 444 chi [cúbicos]. Diz quantos trabalhadores são precisos?
> Solução: 6 2/111 trabalhadores.
> <u>Regra para construir uma muralha de cidade, muro, dique, vala, fosso e canal</u>: Adiciona as largura de cima e de baixo, depois parte ao meio, multiplica pela altura ou profundidade, depois multiplica pelo comprimento, dando o volume.

A técnica empregada para resolver a segunda parte da tarefa resume-se à aplicação da operação de divisão que, por sua vez, apresenta procedimentos e estudos próprios nas diferentes sociedades. No primeiro exemplo, vemos claramente a técnica usada pelos egípcios.

No entanto, podemos encontrar numerosos exemplos, como o segundo, em que o número fracionário não pode aparecer como resultado da divisão, pois a situação trata de grandeza discreta. Hoje, diríamos que o problema deve ser resolvido no campo dos naturais e não dos racionais. Podemos questionar esse resultado alegando a possibilidade de algum engano na tradução, mas, de qualquer forma, sabemos que resultados desse tipo apareciam até bem pouco tempo em livros didáticos e no discurso de futuros professores das séries iniciais[12], como resultados possíveis na Matemática, mas, não na realidade.

Por outro lado, estando correta a tradução, podemos supor que tais respostas vêm de longo tempo, dando-nos a impressão que a divisão pode ser aplicada em qualquer situação. Até hoje, a divisão com resto apresenta problemas para o ensino e aprendizagem, sendo um deles, sua relação com os fracionários, pois esta depende da grandeza, contínua ou discreta apresentada na situação, isto é, do campo numérico em que se trabalha.

2.3.2 A relação entre as concepções de operador e quociente

Identificamos algumas tarefas de distribuição que associam a concepção de operador em suas técnicas, pois utilizam cálculos de medidas e de divisão, nos quais os fracionários surgem como operador, sendo tratados como quocientes.

> 782, Europa, Alcuíno de York
> Há uma cidade triangular que tem um lado de 100 pés, outro lado de 100 pés e um terceiro de 90 pés. Dentro dela quero construir uma estrutura de casas de tal forma que cada casa tenha 20 pés de comprimento e 10 pés de largura. Quantas casas devem estar contidas [nesta estrutura]?
> Solução: Dois lados da cidade adicionados fazem 200; tirando metade de 200 faz 100. Mas como a frente é 90 pés, tire metade de 90, fazendo 45. E uma vez que o comprimento de cada casa é 20 pés, enquanto a largura é 10, faça 20 em 100, fazendo cinco. A décima parte de 40 é quatro, por isso, faça quatro vezes cinco, fazendo 20. Este é o número de casas.
> 1202, Europa, Líber Abaci de Fibonacci.
> Um certo homem tem uma peça de material que tem 100 cúbitos de comprimento e 30 cúbitos de largura, do qual quer fazer panos de linho, cada um dos quais tem de comprimento 12 cúbitos e de largura 5 cúbitos. Donde se procura, quantos panos de linho é que ele pode fazer.

12 Ver resultados a esse respeito em SILVA, 1997.

Não encontramos problemas desse tipo mais antigos, o que nos leva a supor que aparecem com mais persistência a partir do século VIII. Pelas soluções apresentadas, vemos que a técnica utilizada para tais tarefas é a divisão de medidas de áreas, sendo a concepção de operador mobilizada e associada à concepção de quociente no tratamento de suas representações, como podemos ver na solução do primeiro exemplo, de Alcuino de York, quando diz *"a décima parte de 40 é quatro"*, em que fica implícito o cálculo da divisão de 40 por 10.

No entanto, acreditamos que o objetivo de tais tarefas tenha sido o de ensinar a técnica do cálculo de medida de área, pois esta justificaria relacionar terrenos triangulares, como no terceiro exemplo de Alcuino, com a quantidade de casas retangulares possíveis de serem construídas nesse terreno. Embora o problema permita a divisão de medidas de áreas a resposta obtida é impossível de ser feita.

2.3.3 As relações entre as concepções de razão, operador e quociente

Identificamos, ainda, situações que, provavelmente, se originaram em divisão de heranças que relacionam as concepções de razão, de operador e de quociente, entre elas, as que tratam de divisão proporcional, tanto para números inteiros como para fracionários:

> 1600 a.C., Egito, Papiro de Rhind.
> Divida 700 pães por quatro homens na proporção dos números 2/3, 1/2, 1/3, e 1/4. Diga-me a parte que cada homem recebe.
> Primeiro faz-se a seguinte soma 2/3 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 7/4. Depois, efetua-se a divisão de 700 por 7/4 que dá 400. Multiplica-se este número por cada uma das frações 2/3, ... obtendo-se a respectiva quantidade de pão de cada homem.
>
> Entre 200 e 100 a.C., China, Nove capítulos.
> Dados cinco oficiais de diferentes patentes: Dafu, Bugeng, Zanniao, Shangzao e Gongshi caçaram 5 veados. Diz: Quanto é que cada um recebe, se o veado é distribuído consoante sua patente?
> Solução: Dafu obtém 1 2/3 do veado, Bugeng obtém 1 1/3 do veado, Zanniao obtém 1 veado, Shangzao obtém 2/3 do veado e Gongshi obtém 1/3 do veado.
>
> 782, Europa, Alcuino de York.
> Um certo bispo ordenou que 12 pães fossem divididos entre o clero. Estipulou que cada padre recebesse dois pães; cada diácono metade de um

pão e cada leitor a quarta parte. Então descobriu que o número de clérigos e de pães era o mesmo. Quantos padres, diácono e leitores havia?

1519, Europa, Gaspar de Nicolas.
O quintal do cravo vale 100 cruzados e a canela 60 e o gengibre 40. Chega um mercador e quer tanto de uma especiaria como da outra e quer 350 cruzados. Demando, quanto tomará de cada uma?
Solução:Faze como na passada (pergunta): soma os preços e farás 200 cruzados e este é o teu partidor e a partição é o próprio dinheiro que o mercador quer empregar, 350, os quais parte por 200 e vem 1 3/4 e tanto tomará de cada uma das especiarias: 1 quintal e 3 arrobas.

Prova: Toma 1 quintal e 3 arrobas daquele de 100 e acharás que se monta 175; e daquele que vale a 60 acharás que se monta 1 quintal e 3 arrobas 105 e aquele que vale a 40 acharás que se monta em 1 quintal e 3 arrobas 70 cruzados. Ora soma estes números todos três, 105 e 175 e 70, e farás justamente os ditos 350 cruzados».

1960, Osvaldo Sangiorgi, 1ª série ginasial, p. 150.
Um barril com a capacidade de 42 litros está cheio de vinho, que deve ser repartido entre três pessoas. A primeira pessoa deve receber a fração equivalente a 2/3 do vinho contido no barril, a segunda a fração equivalente a 1/7 e a terceira o restante. Quanto deve receber cada pessoa?

1963, Osvaldo Sangiorgi, 3ª série ginasial, p. 57.
Dividir 144 em partes inversamente proporcionais a 3, 4 e 12.
Solução: Reduzindo as frações ao mesmo denominador, vem: 9/12, 8/12 e 6/12. Divide-se agora, 92 em partes diretamente proporcionais aos números 9, 8 e 6. Isto é x = (92x9)/23 = 36, y = (92 x 8)/23 = 32, z = (92 x 6)/23 = 24.
Resposta: As partes procuradas são: 36, 32 e 24.

A solução do primeiro problema é encontrada, de acordo com Boyer (1974), a partir do quociente de 700 pela soma dos fracionários da proporção. Neste caso, o quociente de 700 por 1 3/4 é encontrado multiplicando 700 pelo recíproco do divisor, que é 1/2 + 1/4. O resultado é 400, Calculando 2/3, 1/2, 1/3 e 1/4 do resultado obtido, 400, chega-se às parcelas de pão requeridas.

Percebemos que tais tarefas pedem a mobilização da concepção de razão, na distribuição proporcional, a técnica associa a concepção de operador que, por sua vez, leva a manipulação do fracionário, como um quociente. Mas, a história nos mostra que, com o passar do tempo, esses tipos de tarefa assumiram um caráter algébrico, como podemos ver no último exemplo.

Em algumas tarefas, identificamos mais uma vez o efeito da transposição de situações reais para o ensino, pois, embora tratem de situações reais solicitam ações que não fariam sentido na vida real como, por exemplo, a proposta de se dividir um veado em terços ou a proposta do bispo para dividir os pães.

Para finalizar esta parte de nosso estudo, elaboramos o esquema, apresentado na Figura 6 que mostra uma síntese do desenvolvimento do ensino dos números fracionários baseada na busca de técnicas que resolvessem algumas tarefas necessárias às sociedades da Antiguidade.

Embora o esquema dê a impressão de linearidade dos fatos ou de ordem cronológica, isso não é verdade, pois, como vimos no estudo que apresentamos, tanto as necessidades de medir, distribuir e comparar quanto a de buscar as técnicas para cumprir essas tarefas apresentaram-se simultaneamente na Antiguidade. Como consequência imediata, a necessidade de registro de tais técnicas e de cálculos com os novos números encaminham a necessidade do ensino do conhecimento desenvolvido. Esse ensino, por sua vez, verifica-se por meio de tarefas que enfatizam o cálculo com fracionários e a descoberta de valores desconhecidos e associam as concepções medida, quociente e razão para fracionários que se relacionam entre si e com as concepções parte-todo e operador.

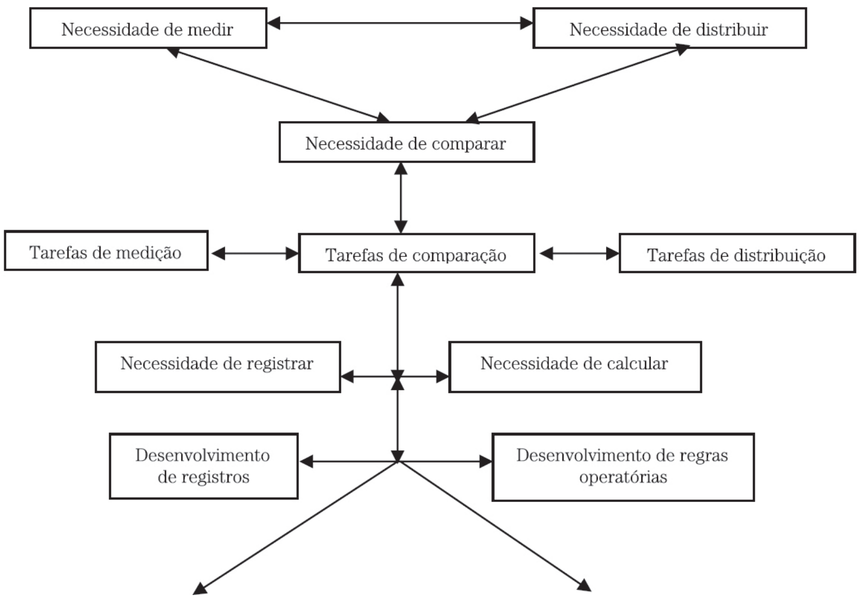


Figura 6 – Esquema da gênese histórica de números fracionários. *(continua)*

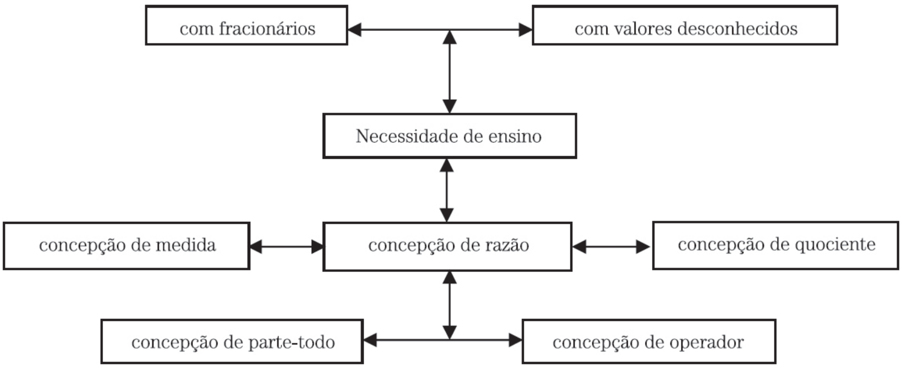


Figura 6 – Esquema da gênese histórica de números fracionários. *(continuação)*

A complexidade crescente das sociedades impõe a criação de escolas para formar escribas que se deparam com a necessidade de desenvolver tarefas para o ensino de cálculo com fracionários especificamente ou procura de valores desconhecidos.

Pautado nesses tipos de tarefas que as concepções de números fracionários e as relações entre elas, emergem, tanto da própria tarefa como das técnicas desenvolvidas para resolvê-las.

Assim, em continuidade a este estudo epistemológico, buscamos o desenvolvimento do discurso tecnológico-teórico no ensino dos números fracionários, a partir do século XVIII, quando aparecem os tratados para as escolas de artilharia e marinha que serviram de base para os livros utilizados, inicialmente, na escola do tipo que temos atualmente. O objetivo é buscar o desenvolvimento do ensino de fracionários da forma que conhecemos hoje.

2.4 O número fracionário na escola moderna

Cabe lembrar que *Os Nove Capítulos* influenciaram toda a matemática chinesa e foram utilizados como manual de ensino, na China e em regiões próximas, até por volta de 1600, quando a ciência ocidental chega ao oriente.

De acordo com Neyret (1995), na obra *Cours de mathématiques* de Étienne de Bézout (1739-1783) elaborado para candidatos à escola da marinha e muito utilizado, no final do século XVIII e início do século XIX, aparece pela primeira vez a representação fracionária tratada efetivamente como representante de números.

Na primeira página, Bézout afirma que o número expressa de quantas unidades ou partes de unidades uma quantidade é composta e o classifica em três tipos: os inteiros, as frações e os números fracionários se *"a quantidade é composta de unidades inteiras, de unidades inteiras e partes da unidade ou de partes da* *unidade"* respectivamente. Classifica-os, também, por abstratos: *"quando enunciamos sem designar a espécie de unidade"* ou por concretos: *"quando enunciamos ao mesmo tempo a espécie de unidade"* (Ibid, p. 65).

Bézout utiliza o termo *fração* para indicar, o que hoje chamamos de números mistos e o termo *números fracionários*, para o que hoje chamamos de frações ordinárias ou frações menores que a unidade.

Os números fracionários são apresentados, no tratado de Bézout, segundo Valente (2002), com base em uma estrutura que ainda pode ser notada em livros atuais: operações com fracionários, vários exemplos numéricos e aplicações práticas para utilização desses números. O autor apresenta um exemplo de aplicação do tratado de Bézout:

> Após o que dissemos (item 96), é fácil ver como se pode avaliar uma fração. Pede-se por exemplo, quanto valem os 5/7 de um livre. Sendo que os 5/7 de um livre são a mesma coisa (item 96) que a sétima parte de 5 livres, reduzo os 5 livres em fols (item 57) e divido os 100 fols que obtenho por 7, o que irá me dar 14 fols para quociente e 2 fols de resto; reduzo esses 2 fols em deniers e divido 24 deniers por 7, terei então 3 deniers 3/7, assim os 5/7 de um livre são 14 fols 3 deniers e 3/7 de denier (VALENTE, 2002, p. 83).

Notamos, nesse exemplo, que a primeira concepção de fracionário mobilizada é a de operador em *"5/7 de um livre são a mesma coisa que a sétima parte de 5 livres"*. A seguir, associa a concepção de quociente, utilizando a transformação de unidade de medida, por conta da impossibilidade da divisão de 5 por 7, completando com *"divido 100 fols por 7"*, que é entendido como sendo *"um sétimo de 100"*.

De acordo com Valente (2002), da mesma forma que os autores da Idade Média, Bézout apresenta uma tábua de unidades para moedas, pesos, comprimentos e tempo e trata dos "números complexos" – quantidades expressas em múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida – para garantir a representação de resultados de medição por números inteiros.

Afirma ainda que os livros de Belidor e Bézout representam a universalização da matemática escolar ensinada na Europa, e o último tornou-se referência do saber escolar matemático em Portugal, com sua tradução em 1773 e utilização pela Universidade de Coimbra e pela Academia de Marinha, passando, inclusive, a ser usado no Curso de Artilharia a partir de 1786. O autor conclui que a morte de Bézout, em 1783, fez com que vários autores reeditassem suas obras, entre eles, Reynaud que, em 1812, acrescenta notas importantes que contribuíram, para que a Aritmética de Bézout fosse indicada pelo ministro francês da Instrução Pública ainda em 1849.

Segundo Neyret, o número fracionário, para Reynaud, é escrito na forma $n\frac{a}{b}$ indicando:

> [...] o quociente do numerador pelo denominador ou como expressam que a unidade foi dividida em tantas partes iguais quantas as unidades que existem no denominador e que tomamos tantas dessas partes quanto há de unidades no numerador. (NEYRET, 1995, p. 77, tradução nossa)

Entendemos, por essa afirmação, que Reynaud mobiliza as concepções de quociente ou de parte-todo nas situações que envolvem números fracionários. Reynaud usa o nome genérico de frações, segundo Neyret (1995), para se referir, tanto aos números fracionários como às frações utilizadas por Bézout.

Ainda emprega em seu livro o termo "número decimal" e apresenta seu estudo, tratando da redução aos decimais e introduzindo os decimais periódicos: *"nos quais vários algarismos se repetem na mesma ordem e ao infinito"*, além de obter a geratriz desses periódicos.

No Brasil, de acordo com Valente (2002), com base nas obras de Bézout e Belidor a aritmética e a geometria passam a ser tratadas separadamente e tornam-se, posteriormente, duas disciplinas autônomas na escola, acrescentando que:

> Será essa matemática, inicialmente ligada diretamente à prática, que, desenvolvida pedagogicamente nas escolas técnico-militares, organizada, dividida e didatizada para diferentes classes, passará para os colégios e preparatórios do século XIX, e orientará os autores brasileiros a escreverem seus próprios livros didáticos. (Ibid, p. 88)

O ensino de matemática, pouco a pouco, será unificado em relação aos conteúdos e adoção de livros, fazendo com que novos manuais como os de Lacroix, Legendre e Euler tornem-se referência no ensino de matemática no primeiro ano da Academia Real Militar, que era equivalente a um ensino secundário inexistente no Brasil, até então.

Assim, em nosso país, a obra de Lacroix (1765-1843) foi a primeira referência para o ensino do novo sistema métrico e da álgebra. Nela, Lacroix define as dízimas periódicas, mostra que o conjunto dos números racionais é a reunião dos decimais exatos com essas dízimas e, também, que os fracionários decimais fazem com que o novo sistema métrico decimal seja introduzido, naturalmente, de acordo com Valente (2002).

Por outro lado, Neyret (1995) afirma ainda que Laplace (1749-1827), também, trata do assunto em sua primeira lição na Escola Militar de Paris, quando mostra a ligação dos números inteiros e dos números decimais com os números obtidos pelo uso do novo sistema métrico.

Para Laplace, uma razão escrita na forma *a/b*, representa o quociente desses dois números que pode resultar em inteiros, racionais ou irracionais.

Escreve uma proporção sob a forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ e a substitui pela forma equivalente $ad = bc$, o que reduz as proporções a simples equações do primeiro grau. Laplace acrescenta ainda que a concepção de razão é um elemento unificador importante aos sistemas de números, porque relaciona, sobretudo, *"fração, divisão, frações de frações e frações de decimais"* (NEYRET, 1995, p. 73, tradução nossa).

As primeiras obras didáticas escritas no Brasil para as escolas, cursos preparatórios e, posteriormente, liceus e colégios, segundo Valente (2002), começam a surgir por volta de 1830. Em 1837, com a intenção de servir de modelo de escolarização secundária no país, é criado o Imperial Colégio de D. Pedro II. Nele a matemática figura em todas as oito séries e a obra *Elementos de Geometria* de Lacroix, traduzida para o português, é adotada, porque era referência no ensino dos liceus franceses. Em 1838, o capitão de fragata Francisco de Paula Leal oferece ao Colégio Pedro II exemplares de seu tratado para o estudo de Aritmética chamado *Elementos de Aritmética, para uso da mocidade brasileira nas escolas de primeiras letras* que segue exatamente o texto de Bézout.

O autor comenta que os primeiros autores de livros didáticos brasileiros orientam-se em Bézout e Lacroix, porque foram mestres da Academia da Marinha e Academia Militar, onde esses autores eram adotados. Essas obras brasileiras foram reeditadas até meados do século XIX quando os compêndios de matemática foram atualizados, com base no que estava sendo produzido nas escolas francesas da época.

Em 1845, no Rio de Janeiro, Cristiano Benedito Ottoni publica *Juízo Crítico sobre o Compêndio de Geometria Adoptado pela Academia da Marinha do Rio de Janeiro* em que, de acordo com Valente (2002), analisa obras francesas, como um matemático, entendendo, por exemplo, os textos de Bourdon e Vincent – professores de matemática – como textos científicos e não didáticos.

Em 1817, Bourdon escreveu *Éléments d´Álgebre* e *Éléments d´Arithmétique*, que foram reimpressos mais de vinte vezes até o final do século XIX. Na edição de 1897, Bourdon, ainda na introdução, cita que:

> O sinal da divisão, que consiste em dois pontos: que se coloca entre o dividendo e o divisor, ou ainda, em uma barra ¾, acima e abaixo do qual se coloca respectivamente o dividendo e o divisor. Assim, 24 : 6 ou $\frac{24}{6}$ se enuncia 24 dividido por 6, ou o quociente de 24 por 6. $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ se enuncia *a* dividido por *b*. Se diz ainda *a* sobre *b*. A notação $\frac{a}{b}$ é a mais utilizada. (BOURDON, 1897, p. 2)

Podemos notar que Bourdon, efetivamente, associa a operação de divisão ao número fracionário independente de qualquer contexto. Esta associação permanece e pode ser encontrada ainda no livro de Álgebra Elementar de 1938 publicado pela editora FTD onde se encontra a respeito do sinal de divisão, que:

> O sinal ÷ (dividido por) indica uma divisão; $a \div b$ significa que é preciso dividir a por b. Muitas vezes, indica-se a divisão por meio de uma fração; então, o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor; assim, $\frac{a}{b}$ (lêr a sobre b) ou a/b ou $a \div b$, indicam o quociente de a por b. (VALENTE, 2002, p. 190)

De acordo com Valente, em 1929, Euclides Roxo publica o Curso de Mathematica Elementar tratando das frações da seguinte maneira: "Quando a unidade suposta é dividida em um certo número de partes iguais e se tomam uma ou mais dessas partes, o resultado assim obtido chama-se fração" apresentando como exemplo inicial: "Seja AB um segmento que representa a unidade de comprimento dividida em 20 partes iguais, de modo que cada parte é um-vigésimo da unidade" (Valente, 2004, p. 118-119).

Conforme Valente, as explicações de Euclides Roxo, com a ajuda de imagens geométricas, tiveram a intenção de facilitar o entendimento de seus leitores. Percebemos que Euclides Roxo mobiliza a concepção parte-todo e a associa à de medida, quando emprega o termo unidade no lugar de um inteiro qualquer e reforça tal associação, quanto usa a representação geométrica de um segmento, como exemplo.

Não sabemos quando o ensino criou ou decidiu mobilizar a concepção parte-todo na introdução dos fracionários, apoiado na representação de superfícies, abandonando sua origem e adotando como técnica a dupla contagem para resolver as tarefas que pedem a mobilização de tal concepção.

Segundo Vizcarra e Sallán (2005), a origem do significado parte-todo teria que ser situada na prática educativa e colocada entre os recursos didáticos criados por necessidades do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Os autores detectaram a presença do significado parte-todo nos textos escolares espanhóis no início do século XX, para abreviar os períodos de instrução, pois esse significado permite uma introdução rápida da representação simbólica da fração, com altos níveis de êxito a curto prazo.

No livro de Matemática para a primeira série do curso ginasial, escrito por Osvaldo Sangiorgi, identificamos esse novo enfoque, em que apresenta os números fracionários com base no que chama noção intuitiva de fração, utilizando a figura de um chocolate dividido em três partes iguais acompanhada da seguinte afirmação: "A primeira ideia de fração nos é dada quando dividimos um objeto (que nesse instante representa uma unidade) em um número qualquer de partes iguais e consideramos uma ou algumas dessas partes". A seguir, define: "Número fracionário ou fração é um número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais" (SANGIORGI, 1960, p. 117).

A definição apresentada privilegia a concepção parte-todo para os fracionários, com base na imagem de um chocolate, que até hoje é uma constante para a introdução de fracionários, com a técnica da dupla contagem das partes para a identificação da parte considerada do inteiro.

No mesmo livro, quando o autor trata de quocientes aproximados, afirma que: "pode-se sempre, ampliando o estudo das divisões, quer de números inteiros, quer de números decimais, determinar o quociente da divisão com uma aproximação desejada" (SANGIORGI, 1960, p. 163).

Apresenta ainda o exemplo da aproximação da divisão de 73 por 14 como sendo $5 < \frac{73}{14} < 6$, pois 5 é o quociente por falta e 6 o quociente por excesso. A seguir, trata da divisão de 730 por 14 aproximando por $52 < \frac{730}{14} < 53$ para, então, concluir que $5{,}2 < \frac{73}{14} < 5{,}3$. O exemplo conclui apresentando a regra prática para a divisão baseada na contagem de casas decimais e eliminação de vírgula.

Embora tenha apresentado os números fracionários mobilizando a concepção parte-todo, associa agora o termo "quociente" à representação fracionária e decimal, institucionalizando a representação fracionária, como representação da operação de divisão.

2.5 Nossas considerações

Os resultados de pesquisas anteriores evidenciam problemas provocados pelo ensino que enfatiza tarefas que associam a concepção parte-todo mobilizando representações de figuras planas, que são resolvidas pela técnica da dupla contagem das partes.

Com base nessa constatação, decidimos elaborar uma Organização Matemática que considerasse as demais concepções de números fracionários, além de relações entre essas concepções. Identificamos, também, em um estudo epistemológico, as tarefas que estão na gênese do ensino dos números fracionários, procurando as concepções associadas e possíveis relações entre elas. Estes estudos foram usados como suporte para a formação dos professores do Ensino Fundamental engajados em nosso projeto de pesquisa, nesta fase, que tratou do ensino e aprendizagem de fracionários na quinta série.

Nossos estudos mostraram que na Antiguidade a necessidade de medições de terras pelos administradores do estado fez emergir os números fracionários e, consequentemente, a exigência de registros e de cálculos com os resultados das medições.

Surge, assim, a figura do escriba e a demanda de uma escola para formar escribas que impõe a elaboração de praxeologias didáticas com tarefas de diversos tipos e técnicas que as resolvam com o intuito de ensinar os conhecimentos necessários para se formar um escriba.

Com o crescente desenvolvimento das sociedades e novas formas de organização, os estados passaram a ter necessidade de preparar jovens aos cursos de Engenharia e para as Academias Militar e da Marinha, fazendo com que alguns tratados fossem editados e utilizados durante muito tempo para esses fins.

Posteriormente, as mudanças sociais ocorridas dão um novo lugar à criança e levam ao surgimento de um novo tipo de escola, especialmente para elas, as escolas de primeiras letras, que em determinado momento instituíram o ensino de Matemática nessas escolas.

No entanto, as referências para cumprir tal exigência baseiam-se nas publicações já existentes, os tratados matemáticos, que salvo algumas pequenas mudanças mantêm sua essência. No estudo, que realizamos, percebemos que os tipos de tarefas utilizados no ensino de fracionários sofreram poucas alterações, enquanto houve um avanço, não antes visto, no discurso tecnológico-teórico, promovido sobretudo pelo desenvolvimento da Álgebra.

As discussões a respeito do ensino e da aprendizagem passaram pela reforma da Matemática Moderna e culminaram com o surgimento da Didática da Matemática nos anos 70 do século XX, que se justificam, pelo menos, pela constatação de que não é possível ensinar da mesma forma crianças que entram na escola para uma educação geral e "crianças" que entravam na escola para ingressar em uma carreira militar.

A necessidade primordial da escola de primeiras letras seria, então sua adequação aos novos níveis de escolaridade, a seus objetivos e ao aluno que nela está presente. Vivemos, hoje, um momento semelhante, por motivos diferentes, um deles, evitar a evasão escolar.

O ensino de fracionários, em sua gênese, apresenta, tanto a concepção de operador quanto a concepção parte-todo associada à resolução de tarefas que solicitam a mobilização da concepção de medida, quociente e razão. A concepção parte-todo com vida própria no ensino de fracionários, desvinculando-se da submissão a outras concepções, é orientação recente do ensino, em termos históricos, sendo mobilizadas em tipos de tarefas que não aparecem nos primórdios da construção do campo dos números fracionários. Provavelmente, porque as necessidades práticas do ensino anteriormente realizado não eram pertinentes ao ensino das crianças.

A inserção no contexto escolar do ensino de fracionários baseado na concepção parte-todo e apoiado na contagem, parece-nos um movimento no sentido de auxiliar a criança no aprendizado dos novos números, utilizando seus conhecimentos dos números naturais.

No entanto, não se levou em conta consequências, como, a discretização do contínuo e o domínio de validade restrito que esse enfoque propicia. Da mesma forma não podemos dizer que antes o ensino fosse mais significativo, porque a presença de tarefas cuja resolução conduz a respostas que não fazem sentido na realidade em que a tarefa apresenta-se vem desde a Antiguidade.

Vimos que a história do desenvolvimento do ensino e do estudo dos números fracionários tem um marco importante no século XVI com a possibilidade da mudança de registro da escrita fracionária à escrita decimal e todo o desenvolvimento posterior das estruturas algébricas com operações e propriedades bem definidas.

Estes desenvolvimentos teóricos acabam por afastar o ensino de fracionários de situações que pudessem lhes dar algum sentido ou mostrar sua razão de ser para privilegiar definições, como vimos no estudo anterior de terminologia e significados, do tipo: "*fração é divisão*" ou "*fração é o quociente de dois números*" ou "*razão é divisão*", entre tantas outras.

Se nosso interesse é fazer com que as crianças construam o conceito de número racional, então, podemos entender que precisamos levá-las a construir os conhecimentos necessários para conceituar esse objeto matemático. Assim, entendemos que o estudo da gênese dos números fracionários mostra, como pode ser visto no esquema da Figura 7, que tipos de tarefas que associam a concepção de medida e que se associam diretamente ou mobilizam em suas técnicas as concepções parte-todo, razão e operador permitem a construção do conhecimento de medida relacionado aos números fracionários.

Da mesma forma, os tipos de tarefa que associam a concepção de quociente e de razão permitem construir os conhecimentos de comparação e de distribuição relacionados a esses números. Os conhecimentos de medida, comparação e distribuição permitem a percepção da razão de ser dos fracionários que relacionados facilitariam a construção do conceito de número racional pretendido.

No entanto, como nosso objetivo é trabalhar com a quinta série não podemos esquecer que os alunos dessa série possuem conhecimentos anteriores de números fracionários que, provavelmente, foram desenvolvidos baseados somente na concepção parte-todo.

Por isso, trataremos dessa concepção em nossa Organização Matemática e, também, da concepção de operador, visto que esta auxilia na conceituação dos fracionários como números.

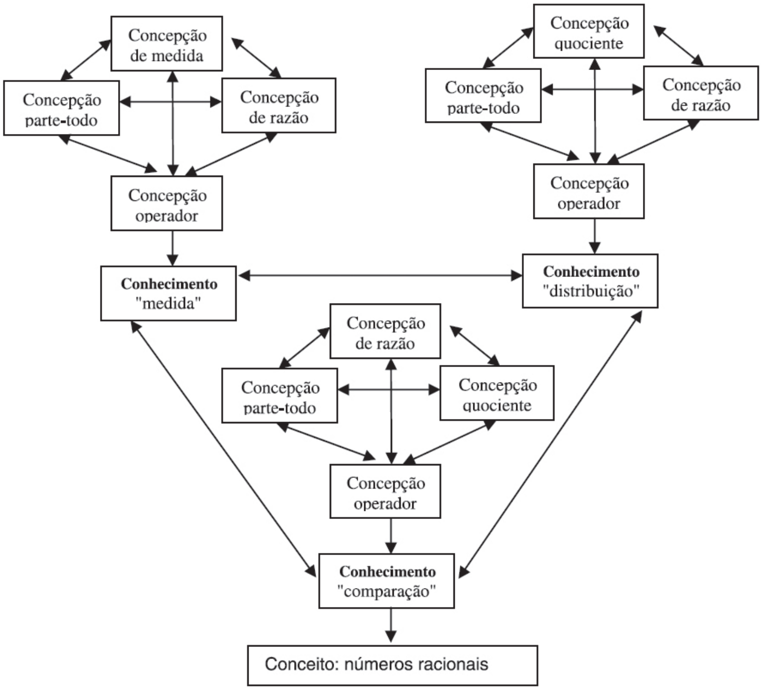


Figura 7 – Esquema da conceituação de números racionais.

Falamos de conceituar números racionais por entender que a conceituação de números fracionários concretizar-se-á no ensino médio com a relação do conceito de número racional já construído com outros conhecimentos como o de frações algébricas, números complexos, polinômios, etc. que permitirão formar o campo conceitual[13] do sujeito para números fracionários.

De acordo, com Artigue (1990), uma análise histórica e ou matemática auxilia na definição do conjunto de problemas significativos e operatórios na construção de processos didáticos. Nesse sentido, apresentaremos, a seguir, uma Organização Matemática que considera os estudos feitos anteriormente, além das concepções de fracionários e alguns resultados de pesquisa que utilizaremos como referência para a formação dos professores.

3 Uma organização matemática para a formação

Entendemos ser necessário, como preparatório para a formação de professores pretendida, ainda o estudo de uma Organização Matemática para os números

13 De acordo com Vergnaud (1989,1990, p. 62, tradução nossa) "um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão."

fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental, visto que pretendemos utilizar o estudo epistemológico na escolha dos tipos de tarefas e alguns resultados de pesquisa sobre o assunto.

Entenderemos esta organização, como uma produção de uma *instituição* universitária e nela visamos descrever tipos de tarefas que associam as diversas concepções de números fracionários, bem como as que solicitam relações entre tais concepções, verificando as técnicas que podem ser manipuladas na resolução de cada um desses tipos de tarefa.

Para isso, apoiamos-nos na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e na noção de concepção de Artigue (1990), além de adotarmos, neste trabalho, o termo objeto matemático, de acordo com a definição de Chevallard (1991, p. 8) como:

> algo que emerge de um sistema de práticas nas quais são manipulados objetos materiais que se destacam em diferentes registros semióticos: registro oral, palavras ou expressões pronunciadas; registro gestual; domínio da inscrição, o que se escreve ou desenha (grafismos, formulismos, cálculos, etc.) quer dizer, registro escrito. (apud GODINO e BATANERO, 1994, p. 332, tradução nossa)

Para Bosch, Fonseca e Gascón (2004), a reconstrução institucional de uma teoria matemática requer elaborar uma linguagem comum que permita descrever, interpretar, relacionar, justificar e produzir as diferentes tecnologias da *Organização Matemática Local* (OML) que integram uma *Organização Matemática Regional* (OMR).

Para os autores citados, ainda que os processos de construção (ou reconstrução escolar) de OML podem ser muito diferentes, a análise conjunta da dinâmica de seu processo de estudo e de sua estrutura permitem determinar o grau de completitude da mesma, que dependerá do cumprimento das seguintes condições:

– *uma OML deve responder a questões que não podem ser respondidas por nenhuma Organização Matemática Pontual (OMP), que constitui sua razão de ser.*

Por exemplo, o tipo de tarefa: *identificar o fracionário que corresponde a uma figura apresentada* constitui uma OMP. Quando várias OMP agrupam-se pelo fato de ter uma tecnologia que justifica as técnicas mobilizadas para resolver suas tarefas, diremos que temos uma OML.

Assim, para que se construa uma OML justificada pela concepção parte-todo seria necessário considerar nas tarefas, do tipo citado acima, figuras que representem grandezas discretas ou contínuas que permitam abordar técnicas diferentes, além de outros tipos de tarefas que tenham suas técnicas justificadas pela concepção parte-todo para fracionários.

– *O processo de reconstrução deve ter momentos exploratórios que permitam comparar variações das técnicas que aparecem ao abordar as diferentes tarefas.*

Durante a reconstrução, o tratamento das diversas figuras permitirá questões a respeito da técnica que propicia, por exemplo, a percepção da limitação da dupla contagem das partes e o desenvolvimento de outras técnicas.

– *A exploração de uma OML deve incidir em um verdadeiro trabalho da técnica, provocando seu desenvolvimento progressivo.*
– *Na reconstrução de uma OML, devem aparecer novas questões matemáticas relativas às diferentes técnicas que irão surgindo (questionamento tecnológico).*

Considerando o tipo de tarefa "*identificar o fracionário que corresponde a uma figura apresentada*", a apresentação de figuras de superfícies totalmente divididas em partes congruentes permite a compreensão da técnica da dupla contagem das partes; no entanto, há necessidade de fugir desse modelo de figura para que se perceba a limitação dessa técnica e a construção de outras técnicas possíveis. O trabalho com figuras de diversos tipos permitirá o desenvolvimento progressivo da técnica que, por sua vez, provoca questionamentos tecnológicos.

– *No processo de reconstrução de uma OML, é necessário institucionalizar os componentes explícitos da organização, não isolados, mas, no conjunto da organização.*

A institucionalização da OML que se justifica pela concepção parte-todo deve explicitar a importância das figuras na construção de técnicas diferentes e, consequentemente, do discurso tecnológico-teórico.

– *É preciso avaliar a qualidade dos componentes da OML construída. Esta avaliação mostrará a necessidade de articulá-la com outras OML para constituir uma OMR.*

Neste trabalho, construiremos OM Locais justificadas pelas diferentes concepções de números fracionários que não representarão uma OMR, porque não construímos OML que institucionalizasse o conjunto dos números racionais.

Nosso interesse reside na construção de OM Locais que colaborem na construção de significados às diversas concepções de números fracionários, tanto para os professores envolvidos como para alunos de quinta série.

Os autores concluem que o cumprimento de tais condições caracterizará uma OML relativamente completa e apresentam sete indicadores do grau de completitude de uma OML: 1) integração dos tipos de tarefas, 2) diferentes técnicas e critérios para escolher, 3) independência dos *ostensivos* que integram as técnicas, 4) existência de tarefas e técnicas reversíveis, 5) interpretação do resultado de aplicar as técnicas, 6) existência de tarefas matemáticas abertas, 7) incidência dos elementos tecnológicos sobre a prática. Esta construção progressiva dos tipos de tarefa que se estudam, é também uma condição necessária para poder colocar e abordar em uma OML questões problemáticas cada vez mais abertas.

Por outro lado, Bosch e Gascón (2001, p. 5) postulam que a modelação de uma praxeologia didática espontânea do professor que considere a Organização Didática da instituição (como sistema a modelar) será mais pertinente, eficaz e fecunda do que tentar modelá-la sem sua relação com a praxeologia da instituição. *"Só mediante esta ampliação do sistema 'empírico' a modelar estaremos em condições de [...] nos situarmos no que Michele Artigue chama de 'abordagem sistêmica global do didático'"*.

Assim, justificamos a elaboração de nossa Organização Matemática para a formação dos professores que entenderemos por diversas praxeologias locais, centradas nas concepções de fracionários, aqui entendidas por tecnologias que justificarão as técnicas consideradas que se baseiam na teoria dos números racionais. Nesta OM, não trataremos diretamente as operações com fracionários nem da institucionalização dos números racionais, visto que nosso foco encontra-se nas concepções de fracionários e suas relações.

A noção de concepção, por sua vez, de acordo com Artigue (1990), auxilia o estudioso da Didática por suas funções de: evidenciar a pluralidade de pontos de vista para um mesmo objeto matemático, diferenciar as representações e os tratamentos que lhes são associados, evidenciar sua adaptação à resolução de problemas, diferenciar o saber que o ensino quer transmitir e os conhecimentos efetivamente construídos pelos alunos.

Segundo a autora, evidenciar a pluralidade de pontos de vista possíveis para um mesmo objeto matemático, auxilia a negar a "ilusão de transparência" da comunicação didática, além de mostrar que diferentes concepções são mais adaptadas a distintas classes de problemas. Classifica assim, as concepções em dois tipos: a matemática que se relaciona ao conteúdo propriamente dito e as desenvolvidas pelos sujeitos culturalmente ou em processo de aprendizagem.

Assim, a concepção, além de ser um objeto associado ao saber e aos diferentes problemas, em cuja resolução intervém, *"irá se constituir em um instrumento* *tanto para a análise do saber e a elaboração de situações didáticas quanto para a análise dos comportamentos do aluno"* Artigue (1990, p. 270, tradução nossa).

Baseados na TAD e na noção de concepção que acabamos de expor, apoiaremos nossa Organização Matemática sobre três pontos que consideramos fundamentais: as concepções de números fracionários associadas aos tipos de tarefas ou que podem ser mobilizadas na realização das tarefas, a abordagem de grandezas contínuas e discretas nessas tarefas, e as representações que serão manipuladas nas técnicas utilizadas no cumprimento dessas tarefas.

Nosso interesse pelas concepções de números fracionários, segundo a classificação de Behr e outros (1992), pode ser justificado por Post, Behr e Lesh quando afirmam que:

> Por várias razões os conceitos de números racionais estão entre os mais importantes conceitos que a criança experienciará durante seus anos de pré-secundário. [...] Sob uma perspectiva psicológica a compreensão de número racional proporciona um solo rico no qual as crianças podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para continuar seu desenvolvimento intelectual. De um ponto de vista matemático, a compreensão de número racional é a fundação sobre a qual as operações algébricas básicas apoiar-se-ão mais tarde. (POST, BEHR, LESH, 1982, p. 1, tradução nossa)

Quanto às grandezas, adotaremos, a definição de grandeza dada por Menezes:

> Grandeza matemática é tudo quanto for possível de ser medido, direta ou indiretamente, por meio de outra grandeza da mesma espécie, e de valor conhecido considerada como padrão ou unidade que se toma para comparação. A medida de uma grandeza é denominada valor da grandeza ou quantidade. (MENEZES, 1959, p. 3)

Entendemos essas quantidades, como resultados de atos de contagem ou de medições, dependendo do que estamos quantificando: grandezas discretas ou contínuas. Acreditamos ser necessário levar para o ensino de números fracionários tais distinções, pois concordamos com Mello e Souza, que já em sua época, alertava para as questões do contínuo e do discreto quando dizia: *"Uma das grandes missões dos matemáticos de hoje é harmonizar o contínuo e o discreto, eliminar para esses conceitos toda a obscuridade e incorporá-los numa matemática de maior amplitude"* (MELLO e SOUZA, 1945, p. 280).

Por outro lado, são as representações, que darão vida ao objeto matemático. De acordo com Pluvinage (1998), utilizamos, normalmente: o registro da língua natural, o registro algébrico, o registro figural-geométrico e o registro funcional-gráfico, enfatizando a necessidade de diferenciar o objeto matemático dos objetos físicos.

Conforme o autor, um objeto físico, como um pato, por exemplo, caracteriza-se pelo fato de que todo pato encontrado representa perfeitamente o objeto "pato", enquanto um objeto cultural como, por exemplo, um quadrado, resulta de uma abordagem que seleciona algumas características e elimina outras, porque nenhum objeto real representa perfeitamente um quadrado.

Ampliando a discussão a respeito de representação, Bosch e Chevallard (1999), entendem que a conceituação, na atividade matemática, tende, geralmente, a reforçar as ferramentas matemáticas utilizadas, quando considera que os objetos sensíveis como discursos, escritas e grafismos centralizam não os próprios objetos, mas o que eles "representam" ou "significam", isto é, seu sentido.

Dois tipos de objetos são, então, definidos pelos autores: os *ostensivos* como sendo aqueles perceptíveis aos sentidos humanos e que podem ser manipulados: sons, grafismos e gestos; e os objetos *não ostensivos* como aqueles que, por si só, não podem ser vistos, ditos, entendidos ou percebidos porque para isso dependem da manipulação dos *ostensivos*.

Para os autores citados, na realização de uma atividade matemática, um complexo de objetos *ostensivos* são usados, em diversos registros, para permitir que um saber matemático e os conhecimentos por ele construídos materializem-se.

Supondo que, nas séries iniciais, o número fracionário é representado por um par de números naturais escritos na forma $\frac{a}{b}$, tomando, como exemplo, o *não ostensivo*: número dois terços (aqui representado em nossa língua natural, pode ter no sistema de escrita dos números fracionários outras representações como 4/6, 6/9, ..., no sistema de escrita dos números decimais a representação será 0,6666..., no sistema figural, podemos ter, entre tantas outras, as figuras apresentadas na Figura 8.

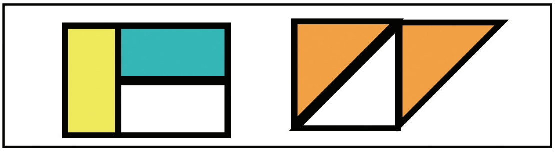


Figura 8 – Representações figurais de dois terços.

Além disso, o número dois terços pode representar situações que associam concepções diferentes e solicitar a manipulação de *ostensivos* em diversos registros de representação como, por exemplo:

- A relação existente entre partes que estão pintadas e o total de partes "iguais" em que a figura de um retângulo, por exemplo, foi dividida.


Duas das três partes em que o retângulo foi dividido, pode ser representado por $\frac{2}{3}$.

- Quanto custam dois terços de um queijo que inteiro custa R$ 3,60?
- Se em uma classe tem quinze meninas e dez meninos, podemos dizer que: "dois terços da classe são de meninos".

Nosso objeto de estudo, números fracionários, só existe com base nas representações que manipulamos para exprimi-los, a linguagem natural, falada ou escrita, é uma delas. No entanto, é necessário estabelecer uma convenção para a leitura da escrita fracionária: para os denominadores maiores que 10, e não potências de 10, devemos acrescentar a palavra *"avo"* ao número que determina a quantidade de partes em que a unidade foi dividida, o denominador.

Conforme o dicionário etimológico (Cunha, 1986), o termo foi deduzido da terminação da palavra latina oitavo, popularmente, interpretada como composta de oito + avo e começou a ser usado em nossa língua no século XX.

Para Alphonse (1995), quando a fração adquire o status de número, algumas características do sistema de escrita *a/b* devem ser consideradas: a) a representação não é única, por exemplo, $\frac{6}{4}$ e $\frac{9}{6}$, designam o mesmo número racional; b) A posição do traço de fração, em relação à linha de escrita, determina uma prioridade operatória e preserva a designação da escrita na forma de fração, por exemplo, $\frac{\frac{2}{3}}{4}$ e $\frac{2}{\frac{3}{4}}$ são escritas de números fracionários diferentes; c) Por causa da densidade dos números fracionários em relação aos reais, essa escrita possui um poder gerador que permite sempre intercalar um número fracionário entre dois fracionários dados que, por sua vez, leva a existência de uma infinidade desses números em um intervalo limitado; d) Podemos obter, um ou mais, processos de encadeamento, sem simplificação, que determinem uma convergência, por exemplo: $\frac{22}{7},\frac{221}{71},\frac{2211}{711},...$ e $\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{5}{12},\frac{12}{29},\frac{29}{70}...$;

e) A introdução de uma escrita limitada ou ilimitada permite a introdução do signo operatório em desenvolvimentos de frações contínuas que permite a designação de números fracionários do tipo $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+.....}}$ que representa $\sqrt{2}$(14).

A seguir, apresentaremos, a Organização Matemática que servirá de referência para a formação dos professores e para elaboração da Organização Didática para o ensino de alunos da quinta série, não pretendendo, neste estudo, esgotar as possibilidades de tipos de tarefas ou técnicas associadas.

Com certeza, variações das tarefas apresentadas serão possíveis e, consequentemente, técnicas mais ou menos complexas poderão ser mobilizadas. Assim, trataremos de tarefas e técnicas que acreditamos ser fundamentais para a conceituação dos fracionários nesta série, pois essa conceituação vai além

---

14 Estas expressões são facilmente obtidas. Suponhamos que $x=\sqrt{2}-1 \Rightarrow x+1=\sqrt{2} \Rightarrow (x+1)^2=2 \Rightarrow x^2+2x=1 \Rightarrow x(x+2)=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2+x}$, como $x=\sqrt{2}-1$ temos: $x=\frac{1}{2+\frac{1}{2+...}}=\sqrt{2}-1$.

do Ensino Fundamental, exigindo organizações matemáticas com maior grau de complexidade.

3.1 A concepção parte-todo

Iniciamos por esta concepção porque, geralmente, as primeiras tarefas utilizadas no ensino de números fracionários sugerem a mobilização dessa concepção e, também, porque estão presentes na maioria das discussões a respeito de outras concepções.

A concepção parte-todo emerge da ação de dividir uma grandeza contínua (comprimento, área, volume, ...) em partes equivalentes ou uma grandeza discreta (coleção de objetos) em partes iguais em quantidades de objetos. Usualmente, são manipulados dois tipos de objetos *ostensivos*: o registro da escrita simbólica *a*/*b*, associado ao registro figural em que regiões ou conjunto de figuras, representando elementos discretos, aparecem divididos em partes "iguais".

O sujeito para mobilizar a concepção parte-todo deve relacionar um, ou mais, registros escritos; uma, ou mais, figuras divididas de certa maneira e vice-versa, ou ainda, criar relações pertinentes como, por exemplo, as apresentadas na Figura 9.

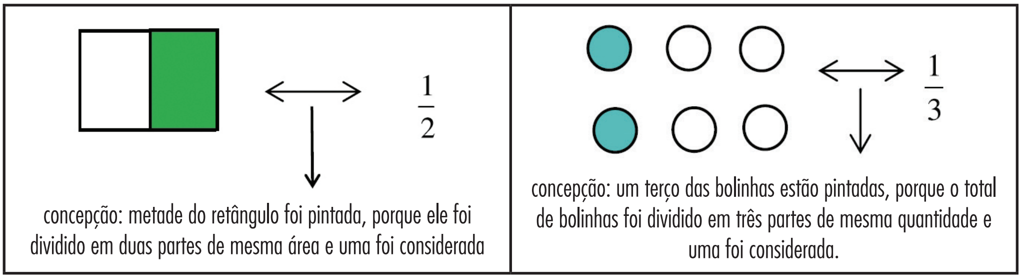


Figura 9 – Representação geométrica e simbólica da concepção parte-todo.

O sujeito deve entender, genericamente, que o todo recebe também o nome de inteiro e que a escrita $\frac{a}{b}$ descreve uma partição, em que o número b indica a quantidade de partes "iguais" em que o inteiro foi dividido.

Na realidade, é a partição do inteiro que permitirá nomear cada uma das partes em meios, terços, quartos, etc., sendo por isso chamado de denominador. O número a, por sua vez, representa a quantidade de partes que está sendo considerada do inteiro, sendo por isso, chamado numerador. Como o inteiro foi dividido em b partes, total de partições, a quantidade representada por a, não pode exceder o número b, o que obriga o número fracionário $\frac{a}{b}$ a ser no máximo igual a um.

A esse respeito, Adjiage e Pluvinage (2000) afirmam que a expressão “4/3 de torta” é sempre incômoda e que juntar uma segunda torta não muda grande coisa, pois se falará sempre em 4/3 de uma torta, no singular.

Um dos tipos de tarefas que faz a concepção parte-todo ser mobilizada solicita, frequentemente, a quantificação ou identificação de parte de um inteiro, em figuras que representem grandezas contínuas ou discretas. A técnica empregada para cumprir esse tipo de tarefa é a dupla contagem das partes que, como já vimos, tem suas limitações.

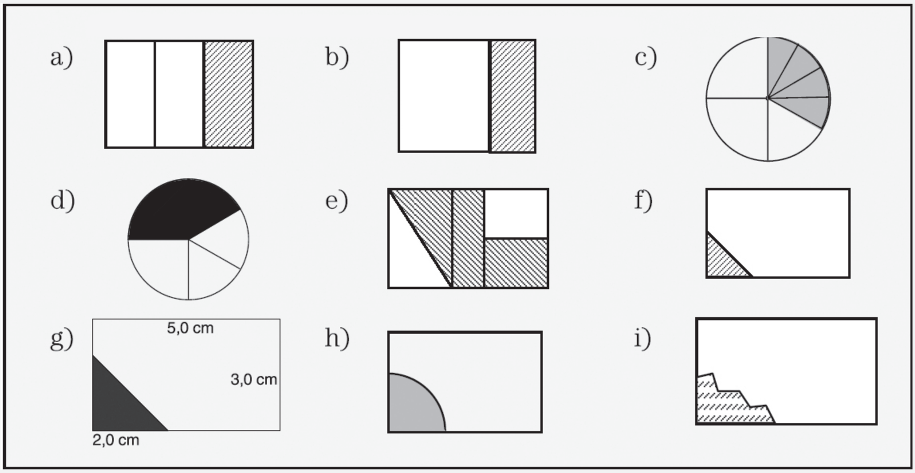
Nessas tarefas dois conhecimentos são indispensáveis: a natureza do inteiro e como ele pode ser dividido, e o que será considerado como parte desse inteiro. Disso dependerá a construção e ou escolha da técnica adequada para a percepção, inclusive, dos limites da dupla contagem das partes.

Para melhor compreensão desses pontos, a seguir, serão analisados alguns tipos de tarefas que associam a concepção parte-todo, bem como possíveis técnicas de resolução.

As tarefas que pedem a mobilização da concepção parte-todo envolvendo grandezas contínuas, geralmente, solicitam a manipulação de representações desse tipo de grandeza em figuras. Trataremos aqui somente de comprimentos e superfícies, por serem as mais utilizadas, pois a essência da técnica permanecerá no tratamento de outras grandezas, podendo apenas se tornar mais complexa.

1º tipo – Identificar o número fracionário que corresponde a uma figura apresentada.

Tarefa 1: *Que parte da figura está pintada?*



Nas tarefas desse tipo, é necessário apresentar figuras diferentes cuja manipulação permitirá construir técnicas distintas. A tarefa (1-a) apresenta uma figura usual que associa a técnica da dupla contagem das partes, porque basta contar o total de partes em que o inteiro foi dividido e as partes que estão pintadas e relacionar esses resultados ao fracionário $\frac{1}{3}$, pois, a figura foi apresentada totalmente dividida em partes congruentes.

Na tarefa (1-b), a técnica consiste em supor que a figura "esconde" um dos traços de divisão e, após medir a base do retângulo, para confirmar tal suposição, identificar três partes de mesma medida, igualmente, o fracionário $\frac{1}{3}$.

Na tarefa (1-c), embora todos os traços estejam explícitos, a técnica associada consiste em perceber que, pelo fato de a figura não estar dividida em partes de mesma área, é necessário identificar a equivalência da parte pintada com a não pintada para identificar o nome das partes pintadas, no caso doze avos, e como quatro delas estão pintadas, associar a fração $\frac{4}{12}$, que representa, também, o fracionário $\frac{1}{3}$, sem necessariamente ter de dividir toda a figura em partes congruentes para confirmar a dupla contagem.

Na tarefa (1-d) a técnica associada torna-se mais complexa porque as partes pintadas são quartos e sextos e, neste caso, é necessário perceber a equivalência entre as partes que estão pintadas, subdividindo-as ou não, e perceber que a parte pintada pode ser dividida em doze avos e associar 1/4 a 3/12, e 1/6 a 2/12, concluindo que a parte pintada da figura corresponde ao número 5/12, sem precisar dividir toda a figura. A esta técnica, poderia ser associada a adição de fracionários: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$.

Na tarefa (1-e), como a forma das partes é diferente, é preciso perceber que o triângulo e o retângulo pintados têm áreas equivalentes ao retângulo central. Para isso, basta comparar as medidas de cada segmento que compõe o lado maior do retângulo e constatar que os dois segmentos maiores medem, cada um, o dobro do segmento menor. Esta ação permitirá entender que a figura está dividida em cinco partes iguais, em medida de área, com três delas pintadas e associar, então, a essa figura o número fracionário 3/5.

Na tarefa (1-f), a técnica exige a reconfiguração[15] da figura apresentada com base na percepção de que os lados do retângulo medem, respectivamente, duas e três vezes a medida do cateto do triângulo. A partir daí, mentalmente ou, agindo diretamente sobre a figura, colocando os traços que faltam, perceber que o retângulo pode ser dividido inteiramente em partes congruentes ao triângulo

15 A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas, que consiste em uma divisão de uma figura em subfiguras, em sua comparação e em sua reorganização eventual em uma figura de um contorno global diferente (Duval, 1995, p. 185, tradução nossa).

apresentado e, então, utilizando a contagem associar o número fracionário 1/12 a parte pintada da figura.

Para o cumprimento da tarefa (1-g), uma das técnicas associadas é semelhante à aplicada na tarefa anterior, pois o cateto do triângulo não cabe um número inteiro de vezes nos lados do retângulo. Embora a reconfiguração, a partir de uma malha de 1 cm de lado permita a contagem e a associação do fracionário 4/30 ou 2/15 (dois, quinze avos).

Uma outra técnica seria calcular a medida da área do triângulo e a do retângulo, para relacioná-las com base na mobilização da concepção de razão, obtendo diretamente o fracionário 2/15 (dois em quinze).

Esta tarefa solicita, inicialmente, a mobilização da concepção parte-todo, mas como a dupla contagem das partes ou a reconfiguração em partes congruentes a que está pintada, não são suficientes para resolver o problema, é necessário pensar em outro tipo de reconfiguração ou associar a concepção de razão entre a medida da área do triângulo e do retângulo apresentadas na figura.

A tarefa (1-h) não poderá ser resolvida nem pela dupla contagem das partes, nem por reconfiguração. Neste caso, é necessário associar a concepção parte-todo à concepção de razão com técnicas para o cálculo de áreas para desenvolver a técnica adequada.

Na figura da tarefa (1-i), percebe-se que uma fração do retângulo está pintada, mas as técnicas anteriores não são suficientes. É necessário escolher uma unidade de medida de área para quadricular o retângulo e, então, determinar a fração aproximada que representará a parte pintada do retângulo pela dupla contagem das partes. Aliás, a técnica aqui utilizada pode significar um retorno, ao estudo de áreas, com base na utilização de malhas quadriculadas.

3.1.1 Dificuldades

A ênfase dada, pelo ensino, às tarefas em contextos contínuos, em que a concepção parte-todo é associada e a única técnica utilizada é a dupla contagem das partes pode constituir um obstáculo didático para o sujeito construir outras técnicas.

Em situações dos tipos (1-b) a (1-g), é comum procurar dividir a figura em partes congruentes para garantir a possibilidade da dupla contagem que se torna impossível nas situações (1-h) e (1-i). Como consequência, ainda, pode acontecer a produção de erros, algumas vezes, grotescos como afirmar que não é possível representar a parte pintada dessas figuras por um fracionário ou, simplesmente, aplicar a dupla contagem das partes em figuras que não estão divididas em partes "iguais", em relação à forma ou à área, como no caso da Figura 10, em que se relacionam os números 3/5 e 2/6, respectivamente.

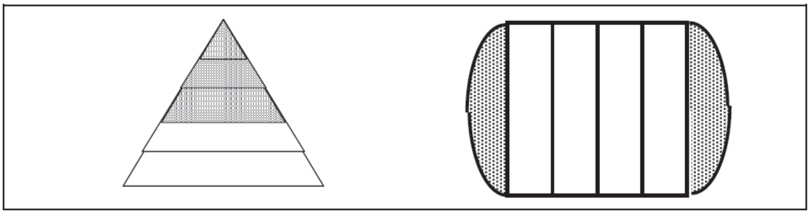
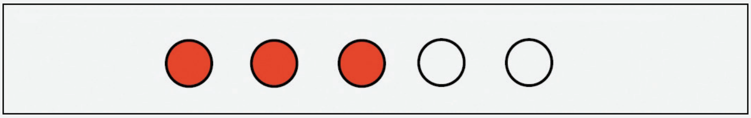


Figura 10 – Dificuldades na concepção parte-todo, caso contínuo.

Entendemos que, se o ensino enfatiza esse tipo de tarefa, apresentando figuras que permitem somente o desenvolvimento da técnica da dupla contagem das partes, não dará a chance de os alunos construírem outras técnicas e, consequentemente, terão suas ações limitadas na resolução desse tipo de tarefa.

Além disso, pautado no ponto de vista parte-todo, não farão sentido as frações maiores que um, no caso de 8/5, por exemplo: como entender que posso considerar oito partes, se o inteiro foi dividido em cinco? Se para tratar dessa questão acrescentarmos outro inteiro, a criança poderá pensar que passou a ter dez partes e não mais cinco. Um outro ponto a ser considerado, é entender o fracionário como quociente com base no modelo parte-todo: como entender $2 \div 3$, por exemplo, a partir de $\frac{2}{3}$, se este significa que um inteiro foi dividido em três partes e dessas consideramos duas?

Tarefa 2: *Que parte das bolinhas são vermelhas?*



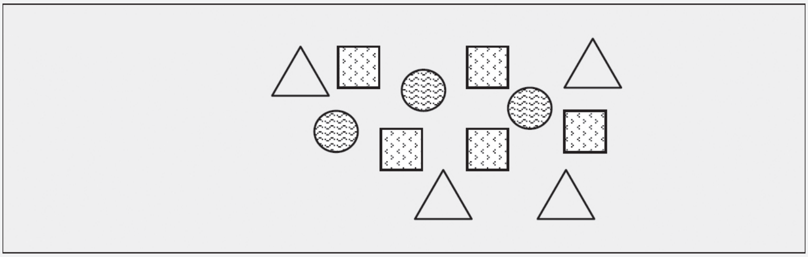
As tarefas que pedem a mobilização da concepção parte-todo associada a grandezas discretas, normalmente, são tratadas nas séries iniciais como *"fração de um número"* solicitando a manipulação de representações de coleções de objetos idênticos do dia-a-dia (como se isso fosse possível), como flores, animais, brinquedos, etc. Aqui, utilizaremos bolinhas representadas por círculos em três tipos de tarefa:

O conjunto de bolinhas, da tarefa 2, representa um inteiro de cinco bolinhas, em que três são vermelhas, o que permite relacionar a quantidade de bolinhas vermelhas com a quantidade total, isto é, a relação entre parte e todo, poderá ser descrita pelo número fracionário 3/5.

Esta ação permite a compreensão de que cada bolinha compreende uma parte do conjunto e que três delas são vermelhas. A técnica empregada é a dupla contagem: contar o total de bolinhas que, na representação simbólica, ocupará o lugar do denominador e contar as que são vermelhas que ocuparão o lugar do numerador na representação simbólica.

Como uma variação da tarefa anterior, pode-se apresentar uma figura, como a da tarefa 3 que mobiliza a concepção parte-todo em grandezas discretas, é possível solicitar, por exemplo, a parte do conjunto representada pelos quadrados.

Tarefa 3: *determinar a fração das figuras que corresponde aos quadrados.*



Neste caso, embora as figuras não representem objetos "idênticos", nada impede que possamos falar "5/12 das figuras desse conjunto que são quadrados", pois perde sentido a "igualdade das partes".

2º tipo: identificar um número fracionário dado em uma figura.

Tarefa 1: *Pinte metade da figura.*

Tarefa 2: *Pinte um terço da figura.*

Tarefas deste tipo, que não são constantes no ensino, exigem do sujeito um planejamento para decidir onde colocar os traços de divisão da figura em partes e quais delas serão pintadas.

A concepção parte-todo mobilizada, neste tipo de tarefas, permite a manipulação do fracionário da linguagem natural para o registro *a/b* e o desenvolvimento da técnica que consiste em dividir a figura apresentada em "*b*" partes, de mesma área, para pintar "*a*" dessas partes. Esta técnica pode variar, em complexidade, dependendo das variáveis didáticas escolhidas: o número fracionário e as figuras apresentadas.

A divisão de uma figura em duas partes de mesma área pode ser obtida, da maneira direta, por um único traço:

– sem associar a concepção de medida: por exemplo, no caso em que a diagonal da figura ou o centro do círculo permite a divisão pretendida.

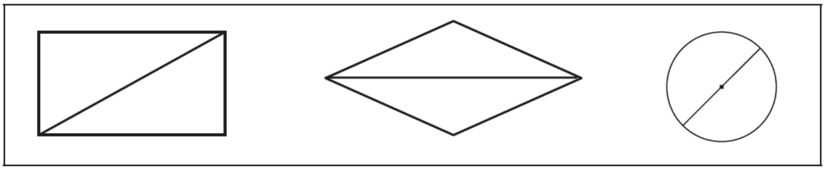


Figura 11 – Concepção parte-todo, caso contínuo, 2º tipo (c).

– associando a concepção de medida: em que a técnica consiste em medir, por exemplo, um dos lados de um triângulo ou os dois lados opostos de um retângulo ou de um trapézio, para determinar a localização do traço de divisão.

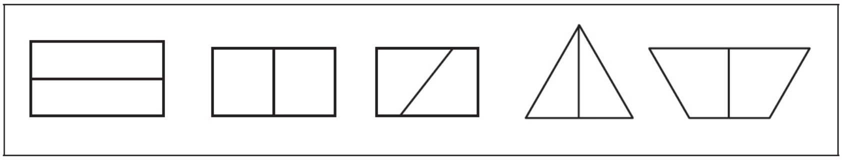


Figura 12 – Concepção parte-todo, caso contínuo, 2º tipo (d).

Dependendo da figura escolhida, a divisão, em duas partes de mesma área, não resulta em partes de mesma forma e pode solicitar conhecimentos de propriedades da Geometria ou mais do que um traço para a solução.

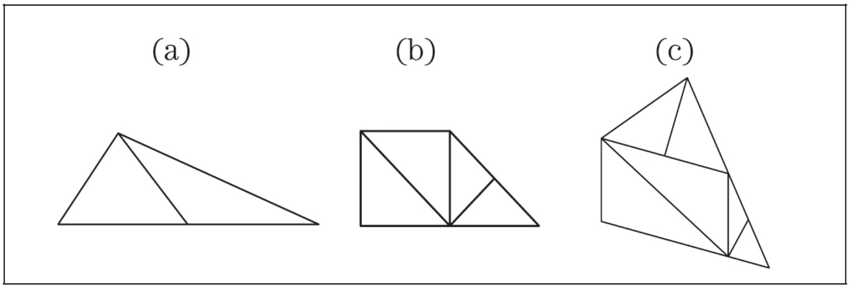


Figura 13 – Concepção parte-todo, caso contínuo, 2º tipo (e).

Nesse sentido, no exemplo da Figura 13-a, precisamos perceber que o segmento, que une o ponto médio de um dos lados do triângulo com o vértice oposto, produz dois triângulos de mesma área, porque os dois têm mesma base e altura. Nas tarefas que envolvem as Figuras 13-b e 13-c a decomposição da figura permitirá encontrar duas partes de mesma área.

No primeiro caso, basta dividir o trapézio em um quadrado e um triângulo e, então, tomar a metade do quadrado e a metade do triângulo, da mesma maneira que na figura anterior. No segundo caso, é necessário buscar uma reconfiguração conveniente, neste caso, foi construído um paralelogramo, baseando-se nos dois lados da figura dada e depois a divisão dos triângulos restantes. Outras decomposições poderiam ser feitas. Neste tipo de tarefas, a escolha dos números fracionários e das figuras que serão apresentadas, permitirá a construção pelo sujeito, da maior variedade de técnicas possíveis.

Por outro lado, a divisão de superfícies em figuras desenhadas permite que se mantenha o inteiro, dado inicialmente que não aconteceria se fosse solicitada a divisão física (recorte) desse inteiro, pois poderia levar o aluno a considerar as partes obtidas como novos inteiros e a utilizar a contagem para obter a resposta solicitada, discretizando o contínuo.

Para o círculo, em particular, as partes de mesmo nome, sempre terão a mesma forma; no entanto, para a divisão é necessário, além da determinação do centro do círculo, conhecimentos de técnicas próprias do desenho geométrico ou dobradura para dividir em dois, quatro ou um número múltiplo de quatro de partes.

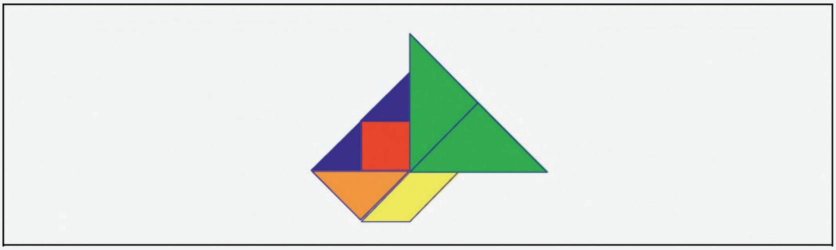
Para cumprir a tarefa 3, a técnica, consiste em contar a quantidade de bolinhas da figura, dividindo essa quantidade em quatro partes "iguais" (mesma quantidade de bolinhas), selecionar três dessas partes para serem pintadas, compreendendo por essa ação que nove bolinhas foram pintadas, porque estas equivalem a 3/4 das doze bolinhas apresentadas.

Tarefa 3: *Pintar três quartos das bolinhas da figura.*

Esta técnica encaminha diretamente a mobilização da concepção de operador, que veremos em detalhes mais à frente, na percepção de que $\frac{3}{4}\times 12 = 9$, que, por sua vez, poderia ser associada à seguinte operação: $\frac{3}{4}\times 12 = (12 \div 4)\times 3$. O mesmo podendo acontecer na percepção de que $\frac{1}{4}\times 12 = 3$. Ao associar a técnica da dupla contagem à concepção de operador, podemos identificar a fração da quantidade de elementos de um conjunto, como uma ação de desagrupamento conveniente do inteiro apresentado.

3º tipo – Compor inteiros e determinar fracionários

Tarefa 1: *Construa uma figura com peças do tangran e determine a fração dessa figura, que corresponde ao quadradinho vermelho.*



Neste tipo de tarefa, é possível solicitar a criação de figuras com base nas peças de um tangran, como a apresentada na tarefa 1, e a associação do número que representa a parte pintada de vermelho, por exemplo, pois a partir do quadrado-base do tangran é possível perceber a relação entre as áreas das peças, considerando o triângulo menor como peça de referência.

No caso dessa figura, a técnica consiste em relacionar a peça azul, de menor área, com as outras peças e concluir que a figura pode ser decomposta em 16 partes, equivalentes em área. A partir daí, pode-se associar à parte vermelha da figura, por exemplo, o número 2/16 ou 1/8.

Tarefa 2: *Pedro tem 3 bolinhas de gude, João tem 4 e Marcos tem 5 bolinhas. Que parte das bolinhas cada um tem?*

A situação pode ser ilustrada pelo desenho de doze círculos, conforme a Figura 14, com a parte que corresponde a cada criança pintada de uma cor, associando às bolinhas de cada cor, um número fracionário para representá-las.

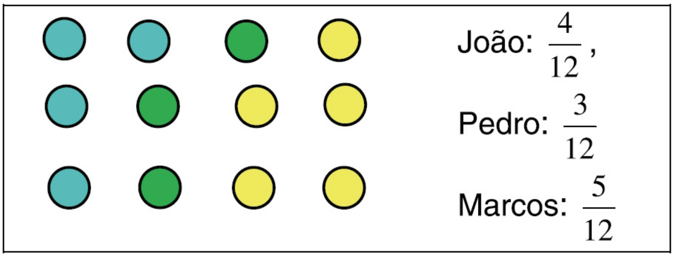
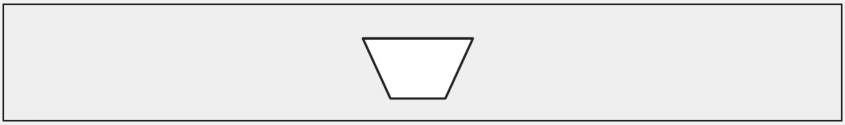


Figura 14 – Concepção parte-todo, caso discreto, 3º tipo (a).

Neste caso, o conjunto de bolinhas apresentado no final, não possui partes de mesma quantidade, porque estas não resultam da divisão do inteiro, mas, sim, do agrupamento de três partes, com quantidades diferentes de bolinhas para a constituição de um inteiro. Cada bolinha representará, então, 1/12 do total e a técnica consiste em agrupar as partes, identificar pela contagem a quantidade total de bolinhas e a parte relativa a cada criança para, então, representar o número fracionário.

4º tipo – Reconstituição do inteiro

Tarefa 1: *Se a figura abaixo é um terço do inteiro, desenhe o inteiro.*



Este tipo de tarefa permitirá a mobilização da reversibilidade da dupla contagem das partes, isto é, se para obter um terço de uma figura, fizermos a divisão em três partes de mesma área, então, quando apenas uma dessas partes for apresentada será necessário percorrer o caminho de volta, obter uma figura com três partes congruentes à figura dada para alcançar o inteiro.

Além de auxiliar na percepção visual das figuras e seu tratamento com base na composição, aprofunda a compreensão da concepção parte-todo. É necessário considerar que a resposta para essa tarefa não seja única, entre elas, poderemos obter as representações apresentadas na Figura 15:

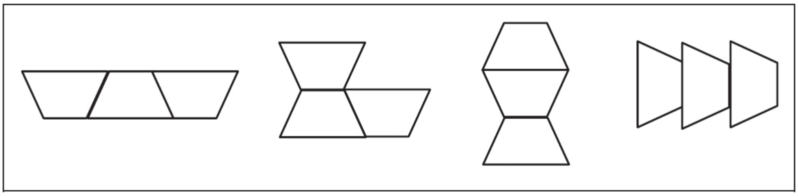


Figura 15 – Reconstituição do inteiro, parte-todo no contínuo.

Tarefa 2: *Se 2/7 das bolinhas de Sérgio são brancas e ele tem 12 bolinhas brancas, qual o total de bolinhas que Sérgio possui?*

Da mesma forma, que na situação que envolve grandezas contínuas, aqui é necessário mobilizar a reversibilidade para resolver a tarefa. Neste caso, se dois grupos de 1/7 equivalem a 12 bolinhas, um desses grupos equivale a 6 bolinhas e, portanto, o inteiro é formado por 42 bolinhas que correspondem a sete grupos de seis: 7 x 6, diferente da situação similar com grandezas contínuas, aqui a solução é única.

3.1.2 Dificuldades

Nos três tipos de tarefas que pedem a mobilização da concepção parte-todo associada a grandezas discretas, a técnica da dupla contagem cumprem-nas satisfatoriamente. No entanto, algumas dificuldades podem se apresentar quando, em tarefas do segundo tipo, se depara com a impossibilidade da divisão igualitária, isto é, se quisermos identificar 1/4 de um conjunto que tem 15 bolinhas.

Isso significa que a tarefa não admite nenhuma técnica, pois não se pode dividir uma bolinha em quatro partes, porque tal ação descaracterizaria o objeto. Esse tipo de tarefas só terá uma técnica associada, quando a quantidade de elementos do inteiro for um número múltiplo do denominador do número fracionário apresentado, caso contrário não apresenta solução.

Podemos concluir, assim, que os tipos de tarefas que associam a concepção parte-todo, em contextos discretos ou contínuos, podem possibilitar a construção de diferentes técnicas, desde que sejam feitas escolhas convenientes das variáveis apresentadas na tarefa.

Na realidade, o desenvolvimento das técnicas dependerá da manipulação de *ostensivos* adequados e da maior variedade possível, pois uma simples alteração em uma figura, poderá desencadear uma nova manipulação e, consequentemente, uma nova técnica.

3.2 A concepção de medida

As tarefas envolvendo medições de comprimentos são apropriadas para a percepção da limitação dos números naturais, como resultados de medições, e da necessidade de “novos números” para a quantificação adequada de comprimentos.

As tarefas de medição naturalmente associam a concepção de medida, solicitando a manipulação de um padrão, chamado de unidade de medição que, por sua vez, dependerá diretamente da grandeza em jogo. Entendemos que medimos grandezas contínuas e contamos grandezas discretas, embora possamos citar a moeda instituída por uma sociedade, como uma unidade que mede suas transações de compra e venda, como um caso de grandeza discreta. O poder de compra do cidadão de um certo país é medido por uma unidade monetária que pode ser comparada com a de outros países: um dólar compra mais que um real, por exemplo. No entanto, embora as unidades monetárias sejam divididas em cem partes: os centavos.

No Brasil, encontramos o preço da gasolina determinado por milésimos do real que, na realidade, não existe como moeda. É um caso em que o dado de realidade não faz sentido.

Neste trabalho, optamos por tratar apenas de tarefas que envolvem medidas de comprimento, por entender que a construção de técnicas apropriadas para tais tarefas garantirá o desenvolvimento de técnicas para o tratamento de outros tipos de grandezas, mesmo que mais complexas.

As tarefas associadas à concepção de medida de comprimento, geralmente, podem solicitar a manipulação de três tipos de objetos *ostensivos*: a figura de uma reta numérica ou algum esquema de medida, o número fracionário *1/b* que representa uma subunidade, isto é, a unidade escolhida foi dividida em *b* partes para permitir a medição e o número fracionário *a/b* que representará o resultado da medição realizada.

A divisão da unidade escolhida, por sua vez, permitirá relacionar a concepção de medida a de parte-todo para possibilitar tal divisão. Em retas numeradas ou esquemas de medida, é necessário determinar o ponto de partida para a medição e o sentido em que a medição ocorrerá, podendo ser o zero ou um outro ponto qualquer.

O número fracionário *a/b* obtido permitirá a compreensão de que a subunidade *1/b* foi utilizada *a* vezes na medição efetuada. A utilização precoce da régua milimetrada para medições encaminha para a discretização do contínuo, porque exige como técnica somente a contagem de centímetros e milímetros escondendo suas origens como subunidades do metro. Alguns tipos de tarefas podem ser considerados.

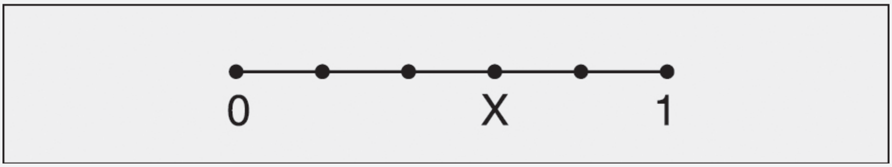
1° tipo – Determinar medidas de comprimento de um objeto.

Este tipo de tarefa solicita medições de comprimentos e pode ser cumprida pela escolha de uma unidade de medição (tiras de papel, régua de polegada, régua milimetrada e outros instrumentos) para ser comparada com o comprimento que está sendo medido. Esta comparação permitirá a constatação da necessidade da divisão da unidade escolhida para possibilitar a quantificação do comprimento em jogo.

Nas primeiras tarefas deste tipo, o ideal é usar tiras de papel para facilitar a divisão da unidade. É relevante utilizar unidades de medida diferentes para o aluno perceber que a quantificação do comprimento depende da unidade escolhida, isto é, o número que representa a medida varia, de acordo com a unidade.

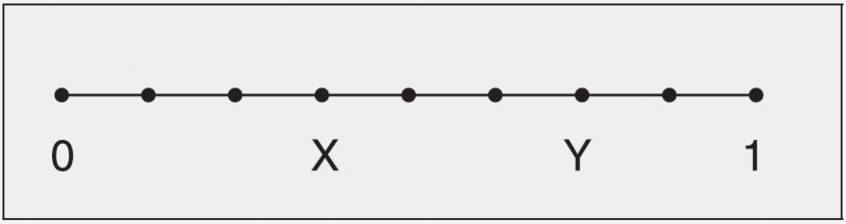
2º tipo **– Determinar medidas em segmentos divididos em partes iguais.**

Tarefa 1: *Qual a distância entre o X e o zero?*



Com o auxílio de um esquema de medida que apresenta a unidade dividida em partes iguais e o ponto que determina o comprimento a ser medido, a partir da origem. A tarefa poderá ser cumprida pela dupla contagem das partes, considerando que a unidade foi dividida em cinco partes de mesmo comprimento e que do ponto de origem até o ponto X existem três dessas partes, concluindo, assim, que a medida solicitada é 3/5 da unidade. A concepção de medida em tarefas desse tipo está diretamente associada à concepção parte-todo.

Tarefa 2: *Qual a distância entre X e Y?*



Esta tarefa será cumprida também a partir da dupla contagem das partes. O sujeito deve perceber que a unidade foi dividida em oito partes congruentes e que entre o ponto X e o ponto Y existem três dessas partes, associando então a esse comprimento a medida 3/8.

Nesses tipos de tarefas, a variação do objeto a ser medido ou do esquema apresentado permitirá ao sujeito mobilizar a concepção de medida de comprimento em tarefas mais complexas, como as que apresentam esquemas maiores que a unidade. Estas tarefas permitirão a manipulação de fracionários maiores que 1, tanto na forma mista como na imprópria, além de sua associação à soma de números fracionários, como podemos verificar na Figura 16.

No exemplo, da Figura 16, o sujeito perceberá que a distância de 0 a X pode ser representada por $1\frac{3}{5}$, este é um número localizado entre o 1 e o 2 porque, diferente das tarefas anteriores, esse esquema permitirá uma ordenação dos fracionários que auxiliará, mais tarde, na conceituação do conjunto dos números racionais.

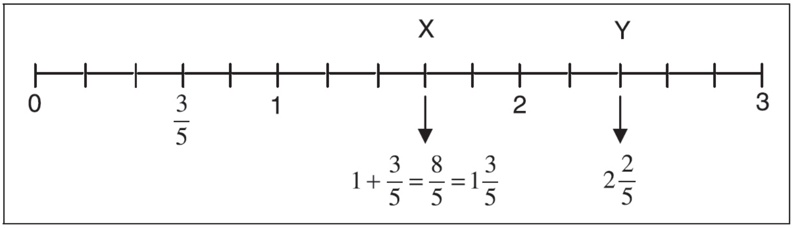
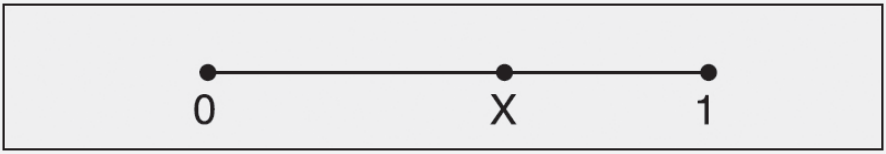


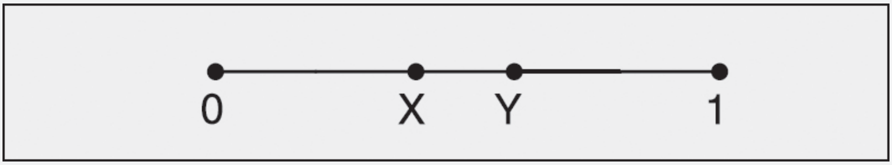
Figura 16 – Concepção de medida, 3º tipo (b).

3º tipo – Determinar medidas em segmentos não divididos em partes de mesma medida.

Tarefa 1: *Qual a distância entre 0 e X?*



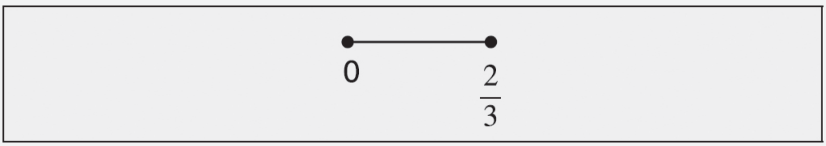
Tarefa 2: *Qual a distância entre X e Y?*



Nestes casos, é necessário dividir, convenientemente, o inteiro em partes de mesma medida que possibilitará utilizar a dupla contagem para encontrar a medida de 0 a X ou de X a Y.

4º tipo – Reconstituição da unidade.

Tarefa: *Se o desenho abaixo representa 2/3 da unidade, qual é a unidade?*



Para cumprir esta tarefa, é necessário perceber que se esse segmento representa dois terços, então, a unidade original foi dividida em três partes de mesmo comprimento e, destas, duas foram consideradas, isto é, temos duas vezes um terço.

Logo, para recompor a unidade original é necessário dividir o segmento dado em duas partes de mesma medida para identificar $\frac{1}{3}$ e elaborar uma nova figura com três dessas partes, conforme a Figura 17.

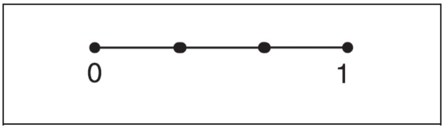


Figura 17 – Concepção de medida, reconstituição da unidade.

Acreditamos que os tipos de tarefas que associam a concepção de medida constituem o ambiente ideal para tratar os números fracionários maiores que um, para introduzir a notação mista desses números e a adição de dois fracionários de mesmo denominador.

Permitem ainda a introdução da equivalência entre fracionários, baseada no reconhecimento de que a mesma parte pode receber nomes diferentes, em função de novas divisões da unidade ou a familiarização com tais conhecimentos se estes já foram trabalhados anteriormente.

3.3 A concepção de quociente

As tarefas que solicitam a mobilização da concepção de quociente para números fracionários estão, geralmente, associadas a distribuições de grandezas. O *ostensivo a/b* que representa o resultado de uma distribuição significa que *a* foi distribuído em *b* partes, ou seja, *a* foi dividido em um número *b* de partes iguais. Diferente dos tipos de tarefas que associam as concepções tratadas anteriormente, nestas o *a* pode ser menor, maior ou igual a *b* e podem representar objetos diferentes como, por exemplo, "crianças" e "chocolates".

A operação de divisão consiste na técnica que, geralmente, cumpre essas tarefas, fazendo com que o ato de distribuir ou dividir, *a* em *b* partes iguais, associe ao fracionário *a/b* a operação $a \div b$. Em contextos discretos, a técnica é a divisão de naturais, não cabe a representação fracionária como resposta, mas a associação da concepção de operador. No caso de contextos contínuos, a técnica pede um plano de ação que pode tornar a divisão mais complexa dependendo da distribuição solicitada.

Em ambos os casos, a complexidade da técnica relaciona-se ao aspecto da divisão que será tratado: partitiva – quando são dados a quantidade de inteiros e o número de partes em que se quer dividir essa quantidade e pede-se o valor de cada parte –, ou por cotas – quando são dados a quantidade de inteiros e o valor de cada parte e pede-se a quantidade de partes possíveis.

1º tipo – Distribuir igualmente x objetos em um número y de partes.

Tarefa 1: *Quanto cada pessoa receberá de pizza se distribuirmos igualmente cinco pizzas entre quatro pessoas.*

Este problema refere-se à divisão de grandezas contínuas, em seu aspecto partitivo, cuja quantidade a ser distribuída, igualmente, é maior que o número de partes. Neste caso, identificamos, pelo menos, duas técnicas para cumprir a tarefa, ambas relacionadas à concepção parte-todo. Na primeira, o sujeito decide dividir cada pizza em quatro partes iguais, destinando a cada pessoa cinco dessas partes, concluindo que cada um recebe 5/4 de pizza.

No entanto, a divisão de todas as pizzas, em quatro partes, poderia levar o sujeito a considerar 20 ÷ 4 = 5, discretizando o contínuo e permitindo a operação com naturais. Na segunda, decide distribuir uma pizza inteira para cada pessoa e dividir a última, em quatro partes iguais, concluindo que a cada pessoa corresponde $1\frac{1}{4}$ de pizza. Os dois procedimentos podem ser representados pela Figura 18.

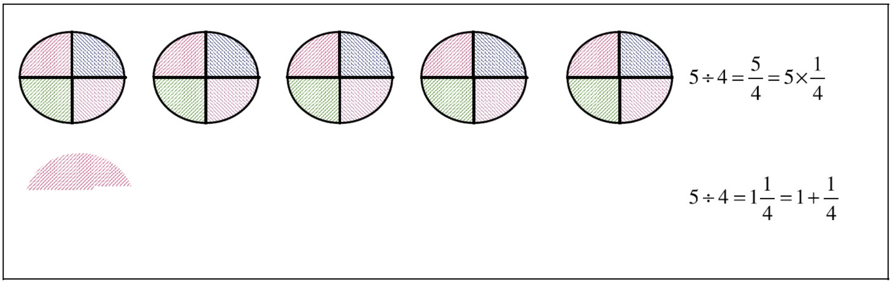


Figura 18 – Concepção quociente, caso contínuo, 1º tipo (a).

Notamos que tal distribuição relaciona-se naturalmente à representação 5 ÷ 4 e esta, por sua vez, à representação $\frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4}$ ou $1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$, possibilitando a compreensão de $a \div b = \frac{a}{b}$, cujo fracionário é um quociente.

Tarefa 2: *Quanto chocolate cada criança irá receber se distribuirmos igualmente três barras de chocolate entre cinco crianças.*

Esta tarefa, tratando ainda de grandezas contínuas, apresenta a quantidade a ser distribuída igualmente menor que o número de partes. Assim, mantendo o aspecto partitivo da divisão, a técnica pede, neste caso, a divisão dos três chocolates em cinco partes iguais, em quantidade de chocolate, encaminhando a resposta de que cada criança receberia 3/5 de um chocolate ou três pedaços de 1/5 do chocolate. Uma maneira de representar tal procedimento pode ser o da Figura 19.

No caso, pode ocorrer também a fuga para os naturais, considerando que 15 ÷ 5 = 3. É preciso notar a diferença entre, dividir um inteiro ou unidade em cinco partes iguais e, destas, considerar três partes (concepção parte-todo) da situação de dividir três inteiros em cinco partes iguais (concepção quociente), embora os dois casos possam ser representados por 3/5, conforme a Figura 19.

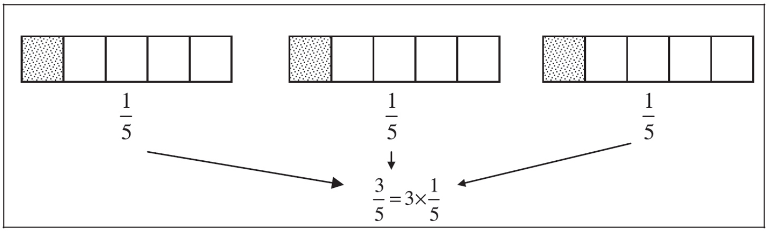


Figura 19 – Concepção quociente, caso contínuo, 1º tipo (b).

Tarefa 3: *Quantas bolinhas cada menino receberá se distribuirmos igualmente doze bolinhas entre três meninos.*

Este problema refere-se à divisão em seu aspecto partitivo, de grandezas discretas e é resolvido no campo dos naturais e, como tal, a escolha da quantidade a ser dividida pode levar à divisão com resto. No entanto, a representação 12 ÷ 3 = 4 pode ser relacionada à concepção de operador, permitindo a compreensão de que $12 \div 3 = \frac{1}{3} \times 12 = 4$, porque um terço das doze bolinhas é igual a 4 que, por sua vez, relaciona a concepção parte-todo porque o inteiro (doze bolinhas) foi dividido em três grupos de quatro bolinhas cada um.

2º tipo – Distribuir igualmente x objetos de acordo com uma cota dada.

Tarefa 1: *Quantas crianças receberão chocolate, se distribuirmos três chocolates, igualmente, de tal forma que cada uma receba 3/5?*

A técnica consiste em procurar quantas vezes 3/5 são necessárias para completar os três chocolates e perceber que, nessas condições, cinco crianças receberão chocolate. Esta ação pode ser representada pela Figura 20:

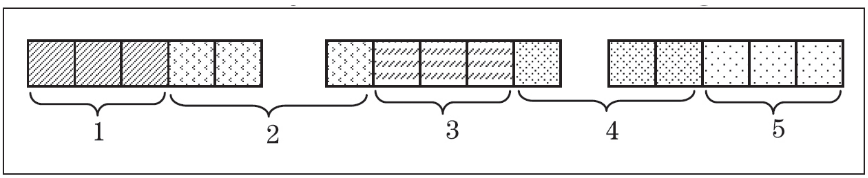


Figura 20 – Concepção quociente, caso contínuo, 2º tipo (a).

A representação manipulada por essa técnica associa a divisão de um inteiro por um fracionário: $3 \div \frac{3}{5} = 5$, sem necessidade de explicitar técnicas operatórias para tal divisão. Variações dessa tarefa, pela escolha de cotas diferentes, encaminham a respostas imediatas em situações futuras.

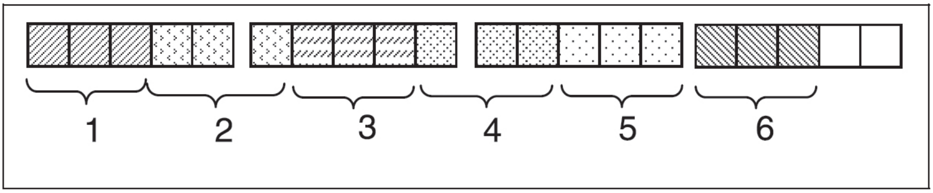


Figura 21 – Concepção quociente, caso contínuo, 2º tipo (b).

Já, a escolha da quantidade de inteiros a ser dividida pode tornar a técnica mais complexa. Por exemplo, se alterarmos a quantidade de chocolates para quatro, percebemos que a mesma técnica não permite concretizar a distribuição solicitada, pois seis crianças receberiam a cota determinada, mas sobrariam 2/5 de um chocolate, como podemos ver na Figura 21.

Tarefa 2: *Quantas bolinhas cada criança recebe se distribuirmos 105 bolinhas de tal forma que cada criança receba 15?*

Tratando de cotas de grandezas discretas, o problema pode ser resolvido no campo dos naturais e envolve a divisão em seu aspecto de cotas, pois a técnica consiste em dividir o número que representa a quantidade de bolinhas, pelo número de bolinhas que corresponde a cada cota, obtendo 105 ÷ 15 = 7.

Como no tipo anterior, a relação com a concepção parte-todo conduz a compreensão de que o inteiro (105 bolinhas) foi dividido em 7 partes de 15 bolinhas cada uma que relacionada à concepção de operador permitirá perceber que $\frac{1}{15} \times 105 = 7 = 105 \div 15$.

3.4 A concepção de razão

As tarefas associadas à concepção de razão, para números fracionários, geralmente, não permitem associar a ideia de partição como nas anteriores, mas a ideia de comparação entre medidas de duas grandezas.

Nesse sentido, a representação $\frac{a}{b}$ ou $a : b$, utilizada para esses casos, nem sempre se associa à concepção de quociente, seria entendida como um índice comparativo, sem necessariamente transmitir a ideia de número.

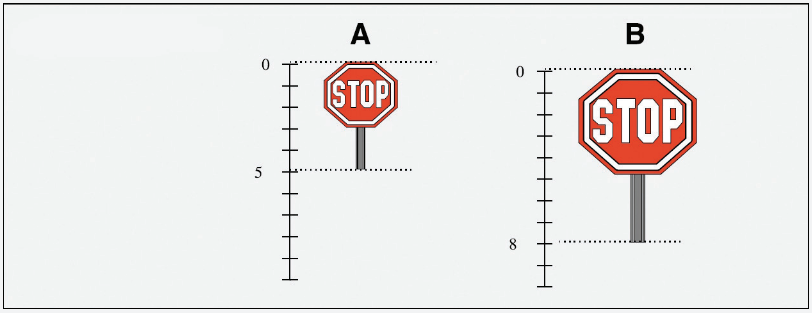
Assim, a representação fracionária $\frac{2}{3}$, por exemplo, associada à concepção de razão, não permitiria a leitura "dois terços" e, sim, "dois para três". O entendimento da razão como *"x para y"* encaminharia, naturalmente, para a equivalência de razões e para o raciocínio proporcional que, por sua vez, solicita uma representação: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

A proporcionalidade envolve diretamente a equivalência de números fracionários e caracteriza-se, como uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas. Na descrição inicial da situação, uma constante é apresentada, implícita ou explicitamente, determinada por uma relação particular entre *a* e *b*, em que qualquer mudança em *a* provocará uma mudança previsível em *b*.

As tarefas que associam a concepção de razão podem comparar grandezas de mesma natureza ou não, em contextos contínuos e ou discretos, podendo ainda estar associadas a situações do tipo: todo-todo – quando compara as quantidades de dois inteiros; parte-parte – quando compara as quantidades de duas partes de um inteiro ou partes de dois inteiros, ou ainda, parte-todo.

1° tipo **– Determinar uma razão.**

Tarefa 1: *Determinar a razão de ampliação e de redução entre as figuras A e B.*

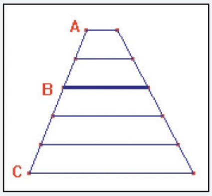


Esta tarefa refere-se a grandezas continuas de mesma natureza em uma situação do tipo todo-todo, caracterizando situações de ampliação e redução de figuras. A técnica que a cumpre, consiste em perceber, com base na figura apresentada, que a medida da altura da placa A de 5 unidades e a B de 8 unidades, obtendo a razão de A para B é de "5 para 8", caracterizando uma ampliação. Por outro lado, a razão de B para A é de "8 para 5", caracterizando uma redução. Estas razões podem ser representadas por $\frac{5}{8}$ ou 5 : 8 e $\frac{8}{5}$ ou 8 : 5, respectivamente.

Tarefa 2: *A miniatura de um objeto tem 12 cm de comprimento. Se na realidade esse objeto tem 60 cm de comprimento, qual foi a escala utilizada?*

A determinação da razão em tarefas desse tipo permite a definição da escala, como sendo a razão entre a medida de um comprimento em um desenho ou miniatura e a medida correspondente no objeto real.

Tarefa 3: *Determinar a razão da medida do segmento AB para a medida do segmento BC.*



A tarefa caracteriza uma situação parte-parte e a técnica utilizada consiste em verificar que o segmento AC está dividido em cinco partes de mesmo comprimento, o que permite estabelecer que $\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$. Esse tipo de tarefa é comum no estudo de semelhança de figuras e justifica-se pelo Teorema de Tales.

Tarefa 4: *Determinar a razão entre açúcar e farinha numa receita de bolo que utiliza duas xícaras de açúcar para três de farinha.*

Tratando-se de grandezas contínuas de mesma natureza, caracterizando uma situação do tipo parte-parte, a comparação efetuada nesta tarefa não permite a mobilização da ideia de número fracionário "dois terços" nem da concepção de quociente, pois a divisão de 2 por 3 não faria sentido. No entanto, permite mobilizar o raciocínio proporcional para aumentar ou reduzir a receita do bolo.

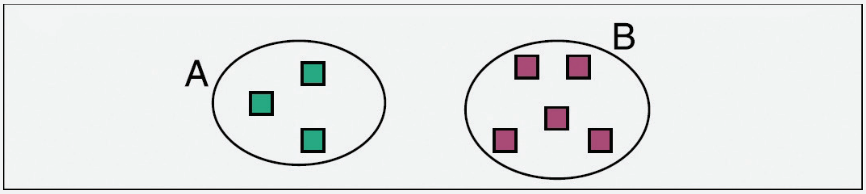
Tarefa 5: *Se para fazer uma jarra de refresco utilizamos 3 copos de suco para 12 copos de água, qual a razão de suco para água?*

Caracterizando uma situação parte-parte com grandezas contínuas de mesma natureza, da mesma forma, a comparação solicitada nesta tarefa possibilitará a mobilização da ideia do número fracionário "um quarto", como parte-todo, pois, poderemos dizer que "1/4 da jarra de refresco é de suco". Permitirá, também, a mobilização do raciocínio proporcional se for necessário produzir mais refresco com a mesma concentração de suco.

Tarefa 6: *Qual a velocidade de um carro que percorre 100 km em 2 horas?*

A tarefa caracteriza uma situação todo-todo com grandezas de naturezas diferentes e a comparação permite a definição de uma nova grandeza: a velocidade, como sendo a razão entre o espaço percorrido e o tempo gasto para percorrê-lo. A resolução desta tarefa mobiliza a ideia de número fracionário associado à concepção de quociente para obter o valor da velocidade, permitindo, inclusive, a mudança do registro da escrita fracionária para a escrita decimal.

Tarefa 7: *Determinar a razão entre a quantidade de elementos de A e a quantidade de elementos de B.*



Caracterizando uma situação do tipo todo-todo, com grandezas discretas de mesmo tipo, é necessário para determinar a razão solicitada, contar a quantidade de elementos de cada conjunto para relacioná-los, como uma razão e representá-la por $\frac{3}{5}$ ou 3 : 5. Esta razão será interpretada como se *"para cada grupo de três quadradinhos no conjunto A, corresponde um grupo de cinco quadradinhos no conjunto B"*. Variações desta tarefa podem solicitar a mobilização do raciocínio proporcional, alterando a quantidade de elementos de um dos conjuntos e solicitando a quantidade de elementos do outro conjunto, a partir da mesma razão.

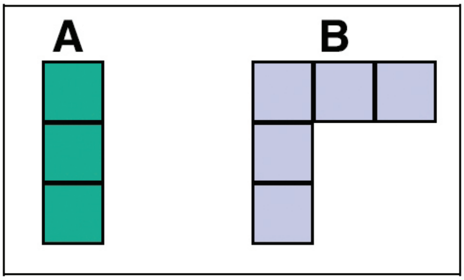
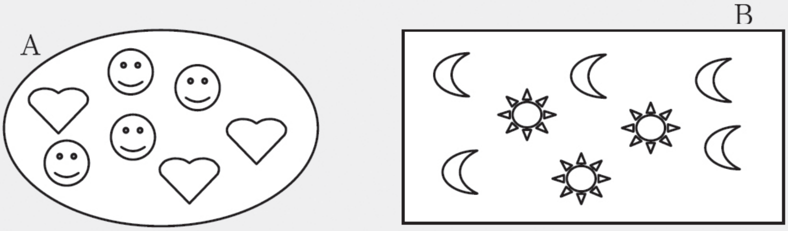


Figura 22 – Concepção de razão, caso discreto (b).

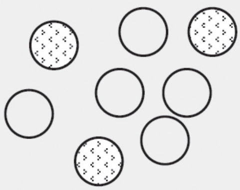
A Figura 22 mostra uma variação da tarefa 7 que embora represente grandeza contínua, pode ter a razão determinada por meio da contagem, propiciando o mesmo entendimento das tarefas anteriores, visto que a contagem discretiza as representações contínuas da figura.

Uma outra variação poderia ser a comparação entre a quantidade de desenhos das Figuras A e B da tarefa 8.

Tarefa 8: *Determine a razão entre a quantidade de figuras de coração do conjunto A e a quantidade de figuras de lua do conjunto B.*



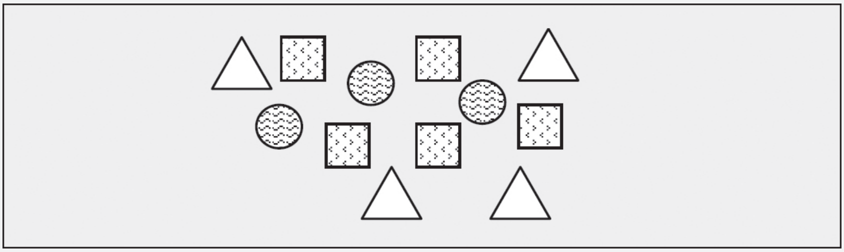
Tarefa 9: *Determine a razão entre a quantidade de bolinhas pintadas e a quantidade de bolinhas brancas da figura abaixo:*



Nas tarefas 8 e 9, a comparação é do tipo parte-parte, porque relaciona partes de dois conjuntos ou partes que compõem um único inteiro. Além disso, vemos que na primeira, os conjuntos são formados de elementos diferentes e na segunda de elementos do mesmo tipo. A técnica utilizada consiste em contar a quantidade de elementos envolvidos em cada uma das partes que serão comparadas e estabelecer a razão.

No caso das bolinhas, a razão $\frac{3}{5}$ ou 3 : 5 deverá ser interpretada, como se "*para cada grupo de três bolinhas pintadas existe, no conjunto, um grupo de cinco bolinhas brancas*". A mesma figura poderia ser empregada para solicitar a mobilização da concepção parte-todo pedindo a relação entre as bolinhas pintadas ou as bolinhas brancas com o total de bolinhas do conjunto.

Tarefa 10: *Determinar a razão entre a quantidade de triângulos e círculos do conjunto abaixo.*



Como uma variação da tarefa anterior, esta apresenta um conjunto de objetos diferentes, pedindo uma razão do tipo parte-parte que se resolve com base na mobilização de conhecimentos de geometria para a identificação de figuras, como: triângulos, quadrados e círculos para, então, proceder a contagem das figuras e determinar a razão $\frac{4}{3}$, entendendo que existe uma razão de "4 triângulos para 3 círculos".

Tarefa 11: *Qual a razão entre a quantidade de meninos e meninas de uma classe que possui 15 meninos e 25 meninas?*

Esta tarefa é diferente da 3, por não se apoiar em figuras para representar a quantidade de elementos do conjunto, substituindo a contagem de elementos pela quantidade de elementos das partes tratadas explicitamente no problema.

Por outro lado, o enunciado da tarefa determina, implicitamente, uma ordem, pois o número que representa a quantidade de meninos deverá ser o numerador e o número que representa a quantidade de meninas o denominador.

Assim, a razão procurada será $\frac{15}{25}$ e a utilização, a seguir, de técnicas de simplificação permitirá encontrar o fracionário irredutível $\frac{3}{5}$ e compreender que "para cada três meninos da classe corresponde cinco meninas". A escolha de outros dados numéricos para essa tarefa permitirá ainda mostrar a equivalência entre razões, considerando, por exemplo, 18 meninos e 30 meninas.

Tarefa 12: *Em uma bolsa existem três bolas pretas e duas brancas. Tirando aleatoriamente uma bola da bolsa, qual é a probabilidade de que seja preta?*

Tarefa 13: *Ao lançar um dado qual é a probabilidade de se obter um seis?*

Caracterizando uma situação, do tipo parte-todo, as tarefas 12 e 13 permitirão definir uma razão especial que recebe o nome de probabilidade pautada na dupla contagem e na mobilização da concepção parte-todo.

Tarefa 14: *Comparar a quantidade de ovos e a quantidade de farinha em uma receita de bolo.*

Neste caso, a tarefa solicita a comparação da quantidade de uma grandeza discreta (ovos), com a quantidade de uma grandeza contínua (farinha) que aparece, geralmente, nas receitas medida em xícaras ou gramas.

A comparação de grandezas de naturezas diferentes que a tarefa solicita encaminha à razão "2 para 3" significando que "a receita pede dois ovos para cada três xícaras de farinha" ou "2 para 300" se a receita utilizasse 300 gramas de farinha, por exemplo.

Tarefa 15: *Qual a densidade demográfica de uma região que tem 130 km2 de medida de área e população de 378 300 habitantes?*

A determinação da razão nesta tarefa permitirá definir a *densidade demográfica* como sendo a razão entre a quantidade de habitantes de uma região e a medida da área dessa região.

Tarefa 16: *Se em uma classe com 25 alunos, 5 jogam vôlei, qual a porcentagem da classe que joga vôlei?*

Essa razão, considerada especial, recebe o nome de porcentagem e a solução da tarefa exige a determinação de uma equivalência entre duas razões: razão entre a quantidade de alunos que jogam vôlei e o total de alunos da classe e a razão 20/100, significando que para cada grupo de 100 alunos dessa classe 20 jogam vôlei.

Para Godino e Batanero (2002), a notação de porcentagem e o raciocínio de proporcionalidade, que se coloca em jogo quando um dos termos da proporção é 100, é usada em várias situações da vida diária. A expressão "x%" é uma maneira alternativa de exprimir o número fracionário "x/100" que uma vez fixado pode ser aplicado a diferentes números para obter séries de números proporcionais.

Os autores acrescentam que, embora se considere fácil a compreensão das porcentagens, dados experimentais mostram que sua utilização incorreta é frequente, não só entre estudantes do secundário, mas também entre adultos. É comum encontrar nos meios de comunicação anúncios que revelam erros, confusões e distorções sobre o uso de porcentagens.

2º tipo **– Determinar valor desconhecido.**

Tarefa 1: *Se um carro percorre um trajeto de 3 km em 5 minutos, quanto demorará para percorrer um trajeto de 9 km?*

Esta tarefa caracteriza-se por apresentar três dados e solicitar o quarto. Não pede necessariamente a mobilização da concepção de quociente, nem a determinação da razão, pois pode ser cumprida diretamente, baseada no raciocínio proporcional e na percepção de que para percorrer o triplo do espaço terá de gastar o triplo do tempo.

Esta técnica ficará mais clara pela representação do esquema, da Figura 23, que evita o tratamento algébrico, comum na utilização de tal técnica, quando recebe o nome de regra de três, podendo ser tratada antes de algum estudo da Álgebra.

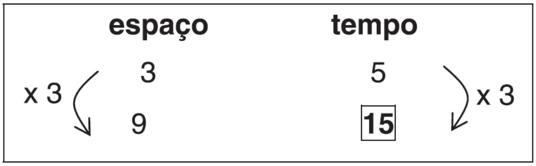
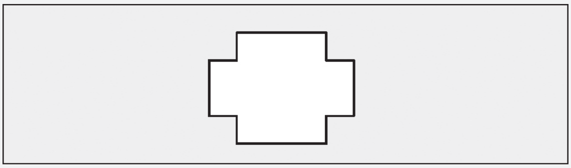


Figura 23 – Concepção de razão, caso contínuo, grandezas de naturezas diferentes.

Tratando de grandezas contínuas, a técnica para resolver a tarefa 2, consiste em dividir cada lado da figura apresentada em duas partes de mesma medida e considerar três dessas partes na figura a ser construída.

Tarefa 2: *Amplie a figura abaixo na razão de 2 : 3.*



A associação da equivalência à razão dada permitirá também a determinação do valor desconhecido com base em um esquema similar ao anterior. Nota-se que a concepção parte-todo será mobilizada na divisão dos lados da figura original.

Tarefa 3: *Em um mapa que foi utilizada a escala de 1 : 10 000 000 a distância entre Salvador e Maceió é de 5 cm. Qual a distância real entre essas cidades em quilômetros?*

Tarefa 4: *Um carro faz na estrada 8 km com 1 litro de álcool. Quantos litros de álcool são necessários para esse carro percorrer 100 km? Quantos quilômetros ele percorre com 45 litros de álcool?*

Tarefa 5: *Se uma receita de bolo pede 3 copos de açúcar para 10 copos de farinha, quanto de farinha seria necessário para fazer a receita com 15 copos de açúcar?*

As tarefas 3, 4 e 5 tratam de grandezas contínuas de mesma natureza e podem ser resolvidas pela técnica das situações anteriores, embora a razão da tarefa 5, se tratada como quociente não fará sentido.

Tarefa 6: *Na votação para o grêmio da escola, com 1.000 alunos votantes houve 240 votos para a chapa A. Se nessa mesma razão apenas 600 alunos tivessem votado, quantos teriam votado na chapa A?*

Tarefa 7: *Se um em cada cinco alunos de uma escola gostam muito de educação física, quantos alunos gostam dessa atividade se na escola tem 1.200 alunos?*

Tarefa 8: *Se para fazer 10 camisas são gastos 25 metros de tecido, quantos metros são necessários para fazer 30 camisas?*

As tarefas 6 e 7 tratam de grandezas discretas e podem ser resolvidas pela técnica das situações anteriores e, também, o quociente resultante da razão não fará sentido. Embora possa ser resolvida como as anteriores, a tarefa 8, solicita a comparação de quantidades de grandezas discretas com de contínua, não permitindo também que se associe o quociente à razão.

3º tipo – Comparar razões.

Tarefa: *Um carro A percorre um trajeto de 3 km em 5 minutos. Um carro B percorre um trajeto de 4 km em 6 minutos. Qual carro tem maior velocidade?*

A tarefa envolvendo grandezas contínuas, de naturezas diferentes, pode mobilizar a técnica de determinar a razão para os dois carros, $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{6}$, respectivamente, e a posterior comparação desses dois números para determinar qual dos dois carros tem maior velocidade. Essa comparação implica a determinação de razões equivalentes de mesmo denominador. Outras tarefas desse tipo podem ser apresentadas em outros contextos.

3.4.1 Dificuldades

Na elaboração dessas tarefas, as escolhas numéricas tornam as técnicas, mais ou menos complexas, aumentando ou não o grau de dificuldade para a construção da técnica apropriada. Além disso, nas situações que associam a concepção de operador existe uma dificuldade a ser contornada que diz respeito às operações. Há que se cuidar das técnicas que os alunos constroem porque, embora mobilizem corretamente os conhecimentos necessários para o cumprimento da tarefa, seus registros podem levar a erros futuros. Por exemplo, uma tarefa que pede a duplicação de uma mistura na razão $\frac{a}{b}$ ou *a : b* pode ser representada por $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}=\frac{a+a}{b+b}=\frac{2a}{2b}$.

Este procedimento acarretaria na tarefa da receita de bolo apresentada anteriormente, que o aluno respondesse corretamente: se quisermos dobrar a receita, a nova relação deverá ser de 4/6, registrando a técnica utilizada por $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2+2}{3+3}=\frac{4}{6}$ que não condiz com a aritmética fracionária que define a adição por $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. Uma outra possibilidade de representação seria, pelo pensamento multiplicativo, apresentar a solução por $2\times\frac{a}{b}=\frac{2a}{2b}$ ou, no caso de nosso exemplo, $2\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{2\times3}=\frac{4}{6}$ que também não está de acordo com a aritmética fracionária que define que $p\times\frac{a}{b}=\frac{pa}{b}$.

Neste caso, a simples representação de uma equivalência $\frac{a}{b}=\frac{2a}{2b}$ pode ser substituída por uma representação operatória que se tornando uma possibilidade de técnica para resolver tarefas desse tipo, conduziria ao erro, quando aplicadas em tarefas que solicitam cálculos com números fracionários e não com razões representadas por fracionários. Assim, concluímos que se deve perceber se o aluno está desenvolvendo um algoritmo próprio para a adição de fracionários e para a multiplicação de um inteiro por fracionário de forma incorreta, fato este que poderia ser evitado pela adoção de uma representação própria para razões.

Para Kieren (1993), na construção dos números racionais como um campo que incorpora os inteiros, define-se um número racional como um par de inteiros a/b que satisfaz a equação $bx = a$. Isto é, números racionais são por definição quocientes. Sua existência relaciona-se à propriedade de corpo que garante a existência de um inverso multiplicativo $1/b$ para cada inteiro b diferente de zero. Para o autor, os números racionais são quocientes que devem sua existência à ideia de frações unitárias $1/b$ que, no entanto, agem como razões quando em igualdade ou equivalência.

Conforme o autor, para entender números racionais é necessário conhecer números que são simultaneamente quocientes e razões em suas diversas formas, o que permite que este conhecimento se organize em diversos níveis e avance a partir de entendimentos intuitivos e formais.

De certa forma, como veremos, à frente o estudo histórico mostra que essas relações estão na gênese dos números fracionários.

3.5 A concepção de operador

Nas tarefas que solicitam a mobilização da concepção de operador o fracionário $\frac{a}{b}$ é manipulado como "algo que atua sobre uma quantidade" e a modifica produzindo uma nova quantidade. Essa ação pode ser entendida pela ação de operador fracionário que modifica um estado inicial e produz um estado final. Nessas tarefas, os fracionários $\frac{a}{b}$ são manipulados efetivamente como números e facilitam a compreensão da operação de multiplicação entre fracionários.

1° tipo – Transformar grandezas pela ação de um operador fracionário.

Tarefa 1: *Construir um quadrado cujo lado tenha 2/3 da medida do lado do quadrado dado.*

Esta tarefa apresenta o operador fracionário agindo sobre uma grandeza contínua. Se, por exemplo, o quadrado apresentado tiver lado medindo 9, a técnica que cumpre a tarefa é construída, baseada na percepção de que "o quadrado de lado medindo 9" deve ser transformado, pelo operador 2/3, em um "novo quadrado de lado medindo 2/3 de 9".

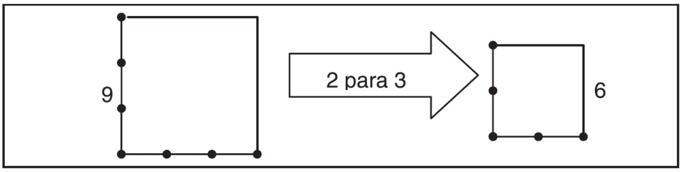


Figura 24 – Concepção de operador, caso contínuo, redução de um quadrado.

Associando, na técnica, a concepção parte-todo, podemos dividir o lado do quadrado em três partes de mesma medida e considerar duas dessas partes para obter a medida 6 do lado do novo quadrado. Há duas possibilidades para construir o novo quadrado, desenhá-lo sobre o inicial agindo na medida de dois lados consecutivos ou construir um novo quadrado com base na medida encontrada, como podemos ver na Figura 24.

Esta técnica encaminha à percepção de uma ordem operatória que caracterizará a mobilização da concepção de operador, em que se realiza, primeiro, a divisão de 9 por 3 para então multiplicar o quociente resultante, 3, por 2, obtendo a medida procurada: 6. A ação do operador fracionário sobre a figura pode ser relacionada a estados iniciais e finais, esquematizada como na Figura 25:

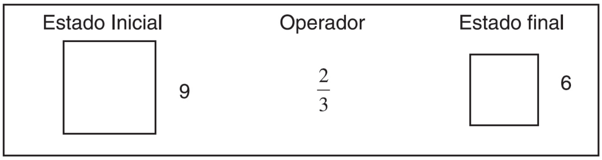


Figura 25 – Estados da concepção de operador, caso contínuo.

Uma outra possibilidade de técnica é associar a concepção de razão entendendo que, para cada três unidades da figura inicial, correspondem duas unidades na figura final que partindo do pensamento proporcional e equivalência de razões remete à medida procurada, representada por: $3:2 = 9:\boxed{6}$ ou $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$. A utilização das duas técnicas faz com que se perceba que a figura final pode ser obtida, tanto pela ação do operador $\frac{2}{3}$ como pela ação da razão $\frac{3}{2}$.

As tarefas que pedem a mobilização da concepção de operador envolvendo grandezas contínuas, devem construir o conhecimento de que o operador $\frac{a}{b}$ provoca uma redução na medida do original, quando $a < b$ ou amplia essa medida, quando $a > b$.

Além disso, por analogia ao conhecimento dos naturais, a multiplicação de fracionários pode ser abordada pois como expressões do tipo *"o dobro de 5"* pode ser representado por 2×5, então, a expressão *"o dobro de 1/5"* seria representada por $2 \times \frac{1}{5}$, com o auxílio de outras concepções, como parte/todo ou medida, pode ser entendida como $2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

3.5.1 Dificuldades

No ensino de Geometria, quando se trata de razão de semelhança é dada pelo operador e não propriamente pela razão. Em nosso exemplo, a ampliação feita pela razão $\frac{5}{8}$ (para cada cinco da figura inicial consideramos oito na nova figura) terá como razão de semelhança o operador $\frac{8}{5}$, considerando que a nova figura tem oito quintos das medidas da figura de referência. O mesmo acontecendo para o caso da redução.

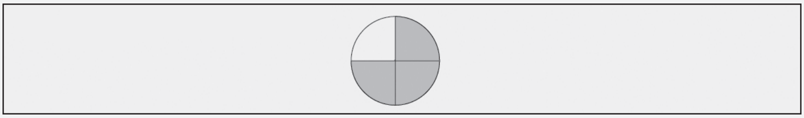
2º tipo – Transformar grandezas pela ação de dois operadores fracionários.

Tarefa 1: *Determine a metade de um quinto do segmento abaixo.*

Como a ação de um operador fracionário, sobre um inteiro ou unidade, confunde-se, como já vimos, com a concepção parte-todo de fracionários. A ação de mais do que um operador sobre um inteiro/unidade ou parte dele caracteriza melhor a ação de operadores e sua interpretação, essencialmente, numérica. Para resolver a tarefa 1 é necessário associar a concepção parte-todo à de medida, para dividir o segmento em cinco partes iguais.

A seguir, dividir uma dessas partes em dois, concluindo que a parte pintada corresponde a $\frac{1}{10}$. Essa ação para a resolução poderá ser então associada a operação de multiplicação e registrada por $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$.

Tarefa 3:*Pinte 1/6 da seção pintada do disco, que fração do disco você pintou?*



A técnica aqui associa a concepção parte-todo, na divisão da parte do disco que já está pintada, em seis partes e na percepção de que a parte que foi pintada corresponde a 1/8 do disco e, finalmente, associar a tal resultado a sentença $\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$.

Tarefa 4: *Se a capacidade de 3/5 de um recipiente é de 36 litros, qual a capacidade do recipiente?*

Referindo-se a grandezas contínuas, esta tarefa pode ser resolvida com base na percepção de como 3/5 do recipiente corresponde a 36 litros, então, a divisão de 36 por 5 dará o correspondente em litros, de 1/5 do recipiente, que multiplicado por 5 resultará na resposta solicitada.

Tarefa 5: *Quantos alunos correspondem a 2/3 de uma classe com 36 alunos?*

A tarefa 5 refere-se a grandezas discretas e pode ser cumprida por técnica similar a utilizada para o caso de grandezas contínuas, entendendo que o operador 2/3 deve atuar sobre a quantidade de alunos da classe, 36, para obter a quantidade que corresponde a 2/3 de 36, dividindo 36 por 3 e multiplicando o resultado por 2, pois, como já vimos, associando a concepção de razão para cada três do estado inicial corresponderá a dois no estado final. A associação da concepção parte-todo permitirá, também, dividir a quantidade de alunos em três partes de mesma quantidade e considerar duas delas para obter a resposta procurada: 24 e a proporção: 3 : 2 :: 36 : 24 ou $\frac{3}{2} = \frac{36}{24}$.

A ação do operador 2/3 na tarefa 5 pode ser representada pelo esquema apresentado no Quadro 4.

Quadro 4 – Concepção de operador, caso discreto.

Estado Inicial	Operador: 2/3	Estado final
36 crianças	(dividir 36 por 3 e multiplicar o resultado por 2)	24 crianças

3º tipo – Determinar o operador que faz uma certa transformação.

Tarefa: *Tenho 1 copo de leite, mas minha receita pede 3. Por quanto devo reduzir os outros ingredientes da receita para poder usar 1 copo em vez de 3 de leite?*

Envolvendo grandezas contínuas, a tarefa solicita a mobilização da técnica que consiste em comparar as quantidades e perceber que, se temos um copo enquanto a receita pede três, temos apenas 1/3 (um terço) da quantidade de leite solicitada pela receita e, por conseguinte, os outros ingredientes terão de ser reduzidos pela ação do operador 1/3. Este tipo de tarefa pode ser ampliado para outros contextos.

Independente do contexto, discreto ou contínuo, a escolha de diferentes operadores ou quantidades na elaboração das tarefas que pedem a mobilização da concepção de operador para fracionários, podemos utilizar quadros do tipo empregado na tarefa 5 para a percepção de dois tipos de equivalência.

4º tipo – Comparar operadores.

A tarefa pode consistir em deixar células do quadro, em branco, para serem preenchidas pelos alunos. O Quadro 5 encaminha a percepção da equivalência de operadores pela constatação de que há uma infinidade de operadores fracionários que produzem a mesma situação final, quando aplicados a uma mesma situação inicial.

Quadro 5 – Equivalência de operadores.

Estado Inicial	Operador	Estado Final
12	$\frac{2}{3}$	8
12	$\frac{4}{6}$	8
12	$\frac{8}{12}$	8

5º tipo – Comparar estados iniciais e finais.

A tarefa do Quadro 6 encaminha a percepção da equivalência de estados quando se constata que o mesmo operador, atuando sobre estados iniciais diferentes, produz a mesma transformação, isto é, uma equivalência

de razões entre cada estado, inicial e final. O operador $\frac{2}{3}$ age sobre os estados iniciais: 12, 15 e 24 produzindo os estados finais: 8, 10 e 16, respectivamente, que nos levam a constatar a equivalência: $\frac{12}{8}=\frac{15}{10}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$, como já vimos, é equivalente ao operador $\frac{2}{3}$.

Quadro 6 – Equivalência de estados.

Estado Inicial	Operador	Estado final
12	$\frac{2}{3}$	8
15	$\frac{2}{3}$	10
24	$\frac{2}{3}$	16

6º tipo – Determinar o operador que desfaz uma ação.

Esse tipo de tarefa conduz a constatação de que existe um operador, chamado operador inverso que desfaz a ação de um determinado operador.

Quadro 7 – Operador inverso.

Estado Inicial	Operador	Estado Final/inicial	Operador	Estado Final
12	2/3	8	3/2	12

O Quadro 7 mostra que sob a ação do operador 2/3 sobre 12, obtemos 8 dividindo 12 por 3 e multiplicando o resultado por 2. Para reverter essa ação, precisamos dividir 8 por 2 e multiplicar o resultado por 3, ou seja, aplicar o operador 3/2. Generalizando, podemos concluir que se o operador $\frac{a}{b}$ provoca um determinado efeito em um estado inicial, o operador $\frac{b}{a}$ aplicado ao estado final, retorna ao estado inicial.

7º tipo – Determinar operadores que não modificam o estado inicial.

Um quadro com estados iniciais e finais iguais leva a percepção de que existem operadores fracionários como 2/2, 3/3, ..., que não modificam o estado inicial, pois são equivalentes ao elemento neutro da operação de multiplicação.

8º tipo – Determinar o operador que substitui a ação de vários operadores.

O trabalho com a multiplicação, citado anteriormente, permitirá elaborar tarefas que associem a concepção de operador para fracionários em composição de operadores, isto é, uma série de operadores que a partir do segundo age sobre o estado final do operador anterior.

Quadro 8 – Composição de operadores.

Estado Inicial	Operador	Estado Final/inicial	Operador	Estado Final/inicial
54	2/3	36	1/2	18

O Quadro 8 mostra a composição de operadores que relacionada à multiplicação de fracionários pode ser facilitada, quando se percebe que "a metade de dois terços", ou seja, $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$ provoca o mesmo efeito que 1/3 quando age sobre o estado inicial 54, pois ambos produzem o estado final 18.

9º tipo – Determinar a porcentagem de uma quantidade.

Tarefa: *Quantos alunos, de uma classe com 50 alunos, jogam vôlei se sabemos que 10% dos alunos da classe praticam esse esporte?*

Para resolver esta tarefa podemos usar a equivalência de razões e a determinação do valor desconhecido, isto é, a regra de três. Tendo a razão "10 para 100", devemos encontrar uma razão equivalente a essa, com denominador 50: $\frac{10}{100}=\frac{5}{50}$ e concluir que 5 alunos jogam vôlei ou mobilizar a concepção de operador e constatar que "10% de 50 é igual a 5" pois $\frac{10}{100}\times 50=5$.

Uma outra representação pode ser manipulada nas técnicas que resolvem tarefas que associam a concepção de operador: as máquinas de transformação. Esta representação, além de associar a ação do operador ao funcionamento de uma máquina, dá um sentido concreto ao aspecto funcional do fracionário como operador.

Conforme podemos ver no exemplo na Figura 26, o estado inicial (18) seria a entrada da máquina de $\frac{5}{6}$, que produz o estado final (15) em sua saída. Esta máquina, em particular, funciona dividindo por 6, o que entrar, e multiplicando o resultado por 5: (18 ÷ 6)× 5, apresentando, assim, o resultado 15.

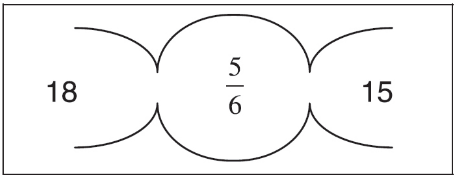


Figura 26 – Representação de máquina de transformação, concepção de operador.

Este esquema pode ser utilizado, também, para representar a composição de operadores. A Figura 27 mostra a ação em série das máquinas $\frac{3}{7}$ e $\frac{1}{3}$, a máquina de $\frac{3}{7}$ age sobre o estado inicial, ou entrada (21), produzindo como estado final ou saída (9), que será o estado inicial ou a entrada da máquina de $\frac{1}{3}$ que, por sua vez, produzirá a saída 3.

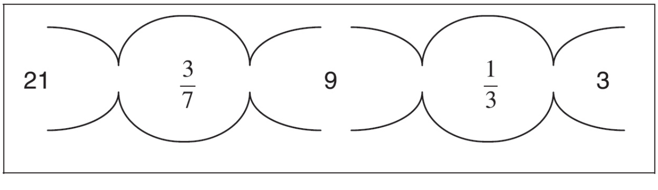


Figura 27 – Representação de máquinas em série para composição de operadores.

Em conjunto, as duas máquinas, calcularam *"um terço de três sétimos de vinte e um"*, isto é, $\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}\times 21 = 3$. A mesma saída poderia ser obtida por uma única máquina equivalente a $\frac{1}{7}$, como podemos ver na Figura 28.

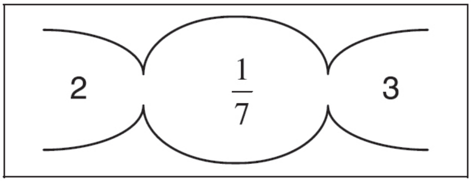


Figura 28 – Representação de máquina para composição de operadores.

Podemos notar que, embora o operador $\frac{3}{7}$ tenha agido antes do operador $\frac{1}{3}$, a representação obedece a ordem da composição funcional, isto é: $\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}$, pois mostra a ação do operador $\frac{1}{3}$ sobre o estado final obtido pelo operador $\frac{3}{7}$, no estado inicial dado.

Há ainda uma observação a ser feita a respeito de porcentagens, quando se fala de fracionários como operador. Embora possam ser manipuladas como razões, conforme já vimos, podem ser entendidas também como operadores, porque agem sobre um estado inicial, transformando-o em um estado final.

Por exemplo, 10% isoladamente significam apenas que, de cada grupo de 100, estão sendo considerados 10, mas o sentido é outro, quando dizemos "10% de 40", por exemplo, porque agora entendemos que o operador 10/100 deverá agir sobre 40, produzindo o estado final, representando tal ação por $\frac{10}{100}\times 40 = 4$.

Gostaríamos ainda de salientar que as concepções e as relações entre elas são mobilizadas a pedido de diferentes tipos de tarefas que serão cumpridas satisfatoriamente pela construção de técnicas diversas.

Por sua vez, essas técnicas só poderão ser construídas pautadas na manipulação de representações de diversos sistemas. Durante toda a ação de resolução de uma tarefa, a manipulação dos *ostensivos* propicia a construção de conhecimentos sobre o *não ostensivo*, número fracionário, tornando-o presente por meio das representações utilizadas.

Além disso, podemos perceber, com base nessa Organização Matemática que, na realidade, são poucas as tarefas que pedem a mobilização de uma única concepção, tornando praticamente impossível isolar uma das demais, pelo contrário, algumas apresentam vínculos naturais que não podem ser ignorados.

Esta constatação destaca-se, em parte, como uma vantagem do uso da TAD que nos permitiu, também, observar uma mudança do registro figural, apresentado na tarefa e o desenvolvimento de técnicas diferentes para uma mesma tarefa.

Para Duval, o tratamento de uma representação é a transformação da representação no próprio registro onde ela se formou e acrescenta:

> Naturalmente, fazendo variar sistematicamente uma representação, muda-se o conteúdo representado: a escolha, entre várias representações possíveis [...] permite, assim, identificar as variações das unidades significantes em cada registro de representação. Isto supõe, evidentemente, que se identificou anteriormente todos os fatores de variação pertinentes de uma representação em um registro. (DUVAL, 1993, p. 55, tradução nossa)

A seguir, elaboramos os Quadros 9 a 13 que sintetizam as concepções que podem ser mobilizadas nos diversos tipos de tarefas em contextos discretos e/ou contínuos associados às técnicas que as solucionam.

Quadro 9 – Concepção parte-todo – síntese de tarefas e técnicas.

Tipo de tarefas	Concepção parte/todo	Grandeza	Técnicas
1º	Relacionar à uma figura um número fracionário	Contínua	1) Dupla contagem das partes. 2) Medida e dupla contagem. 3) Perceber equivalência entre parte pintada e não pintada 4) Perceber a equivalência entre as partes pintadas. 5) Medida e equivalência de áreas 6) Medida e reconfiguração 7) Medida e reconfiguração ou razão entre medidas de área 8) Cálculo de medidas de área e razão entre elas. 9) Escolha de malha quadrangular para aproximação da medida de área
		Discreta	Dupla contagem das partes
2º	Identificar um número fracionário dado em uma figura	Contínua	Dividir a figura sem associar a medida. Dividir a figura associando a medida Decomposição de figura
		Discreta	Contagem e divisão
3º	Compor inteiros e determinar fracionário	Contínua	Relaciona as partes que compõem a figura e identificar o fracionário da parte solicitada
		Discreta	Dupla contagem
4º	Reconstituição do inteiro	Contínua	Composição de figuras, a partir da parte apresentada
		Discreta	Reversibilidade: dividir a quantidade da parte dada pelo numerador e o resultado pelo denominador

Quadro 10 – Concepção quociente – síntese de tarefas e técnicas.

Tipo de tarefas	Concepção de Quociente	Grandeza	Técnicas
1º	Distribuir igualmente x objetos em um número y de partes	Contínua	1º caso: dividir todos os objetos em y partes e considerar x dessas partes ou manter objetos inteiros e dividir só o que for necessário 2º caso: dividir todos os objetos em y partes e considerar x dessas partes
		Discreta	Divisão de naturais
2º	Distribuir igualmente x objetos em uma determinada cota.	Contínua	Dividir a quantidade de objetos pela cota dada
		Discreta	Divisão de naturais

Quadro 11 – Concepção de medida – síntese de tarefas e técnicas.

Tipo de tarefas	Concepção de Medida	Grandeza	Técnicas
1º	Determinar medidas de objetos	Contínua	Determinar unidade e subunidades
2º	Determinar medidas em segmentos divididos em partes iguais	Contínua	Dupla contagem
3º	Determinar medidas em segmentos não divididos em partes iguais	Contínua	Dividir o segmento em partes de mesma medida e contagem
4º	Reconstituição da unidade	Contínua	Divisão da parte apresentada para identificar 1/n e recompor a figuras

Quadro 12 – Concepção de razão – síntese de tarefas e técnicas.

Tipo de tarefas	Concepção de Razão	Grandeza	Técnicas
1º	Determinar uma razão	Contínua	1º caso: situação todo-todo Escrever na forma fracionária as medidas explícitas ou medir os objetos antes se for o caso. 2º caso: situação parte-parte idem 3º caso: situação todo-todo com grandezas de naturezas diferentes. Associar a razão encontrada à divisão
		Discreta	1º caso: situação todo-todo Dupla contagem 2º caso: situação parte-parte de inteiros diferentes Dupla contagem 4º caso: situação parte-parte no mesmo inteiro Dupla contagem 5º caso: situação parte-parte no mesmo inteiro sem figuras Escrever na forma fracionária os dados apresentados
2	Determinar valor desconhecido	Contínua	proporcionalidade entre as medidas dadas
		Discreta	proporcionalidade entre as quantidades dadas
3º	Comparar razões	Contínua/ discreta	Determinação de razões equivalentes com mesmo denominador

Quadro 13 – Concepção de operador – síntese de tarefas e técnicas.

Tipo de tarefas	Concepção de Operador	Grandeza	Técnicas
1º	Transformar grandezas pela ação de um operador fracionário	Contínua/ discreta	1) Divisão das medidas iniciais pelo denominador do operador e multiplicação do resultado pelo numerador do operador. 2) Associar a concepção de razão

(continua)

Quadro 13 – Concepção de operador – síntese de tarefas e técnicas. *(continuação)*

Tipo de tarefas	Concepção de Operador	Grandeza	Técnicas
2º	Transformar grandezas pela ação de dois operadores	Contínua	Dividir a figura uma ou duas vezes, em partes de mesma medida. Associar à operação de multiplicação
		Discreta	Divisão dos dados iniciais pelo denominador do operador e multiplicação do resultado pelo numerador do operador.
3º	Determinar o operador que faz uma certa transformação	Contínua/ discreta	Comparar as quantidades dadas
4º	Comparar operadores	Contínua/ discreta	Tabela com estados iniciais iguais e operadores diferentes remetendo ao mesmo estado final: equivalência de operadores
5º	Comparar estados iniciais e finais	Contínua/ discreta	Tabela com estados iniciais diferentes e mesmo operador: equivalência entre estados iniciais e finais
6º	Determinar o operador que desfaz uma ação		Tabela para reversibilidade do operador: operador inverso
7º	Determinar operadores que não modificam o estado inicial		Tabela com operador que não produz transformação: operador identidade
8º	Determinar o operador que substitui a ação de vários operadores		Tabela com operadores transformando estados finais de outros operadores: composição de operadores (multiplicação de fracionários)
9º	Determinar a porcentagem de uma quantidade		Tabela com operadores de denominador 100 (porcentagem)

Assim, tendo em vista o objetivo de encaminhar os professores em formação, para que se apropriassem de tarefas que facilitariam a conceituação dos racionais por seus, alunos justificam-se os estudos preliminares realizados.

A seguir, descreveremos nosso dispositivo experimental e as ações formativas que escolhemos, bem como suas análises e nossas conclusões.