

# Cinemática dos meios deformáveis

Após uma breve introdução de conceitos matemáticas fundamentais necessários para modelagem matemática do meio contínuo, vamos analisar alguns conceitos físicos para a compreensão do movimento dos fluidos. Para isso, vamos “atacar” o problema do deslocamento de um elemento de volume a partir das descrições **euleriana** e **lagrangiana**.

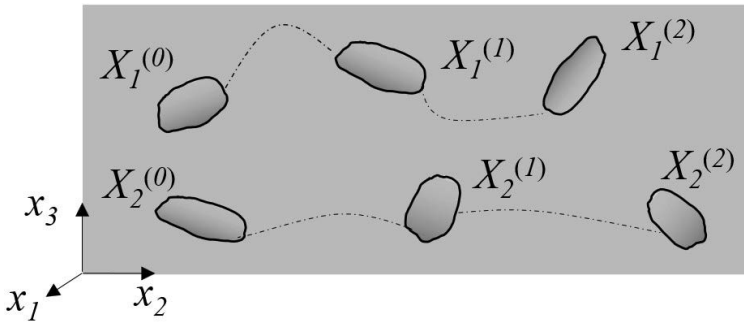
Apesar da descrição que realizaremos sobre o movimento do fluido sem a preocupação com suas causas, é importante ressaltar que, independentemente da descrição adotada, algumas hipóteses devem ser consideradas:

- a) A matéria é contínua.
- b) Os elementos de fluido estão sempre relacionados a pontos matematicamente identificáveis.
- c) Um elemento de fluido só pode ocupar uma dada posição em um dado instante de tempo.

## 3.1 DESCRIÇÕES LAGRANGIANA E EULERIANA

Do ponto de vista **lagrangiano** (descrição material), o movimento dos elementos de fluido é acompanhado ao longo do tempo, bem como a variação das propriedades intrínsecas a esses elementos, a partir de um ponto inicial, com o volume de controle se movendo junto ao fluido. A solução das equações do movimento para cada elemento de fluido é relativamente simples, pois implica apenas a localização espacial de cada partícula a cada instante de tempo por meio da segunda lei de Newton. Também é importante ressaltar que, nessa descrição, os elementos de fluido podem apresentar variação de seu volume e formato ao longo do tempo devido, por exemplo, à variação de sua densidade, sem que haja violação da conservação da massa.

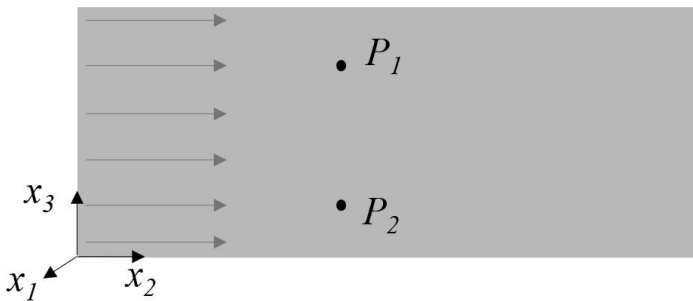
A Figura 3.1 apresenta um exemplo da descrição lagrangiana para duas partículas distintas  $X_1$  e  $X_2$ , ao longo dos instantes de tempo  $t = 0, 1, 2$  (indicados pelos sobrescritos).



**Figura 3.1** Descrição lagrangiana de dois elementos de fluido ao longo do tempo.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Já do ponto de vista euleriano (**descrição espacial**), o volume de controle é fixo e as propriedades dos elementos de fluido são calculadas em função do tempo à medida que o escoamento passa através de pontos fixos no espaço. Essa descrição pode apresentar algumas vantagens, como soluções mais simples para as equações do movimento, devido ao fato de que, computacionalmente, precisamos apenas calcular as propriedades dos elementos de volume em pontos fixos, sem a necessidade de guardar a informação da localização individual de cada partícula, bem como variações de seu tamanho e volume. A Figura 3.2 apresenta um exemplo de dois pontos fixos dentro do volume de controle onde as propriedades do fluido são medidas ao longo de cada instante de tempo.



**Figura 3.2** Descrição euleriana com dois pontos fixos onde as propriedades são calculadas ao longo do tempo.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

É indiscutível que ambas as descrições apresentam vantagens, desvantagens e limitações, dependendo do caso estudado. Por isso, diversos autores focam seus esforços na análise das características de tais descrições, que remontam à década de 1930, demonstrando a descrição material por meio de equações complexas, e chegam a trabalhos mais

atuais que apresentam resultados comparativos entre as duas descrições para fenômenos envolvendo a deposição de partículas em escoamentos turbulentos.

### 3.2 CARACTERIZAÇÃO DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

A descrição da posição de um elemento de fluido pode ser dada como uma função de sua posição inicial  $\vec{r}_0$  no instante de tempo  $t = 0$ :

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t) \quad (3.1)$$

De fato, essa equação representa uma transformação que leva a partícula, localizada inicialmente em  $\vec{r}_0$ , para distintas novas posições ao longo do tempo. Porém, também podemos descrever a posição inicial do elemento por

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}, t) \quad (3.2)$$

Da mesma forma, podemos expressar qualquer propriedade do elemento de fluido como  $\phi(\vec{r}, t)$  ou  $\phi(\vec{r}_0, t)$ . Para o caso da velocidade de um elemento de fluido que se encontra na posição  $\vec{r}$  no instante  $t$ , temos

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t) \quad (3.3)$$

ou, para o caso da posição inicial  $\vec{r}_0$  no instante  $t$ ,

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}_0, t) \quad (3.4)$$

Ou seja, a descrição de seu movimento pode ser obtida considerando as variáveis independentes  $(\vec{r}, t)$  ou  $(\vec{r}_0, t)$ . As coordenadas  $(\vec{r}, t)$  são chamadas de **eulerianas**, espaciais ou de campo, pois a posição considerada é fixa ao longo do tempo. Já as coordenadas  $(\vec{r}_0, t)$  são ditas **lagrangianas, materiais ou convectivas**, pois nelas o **ponto de matéria** (elemento de volume) é fixo ao longo do tempo.

Para avaliar a diferença entre as duas abordagens, vamos tomar como exemplo um campo de velocidade descrito por

$$\vec{u}(y, t) = \frac{y + 2t}{t} \hat{e}_1$$

com a posição

$$y = (1 + t^3) y_0$$

$$\begin{aligned}\vec{u}(y, t) &= \frac{y + 2t}{t} \hat{e}_1 \\ \vec{u}(y_0, t) &= \frac{(1 + t^3)y_0 + 2t}{t} \hat{e}_1 \\ \vec{u}(y_0, t) &= \left( y_0 t^2 + \frac{y_0}{t} + 2 \right) \hat{e}_1\end{aligned}$$

Embora  $\vec{u}(y, t) \neq \vec{u}(y_0, t)$ , é importante lembrar que estamos descrevendo o mesmo escoamento. Em suma, a descrição de qualquer propriedade pode ser expressa por

$$\underbrace{\phi(\vec{r}, t)}_{\text{fixa a posição dentro do volume de controle}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\phi(\vec{r}_0, t)}_{\text{fixa a matéria (elemento de volume)}}$$

### 3.3 DERIVADAS MATERIAL (SUBSTANCIAL) E ESPACIAL

Para qualquer propriedade  $\phi$ , podemos definir as seguintes derivadas:

$$\underbrace{\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\vec{r}}}_{\text{derivada espacial}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0}}_{\text{derivada material}}$$

Em nome da simplicidade, vamos adotar a seguinte notação:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\vec{r}} \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{dt} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0}$$

Com a propriedade descrita em coordenadas espaciais, a derivada material é dada por:

$$\frac{d\phi(\vec{r}, t)}{dt} = \left. \frac{\partial \phi(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t)}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} = \left. \frac{\partial \phi(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t)}{\partial x_i} \right|_t \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{\vec{r}_0} + \left. \frac{\partial \phi(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t)}{\partial t} \right|_{\vec{r}} \quad (3.5)$$

Como  $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ , temos:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|_t \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} = \left. \frac{\partial (x_i \hat{e}_i)}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} \cdot \hat{e}_j \partial_i \phi = \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \phi$$

Assim:

$$\frac{d\phi(\vec{r}, t)}{dt} = \left. \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} = \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \phi \quad (3.6)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação (3.6) é chamado de **termo transiente** e está relacionado com o fato de que a grandeza  $\phi$  pode não estar em um regime permanente, sofrendo variações ao longo do tempo (dependência explícita do tempo). Ainda é importante destacar que, no referencial euleriano, o escoamento pode estar em regime permanente para um determinado sistema de referência e em regime transiente em relação a outro.

Já o segundo termo da direita da Equação (3.6) é denominado **termo convectivo** e está relacionado ao fato de a grandeza  $\phi$  estar sendo transportada pela velocidade  $\vec{U}$  ao longo das coordenadas espaciais, considerando as variações da própria grandeza ao longo do espaço através do operador gradiente.

Agora, vamos tomar como exemplo  $\phi = \vec{r}$ . A derivada material é:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} = \vec{U} \cdot \nabla \vec{r} + \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}} = \vec{U} \cdot \vec{I} + 0 = \vec{U}$$

Como era de esperar, a derivada material da posição corresponde ao vetor velocidade. Também é importante ressaltar que:

$$\vec{U} = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} \neq \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}}$$

A derivada material não necessariamente é obtida para uma única grandeza. Assim, para duas grandezas  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , temos pela regra da cadeia:

$$\frac{d(\phi_1 \phi_2)}{dt} = \phi_1 \frac{d\phi_2}{dt} + \phi_2 \frac{d\phi_1}{dt} \quad (3.7)$$

### 3.4 TRAJETÓRIA, LINHAS DE CORRENTE E DE EMISSÃO

A soma dos deslocamentos infinitesimais de elemento de fluido ao longo do tempo corresponde a sua trajetória. Como a Equação (3.1) descreve a posição em função do tempo, temos que os módulos das componentes de velocidade nos três eixos cartesianos são dados por:

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad u_2 = \frac{dx_2}{dt}, \quad u_3 = \frac{dx_3}{dt}$$

Ao tomarmos como exemplo o campo de velocidade dado  $\vec{U} = 3xt \hat{e}_1 + t \hat{e}_2$ , temos

$$u_1 = \frac{dx}{dt} = 3xt$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^t 3t dt$$

$$x = x_0 e^{\frac{3}{2}t^2}$$

$$u_2 = \frac{dy}{dt} = t$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^t t dt$$

$$y = y_0 + \frac{t^2}{2}$$

Uma vez que os valores de  $x_0$  e  $y_0$  forem definidos, a trajetória da partícula pode ser descrita por

$$\vec{r} = (x_0 e^{\frac{3}{2}t^2}) \hat{e}_1 + (y_0 + \frac{t^2}{2}) \hat{e}_2$$

Já a **linha de corrente** corresponde a uma curva no espaço tangente ao vetor velocidade em cada ponto, para cada instante de tempo, conforme exemplificado na Figura 3.3. Para os planos  $x$ - $y$ ,  $x$ - $z$  e  $y$ - $z$ , temos

$$x - y : \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

$$x - z : \frac{dx}{dz} = \frac{u}{w}$$

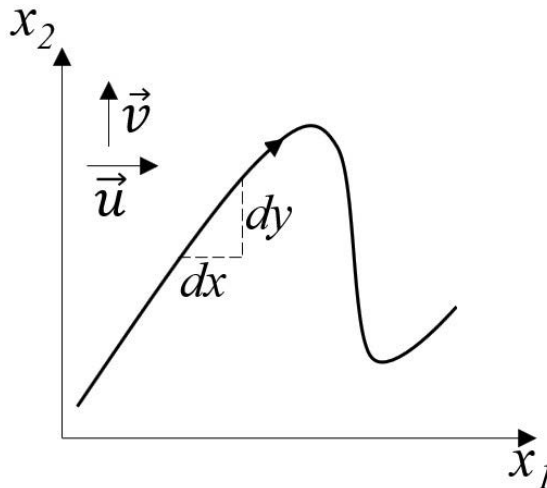
$$y - z : \frac{dy}{dz} = \frac{v}{w}$$

Logo,

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (3.8)$$

A solução dessas equações para cada instante de tempo  $t$  resulta em uma equação na forma  $z = z(x, y)$  correspondente à linha de corrente que pode ser determinada considerando as funções paramétricas  $x = x(\sigma)$ ,  $y = y(\sigma)$  e  $z = z(\sigma)$ . E, em termos do parâmetro  $\sigma$ , concluímos que

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \sigma$$



**Figura 3.3** Linha de corrente de um elemento de fluido.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Com  $t$  sendo fixado, podemos reescrever na forma indicial

$$\frac{dx_i}{ds} = U_i(\vec{r}, t) \quad (3.9)$$

Voltando ao exemplo anterior,

$$\frac{dx}{ds} = 3xt$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^\sigma 3t d\sigma$$

$$x = x_0 e^{3t\sigma}$$

$$\frac{dy}{ds} = t$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^\sigma t d\sigma$$

$$y = y_0 + t\sigma$$

Como

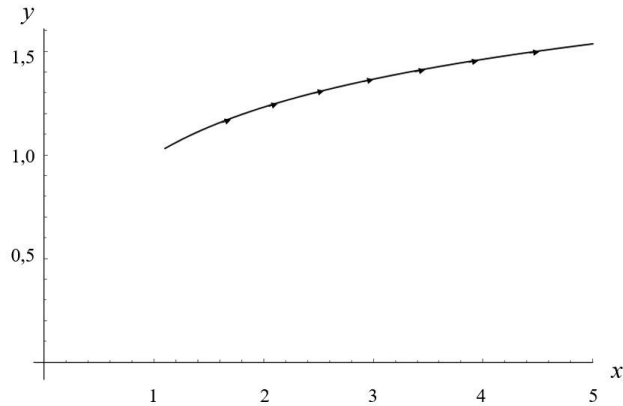
$$\sigma = \frac{y - y_0}{t},$$

a linha de corrente pode ser dada por

$$x = x_0 e^{3(y-y_0)}$$

ou

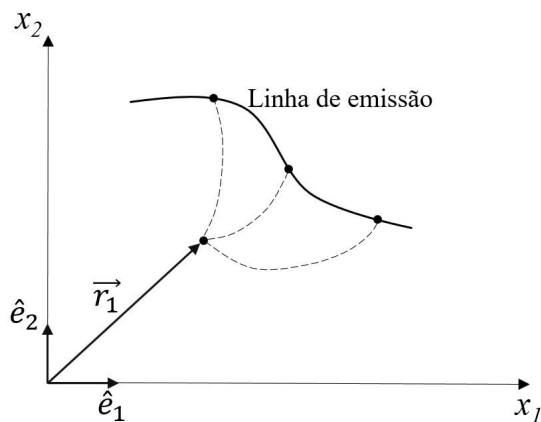
$$y = y_0 + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{x}{x_0} \right)$$



**Figura 3.4** Linha de corrente obtida, considerando a posição inicial  $x_0 = y_0 = 1$ , a partir do campo de velocidade dado por  $\vec{U} = 3xt \hat{e}_1 + t \hat{e}_2$ :

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Durante o estudo de um escoamento, um corante pode ser usado para identificar a trajetória seguida pelas partículas do fluido ao longo do tempo. A linha de emissão corresponde à curva formada por todas as partículas que passam em uma determinada posição espacial  $\vec{r}_1$  em um intervalo de tempo  $0 \leq \tau \leq t$ , como exemplificado na Figura 3.5. Ou seja, uma partícula qualquer na posição  $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}, t)$  está sobre a linha de emissão de  $\vec{r}_1$  se em qualquer instante de tempo  $\tau$  ela passou por  $\vec{r}_1$ . Consequentemente, a linha de emissão é obtida a partir da Equação (3.1), considerando que  $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}_1, \tau)$ .



**Figura 3.5** Linha de emissão gerada por todas as partículas que passam no ponto localizado em  $\vec{r}_1$  no intervalo de tempo  $\tau$ .

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Ainda fazendo uso do exemplo anterior, sabemos que

$$x = x_0 e^{\frac{3}{2}t^2}$$

$$x_0 = x_1 e^{-\frac{3}{2}\tau^2}$$

Logo, a posição em  $x$  pode ser reescrita como

$$x = (x_1 e^{-\frac{3}{2}\tau^2}) e^{\frac{3}{2}t^2}$$

$$x = x_1 e^{\frac{3}{2}(t^2 - \tau^2)}$$

$$y = y_0 + \frac{t^2}{2}$$

$$y_0 = y_1 - \frac{\tau^2}{2}$$

$$y = (y_1 - \frac{\tau^2}{2}) + \frac{t^2}{2}$$

$$y = y_1 + \frac{1}{2}(t^2 - \tau^2)$$

### 3.5 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DA DILATAÇÃO

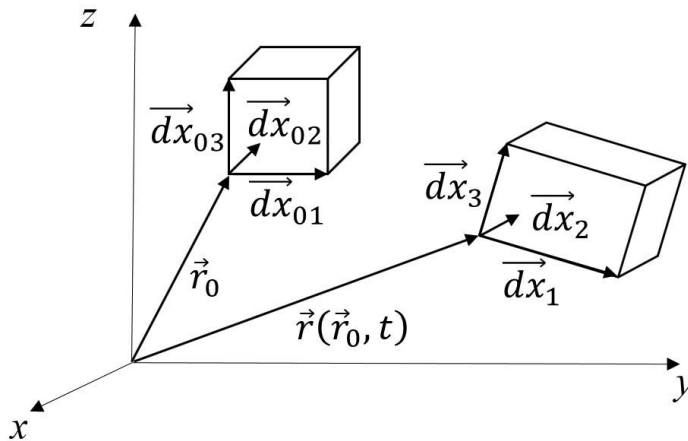
Ao escoar, um elemento de fluido pode sofrer variação de seu volume e forma devido a efeitos de compressão ou expansão, e, matematicamente, precisamos ser capazes de determinar esse comportamento do espaço. Considere o sistema apresentado na Figura 3.6, em que um elemento de volume sofre um efeito de dilatação.

O volume material no instante  $t = 0$  é dado por

$$\delta V_0 = dx_{01} \cdot dx_{02} \cdot dx_{03} \quad (3.10)$$

Ao considerarmos um tempo genérico, podemos representar  $\delta V$  no sistema cartesiano por meio da relação

$$d\vec{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0i}} dx_{0i} \hat{e}_i \quad (3.11)$$



**Figura 3.6** Efeito da dilatação em um elemento de volume a partir de um sistema de coordenadas.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

ou seja,

$$d\vec{x}_1 = \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} dx_{01} \hat{e}_i$$

$$d\vec{x}_2 = \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} dx_{02} \hat{e}_j$$

$$d\vec{x}_3 = \frac{\partial x_k}{\partial x_{03}} dx_{03} \hat{e}_k$$

Como, de fato, o volume é dado por

$$\delta V = d\vec{x}_1 \cdot (d\vec{x}_2 \times d\vec{x}_3) \quad (3.12)$$

$$\delta V = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{03}} dx_{01} dx_{02} dx_{03} \quad (3.13)$$

onde a expressão  $\epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{03}}$  representa a matriz jacobiana  $J$  do movimento do volume material, que, por sua vez, é dada por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{03}} \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

consequentemente,

$$\delta V = J \delta V_0 \quad (3.15)$$

Para condições de **escoamento isocórico (isovolumétrico)**, onde  $\delta V = \delta V_0$ , independentemente de sua forma,  $J$  é igual a 1. Porém, é importante ressaltar que fluidos incompressíveis sempre escoam isocoricamente, pois sua densidade sempre se mantém constante. Em contrapartida, fluidos compressíveis podem ou não apresentar comportamento isocórico.

Ao tomarmos as posições exemplificadas anteriormente, temos:

$$d\vec{x} \equiv d\vec{x}_1 = \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 \hat{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 \hat{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 \hat{e}_3$$

$$d\vec{x}_1 = e^{\frac{3}{2}t^2} dx_0 \hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

$$d\vec{y} \equiv d\vec{x}_2 = \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 \hat{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 \hat{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0 \hat{e}_3$$

$$d\vec{x}_2 = 0\hat{e}_1 + 1 dy_0 \hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

Como a componente  $z$  é nula, podemos concluir que

$$z = z_0, \quad \text{logo}$$

$$d\vec{z} \equiv d\vec{x}_3 = \frac{\partial x}{\partial z_0} dz_0 \hat{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial z_0} dz_0 \hat{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0 \hat{e}_3$$

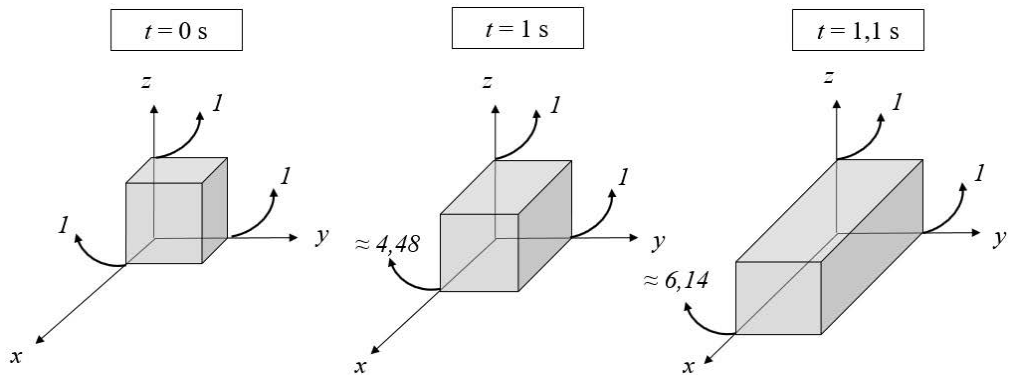
$$d\vec{x}_3 = 0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 1 dz_0\hat{e}_3$$

Conseqüentemente,

$$J = \begin{vmatrix} e^{\frac{3}{2}t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\delta V = (e^{\frac{3}{2}t^2} \cdot 1 \cdot 1) \delta V_0$$

Isso mostra que o elemento de volume sofre uma variação temporal a uma taxa exponencial na direção  $x$ , sendo nulo nas outras componentes.



**Figura 3.7** Exemplo da variação volumétrica do elemento de volume em função do tempo descrita por  $\delta V(t) = (e^{\frac{3}{2}t^2}) \delta V_0$ .

**Fonte:** elaborada pelos autores.

### 3.6 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

A variação volumétrica em relação ao tempo de um elemento de volume pode ser dada por

$$\frac{dV}{dt} = \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{U} dS \quad (3.16)$$

Ao aplicarmos o teorema da divergência, temos

$$\frac{dV}{dt} = \int_{V(t)} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} dV \quad (3.17)$$

Se considerarmos o limite do tempo tendendo a zero, concluímos que

$$\frac{d}{dt} \delta V = (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \delta V \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta V}{\delta V_0} \right) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \frac{\delta V}{\delta V_0} \quad (3.19)$$

Como  $\delta V = J \delta V_0$ ,

$$\frac{dJ}{dt} = J \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \quad (3.20)$$

Assim, concluímos que o divergente de  $\vec{U}$  pode ser reescrito na forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} (\delta V) \quad (3.21)$$

Por exemplo, para um escoamento isocórico,  $J = 1$ , temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.22)$$

ou seja, o divergente de  $\vec{U}$  representa a taxa de variação do volume material por unidade de volume. Se considerarmos que  $\delta V = \delta m / \rho$ , obtemos

$$\frac{\delta m}{\rho} = J \frac{\delta m}{\rho_0} \quad (3.23)$$

ou

$$\rho_0 = J \rho \quad (3.24)$$

Por definição,

$$\frac{d\rho_0}{dt} = 0 \quad (3.25)$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(J\rho) = 0 \quad (3.26)$$

Com base na jacobiana,

$$J \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dJ}{dt} = 0 \quad (3.27)$$

$$J \frac{d\rho}{dt} + \rho J \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.29)$$

Outra forma é dada pela substituição da derivada material na Equação (3.29). Assim,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.30)$$

Ao lembrarmos que  $\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U})$ , obtemos então **a equação diferencial da conservação da massa**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (3.31)$$

### 3.7 TEOREMA DO TRANSPORTE DE REYNOLDS (TTR)

O estudo de uma propriedade contida em um determinado elemento de volume ao longo do tempo é extremamente difícil, para não dizer quase impossível. Dessa forma, não devemos nos concentrar em um elemento de fluido específico, mas sim sobre no movimento total de um fluido ao longo de um dispositivo ou estrutura contidos em um volume de controle. Em suma, desejamos transformar as equações de um sistema lagrangiano para um sistema euleriano. Vamos considerar uma propriedade  $\phi V$  por unidade de volume. Temos

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi_V dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \phi_V J dV_0 \quad (3.32)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} (\phi_V J) dV_0 = \int_{V_0} \left( \phi_V \frac{dJ}{dt} + J \frac{d\phi_V}{dt} \right) dV_0 = \int_{V_0} \left( \phi_V \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \frac{d\phi_V}{dt} \right) J dV_0$$

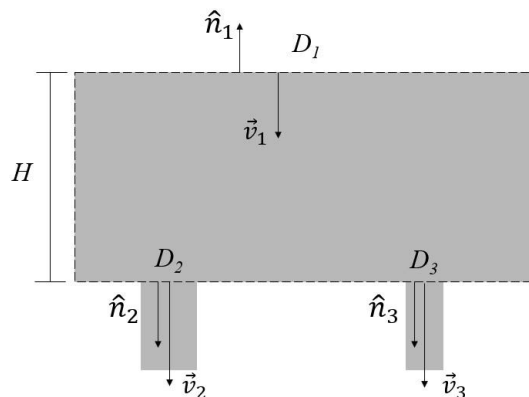
$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi_V dV = \int_{V(t)} \left( \frac{d\phi_V}{dt} + \phi_V \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \right) dV \quad (3.33)$$

ou, transformando o segundo termo da Equação (3.33) de integral de volume para integral de superfície usando a Equação (2.45):

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi_V dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \phi_V}{\partial t} dV + \int_{S(t)} (\hat{n} \cdot \vec{U}) \phi_V dS \quad (3.34)$$

$$\underbrace{\frac{d\Phi}{dt}}_{\text{Taxa de variação temporal da propriedade}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi_V dV}_{\text{Taxa de variação temporal da propriedade dentro do volume de controle}} + \underbrace{\int_{S(t)} (\hat{n} \cdot \vec{U}_r) \phi_V dS}_{\text{Taxa líquida de fluxo da propriedade através da superfície de controle}} \quad (3.35)$$

Para podermos compreender o poder do TTR, vamos analisar um exemplo simples, considerando um tanque de base circular cujo diâmetro é igual a  $D_1$  e com altura  $H$ , cheio de água contendo duas saídas também circulares com os diâmetros de  $D_2$  e  $D_3$ , conforme ilustrado na Figura 3.8. Vamos determinar a equação que descreve o tempo necessário para que o tanque seja totalmente esvaziado.



**Figura 3.8** Exemplo de uma aplicação do TTR: teorema do transporte de Reynolds.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Com base na Figura 3.8, podemos observar que

$$\vec{v}_1 = -\frac{dH}{dt}$$

Nesse caso, vamos considerar que

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_3 = C_D \sqrt{2gH}$$

Logo,

$$0 = \int_{S_1} (-\hat{n}_1 \cdot \rho \vec{v}_1) dS + \int_{S_2} (\hat{n}_2 \cdot \rho \vec{v}_2) dS + \int_{S_3} (\hat{n}_3 \cdot \rho \vec{v}_3) dS$$

$$0 = -\hat{n}_1 \cdot \rho \vec{v}_1 S_1 + \hat{n}_2 \cdot \rho \vec{v}_2 S_2 + \hat{n}_3 \cdot \rho \vec{v}_3 S_3$$

$$0 = -\rho v_1 S_1 + \rho v_2 S_2 + \rho v_3 S_3$$

$$0 = -v_1 D_1^2 + v_2 D_2^2 + v_3 D_3^2$$

$$\frac{dH}{dt} D_1^2 = C_D \sqrt{2gH} D_2^2 + C_D \sqrt{2gH} D_3^2$$

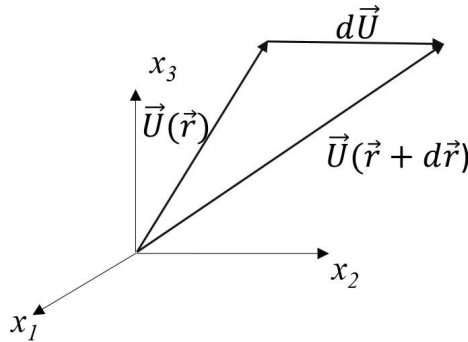
$$\int_0^H \frac{dH}{H^{1/2}} = \int_0^t C_D \sqrt{2gH} \left( \frac{D_2^2 + D_3^2}{D_1^2} \right) dt$$

$$t = \frac{1}{C_D} \left( \frac{D_1^2}{D_2^2 + D_3^2} \right) \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

### 3.8 TENSOR GRADIENTE DE VELOCIDADE

Como estamos estudando a cinemática do ponto de vista dos elementos de fluido, vamos ampliar essa discussão e explorar a análise do movimento entre os elementos e, a partir daí, caracterizar a deformação destes. Como podemos observar na Figura 3.9, a diferença de velocidade é dada por

$$d\vec{U} = \vec{U}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{U}(\vec{r}) \quad (3.36)$$



**Figura 3.9** Projeção dos vetores velocidade em função dos vetores posição.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Considerando que os elementos de fluido estão muito próximos entre si, concluímos que

$$\vec{U}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{U}(\vec{r}) + d\vec{U} = \vec{U}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} dx_i \quad (3.37)$$

Como

$$d\vec{U} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} dx_i = dx_i \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \partial_j \vec{U},$$

podemos representar  $d\vec{U}$  como

$$d\vec{U} = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \quad (3.38)$$

onde  $\vec{\nabla} \vec{U}$  é o tensor gradiente de velocidade e contém toda a informação necessária para podermos descrever o movimento de deformação do fluido. Assim como todo tensor, o tensor gradiente de velocidade pode ser escrito como a soma de um tensor simétrico e um antissimétrico. Ou seja,

$$\vec{\nabla} \vec{U} = \partial_i U_j \hat{e}_i \hat{e}_j = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_i U_j + \partial_j U_i) \hat{e}_i \hat{e}_j}_{\bar{D}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_i U_j - \partial_j U_i) \hat{e}_i \hat{e}_j}_{\bar{\Omega}} \quad (3.39)$$

onde  $\overline{\overline{D}}$  e  $\overline{\overline{\Omega}}$  são o **tensor taxa de deformação** e o **tensor vorticidade**, respectivamente. Ou seja,

$$\vec{\nabla}\vec{U} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}} \quad (3.40)$$

sendo

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{U} + (\vec{\nabla}\vec{U})^T) \quad (3.41)$$

e

$$\overline{\overline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{U} - (\vec{\nabla}\vec{U})^T) \quad (3.42)$$

### 3.9 TENSOR TAXA DE DEFORMAÇÃO

Considerando que o tensor taxa de deformação pode ser representado por

$$\overline{\overline{D}} = D_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j, \quad (3.43)$$

primeiramente vamos interpretar o significado físico desse tensor, considerando o caso  $i = j$ . Com base na Figura 2.9, observamos que

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}) = \frac{d}{dt}[(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{r}] \quad (3.44)$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}) = \vec{U}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{U}(\vec{r}) \quad (3.45)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}) = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\vec{U} \quad (3.46)$$

Se considerarmos que  $d\vec{r} = ds\hat{r}$ , temos

$$\frac{d}{dt}(ds^2) = 2ds \frac{d}{dt}(ds) \quad (3.47)$$

$$2ds \frac{d}{dt}(ds) = \frac{d}{dt}(d\vec{r} \cdot d\vec{r}) \quad (3.48)$$

$$2ds \frac{d}{dt}(ds) = \frac{d}{dt}(d\vec{r}) \cdot d\vec{r} + d\vec{r} \cdot \frac{d}{dt}(d\vec{r}) \quad (3.49)$$

$$2ds \frac{d}{dt}(ds) = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot d\vec{r} + d\vec{r} \cdot d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \quad (3.50)$$

Mas, como  $d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot d\vec{r} = d\vec{r} \cdot d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U}$ , então

$$2ds \frac{d}{dt}(ds) = 2d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot d\vec{r} \quad (3.51)$$

Ao dividirmos por  $ds^2$ , temos

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = \frac{dx_i}{ds} (D_{ij} + \Omega_{ij}) \frac{dx_j}{ds} \quad (3.53)$$

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} D_{ij} + \underbrace{\left( \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} \right)}_{\text{simétrico}} \underbrace{\left( \Omega_{ij} \right)}_{\text{antissimétrico}} \quad (3.54)$$

0

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = \vec{r} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \vec{r} \quad (3.55)$$

Agora, se considerarmos, por exemplo,  $D_{11}$  e  $\vec{r} = \hat{e}_1$ , temos

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = \hat{e}_1 \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \hat{e}_1 = D_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}$$

Com isso, concluímos que  $D_{11}$  representa a taxa de deformação longitudinal por unidade de comprimento de um elemento de fluido na orientação de  $\hat{e}_1$ . Obviamente, valores negativos e positivos de  $D_{11}$  correspondem aos fenômenos de contração e esticamento, respectivamente.

Também é conveniente ressaltar que  $D_{ii}$  representa o divergente do campo de velocidade. Ou seja,

$$D_{ii} = \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) = \text{tr } \overline{\overline{D}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{U}$$

Ao considerarmos o volume infinitesimal de um elemento de fluido, sua taxa de variação é dada por

$$\frac{d}{dt}(dV) = \frac{d}{dt}(dx_1) dx_2 dx_3 + dx_1 \frac{d}{dt}(dx_2) dx_3 + dx_1 dx_2 \frac{d}{dt}(dx_3) \quad (3.56)$$

Como

$$\frac{d}{dt}(dx_1) = U_1(x_1 + dx_1) - U_1(x_1) = dU_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1 \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{dt}(dx_2) = U_2(x_2 + dx_2) - U_2(x_2) = dU_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} dx_2 \quad (3.58)$$

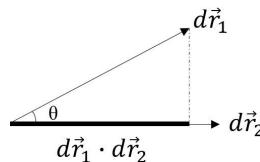
$$\frac{d}{dt}(dx_3) = U_3(x_3 + dx_3) - U_3(x_3) = dU_3 = \frac{\partial U_3}{\partial x_3} dx_3 \quad (3.59)$$

Então,

$$\frac{d}{dt}(dV) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.60)$$

Agora vamos interpretar fisicamente  $D_{ij}$  quando  $i \neq j$ . Considere dois vetores posição apresentados na Figura 3.10. Como observado, ambos os vetores apresentam um ângulo  $\theta$  entre si. Assim,

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = \frac{d}{dt}(ds_1 ds_2 \cos \theta) \quad (3.61)$$



**Figura 3.10** Representação gráfica do produto escalar entre dois vetores.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Mas:

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = \frac{d}{dt}(d\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_2 + d\vec{r}_1 \cdot \frac{d}{dt}(d\vec{r}_2) \quad (3.62)$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = d\vec{U}_1 \cdot d\vec{r}_2 + d\vec{r}_1 \cdot d\vec{U}_2 \quad (3.63)$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = (d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}\vec{U}) \cdot d\vec{r}_2 + (d\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}\vec{U}) \cdot d\vec{r}_1 \quad (3.64)$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}\vec{U} + d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}\vec{U}^T \quad (3.65)$$

Mas, como podemos escrever

$$\vec{\nabla}\vec{U} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}$$

$$\vec{\nabla}\vec{U}^T = \overline{\overline{D}}^T + \overline{\overline{\Omega}}^T = \overline{\overline{D}} - \overline{\overline{\Omega}}$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \cdot (\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}) + d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 \cdot (\overline{\overline{D}} - \overline{\overline{\Omega}}) \quad (3.66)$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = 2d\vec{r}_1 \cdot \overline{\overline{D}} \cdot d\vec{r}_2, \quad (3.67)$$

Ao aplicarmos a regra da cadeia na Equação 3.61, igualarmos a Equação 3.67 e dividirmos por  $ds_1 ds_2$ , temos

$$\frac{d}{ds_1} \frac{d}{dt}(ds_1) \cos(\theta) + \frac{d}{ds_2} \frac{d}{dt}(ds_2) \cos(\theta) - \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} = 2 \frac{d\vec{r}_1}{ds_1} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \frac{d\vec{r}_2}{ds_2} \quad (3.68)$$

Se considerarmos a condição de ortogonalidade entre as componentes 1 e 2, temos

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds_1} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \frac{d\vec{r}_2}{ds_2} = -\frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.69)$$

Lembrando que

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds_1} = \hat{r}_1 = \hat{e}_1$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{ds_2} = \hat{r}_2 = \hat{e}_2$$

$$\hat{e}_1 \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \hat{e}_2 = D_{12} \quad (3.70)$$

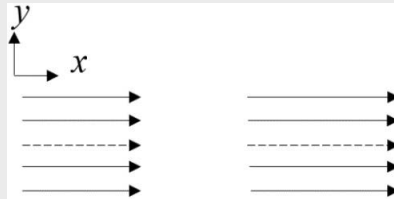
$$D_{12} = -\frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.71)$$

ou seja,  $D_{12}(= D_{21})$ , por exemplo, corresponde à metade da taxa de decréscimo do ângulo entre dois elementos de fluido em  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ . Essa interpretação também se aplica aos casos  $D_{13}$  e  $D_{23}$ . Para maior compreensão, vamos analisar dois casos distintos, considerando os campos de velocidade  $\vec{u} = cx\hat{e}_1$  e  $\vec{u} = cy\hat{e}_1$ .

Para  $\vec{u} = cx\hat{e}_1$ , temos que  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$ , exceto  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = c$ .

$$\overline{\overline{D}}_{ij} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, observamos que a deformação (ou movimento) é puramente longitudinal ou extensional.



Para  $\vec{u} = cy\hat{e}_1$ , apenas  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = c \neq 0$ .

$$\overline{\overline{D}}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{2} & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

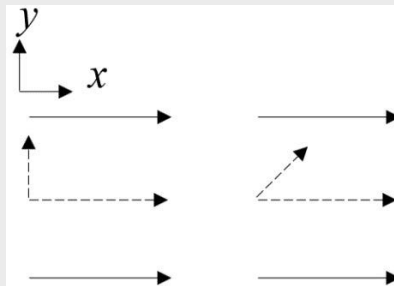
pois

$$D_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{c}{2}$$

e

$$D_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{c}{2}$$

Indicando que a deformação é puramente cisalhante.



Por fim, é importante destacar que, caso  $\overline{\overline{D}}$  seja nulo, o movimento é rígido, não havendo nenhuma deformação. E, como  $\overline{\overline{D}}$  sempre pode ser diagonalizado, toda a deformação pode ser reduzida a um movimento puramente extensional, devido ao fato de o tensor ser simétrico.

### 3.10 TENSOR VORTICIDADE

Com base na definição matemática do tensor vorticidade apresentada na Equação (3.42), podemos escrever

$$\epsilon_{ijk} \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.72)$$

$$\epsilon_{ijk} \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{U})_k + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{U})_k \quad (3.73)$$

ou seja,

$$\epsilon_{ijk} \Omega_{ij} = (\vec{\nabla} \times \vec{U})_k = \omega_k \quad (3.74)$$

que, por sua vez, corresponde ao vetor vorticidade na direção  $k$ . De fato, a Equação (3.74) nos mostra que o tensor vorticidade aplicado em um ponto define a vorticidade desse ponto. Vamos considerar que

$$\epsilon_{klm} \omega_k = \epsilon_{klm} \epsilon_{ijk} \Omega_{ij} = \epsilon_{klm} \epsilon_{kij} \Omega_{ij} \quad (3.75)$$

$$\epsilon_{klm} \omega_k = (\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi})\Omega_{ij} \quad (3.76)$$

$$\epsilon_{klm} \omega_k = \Omega_{lm} - \Omega_{ml} = \Omega_{lm} + \Omega_{lm} \quad (3.77)$$

$$\Omega_{lm} = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \omega_k \quad (3.78)$$

ou seja, as três componentes da vorticidade definem por completo as componentes do tensor vorticidade. Assim,

$$\overline{\overline{\Omega}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Para maior compreensão da interpretação física do tensor vorticidade, vamos considerar um movimento local sem a existência de qualquer efeito de deformação. Assim,

$$d\vec{U} = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} = d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\Omega}} \quad (3.80)$$

Como

$$d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\Omega}} = dx_i \Omega_{ij} \hat{e}_j \quad (3.81)$$

$$d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\Omega}} = dx_i \frac{1}{2} \epsilon_{kij} \omega_k \hat{e}_j = \frac{1}{2}(\vec{\omega} \times d\vec{r}) \quad (3.82)$$

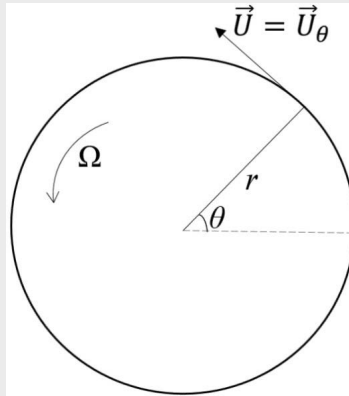
Logo,

$$d\vec{U} = \frac{1}{2}(\vec{\omega} \times d\vec{r}) \quad (3.83)$$

Vamos analisar dois exemplos, considerando os campos de velocidade descritos por  $\vec{U} = U_\theta \hat{e}_\theta$  e  $\vec{U} = \frac{U_{\max}}{\delta} Y \hat{e}_1$ .

No primeiro caso, observamos que o elemento apresenta o comportamento de um corpo rígido, com uma velocidade angular constante  $\Omega$ , pois

$$\vec{U} = U_\theta \hat{e}_\theta = \Omega r \hat{e}_\theta$$



Logo, a vorticidade pode ser dada por

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{U} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ U_r & U_\theta & U_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) = 2\Omega \hat{e}_z$$

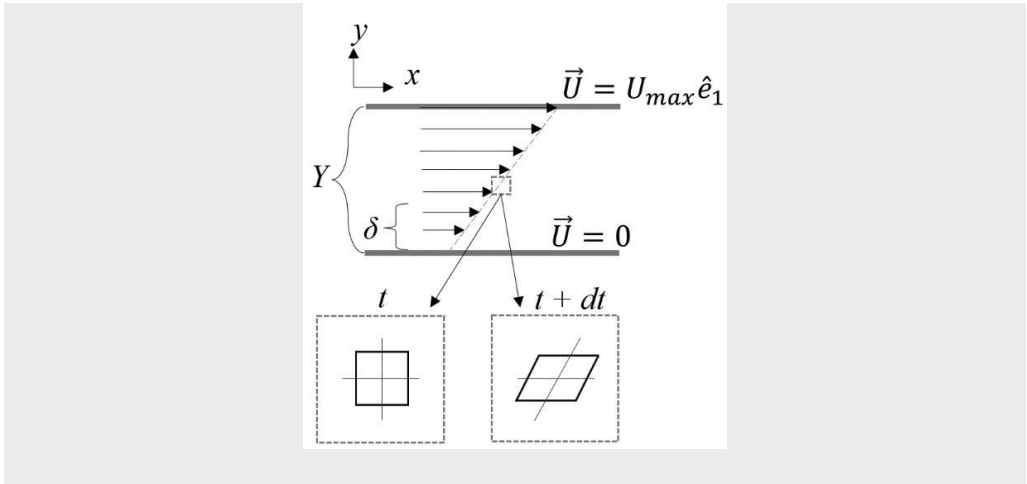
Para  $\vec{U} = \frac{U_{\max}}{\delta} Y \hat{e}_1$ , temos que

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{U} = \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \hat{e}_k$$

$$\vec{\omega} = -\frac{U_{\max}}{\delta} \hat{e}_k$$

Consequentemente, a velocidade angular é

$$\vec{\Omega} = -\frac{U_{\max}}{2\delta} \hat{e}_k \quad [\text{rad/s}]$$



### 3.11 MOVIMENTO GERAL DE UM ELEMENTO DE VOLUME

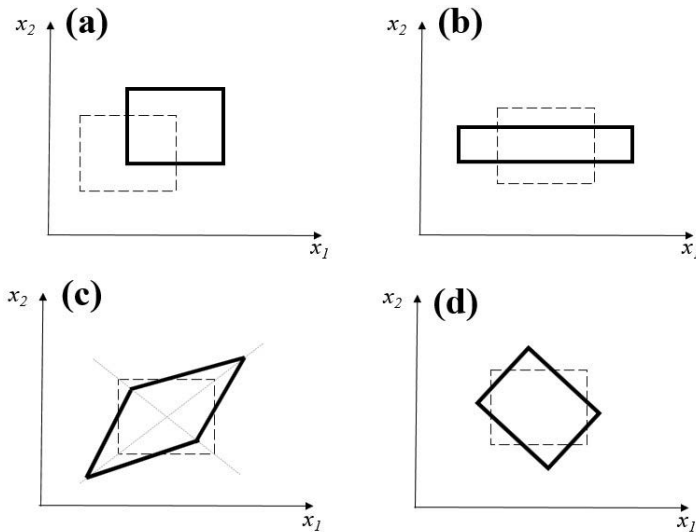
Uma vez que o movimento de um elemento de volume pode ser descrito em termos de seu vetor velocidade em função do espaço, temos

$$\vec{U}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{U}(\vec{r}) + d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \quad (3.84)$$

ou seja,

$$\vec{U}(\vec{r} + d\vec{r}) = \underbrace{\vec{U}(\vec{r})}_{\text{Efeito da translação}} + \underbrace{d\vec{r} \cdot \overline{\overline{D}}}_{\text{Efeito da deformação linear e angular}} + \underbrace{d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\Omega}}}_{\text{Efeito da rotação}} \quad (3.85)$$

Essa separação de componentes facilita a compreensão e a análise do comportamento do escoamento e é conhecida como **teorema de decomposição de Cauchy-Stokes**. A Figura 3.11 ilustra os possíveis comportamentos apresentados por um elemento de volume durante um escoamento.



**Figura 3.11** Decomposição do movimento de um elemento de volume separado em: (a) translação; (b) deformação linear; (c) deformação angular e (d) rotação.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

## REFERÊNCIAS

ALLEN, M. B. *Continuum mechanics: the birthplace of mathematical models*. Hoboken: John Wiley & Sons Inc, 2015.

ARIS, R. *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Mineola: Dover Publications, 1962.

AZARPIRA, M.; ZARRATI, A. R.; FARROKHZAD, P. Comparison between the Lagrangian and Eulerian approach in simulation of free surface air-core vortices. *Water*, Basel, v. 13, n. 5, p. 726, mar. 2021.

BURESTI, G. *Elements of fluid dynamics*. London: Imperial College Press, 2012.

CAPALDI, F. M. *Continuum mechanics: constitutive modeling of structural and biological materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

FEIREISL, E.; KARPER, T. G.; POKORNÝ, M. *Mathematical theory of compressible viscous fluids: analysis and numerics*. Basel: Birkhäuser, 2016.

LEAL, L. G. *Advanced transport phenomena fluid mechanics and convective transport processes*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

MAHANI, H.; MUGGERIDGE, A. H.; ASHJARI, M. A. Vorticity as a measure of heterogeneity for improving coarse grid generation. *Petroleum Geoscience*, Bath, v. 15, n. 1, p. 91–102, 2009.

MARTINEC, Z. *Principles of continuum mechanics: a basic course for physicists*. Basel: Birkhäuser, 2019.

SKIEPKO, T. *On the Reynolds transport theorem for fluid systems: fundamentals and applications*. Saarbrücken: Lap Lambert Academic Publishing, 2015.

WITELSKI, T.; BROWEN, M. *Methods of mathematical modelling: continuous systems and differential equations*. New York: Springer, 2015.

XU, Z.; HAN, Z.; QU, H. Comparison between Lagrangian and Eulerian approaches for prediction of particle deposition in turbulent flows. *Powder Technology*, Amsterdam, v. 360, p. 141–150, 2020.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

### Exercício 3.1

Determine a derivada substancial da propriedade

$$\phi(t, x, y, z) = 2x^2yz^3 \cos(\pi t).$$

### Exercício 3.2

Considerando um campo de velocidade dado por

$$\vec{U} = 4xt \vec{e}_1 - 4yt \vec{e}_2,$$

e a condição inicial  $x_0 = y_0 = 2$ , determine a equação da trajetória da partícula.

**Exercício 3.3**

Um escoamento cisalhante simples é descrito pelo campo de velocidade

$$\vec{U} = 2x \hat{j}.$$

Determine as trajetórias das partículas de fluido para esse escoamento. Considere quatro pontos materiais definidos pelos vértices de um retângulo cujas posições em  $t = 0$  são:  $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 1)$ . Determine a posição ocupada por esses pontos materiais em  $t = 3$ . Mostre em um diagrama no plano  $x - y$  a posição ocupada por esses pontos materiais nos instantes  $t = 0$  e  $t = 3$ .

**Exercício 3.4**

Um campo de velocidade é descrito por

$$\vec{U} = x(1 + t) \hat{i} + 4y(1 + t) \hat{j} + 6(1 + t) \hat{k}.$$

Determine:

- A aceleração em coordenadas espaciais.
- A aceleração em coordenadas materiais.
- Se o escoamento é isocórico.

**Exercício 3.5**

Considere um escoamento descrito pelo campo de velocidade

$$\vec{U} = x(4x + 1) \hat{j}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Determine:

- O perfil de velocidade para esse escoamento.
- O tensor gradiente de velocidade.
- O tensor taxa de deformação.
- O esquema do perfil de vorticidade.
- O tensor vorticidade.