

Dinâmica dos meios deformáveis

Neste capítulo vamos analisar a dinâmica do fluido levando em consideração as forças que podem produzir movimento nele. De fato, existem dois tipos de forças capazes de produzir movimento em meios deformáveis: forças de corpo ou forças de campo e forças de superfície ou forças de contato, que serão descritas a seguir.

4.1 FORÇAS EM MEIOS DEFORMÁVEIS

1. Forças de corpo (ou forças de campo): forças que atuam através do material sob a ação de campos (forças por unidade de massa). Exemplos: força da gravidade, força elétrica, força magnética. Por essa definição, temos:

$$\int_m \vec{f}(\vec{r}) dm = \int_{V(t)} \vec{f}(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV \quad (4.1)$$

E nesse caso, considerando a força da gravidade, por exemplo, a força de campo corresponde à própria aceleração da gravidade; tem-se:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{g}$$

2. Forças de superfície (ou forças de contato): forças que atuam nas fronteiras superficiais que envolvem o elemento de volume (forças por unidade de área). Exemplos: pressão e tensão de cisalhamento.

A representação da força de superfície na forma

$$\text{Força de superfície} = \int_S \vec{T}_n(\vec{r}, \hat{n}) dS \quad (4.2)$$

facilita a compreensão da dinâmica de um meio deformável. De fato, essa descrição é conhecida como **princípio das tensões de Cauchy** e enunciada da seguinte forma: “Em torno de qualquer superfície imaginária fechada no escoamento existe uma distribuição do vetor tensão \vec{T}_n , cuja resultante e momento são equivalentes àqueles causados pelo material (no caso, fluido) que envolve a superfície”.

4.2 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

O princípio fundamental do movimento dos fluidos estabelece que toda taxa de variação da quantidade de movimento de um volume material $V(t)$ corresponde exatamente à resultante das forças que atuam sobre $V(t)$. Esse princípio pode ser descrito matematicamente por meio do **primeiro postulando de Euler**, dado por:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \int_{S(t)} \vec{T}_n dS + \int_{V(t)} \rho \vec{f} dV \quad (4.3)$$

Ao considerarmos o TTR, temos:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \int_{V(t)} \left[\frac{d}{dt} (\rho \vec{U}) + \rho \vec{U} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] dV \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \int_{V(t)} \left[\rho \frac{d\vec{U}}{dt} + \underbrace{\left(\vec{U} \frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{U} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \right)}_{\substack{=0 \\ \text{Conservação da massa}}} \right] dV \quad (4.5)$$

Logo, quando está implícita a conservação da massa:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \int_{V(t)} \rho \frac{d\vec{U}}{dt} dV \quad (4.6)$$

$$\int_{V(t)} \rho \frac{d\vec{U}}{dt} dV = \int_{S(t)} \vec{T}_n dS + \int_{V(t)} \rho \vec{f} dV \quad (4.7)$$

Mas $\vec{T}_n = \hat{n} \cdot \mathbf{T}$, onde \mathbf{T} representa o **tensor tensão de Cauchy**, que, por sua vez, fornece o estado de tensões no fluido. Portanto,

$$\int_{V(t)} \rho \frac{d\vec{U}}{dt} dV = \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{\bar{T}} dS + \int_{V(t)} \rho \vec{f} dV \quad (4.8)$$

Ao aplicarmos o teorema de Gauss, temos

$$\int_{V(t)} \rho \frac{d\vec{U}}{dt} dV = \int_{V(t)} \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{T}} dV + \int_{V(t)} \rho \vec{f} dV \quad (4.9)$$

$$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{d\vec{U}}{dt} - \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} - \rho \vec{f} \right) dV = 0 \quad (4.10)$$

Uma forma alternativa é dada como

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \right) = \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} + \rho \vec{f} \quad (4.11)$$

Em notação indicial, a componente \hat{e}_i da Equação (4.11) é dada por

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \partial_j u_i \right) = \partial_j \bar{\bar{T}}_{ji} + \rho f_i$$

É importante observar que, na notação de índices dos componentes do tensor das tensões, $\bar{\bar{T}}_{ij}$, i corresponde à orientação da normal e j à orientação da força. $\bar{\bar{T}}_{ji}$ corresponde à transposta de $\bar{\bar{T}}_{ij}$. Comumente, são designados:

- $\tau \rightarrow$ tensões cisalhantes.
- $\sigma \rightarrow$ tensões normais.

Já em coordenadas cartesianas, para \hat{i} , por exemplo, temos:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x + \frac{\partial \bar{\bar{T}}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\bar{T}}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\bar{T}}_{zx}}{\partial z}$$

4.3 TENSOR TENSÃO DE CAUCHY

Agora vamos explorar em mais detalhes o tensor $\bar{\bar{T}}$. Para isso, vamos aplicar a conservação da quantidade de movimento linear em elemento de volume esférico com diâmetro d . Assim,

- $V(t) \propto d^3$

$$\bullet S(t) \propto d^2$$

Ao dividirmos a Equação (4.2) por d^2 , e aplicando o limite $d \rightarrow 0$, observamos que

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{d^2} \int_{S(t)} \vec{T}_n dS = 0 \quad (4.12)$$

Agora, ao analisarmos um elemento de fluido cilíndrico de altura infinitesimal h , como mostrado na Figura 4.1, temos

$$\int_{S(t)} \vec{T}_n dS = \int_{S_1(t)} \vec{T}_n dS + \int_{S_2(t)} \vec{T}_n dS = 0 \quad (4.13)$$

Isso mostra que

$$\vec{T}_n + \vec{T}_{-n} = 0 \quad (4.14)$$

De fato, o tensor tensão atuando em ambos os lados de uma mesma superfície, em um dado ponto, é igual em magnitude, porém com sentidos opostos. Esse resultado é equivalente à terceira lei de Newton e uma aplicação direta do princípio da variação da quantidade de movimento, que é o lema de Cauchy, que estabelece que o vetor tensão \vec{T} satisfaz o princípio da ação e reação em qualquer instante de tempo e em qualquer ponto \vec{r} a partir do elemento de superfície com orientação dada por \hat{n} , isto é, $\vec{T}(\vec{r}, \hat{n}, t) = -\vec{T}(\vec{r}, -\hat{n}, t)$.

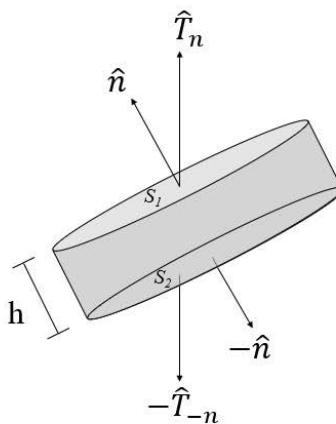


Figura 4.1 Projeções das componentes unitárias \hat{n} e \hat{T}_n sobre duas superfícies opostas em um elemento de fluido.

Fonte: elaborada pelos autores.

4.4 SIMETRIA DO TENSOR TENSÃO

Segundo o **primeiro postulado de Euler**, que estabelece a conservação da quantidade de movimento angular, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{U} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{f} dV + \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{T}_n dS \quad (4.15)$$

Do TTR, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{U} dV = \int_{V(t)} \rho \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{U}) dV \quad (4.16)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{U} dV = \int_{V(t)} \rho \left[\underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{U} \right)}_0 + \vec{r} \times \frac{d\vec{U}}{dt} \right] dV \quad (4.17)$$

Logo,

$$\int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \frac{d\vec{U}}{dt} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{f} dV + \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{T}_n dS \quad (4.18)$$

$$\int_{V(t)} \underbrace{\vec{r} \times \left(\rho \frac{d\vec{U}}{dt} - \rho \vec{f} \right)}_{=\vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{T}}} dV = \int_{S(t)} \vec{r} \times \underbrace{\vec{T}_n}_{\hat{n} \cdot \vec{\bar{T}}} dS \quad (4.19)$$

Assim,

$$\int_{V(t)} \left(\vec{r} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{T}} \right) dV = \int_{S(t)} \vec{r} \times (\hat{n} \cdot \vec{\bar{T}}) dS \quad (4.20)$$

$$\int_{V(t)} \left(\vec{r} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{T}} \right) dV = - \int_{S(t)} \hat{n} \cdot (\vec{\bar{T}} \times \vec{r}) dS \quad (4.21)$$

$$\int_{V(t)} \left(\vec{r} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{T}} \right) dV = - \int_{V(t)} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\bar{T}} \times \vec{r}) dV \quad (4.22)$$

Ao considerarmos a componente i da Equação (4.22), por exemplo, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \epsilon_{ijk} x_j \partial_m T_{mk} dV &= - \int_{V(t)} \epsilon_{ikj} \partial_m (T_{mk} x_j) dV \\ &= \int_{V(t)} \epsilon_{ijk} (x_j \partial_m T_{mk} + T_{mk} \partial_m x_j) dV \end{aligned}$$

$$\int_{V(t)} \left[\epsilon_{ijk} x_j \partial_m T_{mk} - \epsilon_{ijk} x_j \partial_m T_{mk} - \underbrace{\epsilon_{ijk} T_{mk}}_{\delta_{mj}} \partial_m x_j \right] dV = 0$$

$$\int_{V(t)} \epsilon_{ijk} T_{jk} dV = 0$$

Consequentemente,

$$\epsilon_{ijk} T_{jk} dV = 0$$

Ao multiplicarmos a equação anterior por ϵ_{ilm} , temos

$$\begin{aligned} \epsilon_{ilm} \epsilon_{ijk} T_{jk} &= (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) T_{jk} \\ &= T_{lm} - T_{ml} = 0 \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que o tensor tensão de Cauchy é simétrico (**segundo postulado de Euler**), pois

$$T_{lm} = T_{ml}$$

4.5 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DE CAUCHY

4.5.1 Hidrostática

Em repouso, um elemento de volume não apresenta componentes cisalhantes, mas somente tensões normais. Com isso, a *tensão hidrostática* é simplesmente a média das três componentes de tensão normal de qualquer tensor de tensão. Assim,

$$\sigma_{\text{hidro}} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad (4.23)$$

Dessa forma, podemos descrever essa característica como

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{\text{hidro}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{hidro}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{hidro}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Com isso, concluímos que

$$\sigma_{\text{hidro}} = \frac{1}{3} \text{tr}(T_{ij}) = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

Como $\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, o tensor tensão pode ser expresso na forma

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \sigma_{ii} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Uma vez que no regime hidrostático a tensão hidrostática é contrabalaneada única e exclusivamente pela **pressão hidrostática** p , podemos concluir que

$$\sigma_{\text{hidro}} = -p = -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

Assim, para um fluido em repouso, podemos escrever o tensor tensão na forma

$$\bar{\bar{T}} = -p \bar{\bar{I}}$$

O sinal negativo, por sua vez, deve-se ao fato de que o volume material é submetido a um esforço de compressão. Dessa maneira,

$$T_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Ao retornarmos à equação do movimento, considerando que o fluido está em repouso ($\vec{U} = 0$), temos

$$\rho \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot (p\vec{I}) \quad (4.25)$$

$$\rho \vec{f} = \hat{e}_k \partial_k \cdot (pI_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j) = \partial_i (p\delta_{ij} \hat{e}_j) = \hat{e}_i \partial_i p$$

Logo,

$$\rho \vec{f} = \vec{\nabla} p \quad (4.26)$$

Para o campo gravitacional em um sistema cartesiano, concluímos que

$$\vec{f} = -g\hat{k},$$

com

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

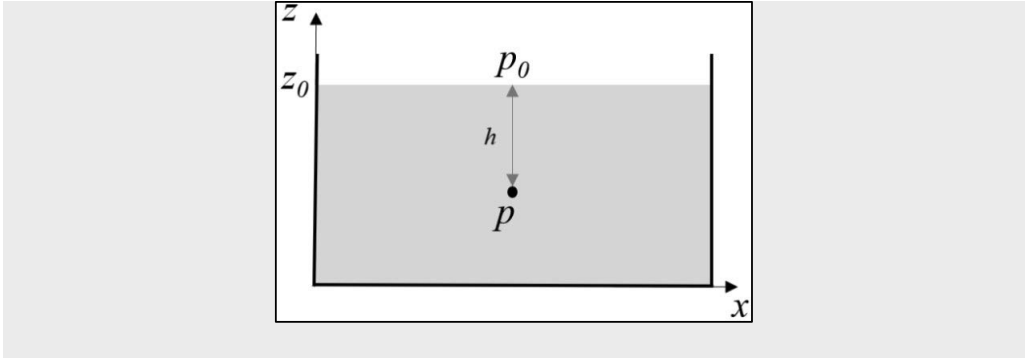
Como exemplo, vamos analisar o comportamento da pressão em função da profundidade de um tanque.

Assumindo que a densidade é constante,

$$\int_{p_0}^p dp = -\rho g \int_{z_0}^z dz$$

$$p = -\rho g(z - z_0) + p_0$$

$$p = \rho gh + p_0$$



4.5.2 Forças sobre corpos em escoamento em regime permanente

Para o caso envolvendo escoamento, o tensor tensão é descrito por

$$\overline{\overline{T}} = -p \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{P}} \quad (4.27)$$

ou

$$T_{ij} = p \delta_{ij} + P_{ij} \quad (4.28)$$

onde o tensor $\overline{\overline{P}}$ é o tensor tensão viscosa, que corresponde à componente do tensor tensão associada ao movimento do elemento de volume. Ao analisarmos o caso em que $i = j$, temos

$$T_{ii} = -3p + P_{ii}$$

Logo, observamos que

$$\underbrace{\frac{T_{ii}}{3}}_{\text{Pressão mecânica}} = \underbrace{(-p)}_{\text{Pressão termodinâmica}} + \underbrace{\frac{P_{ii}}{3}}_{\text{Pressão normal viscosa}}$$

Com isso, podemos afirmar que, para fluidos em repouso, $P_{ii} = 0$ e a pressão termodinâmica corresponde a uma média das tensões normais. Outra conclusão é de que, para fluidos em movimento, p é diferente da pressão mecânica.

Para um escoamento qualquer,

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \quad (4.29)$$

Na ausência de forças de corpo em condição de regime permanente,

$$\rho \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} = \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \quad (4.30)$$

Como

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = \rho \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} + \underbrace{\vec{U} (\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}))}_{=0 \text{ (regime permanente)}} \quad (4.31)$$

Assim,

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \quad (4.32)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U} - \overline{\overline{T}}) = 0 \quad (4.33)$$

Considerando um escoamento em torno de um corpo rígido, conforme mostrado na Figura 4.2, a Equação (4.33) pode ser expressa na forma integral como

$$\int_{V(t)} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U} - \overline{\overline{T}}) dV = \int_{S(t)} \hat{n} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U} - \overline{\overline{T}}) dS = 0 \quad (4.34)$$

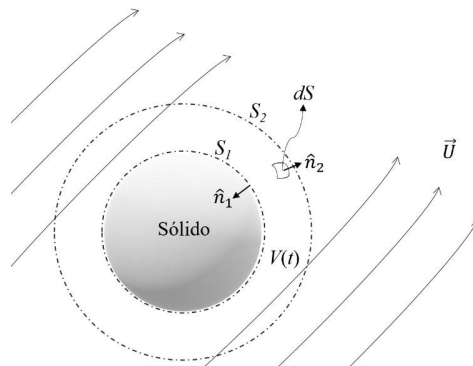


Figura 4.2 Escoamento em torno de um corpo sólido.

Fonte: elaborada pelos autores.

Ao decompor a integral de superfície em dois termos relacionados às áreas S_1 e S_2 , temos

$$\int_{S_1(t)} \hat{n}_1 \cdot (\rho \vec{U} \vec{U} - \vec{T}) dS + \int_{S_2(t)} \hat{n}_2 \cdot (\rho \vec{U} \vec{U} - \vec{T}) dS = 0, \quad (4.35)$$

considerando que

$$\hat{n} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dS = (\hat{n} \cdot \rho \vec{U}) \vec{U} dS \quad (4.36)$$

onde $\hat{n} \cdot \rho \vec{U}$ é o fluxo de massa na direção da componente normal \hat{n} . Dessa forma, ao considerarmos que a superfície S_1 é impermeável,

$$\int_{S_1(t)} \hat{n}_1 \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dS = 0 \quad (4.37)$$

Em contrapartida, a componente

$$\int_{S_1(t)} \hat{n}_1 \cdot \vec{T} dS$$

representa a força exercida pelo corpo sobre o volume material $V(t)$. Assim, a força de escoamento sobre um corpo sólido é dada por

$$\vec{F}_D = - \int_{S_1(t)} \hat{n}_1 \cdot \vec{T} dS \quad (4.38)$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\vec{F}_D = - \int_{S_2(t)} \hat{n}_2 \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dS + \int_{S_2(t)} \hat{n}_2 \cdot \vec{T} dS \quad (4.39)$$

Caso S_2 esteja posicionado suficientemente longe do corpo, podemos ignorar a ação das forças viscosas e expressar a força do escoamento como

$$\vec{F}_D = - \int_{S_2(t)} \hat{n}_2 \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dS + \int_{S_2(t)} \hat{n}_2 \cdot (-p \vec{I}) dS \quad (4.40)$$

ou

$$\vec{F}_D = - \int_{S_2(t)} \hat{n}_2 \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dS - \int_{S_2(t)} p \hat{n}_2 dS \quad (4.41)$$

REFERÊNCIAS

- ALLEN, M. B. *Continuum mechanics: the birthplace of mathematical models*. Hoboken: John Wiley & Sons Inc, 2015.
- ARIS, R. *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Mineola: Dover Publications, 1962.
- BURESTI, G. *Elements of fluid dynamics*. London: Imperial College Press, 2012.
- FEIREISL, E.; KARPER, T. G.; POKORNÝ, M. *Mathematical theory of compressible viscous fluids: analysis and numerics*. Basel: Birkhäuser, 2016.
- LEAL, L. G. *Advanced transport phenomena fluid mechanics and convective transport processes*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- MAHANI, H.; MUGGERIDGE, A. H.; ASHJARI, M. A. Vorticity as a measure of heterogeneity for improving coarse grid generation. *Petroleum Geoscience*, Bath, v. 15, n. 1, p. 91–102, 2009.
- MARTINEC, Z. *Principles of continuum mechanics: a basic course for physicists*. Basel: Birkhäuser, 2019.
- PETRILA, T.; TRIF, D. *Basics of fluid mechanics and introduction to computational fluid dynamics*. New York: Springer, 2005.
- SADD, M. H. *Continuum mechanics modeling of material behavior*. Cambridge: Academic Press, 2018.
- SKIEPKO, T. *On the Reynolds transport theorem for fluid systems: fundamentals and applications*. Saarbrücken: Lap Lambert Academic Publishing, 2015.
- SMITH, D. R. *An introduction to continuum mechanics: after Truesdell and Noll*. New York: Springer, 1993.
- TEMAN, R.; MIRANVILLE, A. *Mathematical modeling in continuum mechanics*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- WITELSKI, T.; BROWEN, M. *Methods of mathematical modelling: continuous systems and differential equations*. New York: Springer, 2015.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS**Exercício 4.1**

Considere um meio sólido cúbico de aresta a . Nesse meio, uma força de intensidade igual a F é aplicada na direção positiva de x sobre a face lateral do cubo. Determine os componentes do tensor de Cauchy.

Exercício 4.2

Demonstre que

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{R(t)} \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\nabla} \vec{U} \cdot \vec{V} \right) \cdot d\vec{r}$$

onde \vec{V} corresponde a uma função vetorial, \vec{U} é o vetor velocidade e $R(t)$ uma curva material.

Exercício 4.3

Determine o divergente do tensor tensão considerando um campo de velocidade dado por

$$\vec{U} = 2yz \hat{i} + z(1+x) \hat{j} + 5(y-x) \hat{k} \quad [\text{m/s}]$$

Considere $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$.

Exercício 4.4

Determine o vetor força de campo resultante em uma condição hidrostática para um fluido com densidade $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ submetido a um campo de pressão dado por

$$p = 9.8z \quad [\text{Pa}].$$

Exercício 4.5

Demonstre que a aceleração de um elemento de fluido pode ser expressa na forma

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} U^2}{2} + (\vec{\nabla} \times \vec{U}) \times \vec{U}.$$

