CAPÍTULO 5

Conservação da energia em meios deformáveis

Ao estendermos a primeira lei da termodinâmica a um elemento de volume $V(t)$, observamos que sua taxa de aumento da energia é igual à taxa com que o calor é transferido para esse elemento somada à taxa com que o trabalho é realizado sobre ele. A fim de quantificarmos matematicamente o princípio da conservação da energia, vamos definir as seguintes quantidades:

1. Energia de $V(t)$, E

$$E = \int_{V(t)} \rho \left(e + \frac{U^2}{2} \right) dV \tag{5.1}$$

onde e corresponde à energia interna por unidade de massa e $U^2/2 = (\vec{U} \cdot \vec{U})/2$ à energia cinética por unidade de massa. Note que a parcela correspondente à energia potencial foi desconsiderada na Equação (5.1).

2. Taxa de aquecimento, Q

$$Q = -\int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{q}\, dS + \int_{V(t)} \rho \dot{q}\, dV \tag{5.2a}$$

onde $\vec{q}$ representa o vetor densidade de fluxo de calor e $\dot{q}$ a taxa de geração de calor por unidade de massa. Em alguns textos, a taxa de calor é representada como $\dot{Q}$ em Watts, o vetor densidade de fluxo é representado como $\vec{q}\,''$ em Watts/m^2 e a taxa de geração de calor é apresentada por unidade de volume e representada como $\dot{q}\,'''$ em Watts/m^3. Usando esta última nomenclatura, a taxa de aquecimento pode ser escrita como

$$\dot{Q} = -\int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{q}\,''\, dS + \int_{V(t)} \dot{q}\,'''\, dV \tag{5.2b}$$

3. Potência mecânica, P

$$P = \int_{S(t)} \vec{t}_n \cdot \vec{U}\, dS + \int_{V(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{U}\, dV \tag{5.3}$$

onde a primeira e a segunda integrais correspondem às potências mecânicas devido às forças de superfície e de corpo, respectivamente.

Com base em tais componentes, podemos escrever a equação de conservação da energia (primeira lei da termodinâmica) na forma

$$\frac{DE}{Dt} = Q + P \tag{5.4}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(e + \frac{U^2}{2} \right) dV = - \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{q}\, dS + \int_{V(t)} \rho \dot{q}\, dV + \int_{S(t)} \vec{t}_n \cdot \vec{U}\, dS + \int_{V(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{U}\, dV \tag{5.5}$$

Ao aplicarmos o TTR e o teorema da divergência, temos a equação da energia (equação da conservação da energia) para meios deformáveis:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{U^2}{2} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho \dot{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot (\overline{\overline{T}} \cdot \vec{U}) \tag{5.6}$$

5.1 EQUAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

De fato, essa equação corresponde à soma das energias interna e cinética de meios deformáveis. Porém, muitas vezes é conveniente separar esses componentes de energia. Para isso, multiplica-se escalarmente a equação da conservação da quantidade de movimento de Cauchy pelo vetor velocidade $\vec{U}$.

$$\vec{U} \cdot \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{U} \cdot \rho \vec{f} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \tag{5.7}$$

Mas, como

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right) = \vec{U} \cdot \frac{D\vec{U}}{Dt},$$

obtemos apenas a equação da energia mecânica, dada por

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{U}\cdot\vec{U}}{2}\right) = \rho \vec{f}\cdot\vec{U} + \vec{U}\cdot\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{T}} \tag{5.8}$$

Como o tensor tensão viscosa, apresentado na Equação (4.27), está relacionado à viscosidade do fluido, a equação (5.8) pode ser reescrita na forma

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{U}\cdot\vec{U}}{2}\right) = \rho \vec{f}\cdot\vec{U} + \vec{U}\cdot\vec{\nabla}\cdot(-p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{P}}) \tag{5.9}$$

ou

$$\underbrace{\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{U}\cdot\vec{U}}{2}\right)}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\rho \vec{f}\cdot\vec{U}}_{\mathrm{II}} - \underbrace{\vec{U}\cdot\vec{\nabla}p}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\vec{U}\cdot\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{P}}}_{\mathrm{IV}} \tag{5.10}$$

onde:

I. Taxa de variação da energia cinética do elemento de volume.
II. Potência mecânica devido às forças de corpo.
III. Potência mecânica associada à aceleração do elemento de volume pelas forças de pressão.
IV. Potência mecânica relacionada à aceleração do elemento de volume pelas forças viscosas (normais e cisalhantes).

5.2 EQUAÇÃO DA ENERGIA TÉRMICA

O último termo do lado direito da Equação (5.6) pode ser escrito na forma

$$\vec{\nabla}\cdot(\overline{\overline{T}}\cdot\vec{U}) = \partial_i(T_{ij}U_j) = U_j\,\partial_i T_{ij} + T_{ij}\,\partial_i U_j = \vec{U}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{T}}) + \mathrm{Tr}(\overline{\overline{T}}^T\cdot\vec{\nabla}\vec{U})$$

Mas $\mathrm{Tr}(\overline{\overline{T}}^T\cdot\vec{\nabla}\vec{U}) \equiv \overline{\overline{T}}^T : \vec{\nabla}\vec{U}$

Assim, também podemos reescrever a Equação (5.8) na forma

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{U}\cdot\vec{U}}{2}\right) = \rho \vec{f}\cdot\vec{U} + \vec{\nabla}\cdot(\overline{\overline{T}}\cdot\vec{U}) - \overline{\overline{T}} : \vec{\nabla}\vec{U} \tag{5.11}$$

Ao subtrairmos a Equação (5.11) da Equação (5.6), obtemos

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho \dot{q} + \overline{\overline{T}} : \vec{\nabla}\vec{U} \tag{5.12}$$

Lembrando que

$$\overline{\overline{T}} : \vec{\nabla}\vec{U} = \overline{\overline{T}} : (\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}})$$

Mas, como $\overline{\overline{T}}$ é simétrico e $\overline{\overline{\Omega}}$ é antissimétrico, logo

$$\overline{\overline{T}} : \vec{\nabla}\vec{U} = \overline{\overline{T}} : \overline{\overline{D}}$$

Além disso,

$$\overline{\overline{T}} : \overline{\overline{D}} = (-p\delta_{ij} + P_{ij})D_{ij}$$

Dessa forma, a equação da energia térmica é dada por

$$\underbrace{\rho \frac{De}{Dt}}_{\mathrm{I}} = \underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \vec{q}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\rho \dot{q}}_{\mathrm{III}} - \underbrace{p\,\vec{\nabla} \cdot \vec{U}}_{\mathrm{IV}} + \underbrace{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}_{\mathrm{V}} \tag{5.13}$$

onde:

I. Taxa de variação da energia térmica do elemento de volume.
II. Potência associada à condução de calor.
III. Potência associada a um termo fonte.
IV. Taxa de trabalho associada à deformação do elemento de volume pelo campo de pressão (trabalho reversível).
V. Taxa de trabalho associada à taxa de dissipação viscosa do elemento de volume (trabalho irreversível).

Por fim, podemos concluir que a equação da conservação da energia mecânica (equação do movimento) está relacionada (acoplada) à equação da energia térmica por meio da potência de tensão ($\overline{\overline{T}} : \vec{\nabla}\vec{U}$). Isso mostra que, quando a potência de tensão é nula ou quase, não há nenhuma relação entre o movimento do fluido e seu estado térmico.

5.3 SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

Por meio da **desigualdade de Clausius**, a **segunda lei da termodinâmica** estabelece que, para um processo qualquer,

$$\oint_C \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \tag{5.14}$$

onde $\oint_C \delta Q$ representa a integral cíclica da transferência de calor e a grandeza $(\delta Q/T)$ corresponde a uma variável de estado.

Para um processo qualquer, a partir da desigualdade de Clausius, sabemos que a variação da entropia entre dois estados termodinâmicos 1 e 2 é dada por

$$\Delta S_{12} \equiv S_2 - S_1 \geq \oint_C \frac{\delta Q}{T} \tag{5.15}$$

Logo, as variações de entropia para processos reversíveis e irreversíveis são dadas, respectivamente, por

$$\Delta S_{12} = \oint_C \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rev}} \tag{5.16}$$

$$\Delta S_{12} > \oint_C \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{irrev}} \tag{5.17}$$

Porém, independentemente do processo, a variação infinitesimal da entropia pode ser descrita com duas componentes independentes associadas a uma parcela reversível e outra irreversível:

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rev}} + dS_{\text{irrev}} \tag{5.18}$$

Ao considerarmos um elemento de volume ao longo de um escoamento, a taxa da variação de entropia de tal elemento de volume pode ser descrita na forma

$$\frac{DS}{Dt} = \underbrace{\left(\frac{DS}{Dt}\right)_{\text{rev}}}_{\text{Devido ao aquecimento}} + \underbrace{\left(\frac{DS}{Dt}\right)_{\text{irrev}}}_{\text{Devido às irreversibilidades internas}} \tag{5.19}$$

onde

$$S = \int_{V(t)} \rho \underbrace{s}_{\text{Entropia específica}} dV \tag{5.20}$$

Assim, as componentes reversível e irreversível da variação de entropia são dadas por

$$\frac{DS_{\text{rev}}}{Dt} = \int_{S(t)} \frac{-\hat{n} \cdot \vec{q}}{T} \, dS + \int_{V(t)} \frac{\rho \dot{q}}{T} \, dV \tag{5.21}$$

e

$$\frac{DS_{\text{irrev}}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho s_{\text{irrev}} \, dV = \int_{V(t)} \rho \frac{Ds_{\text{irrev}}}{Dt} \, dV \tag{5.22}$$

Dessa forma,

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho s \, dV = \int_{S(t)} \frac{-\hat{n} \cdot \vec{q}}{T} \, dS + \int_{V(t)} \frac{\rho \dot{q}}{T} \, dV + \int_{V(t)} \rho \frac{Ds_{\text{irrev}}}{Dt} \, dV \tag{5.23}$$

Ao aplicarmos o teorema da divergência, temos

$$\int_{V(t)} \left[\rho \frac{Ds}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{\rho \dot{q}}{T} - \rho \frac{Ds_{\text{irrev}}}{Dt} \right] dV = 0 \tag{5.24}$$

ou seja,

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) + \frac{\rho \dot{q}}{T} + \rho \frac{Ds_{\text{irrev}}}{Dt} \tag{5.25}$$

Com base na primeira **lei da termodinâmica**, sabemos que

$$dE = \delta Q + \delta W = TdS - pdV \tag{5.26}$$

Em termos de propriedades específicas, a taxa de variação da energia total é dada por

$$\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt} - p \frac{dv}{dt} \tag{5.27}$$

porém,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho^{-1}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}$$

Consequentemente,

$$\rho\frac{De}{Dt} = \rho T\frac{Ds}{Dt} + p\underbrace{\left(\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}\right)}_{-\vec{\nabla}\cdot\vec{U}} \tag{5.28}$$

Mas o lado esquerdo da Equação (5.28) também pode ser expresso na forma

$$\rho\frac{De}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \rho\dot{q} - p\vec{\nabla}\cdot\vec{U} + \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} \tag{5.29}$$

ou

$$\rho T\frac{Ds}{Dt} + \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \rho\dot{q} + \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} \tag{5.30}$$

Assim, a primeira lei da termodinâmica em termos de entropia para um elemento de volume é descrita como

$$\rho\frac{Ds}{Dt} = -\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{q}}{T} + \frac{\rho\dot{q}}{T} + \frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} \tag{5.31}$$

Ao substituirmos a Equação (5.31) na Equação (5.25), obtemos

$$-\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{q}}{T} + \frac{\rho\dot{q}}{T} + \frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} = -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) + \frac{\rho\dot{q}}{T} + \rho\frac{Ds_{\text{irrev}}}{Dt} \tag{5.32}$$

e, considerando que

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) = \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{q}}{T} - \frac{\vec{q}}{T^2}\cdot\vec{\nabla}T$$

obtemos a expressão para a taxa de geração de entropia devido a irreversibilidades internas em $V(t)$ na forma:

$$\rho\frac{Ds_{\text{irrev}}}{Dt} = \underbrace{-\frac{\vec{q}\cdot\vec{\nabla}T}{T^2}}_{\text{Devido ao aquecimento}} + \underbrace{\frac{\overline{\overline{P}}:\overline{\overline{D}}}{T}}_{\text{Devido aos efeitos viscosos}} \tag{5.33}$$

Por fim, podemos escrever a primeira lei da termodinâmica em termos de entropia na forma

$$\rho\frac{Ds}{Dt} = -\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{q}}{T} + \frac{\rho\dot{q}}{T} - \frac{\vec{q}\cdot\vec{\nabla}T}{T^2} + \frac{\overline{\overline{P}}:\overline{\overline{D}}}{T} \tag{5.34}$$

Em suma, em todos os processos de transferência de calor, **sempre haverá uma parcela reversível e outra irreversível**. E a parcela associada aos efeitos de irreversibilidade será tanto maior quanto maior for o gradiente de temperatura.

A partir deste ponto, serão apresentadas as principais equações relacionadas a uma classe de fluidos, chamados de **fluidos newtonianos**. Também serão apresentadas a lei de Fourier, a viscosidade expansional, bem como uma breve apresentação das equações de Navier-Stokes.

5.4 FLUIDOS STOKESIANOS

Com base nas equações vistas até aqui, vamos considerar uma classe de fluidos denominados fluidos stokesianos, ou fluidos de Stokes. Para tanto, vamos adotar as seguintes condições:

I. O fluido é considerado isocórico.
II. O fluido é homogêneo (o tensor tensão $\overline{\overline{T}}$ não depende da posição $\vec{r}$).
III. O tensor tensão depende somente das condições termodinâmicas locais e do tensor deformação $\overline{\overline{D}}$, não apresentando dependência de outras grandezas cinemáticas, como o tensor vorticidade $\overline{\overline{\Omega}}$, por exemplo.
IV. Quando o tensor deformação for nulo, $\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}}$.

Vamos considerar a relação entre os tensores tensão e deformação dada por função polinomial:

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \beta\overline{\overline{D}} + \gamma\,\overline{\overline{D}}\cdot\overline{\overline{D}} \tag{5.35}$$

Ao considerarmos que o tensor tensão tenha apenas uma dependência linear com o tensor deformação, obteremos

$$\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} : \overline{\overline{D}} \tag{5.36}$$

ou

$$P_{ij} = A_{ijkl} D_{kl} \tag{5.37}$$

Já que P_{ij} é assumido ser uma combinação linear de D_{kl} e considerando a condição de simetria, o tensor A_{ijkl} pode ser expresso na forma

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \tag{5.38}$$

Assim,

$$P_{ij} = (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}) D_{kl} \tag{5.39}$$

$$P_{ij} = \lambda \delta_{ij} D_{kk} + \eta D_{ij} + \gamma D_{ji} \tag{5.40}$$

Uma vez que o tensor deformação é simétrico, temos

$$P_{ij} = \lambda \delta_{ij} D_{kk} + \underbrace{(\eta + \gamma)}_{2\mu} D_{ij} \tag{5.41}$$

Assim,

$$\overline{\overline{P}} = \lambda \delta_{ij} \, \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + 2\mu \overline{\overline{D}} \tag{5.42}$$

Com isso, podemos expressar o tensor tensão na forma:

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{D}} \tag{5.43}$$

onde λ e μ correspondem ao segundo coeficiente de viscosidade e à viscosidade absoluta, respectivamente.

5.5 HIPÓTESE DE FOURIER

Da mesma forma que relacionamos o tensor $\overline{\overline{T}}$ a $\vec{\nabla} \cdot \vec{U}$, podemos, por analogia, relacionar o fluxo de calor $\vec{q}$ com $\vec{\nabla}T$ na forma:

$$\vec{q} = -\overline{\overline{K}}(\vec{\nabla}T) \tag{5.44}$$

ou

$$q_i = -K_{ij}\,\partial_j T \tag{5.45}$$

onde $\overline{\overline{K}}$ representa o tensor condutividade térmica. Porém, se assumirmos uma condição isotrópica, temos

$$K_{ij} = k\delta_{ij} \tag{5.46}$$

Dessa forma, a **lei de Fourier** pode ser dada por

$$\vec{q} = -k(\vec{\nabla}T) \tag{5.47}$$

5.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE VISCOSIDADE E CONDUTIVIDADE TÉRMICA

Como demonstrado anteriormente, a parcela irreversível da variação da entropia pode ser descrita com duas componentes independentes, respeitando a lei de Clausius:

$$\rho\frac{Ds_i}{Dt} = -\frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}T}{T^2} + \frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} \geq 0 \tag{5.48}$$

Logo,

$$-\frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}T}{T^2} \geq 0 \tag{5.49}$$

e

$$\frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} \geq 0 \tag{5.50}$$

Ao considerarmos a lei de Fourier, a Equação (5.47) pode ser reescrita como:

$$\frac{k|\vec{\nabla}T|^2}{T^2} \geq 0 \tag{5.51}$$

Uma vez que a condutividade térmica é sempre uma propriedade com sinal positivo, o fluxo de calor sempre flui no sentido oposto ao do gradiente de temperatura.

Com base no tensor tensão viscosa, dado pela Equação (5.42), temos

$$\frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} = \frac{[\lambda \delta_{ij} \, \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + 2\mu D_{ij}] D_{ij}}{T} \geq 0 \tag{5.52}$$

Assim, para qualquer escoamento:

$$\lambda D_{ii} D_{jj} + 2\mu D_{ij} D_{ij} \geq 0 \tag{5.53}$$

Se considerarmos um escoamento com **expansão puramente volumétrica**, temos

$$D_{ij} = \alpha \delta_{ij} \tag{5.54}$$

Logo,

$$\lambda (3\alpha)^2 + 2\mu (3\alpha^2) \geq 0 \tag{5.55}$$

resultando na desigualdade

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0 \tag{5.56}$$

E, para o caso de um escoamento cisalhante puro:

$$D_{ij} = \alpha \quad (\text{caso } i \neq j) \tag{5.57}$$

e

$$D_{ii} = 0 \tag{5.58}$$

Assim,

$$\mu \geq 0 \tag{5.59}$$

Por conveniência, costuma-se chamar o lado direito da desigualdade dada na Equação (5.56) de viscosidade expansional β. Dessa forma, podemos reescrever a Equação (5.43) em termos indiciais, obtendo a expressão geral para fluidos newtonianos:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + (\beta - \tfrac{2}{3}\mu)\,\delta_{ij}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{U} + 2\mu D_{ij} \tag{5.60}$$

Ao considerarmos apenas o traço do tensor tensão, obtemos

$$T_{ii} = -3p + 3(\beta - \tfrac{2}{3}\mu)\,\vec{\nabla}\cdot\vec{U} + 2\mu D_{ij} \tag{5.61}$$

$$T_{ii} = -3p + 3(\beta - \tfrac{2}{3}\mu)\,\vec{\nabla}\cdot\vec{U} + 2\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{U} \tag{5.62}$$

$$T_{ii} = -3p + 3\beta\,\vec{\nabla}\cdot\vec{U} \tag{5.63}$$

Ao dividirmos por 3, temos a pressão mecânica na forma:

$$\frac{T_{ii}}{3} = -\bar{p} = -p + \beta\,\vec{\nabla}\cdot\vec{U} \tag{5.64}$$

Dessa forma, podemos concluir que, para um fluido em movimento, a pressão mecânica não é necessariamente igual à pressão termodinâmica. Porém, para melhor compreensão física da Equação (5.64), vamos multiplicar todos os seus termos pelo divergente da velocidade $\vec{\nabla}\cdot\vec{U}$:

$$\underbrace{-\bar{p}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{U}}_{\substack{\text{Trabalho mecânico}\\ \text{realizado pelas}\\ \text{tensões normais}}} = \underbrace{-p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{U}}_{\substack{\text{Trabalho realizado}\\ \text{pela deformação do}\\ \text{volume material}}} + \underbrace{\beta(\vec{\nabla}\cdot\vec{U})^2}_{\substack{\text{Trabalho irreversível}\\ \text{relacionado à deformação}\\ \text{causada por forças viscosas}}} \tag{5.65}$$

Aqui é importante ressaltar que β corresponde a uma viscosidade associada à compressibilidade do elemento de fluido e também à mudança de energia: rotação, translação e vibração, por exemplo. Já o termo $\beta(\vec{\nabla}\cdot\vec{U})^2$ está intrinsecamente relacionado à transferência mecânica para a escala molecular.

A partir deste ponto, é importante ponderarmos sobre algumas observações pertinentes:

a) Tanto μ quanto β são propriedades exclusivas do fluido e não podem ser determinadas por meio da teoria do contínuo.

b) Para gases monoatômicos, a teoria cinética dos gases prevê $\beta = 0$.

c) A hipótese de Stokes assume que $\beta = 0$, o que é equivalente a considerar que $-p = \frac{2}{3}T_{ii}$, pois $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. E isso é equivalente a assumir que a pressão mecânica é igual à pressão termodinâmica ($\bar{p} = p$).

5.7 EQUAÇÕES GERAIS DO MOVIMENTO

Até agora, fomos apresentados às equações que descrevem a conservação da massa, a conservação da quantidade de movimento e a conservação da energia térmica, dadas, respectivamente, por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\,\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \tag{5.66}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}\vec{U}\right) = \rho\vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \tag{5.67}$$

$$\rho\frac{De}{Dt} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho\dot{q} - p\,\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} \tag{5.68}$$

É importante ressaltar que, para fluidos newtonianos, o tensor tensão é expresso como

$$\overline{\overline{T}} = \left[-p + \left(\beta - \tfrac{2}{3}\mu\right)\vec{\nabla} \cdot \vec{U}\right]\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}} \tag{5.69}$$

Ao considerarmos a viscosidade β nula, a média das pressões normais corresponderá à média das pressões hidrostáticas. Assim,

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \left(\beta - \tfrac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij}\,\partial_k U_k + 2\mu D_{ij} \tag{5.70}$$

Uma vez que

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} = \hat{e}_k\,\partial_k T_{ij}\,\hat{e}_i\hat{e}_j \tag{5.71}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} = \partial_i T_{ij}\,\hat{e}_j = \partial_j T_{ji}\,\hat{e}_i, \tag{5.72}$$

temos

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} = \left[-\partial_i p + \partial_i \left(\beta - \tfrac{2}{3}\mu \right) \partial_k U_k + 2\, \partial_j \mu D_{ij} \right] \hat{e}_i \tag{5.73}$$

Ao substituirmos a Equação (5.73) na equação da conservação da quantidade de movimento (Equação 5.67), obtemos a forma geral das equações de Navier-Stokes para a quantidade de movimento:

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \left[\left(\beta - \tfrac{2}{3}\mu \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \right] + 2\vec{\nabla} \cdot (\mu \overline{\overline{D}}) + \rho \vec{f} \tag{5.74}$$

A equação da conservação da quantidade de movimento também pode ser reescrita considerando três situações particulares. A primeira é baseada em uma condição em que as viscosidades β e μ sejam constantes. Nesse caso,

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \left(\beta - \tfrac{2}{3}\mu \right) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + 2\mu \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{D}} + \rho \vec{f} \tag{5.75}$$

e considerando o fato de que

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{D}} = \tfrac{1}{2} \left(\nabla^2 \vec{U} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right), \tag{5.76}$$

temos

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \left(\beta + \tfrac{1}{3}\mu \right) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \vec{f} \tag{5.77}$$

A segunda situação refere-se a um escoamento a volume constante, ou seja, um escoamento isocórico ($\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$). Assim, a equação da conservação da quantidade de movimento adquire a forma

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + 2\vec{\nabla} \cdot (\mu \overline{\overline{D}}) + \rho \vec{f} \tag{5.78}$$

Porém,

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \overline{\overline{D}}) = \mu \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{D}} \cdot \vec{\nabla} \mu \tag{5.79}$$

Consequentemente,

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + 2\mu \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{D}} + 2\overline{\overline{D}} \cdot \vec{\nabla} \mu + \rho \vec{f} \tag{5.80}$$

$$\rho\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + 2\mu\left[\tfrac{1}{2}\left(\nabla^2\vec{U} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{U})\right)\right] + (\vec{\nabla}\vec{U} + \vec{\nabla}\vec{U}^T)\cdot\vec{\nabla}\mu + \rho\vec{f} \tag{5.81}$$

Assim, a equação da conservação da quantidade de movimento é expressa na forma

$$\rho\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{U} + (\vec{\nabla}\vec{U} + \vec{\nabla}\vec{U}^T)\cdot\vec{\nabla}\mu + \rho\vec{f} \tag{5.82}$$

Por fim, considerando o caso onde ambos ρ e μ sejam constantes, temos

$$\rho\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{U} + \rho\vec{f} \tag{5.83}$$

ou simplesmente

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{U} + \vec{f} \tag{5.84}$$

As Equações (5.83) e (5.84) representam a forma não conservativa da equação da quantidade de movimento para fluidos newtonianos e são de grande importância para a modelagem de escoamentos complexos, nos quais efeitos advectivos, por exemplo, são significativos. No entanto, é importante ressaltar que, em muitos casos, a forma não conservativa da equação não é suficiente para representar o comportamento de fluidos, mesmo em casos simples. Por isso, a escolha da forma mais apropriada depende da natureza do problema em questão e das simplificações adotadas.

5.8 EQUAÇÃO DA ENERGIA TÉRMICA PARA FLUIDOS NEWTONIANOS

De maneira geral, os fluidos podem ou não apresentar condições isotérmicas. Neste último caso, tanto a densidade quanto a viscosidade dinâmica do fluido são funções da temperatura (ou seja, $\rho = \rho(T)$ e $\mu = \mu(T)$). Isso nos leva à necessidade de obter um campo de temperatura para o fluido.

$$\rho\frac{De}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \rho\dot{q} - p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{U} + \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}},$$

$$\vec{q} = -k(\vec{\nabla}T)$$

e

$$\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} = \left[\left(\beta - \tfrac{2}{3}\mu\right) \vec{\nabla} \cdot \vec{U}\, \overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}}\right] : \overline{\overline{D}}$$

Ao considerarmos a hipótese de Stokes, $\beta = 0$,

$$\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} = \operatorname{tr}\left\{\left[\left(- \tfrac{2}{3}\mu \operatorname{tr}\overline{\overline{D}}\,\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}}\right)^{T} \cdot \overline{\overline{D}}\right]\right\}$$

$$\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} = \mu\left[-\tfrac{2}{3}\operatorname{tr}(\overline{\overline{D}})\operatorname{tr}(\overline{\overline{D}}) + 2\operatorname{tr}(\overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}})\right]$$

$$\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} = \mu\left\{2\left[-\tfrac{1}{3}\operatorname{tr}^{2}(\overline{\overline{D}}) + \operatorname{tr}(\overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}})\right]\right\}$$

A expressão contida dentro das chaves é conhecida como **função dissipativa viscosa Φ**. Ou seja,

$$\Phi = 2\left[-\tfrac{1}{3}\operatorname{tr}^{2}(\overline{\overline{D}}) + \operatorname{tr}(\overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}})\right]$$

Dessa maneira, podemos reescrever a equação da energia na forma

$$\rho\frac{De}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla}T) + \rho\dot{q} - p\,\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \mu\Phi \tag{5.85}$$

A partir deste ponto, a descrição da energia pode ser obtida considerando o calor específico do fluido, tendo em vista que esta propriedade indica a quantidade de energia térmica necessária para aumentar uma unidade de massa em uma unidade de temperatura. Logo, sua definição é dada por

$$c = \frac{dq}{dT} \tag{5.86}$$

Considerando que a primeira lei da termodinâmica estabelece que

$$dq = de + p\,dv \tag{5.87}$$

tanto a temperatura T quanto a energia e podem ser expressas em termos da pressão p e do volume específico v. Assim,

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_p dv + \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_v dp \tag{5.88}$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp \tag{5.89}$$

Consequentemente,

$$c = \frac{\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_p dv + \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_v dp + p\,dv}{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp} \tag{5.90}$$

A Equação (5.90) é uma generalização do calor específico de um meio material qualquer. Porém, para os fluidos, principalmente, é importante distinguirmos dois casos: condições à pressão constante e condições a volume constante.

Para uma condição à pressão constante, temos

$$c_p = \frac{\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_p dv + p\,dv}{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv} \tag{5.91}$$

Como

$$p\,dv = \left(\frac{\partial (pv)}{\partial v}\right)_p dv$$

temos que

$$c_p = \frac{\left(\frac{\partial e}{\partial v} + \frac{\partial (pv)}{\partial v}\right)_p dv}{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv}$$

ou seja,

$$c_p = \frac{\partial (e + pv)}{\partial T} \tag{5.92}$$

Como a entalpia h pode ser definida como $h = e + pv$, concluímos que

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \tag{5.93}$$

Para a condição a volume constante, obtemos

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v \tag{5.94}$$

Com base na equação de Gibbs, dada pela Equação (5.26), podemos concluir que uma porção infinitesimal de energia é dada por

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_v ds + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_s dv \tag{5.95}$$

A Equação (5.95) é obtida a partir de

$$de = T ds - p dv$$

E, pelas relações de Maxwell (vide textos de termodinâmica clássica), obtemos as definições de T e p dadas por

$$T \equiv \left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_v$$

e

$$p \equiv -\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_s$$

Com isso, podemos relacionar as variações de temperatura e pressão em função do volume e da entropia:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = \frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_v\right]_s$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v = \frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_s\right]_v$$

Isso nos leva à obtenção de uma das relações de Maxwell:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v$$

Ao revisitarmos a equação da energia dada pela Equação (5.95), percebemos que podemos reescrevê-la em termos do calor específico a volume constante. Pois,

$$de = c_v\, dT + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T dv \tag{5.96}$$

Se considerarmos o fato de que

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T - p\left(\frac{\partial v}{\partial v}\right)_T \tag{5.97}$$

Assim,

$$de = c_v\, dT + \left[T\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T - p\right] dv \tag{5.98}$$

A partir das relações de Maxwell, temos que

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

E, considerando as relações de diferenciação, obtemos

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

Dessa forma,

$$de = c_v\, dT + \left[-T \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - p \right] dv \tag{5.99}$$

A partir deste ponto, devemos considerar o fato de que os gases reais, por exemplo, não se comportam como gases ideais. Tanto a compressão quanto a expansão de gases reais estão intrinsicamente relacionadas às interações moleculares e influenciam nas propriedades termodinâmicas. Dessa forma, precisamos considerar o **coeficiente de compressibilidade isotérmica**

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

e o coeficiente de expansão térmica,

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

Dessa forma, um componente infinitesimal de energia pode ser expresso na forma

$$de = c_v\, dT + \left[\frac{\beta T}{\kappa} - p \right] dv \tag{5.100}$$

e

$$\frac{De}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt} + \left[\frac{\beta T}{\kappa} - p \right] \frac{Dv}{Dt} \tag{5.101}$$

Tomando a relação entre volume específico e massa específica, na Equação (5.101), podemos deduzir que

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\rho^{-1} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

e considerando que

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\, \vec{\nabla} \cdot \vec{U}$$

De fato, a Equação (5.101) demonstra que a taxa de variação temporal da energia térmica é proporcional à taxa de variação temporal do volume do elemento de fluido. Isso possibilita algumas importantes deduções a partir de gases ideais, por exemplo.

Para um gás ideal,

$$pv = RT,$$

onde R representa a constante particular do gás ideal. Logo,

$$p = \rho RT, \quad \rho = \frac{p}{RT}$$

Como

$$\kappa = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{RT} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1}{RT} = \frac{1}{p}$$

e

$$\beta = \frac{1}{T}$$

E, por fim,

$$de = c_v\, dT$$

Assim, a Equação (5.101) toma a forma

$$\frac{De}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt} + \left[\frac{\beta T}{\kappa} - p\right] \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \tag{5.102}$$

Retomando a equação da energia, temos

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} + \left[\frac{\beta T}{\kappa} - p\right] \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla}T) + \rho\dot{q} - p\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \mu\Phi \tag{5.103}$$

Com isso, obtemos a forma c_v da equação da energia

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla}T) - \left(\frac{\beta T}{\kappa}\right)\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \rho\dot{q} + \mu\Phi \tag{5.104}$$

Com base na definição de entalpia, podemos reescrever a equação da energia térmica na forma

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p\frac{Dv}{Dt} + v\frac{Dp}{Dt} \tag{5.105}$$

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + \frac{p}{\rho}\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} \tag{5.106}$$

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \rho\frac{De}{Dt} + p\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \frac{Dp}{Dt} \tag{5.107}$$

Como a equação da energia térmica também pode ser reescrita como uma função da entalpia, obtemos

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla}T) + \frac{Dp}{Dt} + \rho\dot{q} + \mu\Phi \tag{5.108}$$

Para escrevermos a Equação (5.108) em função da temperatura, devemos considerar que $h = h(T, p)$.

Como

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$$

e

$$dh = de + (pdv + vdp) = Tds - pdv + (pdv + vdp)$$

Logo,

$$dh = Tds + vdp$$

Dessa forma,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = T\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T + v\left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_T = T\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T + v$$

Usando a relação de Maxwell, temos

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -v\beta$$

Assim,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = -\frac{T\beta}{\rho} + \frac{1}{\rho}$$

e

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho}[1 - T\beta]dp$$

Que, em termos de taxa total, fica

$$\frac{Dh}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt} + \frac{1}{\rho}[1 - T\beta]\frac{Dp}{Dt}$$

Dessa maneira, a forma c_p da equação da energia é dada por

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla}T) + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \rho \dot{q} + \mu\Phi \tag{5.109}$$

Assim, concluímos que as equações de Navier-Stokes em coordenadas retangulares, para viscosidade constante, são dadas por:

1. **Equação da continuidade:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{5.110}$$

2. **Equação da quantidade de movimento na direção x:**

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \rho f_x\end{aligned} \tag{5.111}$$

3. **Equação da quantidade de movimento na direção y:**

$$\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+\rho f_y \tag{5.112}$$

4. **Equação da quantidade de movimento na direção z:**

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+\rho f_z \tag{5.113}$$

5. **Equação da conservação da energia em termos de c_v:**

$$\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_x\frac{\partial T}{\partial x}+u_y\frac{\partial T}{\partial y}+u_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$
$$=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$
$$-\frac{\beta T}{\kappa}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\rho\dot{q}+\mu\Phi \tag{5.114}$$

6. **Equação da conservação da energia em termos de c_p:**

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_x\frac{\partial T}{\partial x}+u_y\frac{\partial T}{\partial y}+u_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$
$$=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$
$$-\beta T\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u_x\frac{\partial p}{\partial x}+u_y\frac{\partial p}{\partial y}+u_z\frac{\partial p}{\partial z}\right)+\rho\dot{q}+\mu\Phi \tag{5.115}$$

onde a função dissipação viscosa é dada por

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 \tag{5.116}$$

Com isso, vimos então as equações fundamentais que descrevem a fluidodinâmica para fluidos newtonianos. A abordagem adotada ao longo do livro não é canônica e, obviamente, como inúmeras obras já publicadas sobre esse assunto, não contempla todas as nuances envolvidas no raciocínio e conhecimento necessários para obtenção das equações constitutivas da fluidodinâmica. Porém, de maneira geral, optou-se por uma forma ao mesmo tempo clara e minimamente madura, necessárias para um maior entendimento de como podemos alcançar essas equações.

O estudante ou pesquisador deve buscar mais detalhes em outras bibliografias sempre que não se sentir seguro quanto à compreensão de algum tópico em questão. A fluidodinâmica é um ramo que requer muita atenção, e uma análise mais profunda de cada termo de cada uma das equações é de vital importância. No volume 2 será apresentada uma discussão mais ampla sobre os termos das equações constitutivas.

REFERÊNCIAS

AJAEV, V. S. *Interfacial fluid mechanics: a mathematical modeling approach.* New York: Springer, 2012.

ARIS, R. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics.* Mineola: Dover Publications, 1990.

BAILLY, C.; COMTE-BELLOT, G. *Turbulence.* New York: Springer, 2015.

BEJAN, A. *Convective heat transfer.* 3rd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2004.

BURESTI, G. *Elements of fluid dynamics.* London: Imperial College Press, 2012.

CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics.* 2nd ed. New York: John Wiley, 1991.

CHORIN, A. J.; MARSDEN, J. E. *A mathematical introduction to fluid mechanics.* 3rd ed. New York: Springer, 1992.

DURST, F. *Fluid mechanics: an introduction to the theory of fluid flows.* Berlin: Springer Verlag, 2008.

FEIREISL, E.; KARPER, T. G.; POKORNÝ, M. *Mathematical theory of compressible viscous fluids: analysis and numerics.* Basel: Birkhäuser, 2016.

HAUKE, G. *An introduction to fluid mechanics and transport phenomena.* New York: Springer, 2008.

KLEINSTREUER, C. *Modern fluid dynamics.* 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2018.

KUNDU, P. K.; COHEN, I. M.; DOWLING, D. R. *Fluid mechanics.* 6th ed. Cambridge: Academic Press, 2015.

LEAL, L. G. *Advanced transport phenomena fluid mechanics and convective transport processes.* Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

LESIEUR, M. *Turbulence in fluids.* 4th ed. New York: Springer, 2008.

YAMAGUCHI, H. *Engineering fluid mechanics.* New York: Springer, 2008.

ZEYTOUNIAN, R. KH. *Asymptotic modelling of fluid flow phenomena.* New York: Springer, 2002.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 5.1

Deduza a Equação (5.94) a partir da Equação (5.90).

Exercício 5.2

Determine se as seguintes relações termodinâmicas são válidas:

$$a)\ \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v, \quad b)\ \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p, \quad c)\ \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

Exercício 5.3

Considerando que a equação de um gás ideal pode ser descrita por

$$p = \rho R T,$$

onde R representa a constante de Boltzmann, demonstre que

$$\frac{De}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt}.$$

Exercício 5.4

Com base na equação da energia térmica junto à equação de Gibbs, mostre que

$$\frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} \geq \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2}.$$

Exercício 5.5

Demonstre que a relação entre os calores específicos c_p e c_v pode ser expressa como

$$c_p = \frac{T\beta^2}{\rho\kappa} + c_v,$$

sendo β e κ o coeficiente de expansão térmica e o fator de compressibilidade isotérmica.

Exercício 5.6

Considerando que a entalpia é dada por $h = e + pv$, mostre que a equação da energia térmica pode ser expressa como

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \frac{Dp}{Dt} + \rho \dot{q} + \mu \Phi.$$

Exercício 5.7

Com base na definição, em uma forma alternativa, da função de dissipação viscosa:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\beta - \tfrac{2}{3}\mu \right) (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{D}} \right] : \overline{\overline{D}},$$

mostre que

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\rho}\left(D_{ij} - \tfrac{1}{3}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)D_{ij} + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\right)D_{ij}\delta_{ij},$$

ou

$$\varepsilon = 2\nu\left(D_{ij} - \tfrac{1}{3}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)^2 + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\right)^2.$$

Exercício 5.8

As equações de um escoamento independentes do sistema de coordenadas podem ser escritas como:

Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{U}) = 0$$

Momentum de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial(\rho\vec{U})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{U}\vec{U}) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{P}}$$

Forma c_p da equação de energia térmica:

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \beta T\frac{Dp}{Dt} + \rho\dot{q} + \overline{\overline{P}} : \vec{\nabla}\vec{U}$$

Obtenha as equações de movimento em:

a) coordenadas cilíndricas;
b) coordenadas esféricas.