

# Fundamentos matemáticos

Este capítulo apresenta uma breve revisão do cálculo vetorial, focando desde noções básicas como a definição de grandezas escalares e vetoriais até conceitos um pouco mais avançados, que muitas vezes podem fugir das ementas das disciplinas dos cursos de graduação – por exemplo, circulação, **teorema de Stokes e tensores**. Este último, de fato, é um agente matemático de suma importância para o entendimento físico das equações de Navier-Stokes. Ao longo do capítulo, além da revisão de conceitos, exemplos serão apresentados com o intuito de reforçar o entendimento de cada tópico.

## 2.1 ESCALARES E VETORES


**Grandezas escalares:** grandezas escalares são grandezas físicas que podem ser completamente descritas por um único valor numérico, acompanhado de uma unidade de medida. Elas não têm direção ou sentido associado, apenas magnitude. Alguns exemplos de grandezas escalares incluem massa, temperatura, comprimento, área, volume, tempo, densidade, pressão, energia, entre outras. Ao realizar operações com grandezas escalares, como soma, subtração, multiplicação e divisão, os valores numéricos podem ser combinados diretamente, sem necessidade de considerar a direção ou o sentido da grandeza.

**Grandezas vetoriais:** grandezas vetoriais são grandezas físicas que têm magnitude, direção e sentido. Ou seja, elas são completamente descritas por um valor numérico acompanhado de uma unidade de medida, uma direção e um sentido. Alguns exemplos de grandezas vetoriais incluem o deslocamento, a velocidade, a aceleração, a força, o gradiente de temperatura, o gradiente de pressão, entre outras. Quando duas ou mais grandezas vetoriais são combinadas, é necessário considerar a direção e o sentido de cada uma delas. Isso significa que as operações com grandezas vetoriais, como soma, subtração e multiplicação, não são realizadas apenas com os valores numéricos, mas também com as direções e os sentidos das grandezas.

Apesar de o formalismo matemático exigir a necessidade de um sistema de referência para trabalharmos com grandezas vetoriais, o **princípio da invariância** garante que as propriedades do vetor independam do sistema de referência escolhido para representá-lo. Ou seja, esse princípio assegura que um sistema de equações vetoriais válidos em determinado sistema de referência seja válido em qualquer outro sistema. Quanto à representação, existe uma notação que usa negritos, ou setas, ou sublinhados, ou

barras superiores, que é a mais familiar, denominada notação de Gibbs. Uma alternativa de notação desenvolvida por Einstein, denominada notação indicial, que será vista posteriormente, usa subscritos ou sobrescritos para indicar componentes de vetores. Notação matricial também é usada para vetores e tensores (entes matemáticos a serem definidos mais adiante). Exemplos da notação de Gibbs são mostrados a seguir.

**Tabela 2.1** Exemplos da notação de Gibbs

<b>Gráfica</b>	
<b>Simbólica</b>	$\vec{v}, V, \hat{v}, \langle \cdot \rangle$
<b>Matemática*</b>	$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

\* De fato, existem diversas representações matemáticas encontradas na literatura. Algumas outras serão apresentadas ao longo do livro.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

## 2.2 OPERAÇÕES COM VETORES

Toda vez que quisermos caracterizar a orientação de um vetor, faremos isso por meio do vetor. Um vetor unitário é um vetor com magnitude igual a 1. Ele é utilizado para especificar uma direção ou um sentido em um sistema de coordenadas. Os vetores unitários são especialmente úteis em cálculos envolvendo grandezas vetoriais, pois permitem a decomposição de um vetor em suas componentes em diferentes direções. Os vetores cartesianos, também conhecidos como vetores unitários ortogonais, são definidos como aqueles que apontam na direção dos eixos coordenados de um sistema de coordenadas cartesianas.

Os vetores unitários são úteis em muitas aplicações da física e da matemática, como na decomposição de vetores em suas componentes em diferentes direções, na representação de campos vetoriais e na resolução de equações diferenciais que envolvem grandezas vetoriais.

Um vetor unitário  $\hat{a}$ , por exemplo, na orientação de  $\vec{A}$  é definido por

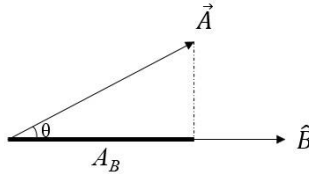
$$\hat{a} \equiv \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \quad (2.1)$$

onde  $|\vec{A}|$  representa a magnitude de  $\vec{A}$ .

Já a componente  $A$  em uma orientação qualquer  $\hat{B}$  é dada por

$$A_B = |\vec{A}| \cos(\theta) \quad (2.2)$$

e sua magnitude é representada na Figura 2.1.

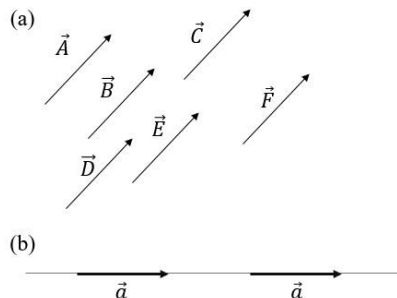


**Figura 2.1** Representação gráfica da magnitude da projeção do vetor  $\vec{A}$  orientado em  $\hat{B}$ .

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Neste livro, vamos considerar vetores ditos “livres”, cuja posição no espaço não viola o princípio da invariância, conforme ilustração da Figura 2.2(a). Vetores livres são vetores que podem ser movidos livremente no espaço sem alterar sua magnitude, direção ou sentido. Ou seja, eles podem ser transladados livremente para qualquer ponto do espaço sem que tenham suas propriedades vetoriais afetadas. Um exemplo comum de vetor livre é o vetor posição, que descreve a posição de um ponto em relação a um sistema de coordenadas. Esse vetor pode ser movido livremente sem afetar a posição do ponto em questão. Os vetores livres são diferentes dos vetores deslizantes, que têm um ponto de aplicação fixo e podem ser deslocados apenas ao longo de uma reta. Esses vetores são comumente utilizados em análises de estruturas e mecânica dos sólidos.

Caso os seis vetores apresentem a mesma orientação e sentido, os vetores são **equivalentes**. Em contrapartida, se o vetor for preso a um determinado ponto, ele é dito fixo. Ao prender-se à linha de ação, os vetores serão denominados deslizantes, como mostrado na Figura 2.2(b).



**Figura 2.2** Representação gráfica de (a) vetores “livres” e equivalentes e (b) um vetor deslizante.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

### 2.2.1 Adição de vetores

De forma simbólica, temos

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C} \quad (2.3)$$

Conseqüentemente, temos as propriedades:

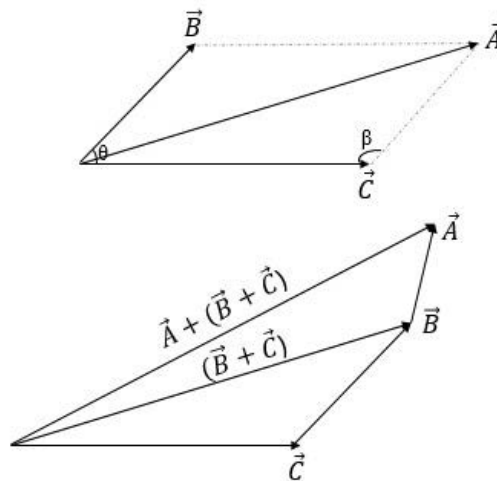
- Comutativa:

$$\vec{B} + \vec{C} = \vec{C} + \vec{B} \quad (2.4)$$

- Associativa:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \quad (2.5)$$

Graficamente, podemos representar a soma com as propriedades comutativa e associativa, conforme a Figura 2.3.



**Figura 2.3** Projeção gráfica da soma de vetores.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

De maneira geral, se conhecermos o ângulo de abertura  $\theta$  entre dois vetores  $\vec{B}$  e  $\vec{C}$ , podemos determinar o módulo da soma entre os vetores por meio da **regra do paralelogramo**:

$$A = \sqrt{|\vec{B}|^2 + |\vec{C}|^2 + 2|\vec{B}||\vec{C}|\cos(\theta)} \quad (2.6)$$

Como  $\theta = \pi - \beta$ ,

$$\cos(\theta) = \cos(\pi - \beta) = \cos(\pi) \cos(\beta) + \text{sen}(\pi) \text{sen}(\beta) = -\cos(\beta)$$

Logo, a regra do paralelogramo pode ser expressa na forma:

$$A = \sqrt{|\vec{B}|^2 + |\vec{C}|^2 - 2|\vec{B}||\vec{C}| \cos(\beta)} \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Multiplicação de um vetor por um escalar

De forma geral, temos que

$$m\vec{A} = \underbrace{\vec{A} + \vec{A} + \dots + \vec{A}}_{m \text{ vezes}} \quad (2.8)$$

com as seguintes propriedades:

• Comutativa:  $m\vec{A} = \vec{A}m$  (2.9)

• Distributiva:  $(c_1 + c_2)\vec{A} = c_1\vec{A} + c_2\vec{A}$  (2.10)

$$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B} \quad (2.11)$$

Em qualquer situação, a constante escalar que multiplica um vetor pode ser uma simples constante de proporcionalidade ou uma grandeza escalar. Obviamente, o resultado é um vetor que tem a mesma direção e sentido que o vetor original, mas com magnitude alterada pelo valor do escalar.

### 2.2.3 Representação de vetores em termos de suas coordenadas

Como toda representação gráfica de vetores precisa de coordenadas de um sistema de referência, todos os vetores podem ser representados por suas componentes nas orientações das coordenadas. Considerando o caso de um sistema de coordenadas cartesiano, os vetores de base  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  têm a mesma orientação em qualquer posição do espaço, conforme mostrado na Figura 2.4.

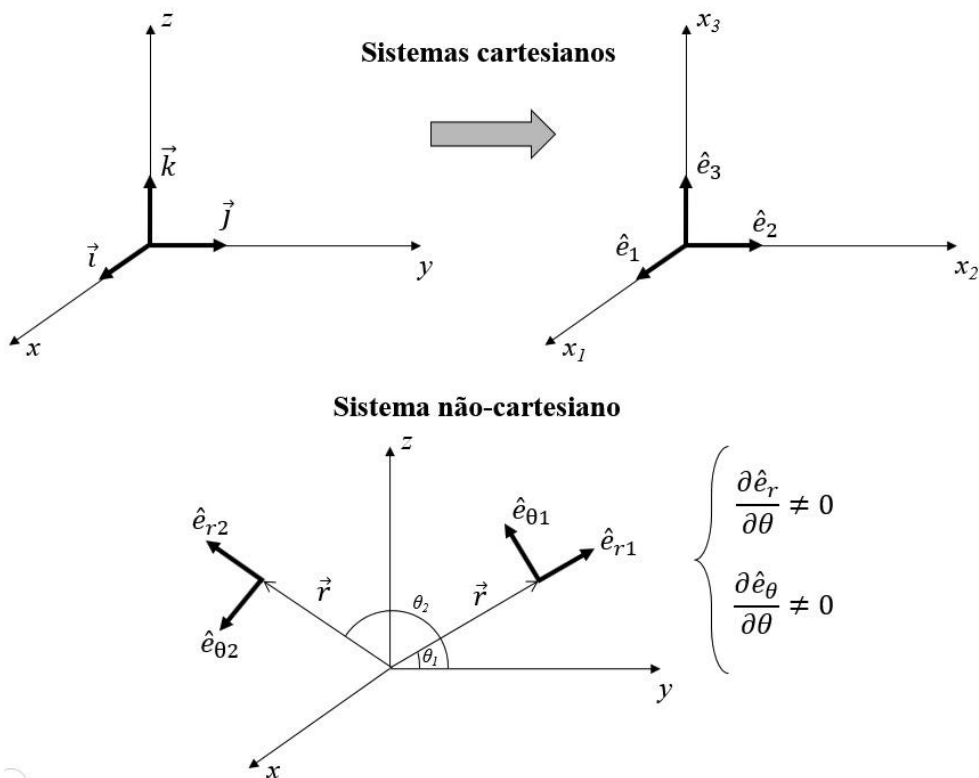
Ao representarmos um vetor  $\vec{V}$  por meio de suas componentes nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , temos:

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (2.12)$$

onde cada uma das componentes  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  pode variar com  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

É importante ressaltar ainda que isso não acontece em todos os sistemas de referência, por exemplo, no sistema de coordenadas cilíndricas ou esféricas. Por conveniência, vamos adotar o sistema cartesiano representado pelos unitários  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$  e  $\hat{e}_3$ . Assim, um vetor  $\vec{V}$  qualquer representado nesse sistema será descrito como

$$\vec{V} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3 \quad (2.13)$$



**Figura 2.4** Troca de notação do sistema de coordenadas e vetores unitários.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

### 2.2.4 Produto escalar de vetores

Ao considerarmos o ângulo  $\theta$  entre dois vetores  $\vec{U}$  e  $\vec{V}$ , temos que o produto escalar entre eles é dado por

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}||\vec{V}| \cos(\theta) \quad (2.14)$$

com as propriedades:

- Comutativa:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U} \quad (2.15)$$

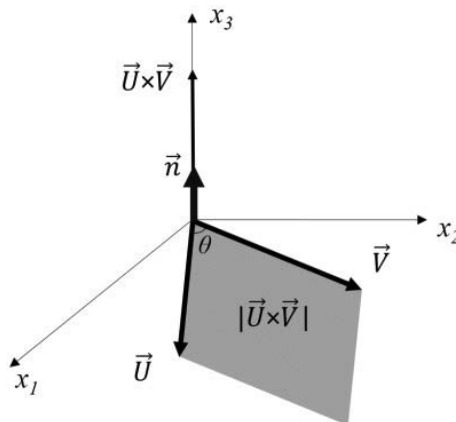
- Associativa:

$$(\vec{U} + \vec{V}) \cdot \vec{W} = \vec{U} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \vec{W} \quad (2.16)$$

### 2.2.5 Produto vetorial ou produto cruzado ( $\times$ )

Vamos considerar um exemplo em que dois vetores  $\vec{U}$  e  $\vec{V}$  estão projetados sobre o plano  $x_1x_2$ , separados por um ângulo de abertura  $\theta$ , com  $\vec{n}$  sendo o vetor unitário perpendicular a ambos os vetores, conforme apresentado na Figura 2.5. Dessa forma, matematicamente, o produto vetorial é dado por

$$\vec{U} \times \vec{V} = (|\vec{U}||\vec{V}| \sin(\theta)) \vec{n} \quad (2.17)$$



**Figura 2.5** Representação gráfica do produto vetorial.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

### 2.2.6 Produto escalar triplo

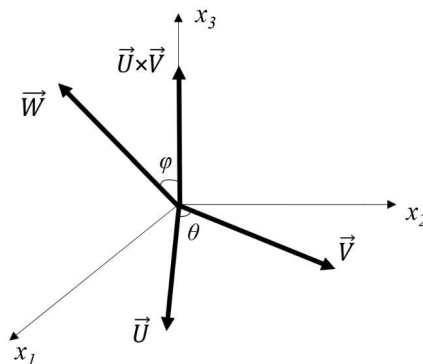
Considerando as projeções dos vetores  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  e  $\vec{W}$  na Figura 2.6, o produto escalar triplo é dado por

$$\vec{W} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = \vec{W} \cdot \left( |\vec{U}||\vec{V}| \sin(\theta) \right) \hat{n} = |\vec{W}||\vec{U}||\vec{V}| \sin(\theta) \cos(\varphi) \quad (2.18)$$

É conveniente destacar que

$$\begin{aligned} \vec{W} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) &= (\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} \\ &= (\vec{W} \times \vec{U}) \cdot \vec{V} \\ &= \vec{V} \cdot (\vec{W} \times \vec{U}) \\ &= (\vec{V} \times \vec{W}) \cdot \vec{U} \\ &= \vec{U} \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{W} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) &= -\vec{W} \cdot (\vec{V} \times \vec{U}) \\ &= -(\vec{V} \times \vec{U}) \cdot \vec{W} \\ &= -\vec{V} \cdot (\vec{U} \times \vec{W}) \\ &= -(\vec{U} \times \vec{W}) \cdot \vec{V} \\ &= -\vec{U} \cdot (\vec{W} \times \vec{V}) \\ &= -(\vec{W} \times \vec{V}) \cdot \vec{U} \end{aligned}$$



**Figura 2.6** Representação gráfica dos vetores  $\vec{U} \times \vec{V}$  e  $\vec{W}$ .

Fonte: elaborada pelos autores.

## 2.3 NOTAÇÃO INDICIAL

Devido à complexidade encontrada em operações envolvendo cálculo vetorial, o uso de notações mais simples se mostra muito vantajoso tanto na questão do tempo gasto quanto na compreensão de tais operações. Se considerarmos o caso do vetor dado pela Equação (2.13), observamos a necessidade da apresentação das três componentes ortogonais, independentes uma da outra. Porém, na notação indicial, esse vetor é representado da forma:

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{e}_i, \quad (2.19)$$

ou simplesmente

$$\vec{V} = v_i \hat{e}_i \quad (2.20)$$

Agora vamos considerar a soma do produto entre os módulos de componentes vetoriais ortogonais no espaço  $\mathbb{R}^3$ , por exemplo. Nesse caso, temos:

$$u_j v_j = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (2.21)$$

e

$$u_k v_k w_l = u_1 v_1 w_l + u_2 v_2 w_l + u_3 v_3 w_l \quad (2.22)$$

Os índices  $j$  e  $k$  nas Equações (2.21) e (2.22) são chamados de **índices mudos** (índices repetidos), ao passo que o índice  $l$  da Equação (2.22) é chamado de **índice livre** (índice não repetido).

Para uma breve noção da ajuda que a notação indicial nos oferece, o produto de  $u_i v_j$  é constituído da soma de 9 termos:

$$u_i v_j = \begin{cases} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ u_1 v_2 & u_2 v_2 & u_3 v_2 \\ u_1 v_3 & u_2 v_3 & u_3 v_3 \end{cases}$$

A simplicidade da notação indicial também nos concede algumas liberdades quanto à manipulação dos índices, que, por sua vez, são fundamentais no tratamento das equações de Navier-Stokes:

a) Os índices repetidos podem ser trocados por quaisquer outros índices repetidos que não estejam presentes.

$$u_i v_i = u_j v_j = u_n v_n$$

$$u_i v_i w_j \neq u_j v_i w_j$$

$$u_i v_i w_j = u_j v_j w_i$$

b) Não são permitidos mais de dois índices repetidos nas representações:

$$u_i v_i w_i = ?$$

c) O número de expressões que podemos associar na representação indicial é dado por  $3^n$ , com  $n$  sendo o número de índices livres.

$$u_i v_i T_{kl} \quad \text{apresenta 9 termos } (3^2)$$

$$u_i v_j T_{ki} \quad \text{apresenta 9 termos } (3^2)$$

$$u_i v_j T_{kl} \quad \text{apresenta 81 termos } (3^4)$$

A notação  $T_{kl}$  indica uma grandeza denominada *tensor de segunda ordem*, como será explicado mais adiante.

d) Em qualquer expressão ou equação, todos os termos devem possuir os mesmos índices livres:

$$u_i v_j + w_k A_k T_{ij} = B_{ij}$$

## 2.4 DELTA DE KRONECKER

Uma representação do produto escalar das componentes unitárias entre dois vetores ortogonais no sistema de coordenadas cartesiano é dada pelo **delta de Kronecker**  $\delta_{ij}$ , definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.23)$$

Como os índices  $i, j$  são livres, com ambos variando entre 1 e 3,  $\delta_{ij}$  pode apresentar um total de 9 valores. Conseqüentemente, observamos que:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

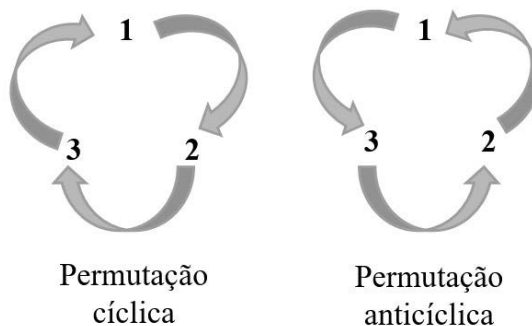
$$\delta_{ij}u_j = \delta_{i1}u_1 + \delta_{i2}u_2 + \delta_{i3}u_3 = u_i \quad (\text{contração de índices})$$

## 2.5 SÍMBOLO DE PERMUTAÇÃO

O **símbolo de permutação** ou **símbolo de Levi-Civita** é utilizado para a representação do produto vetorial entre vetores ortonormais:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se a permutação for par (cíclica)} \\ 0, & \text{se dois ou mais índices se repetirem} \\ -1, & \text{se a permutação for ímpar (anticíclica)} \end{cases} \quad (2.24)$$

No caso, a permutação pode ocorrer de duas formas: **cíclica** ou **anticíclica**, conforme ilustrado na Figura 2.7.



**Figura 2.7** Caminho seguido durante as formas de permutação cíclica e anticíclica.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Resumidamente, temos:

$\epsilon_{ijk}$  apresenta 27 componentes, sendo 21 nulas e 6 não nulas.

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = 1 \quad (\text{permutação cíclica})$$

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$$

$$\epsilon_{ikj} = \epsilon_{kji} = \epsilon_{jik} = -1 \quad (\text{permutação anticíclica})$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$$

Para as demais configurações, o símbolo de permutação é igual a zero.

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \epsilon_{123} \hat{e}_3 = \hat{e}_3$$

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = \epsilon_{213} \hat{e}_3 = -\hat{e}_3$$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j \cdot \hat{e}_k = \epsilon_{ijm} \hat{e}_m \cdot \hat{e}_k = \epsilon_{ijm} \delta_{mk} = \epsilon_{ijk}$$

## 2.6 CARACTERÍSTICA SIMÉTRICA OU ANTISSIMÉTRICA

Grandezas físicas representadas por agentes matemáticos como matrizes e tensores podem apresentar uma importante característica: a **simetria**. Nesse caso, uma grandeza  $T_{ij}$  é dita **simétrica** se  $T_{ij} = T_{ji}$ . Caso  $T_{ij} = -T_{ji}$ , essa grandeza é dita **antissimétrica**. Por outro lado, se  $T_{ij} \neq T_{ji}$  e  $T_{ij} \neq -T_{ji}$ , a grandeza não é nem simétrica nem antissimétrica. Com isso, observamos que:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (\text{simétrica})$$

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \quad (\text{antissimétrica})$$

$$T_{ijk} = T_{jik} = -T_{ikj}$$

(simétrica em relação aos índices  $ij$  e antissimétrica em relação a  $jk$ )

## 2.7 OPERAÇÕES COM VETORES EM NOTAÇÃO INDICIAL

### 2.7.1 Produto escalar

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_i V_i \quad (2.25)$$

Como as componentes são ortonormais, temos:

$$U_i V_j = (U_i \hat{e}_i) \cdot (V_j \hat{e}_j) = U_i V_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) = U_i V_j \delta_{ij} = U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3$$

### 2.7.2 Produto vetorial

$$\vec{U} \times \vec{V} = U_i V_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad (2.26)$$

$$U_i V_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = (U_i \hat{e}_i) \times (V_j \hat{e}_j) = U_i V_j (\hat{e}_i \times \hat{e}_j)$$

### 2.7.3 Produto escalar triplo

$$\vec{W} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = W_i U_j V_k \epsilon_{ijk} \quad (2.27)$$

$$W_i U_j V_k \epsilon_{ijk} = W_i \hat{e}_i \cdot (U_j \hat{e}_j \times V_k \hat{e}_k) = W_i U_j V_k \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) = W_i U_j V_k \epsilon_{j k p} \hat{e}_p$$

### 2.7.4 Identidade $\epsilon$ - $\delta$

A relação entre os símbolos de Kronecker e de permutação é dada por

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{prs} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{jp} & \delta_{jr} & \delta_{js} \\ \delta_{kp} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

A partir dessa identidade, podemos demonstrar que:

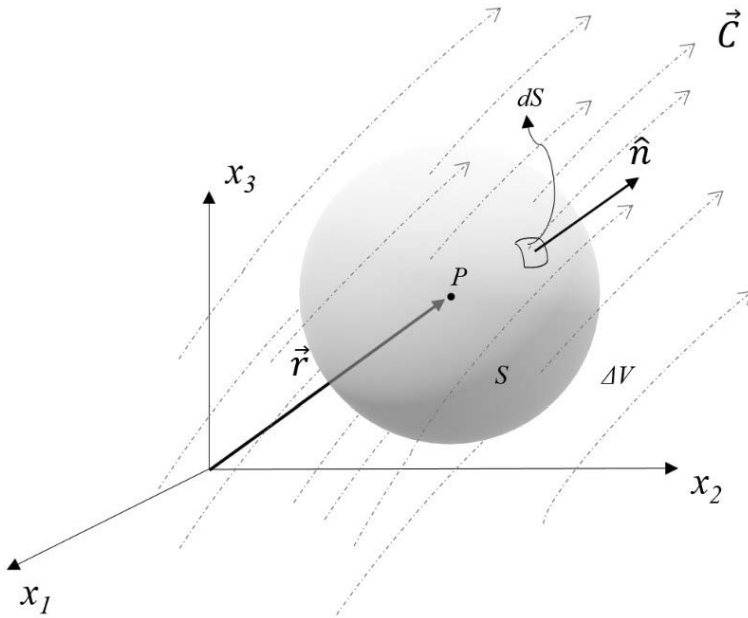
$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ijk}\epsilon_{irs} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{ji} & \delta_{jr} & \delta_{js} \\ \delta_{ki} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \end{vmatrix} = \\
 &= \delta_{ii}\delta_{jr}\delta_{ks} + \underbrace{(\delta_{ji}\delta_{is})}_{\delta_{js}}\delta_{kr} + \underbrace{(\delta_{ki}\delta_{ir})}_{\delta_{kr}}\delta_{js} \\
 &\quad - \delta_{ki}\delta_{jr}\delta_{is} - \delta_{kr}\delta_{js}\underbrace{\delta_{ii}}_3 - \delta_{ks}\delta_{ji}\delta_{ir} \\
 &= \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr} \\
 \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijs} &= \delta_{jj}\delta_{ks} - \underbrace{(\delta_{js}\delta_{kj})}_{\delta_{ks}} \\
 &= 2\delta_{ks} \\
 \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 6
 \end{aligned}$$

## 2.8 ALGUNS CAMPOS VETORIAIS

Considere um elemento de volume esférico  $\Delta V$  (Figura 2.8), delimitado pela superfície  $S$  e cujo centro, em relação à origem do sistema de coordenadas, está localizado no ponto  $P$ , descrito pela Equação (2.29):

$$\vec{r}(x, y, z) = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3 \quad (2.29)$$

Ao escolhermos aleatoriamente um elemento infinitesimal de área  $dS$ , com um vetor normal  $\hat{n}$  apontando para fora da superfície, e considerando que esse elemento de volume possa estar imerso em um campo escalar  $\varphi(\vec{r})$  e/ou em um campo vetorial  $\vec{C}(\vec{r})$ , vamos relembrar as definições de alguns operadores relacionados ao cálculo vetorial.



**Figura 2.8** Elemento de volume em torno de um ponto  $P$  imerso em um campo vetorial  $\vec{C}$  qualquer.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

### 2.8.1 Gradiente de um escalar

O operador **nabla** ( $\vec{\nabla}$ ), quando aplicado a um campo escalar  $\varphi$ , resulta na formação de um campo vetorial denominado gradiente, que indica a direção e o sentido do crescimento do campo  $\varphi$ . Matematicamente, o gradiente de um campo escalar  $\varphi$  é definido como

$$\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int \hat{n} \varphi(\vec{r}) ds \quad (2.30)$$

Destaca-se ainda o fato de que o gradiente de um campo escalar não é meramente um recurso para simplificar a equação para a derivada direcional do campo. De fato, tanto o comprimento quanto a direção fornecem importantes características intrínsecas à própria natureza do campo que está sendo considerado.

Para esclarecer ainda mais a definição do gradiente, vamos considerar um sistema cartesiano de coordenadas imerso em um campo escalar  $\varphi$ , conforme mostrado na Figura 2.9. Nessa situação, vamos ainda considerar dois pontos distintos no campo, descritos pelos vetores posição  $\vec{r}$  e  $\vec{r} + d\vec{r}$ . Assim:

$$d\vec{r} = dx_1\hat{e}_1 + dx_2\hat{e}_2 + dx_3\hat{e}_3 \quad (2.31)$$

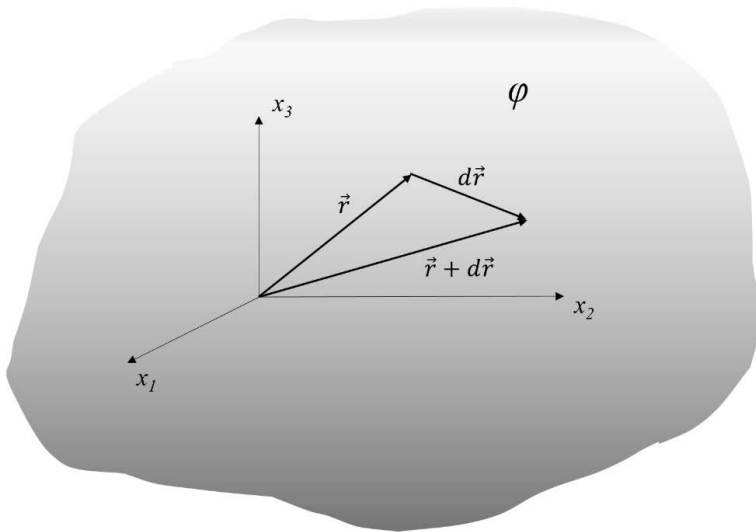
Logo,

$$d\varphi = \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \quad (2.32)$$

Como,

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3) \\ &= \varphi(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dx_3 - \varphi(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$d\varphi = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\hat{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\hat{e}_3 \right) \cdot (dx_1\hat{e}_1 + dx_2\hat{e}_2 + dx_3\hat{e}_3) \quad (2.33)$$



**Figura 2.9** Campo escalar  $\varphi$  em um sistema de coordenadas cartesiano.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Por definição, o operador **nabla** é dado por

$$\vec{\nabla}(\cdot) \equiv \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot) = \hat{e}_i \partial_i(\cdot) \quad (2.34)$$

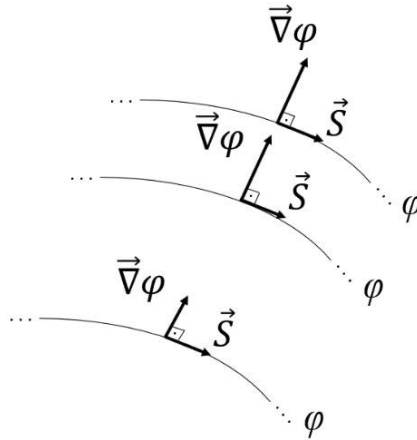
Dessa forma,

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}\varphi \cdot (ds \vec{S}) \quad (2.35)$$

Com isso, obtemos a derivada direcional:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{S} \quad (2.36)$$

Vamos considerar um caso em particular em que o vetor direção  $\vec{S}$  é tangente à curva de nível  $\varphi$ , com o gradiente do campo  $\vec{\nabla}\varphi$  perpendicular à respectiva curva, conforme ilustrado na Figura 2.10. Assim, a derivada direcional é igual a zero, pois em cada caso  $\varphi$  é sempre constante, não indicando o sentido de crescimento do campo.



**Figura 2.10** Projeção do gradiente e do vetor direção em três curvas distintas do campo escalar  $\varphi$ .

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Com isso, podemos chegar a duas conclusões: **1ª**) o gradiente é sempre normal à superfície do campo escalar  $\varphi$  e **2ª**) representa a taxa de variação direcional desse campo escalar ao longo do espaço.

### 2.8.2 Divergente

O operador **divergente** ( $\vec{\nabla} \cdot$ ) é sempre aplicado a um campo vetorial  $\vec{C}$  qualquer, resultando na formação de um campo escalar e indicando a quantidade líquida de fluxo do campo vetorial que entra e sai. Em suma, podemos dizer que o divergente de um campo vetorial indica um valor associado à quantidade total de “nascedouros” e “sumidouros” intrínsecos ao campo vetorial que transpassa a superfície  $S$  do volume a ser avaliado (o que sai menos o que entra).

Dada a definição matemática do divergente:

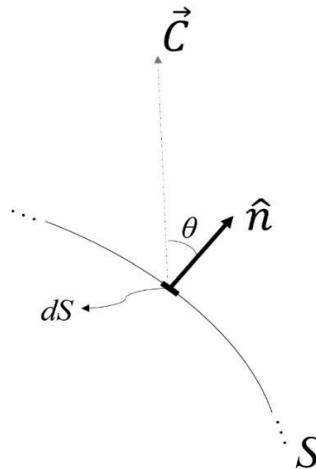
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int \hat{n} \cdot \vec{C}(\vec{r}) dS \quad (2.37)$$

E levando em consideração as características mostradas na Figura 2.11, concluímos que:

$\hat{n} \cdot \vec{C}$  representa o fluxo de  $\vec{C}$  através do elemento de área superficial  $dS$ ;

$(\hat{n} \cdot \vec{C}) dS$  representa o escoamento de  $\vec{C}$  através de  $dS$ ;

$\int (\hat{n} \cdot \vec{C}) dS$  representa o escoamento líquido de  $\vec{C}$  através de  $S$ .



**Figura 2.11** Campo vetorial  $\vec{C}$  transpassando uma superfície  $S$  que apresenta o mesmo valor de uma grandeza escalar, com um certo ângulo  $\theta$  em relação à normal dessa superfície.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

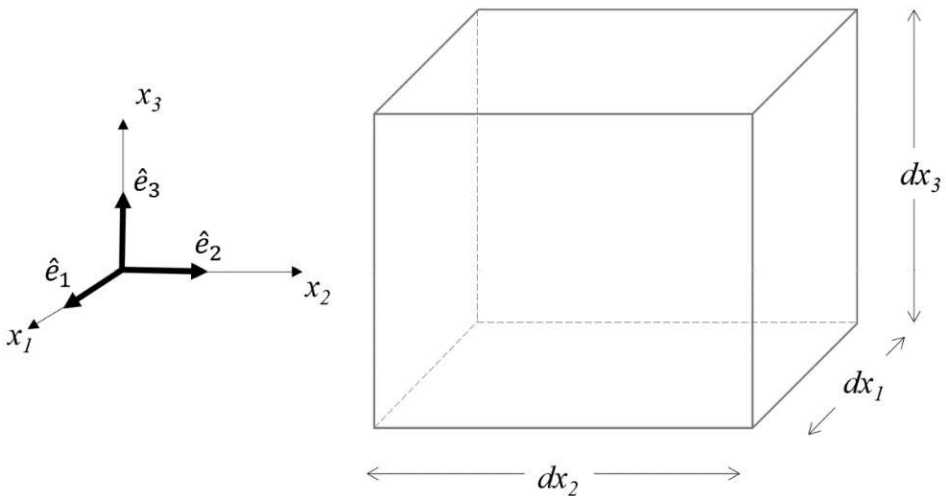
Matematicamente, o divergente é o produto escalar do operador **nabla** com o campo vetorial. Dessa forma, temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = (\hat{e}_i \partial_i) \cdot (C_j \hat{e}_j) = \hat{e}_i \cdot \partial_i (C_j \hat{e}_j) \quad (2.38)$$

Esta é a forma geral do divergente do campo vetorial. Porém, para o caso de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{C} &= \hat{e}_i \cdot \left( \underbrace{C_j \partial_i \hat{e}_j + \hat{e}_j \partial_i C_j}_0 \right) \\ &= \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \partial_i C_j) \\ &= \partial_i C_j \delta_{ij} \\ &= \partial_i C_i \end{aligned}$$

Para elucidarmos a definição do divergente dada na Equação (2.37), vamos exemplificar um caso contendo um elemento de volume cúbico e um sistema cartesiano, como o mostrado na Figura 2.12.



**Figura 2.12** Elemento de volume cúbico.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Vamos considerar o campo vetorial

$$\vec{C} = C_1 \hat{e}_1 + C_2 \hat{e}_2 + C_3 \hat{e}_3$$

Como se trata de um cubo, vamos representar a integral ao longo da superfície  $S$  por meio do somatório das seis faces ( $A_1 + A_2 + \dots + A_6$ ):

$$\int \hat{n} \cdot \vec{C}(\vec{r}) ds = \sum_{i=1}^6 \int_{A_i} \hat{n} \cdot \vec{C}(\vec{r}) dA$$

Para a face  $A_1$ :

$$\int_{A_1} \hat{e}_1 \cdot (C_1 \hat{e}_1 + C_2 \hat{e}_2 + C_3 \hat{e}_3) dx_2 dx_3 \approx C_1 \left(x_1 + \frac{dx_1}{2}, x_2, x_3\right) dx_2 dx_3$$

Para a face  $A_2$ :

$$\approx -C_1 \left(x_1 - \frac{dx_1}{2}, x_2, x_3\right) dx_2 dx_3$$

Somando as contribuições, temos:

$$\begin{aligned} & \left[ C_1 \left(x_1 + \frac{dx_1}{2}, x_2, x_3\right) - C_1 \left(x_1 - \frac{dx_1}{2}, x_2, x_3\right) \right] dx_2 dx_3 \\ &= \left[ \left( C_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) - \left( C_1(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) \right] dx_2 dx_3 \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

Ao procedermos da mesma forma com as outras quatro faces, obtemos:

$$\int \hat{n} \cdot \vec{C}(\vec{r}) ds = \left( \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \frac{\partial C_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

Como  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ , segue que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int \hat{n} \cdot \vec{C}(\vec{r}) dA = \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \frac{\partial C_3}{\partial x_3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C}(\vec{r}) = \partial_i C_i$$

Um campo vetorial  $\vec{U}$  com divergência nula,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ , é denominado **campo solenoidal**.

### 2.8.3 Rotacional

Antes de apresentarmos a definição do rotacional e discutirmos algumas de suas peculiaridades, convém definirmos uma grandeza chamada **circulação**. Considere uma curva fechada  $C$  delimitando uma região  $R$  do espaço no instante de tempo  $t = 0$ , como exemplificado na Figura 2.13. Nesse caso,  $\hat{t}$  e  $\vec{u}$  correspondem, respectivamente, ao vetor tangente à curva  $C$  e ao vetor velocidade junto à curva.

Ao considerarmos o elemento de curva  $dl$ , a circulação  $\Gamma$  é definida como:

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{u} \cdot \hat{t} dl \quad (2.39)$$

Ao considerarmos o fato de a circulação poder variar ao longo do tempo, o **teorema da circulação de Kelvin** define:

$$\Gamma_{C_t} = \oint_{C_t} \vec{u} \cdot \hat{t} dl \quad (2.40)$$

O teorema afirma que a circulação  $\Gamma_{C_t}$  em torno de um caminho fechado em um fluido em rotação é constante no tempo, desde que não haja forças externas atuando sobre o fluido.

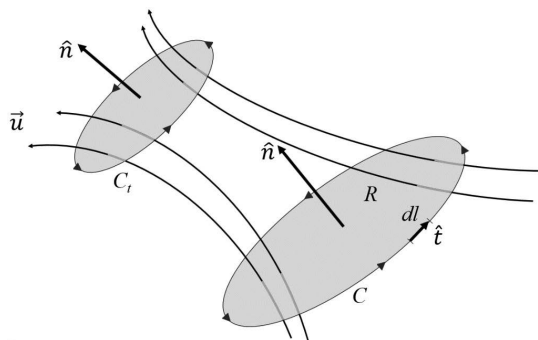


Figura 2.13 Representação da circulação.

Fonte: elaborada pelos autores.

Vamos examinar três diferentes situações envolvendo a obtenção da circulação em campos de velocidade em duas dimensões. Na primeira situação (Figura 2.14), vamos considerar um escoamento com velocidade  $\vec{u} = u_{x_2} \hat{e}_2$ . Primeiramente, vamos decompor a curva  $C$  em quatro curvas distintas com seus vetores tangentes.

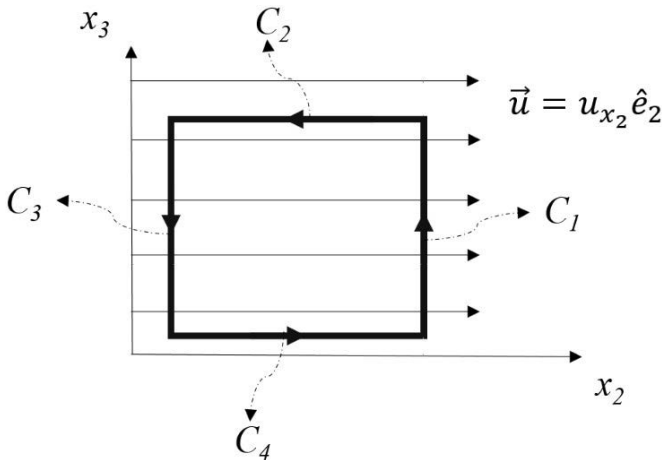
$$\Gamma_C = \int_{C_1} (u_{x_2} \hat{e}_2 \cdot \hat{t}_1) dl_1 + \int_{C_2} (u_{x_2} \hat{e}_2 \cdot \hat{t}_2) dl_2 + \int_{C_3} (u_{x_2} \hat{e}_2 \cdot \hat{t}_3) dl_3 + \int_{C_4} (u_{x_2} \hat{e}_2 \cdot \hat{t}_4) dl_4$$

Obviamente, as componentes  $\hat{t}_1$  e  $\hat{t}_3$  são perpendiculares ao campo de velocidade, resultando que as parcelas de circulação das faces  $C_1$  e  $C_3$  sejam iguais a zero. Já as componentes  $\hat{t}_2$  e  $\hat{t}_4$  encontram-se na mesma direção, mas em sentidos opostos. Dessa forma:

$$\Gamma_C = 0 - u_{x_2} l_2 + 0 + u_{x_2} l_4$$

$$\Gamma_C = 0$$

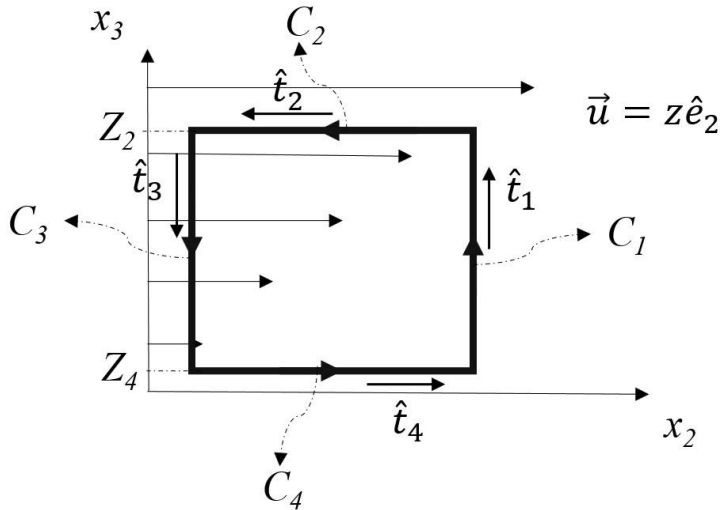
Esse resultado já era esperado, pois, uma vez que o campo de velocidade é constante ao longo do espaço, não há como existir circulação nesse campo.



**Figura 2.14** Curva fechada imersa em um campo de velocidade unidimensional constante.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Em um segundo exemplo, vamos considerar um campo de velocidade  $\vec{u} = z \hat{e}_2$  mostrado na Figura 2.15.



**Figura 2.15** Curva fechada imersa em um campo de velocidade unidimensional variando na direção da componente  $x_3$ .

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Considerando as mesmas componentes,

$$\Gamma_C = \int_{C_1} (Z\hat{e}_2 \cdot \hat{t}_1) dl_1 + \int_{C_2} (Z\hat{e}_2 \cdot \hat{t}_2) dl_2 + \int_{C_3} (Z\hat{e}_2 \cdot \hat{t}_3) dl_3 + \int_{C_4} (Z\hat{e}_2 \cdot \hat{t}_4) dl_4$$

Nesse caso,

$$\Gamma_C = 0 - Z_2 l_2 + 0 + Z_4 l_4,$$

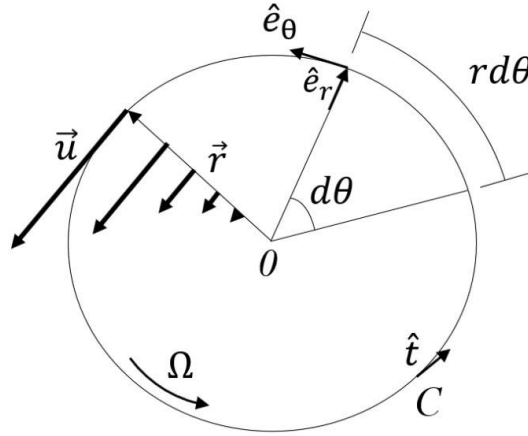
E, como  $l_2 = l_4$ ,

$$\Gamma_C = (Z_4 - Z_2)l$$

O fato de o campo de velocidade aumentar linearmente em relação à componente  $x_3$  tem como consequência a presença de uma circulação não nula.

Por fim, vamos considerar um terceiro exemplo para sistema de coordenadas cilíndrico. Nesse caso, vamos considerar um campo de velocidade linearmente proporcional

ao raio com origem no centro do sistema de coordenadas, com orientação na componente  $\hat{e}_\theta$ :  $\vec{u} = \Omega r \hat{e}_\theta$ , como mostrado na Figura 2.16.



**Figura 2.16** Campo de velocidade centrado em  $O$  com uma velocidade angular  $\Omega$ .

**Fonte:** elaborada pelos autores.

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{u} \cdot \hat{i} \, dl$$

Nesse caso, é importante perceber que  $\hat{i} = \hat{e}_\theta$  e que  $dl = r \, d\theta$ . Assim,

$$\Gamma_C = \oint_0^{2\pi} \Omega r \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta r \, d\theta$$

$$\Gamma_C = 2\pi\Omega r^2$$

Ao tomarmos a definição matemática do rotacional de um campo vetorial  $\vec{U}$  qualquer:

$$\hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r})) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \int_S \hat{n} \cdot \vec{U}(\vec{r}) \, dl = \frac{\Gamma_C}{\Delta S} \quad (2.41)$$

Podemos concluir que o rotacional de um campo vetorial cuja normal a uma região plana delimitada por uma curva fechada  $C$  em um dado ponto  $O$  corresponde à circulação do campo por unidade de área. Se considerarmos o terceiro exemplo dado na Figura 2.16, com o vetor normal sendo  $\hat{k}$ , temos que:

$$\begin{aligned}
\hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{r})) &= (\vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{r})) \cdot \hat{k} \\
&= (\partial_i \hat{e}_i \times u_j \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_k \\
&= \partial_i (u_j \epsilon_{ijl} \hat{e}_l) \cdot \hat{e}_k \\
\hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{r})) &= \partial_i u_j \epsilon_{ijk}
\end{aligned}$$

No caso em que  $\vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{r}) = 0$ , o campo vetorial é denominado **irrotacional**.

### 2.8.4 Teoremas integrais

Alguns teoremas são fundamentais na compreensão do comportamento de campos escalares ou vetoriais em um determinado espaço delimitado, por sua vez, por uma superfície fechada. O caso generalizado de uma classe de teoremas integrais é chamado **teorema de Gauss**, dado por:

$$\int_V \nabla * \phi dV = \int_S \hat{n} * \phi dS \quad (2.42)$$

onde  $\phi$  corresponde a um campo escalar, vetorial ou tensorial e  $*$  a uma operação qualquer.

Para o caso de um campo escalar  $\varphi$  qualquer, temos:

$$\int_V \nabla \varphi dV = \int_S \hat{n} \varphi dS \quad (2.43)$$

Se tanto o campo quanto a operação forem vetoriais, temos:

$$\int_V \nabla \times \vec{U} dV = \int_S \hat{n} \times \vec{U} dS \quad (2.44)$$

Já para o caso de um campo vetorial com operação sendo o produto escalar, temos o **teorema da divergência**:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{U} dV = \int_S \hat{n} \cdot \vec{U} dS \quad (2.45)$$

De fato, o teorema da divergência (muitas vezes chamado de teorema de Gauss) é de suma importância para a mecânica dos fluidos, pois mostra que “o escoamento líquido de um campo vetorial (um campo de velocidade, por exemplo) através de uma superfície fechada é igual à integral do divergente desse campo sobre o volume delimitado pela superfície”.

Vamos demonstrar o teorema da divergência por meio de um exemplo, considerando um campo de velocidade dado por:  $\vec{U} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3$  atravessando uma casca semiesfera de raio unitário  $R = 1$ , conforme ilustrado na Figura 2.17.

Nesse caso, a superfície  $S$  é constituída por duas partes distintas: a tampa (localizada sobre o plano  $x_1x_2$ ) e a superfície da semiesfera. Logo, o escoamento líquido através de  $S$  é dado por:

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{U} dS = \int_{S, \text{tampa}} \hat{n}_{\text{tampa}} \cdot \vec{U} dS + \int_{S, \text{semiesf}} \hat{n}_{\text{semiesf}} \cdot \vec{U} dS$$

onde:

$$\hat{n}_{\text{tampa}} = -\hat{e}_3, \quad \hat{n}_{\text{semiesf}} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3$$

$$\begin{aligned} \int_{S, \text{tampa}} \hat{n}_{\text{tampa}} \cdot \vec{U} dS &= \int_{S, \text{tampa}} (-\hat{e}_3) \cdot (x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3) dS \\ &= \int_{S, \text{tampa}} z dS = 0 \end{aligned}$$

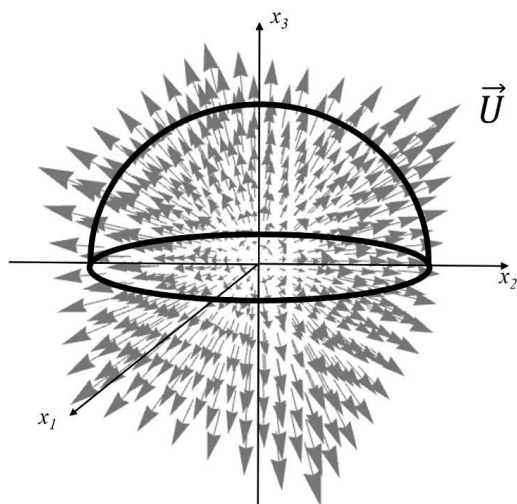
$$\begin{aligned} \int_{S, \text{semiesf}} \hat{n}_{\text{semiesf}} \cdot \vec{U} dS &= \int_{S, \text{semiesf}} (x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3) \cdot (x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3) dS \\ &= \int_{S, \text{semiesf}} (x^2 + y^2 + z^2) dS \\ &= \int_{S, \text{semiesf}} r^2 dS \\ &= \frac{4\pi R^2}{2} = 2\pi \end{aligned}$$

Como:

$$\nabla \cdot \vec{U} = \nabla \cdot (x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3) = 3,$$

o lado esquerdo do teorema é dado por:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{U} \, dV &= \int_V 3 \, dV \\ &= \frac{3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{2} = 2\pi \end{aligned}$$



**Figura 2.17** Campo  $\vec{U}$  de velocidade transpassando a casca semiesférica de raio  $R = 1$ .

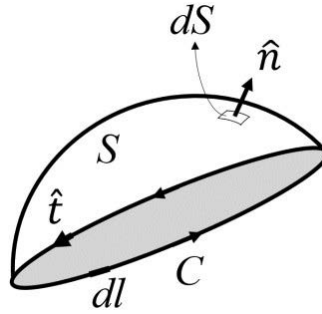
**Fonte:** elaborada pelos autores.

Na Equação (2.41), ao considerarmos  $\Delta S$  tendendo a zero, podemos reescrevê-la na forma:

$$\hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r})) \, dS = \int_S \hat{n} \cdot \vec{U}(\vec{r}) \, dl \quad (2.46)$$

Se considerarmos uma superfície aberta, orientável e seccionalmente suave, como mostrado na Figura 2.18, obtemos a equação que descreve o **teorema de Stokes**:

$$\int_S \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r})) dS = \int_C \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl \quad (2.47)$$



**Figura 2.18** Exemplo de superfície aberta, orientável e seccionalmente suave.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

A conclusão a que chegamos é que o teorema de Stokes diz que “a soma de todos os rotacionais ao longo de todos os elementos de superfície é igual à soma das projeções do campo vetorial em relação à componente tangencial da curva  $C$  da superfície, que, por sua vez, é igual à circulação”.

Para reforçar essa definição, vamos considerar um exemplo com uma curva fechada  $C$ , formada pelas curvas  $C_1$  e  $C_2$ , como mostrado na Figura 2.19.

Nesse caso, a circulação será dada por

$$\int_C \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl = \int_{C_1} \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl - \int_{C_2} \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl$$

Pelo teorema de Stokes, temos que

$$\int_S \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r})) dS = \int_{C_1} \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl - \int_{C_2} \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl$$

Para o caso de um campo irrotacional ( $\vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r}) = 0$ ), concluímos que

$$\int_{C_1} \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl = \int_{C_2} \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl$$

indicando que a integral aberta entre dois pontos quaisquer independe do caminho. De maneira geral, para qualquer caminho escolhido, temos que

$$\int_C \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)$$

Ainda, se  $C$  for uma curva fechada, temos

$$\oint_C \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl = 0$$

Se considerarmos duas posições muito próximas entre si,  $\vec{r}$  e  $\vec{r} + d\vec{r}$ , temos que  $\vec{U}$  passa a ser uma constante, e

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = d\varphi = \vec{U} \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \hat{t} dl$$

Como  $\hat{t} dl = d\vec{r}$

$$d\varphi = \vec{U} \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} d\vec{r}$$

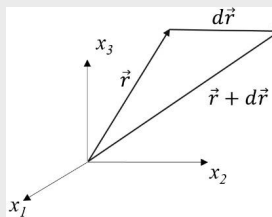
$$d\varphi = \vec{U} \cdot d\vec{r}$$

Como  $d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r}$

$$\vec{U} \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r}$$

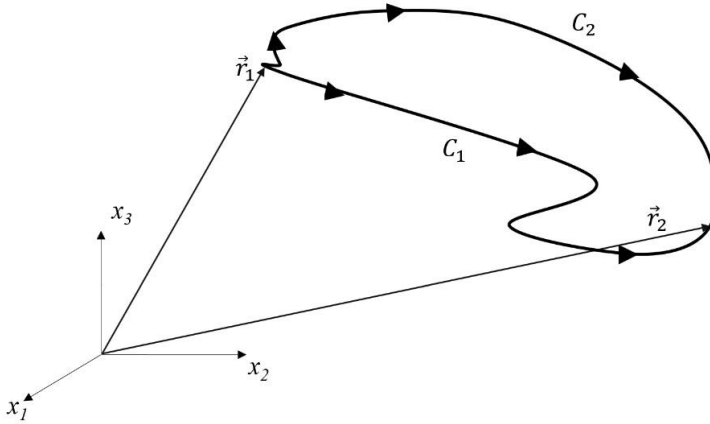
$$\vec{U} = \vec{\nabla}\varphi$$

onde  $\varphi$  corresponde a um campo escalar potencial de  $\vec{U}$ .



Com base nesse exemplo simples, podemos concluir que, para um campo irrotacional:

- $\vec{U} = \vec{\nabla}\varphi$  (o campo vetorial é igual ao gradiente de uma função potencial).
- $\int_C \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl$  independe da curva  $C$  escolhida.
- $\oint_C \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl$  é sempre nula, pois  $\vec{U}$  corresponde a um campo conservativo.



**Figura 2.19** Curva fechada  $C$  formada por duas curvas distintas  $C_1$  e  $C_2$ , delimitadas pelos vetores posição  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ .

**Fonte:** elaborada pelos autores.

## 2.9 DEFINIÇÃO MATEMÁTICA DE UM VETOR

Conforme mencionado anteriormente, o princípio da invariância garante que tanto a magnitude quanto a orientação de um vetor independem do sistema de referência adotado. Dessa forma,

$$\vec{U} = U_i \hat{e}_i = U'_j \hat{e}'_j \quad (\text{o vetor é o mesmo tanto no sistema } \hat{e}_i \text{ quanto no sistema } \hat{e}'_j).$$

Ao conhecermos as componentes  $U_i$ , podemos obter as componentes  $U'_j$  por meio da relação entre  $\hat{e}_i$  e  $\hat{e}'_j$ :

$$U'_j = U_i(\hat{e}'_j \cdot \hat{e}_i) = \Gamma_{ij}U_i$$

(onde  $\hat{e}'_j \cdot \hat{e}_i$  é igual ao cosseno do ângulo  $\theta$  entre esses sistemas).

**Importante:** o índice  $j$  de  $\Gamma_{ij}$  corresponde ao novo sistema de referência que será adotado.

Dessa forma, podemos definir matematicamente um vetor nas três dimensões como:

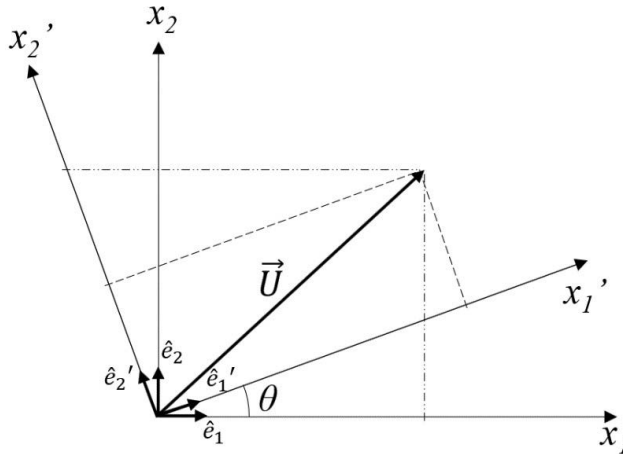
Um agente ou entidade matemática contendo três componentes escalares que se transformam segundo a representação:

$$U'_j = \Gamma_{ij}U_i$$

quando o sistema de referência se transforma de acordo com:

$$x'_j = \Gamma_{ij}x_i$$

Vamos demonstrar essa afirmação, considerando um vetor projetado simultaneamente em dois sistemas de referência, como mostrado na Figura 2.20.



**Figura 2.20** Projeção de um vetor  $\vec{U}$  sobre dois diferentes sistemas de referência.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Com base nas projeções, podemos afirmar que:

$$\vec{U} = U_i \hat{e}_i = U_1 \hat{e}_1 + U_2 \hat{e}_2$$

$$U'_1 = \hat{e}'_1 \cdot \vec{U} = \hat{e}'_1 \cdot U_i \hat{e}_i = \hat{e}'_1 \cdot (U_1 \hat{e}_1 + U_2 \hat{e}_2)$$

$$U'_2 = \hat{e}'_2 \cdot \vec{U} = \hat{e}'_2 \cdot U_i \hat{e}_i = \hat{e}'_2 \cdot (U_1 \hat{e}_1 + U_2 \hat{e}_2)$$

Se considerarmos que:

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 = \cos(\theta)$$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 = \cos(\theta)$$

Convencionando:

$$\Gamma_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j,$$

temos:

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 \\ \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

De maneira geral:

$$\vec{U} = U_i \hat{e}_i$$

Como:

$$U'_j = \Gamma_{ij} U_i$$

e:

$$U_i = \Gamma_{ik} U'_k,$$

concluimos que:

$$U'_j = \Gamma_{ij} \Gamma_{ik} U'_k$$

Como se pode demonstrar que:

$$\Gamma_{ij} \Gamma_{ik} = \delta_{jk},$$

vamos considerar  $j = 1$  e  $k = 2$ , logo:

$$\Gamma_{11}\Gamma_{12} + \Gamma_{21}\Gamma_{22} = 0$$

ou:

$$\cos(\theta)(-\sin(\theta)) + \cos(\theta)\sin(\theta) = 0$$

Por outro lado, se considerarmos  $j = k = 1$ , temos:

$$\Gamma_{11}\Gamma_{11} + \Gamma_{21}\Gamma_{21} = 1$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Por fim, podemos dar uma definição para um vetor qualquer:

Um vetor é um agente ou entidade matemática que associa um escalar a uma determinada orientação no espaço por meio da transformação:

$$U_s = \hat{s} \cdot \vec{U}$$

## 2.10 DEFINIÇÃO MATEMÁTICA DE UM TENSOR

A partir da última definição apresentada de vetor, percebemos a necessidade de associarmos um escalar a uma determinada orientação no espaço por meio de um vetor. Já quando surge a necessidade de associarmos um vetor a uma orientação espacial, precisaremos de um agente matemático chamado **tensor**.

Um tensor de segunda ordem em um sistema cartesiano, por exemplo, é um agente matemático contendo 9 componentes que se transforma conforme a representação:

$$T'_{ij} = C_{mi} C_{nj} T_{mn},$$

quando o sistema de coordenadas se transforma de acordo com:

$$\chi'_j = \Gamma_{ij} \chi_i$$

A relação entre um vetor e um tensor pode fornecer uma compreensão mais física de um tensor:

Um tensor é um agente ou entidade matemática que associa um vetor a uma determinada orientação no espaço por meio da transformação:

$$\hat{t}_s = \hat{s} \cdot \overline{\overline{T}}$$

Em suma, concluímos que:

$\varphi \rightarrow$  tensor de ordem zero

$\vec{U} \rightarrow$  tensor de primeira ordem  $\vec{U} = U_i \hat{e}_i$

$\mathbf{T} \rightarrow$  tensor de segunda ordem  $\mathbf{T} = T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$

$\overline{\overline{T}} \rightarrow$  tensor de terceira ordem  $\overline{\overline{T}} = T_{ijk} \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k$

Note que:

$$\vec{t}_i = \hat{e}_i \cdot \mathbf{T} = \hat{e}_i \cdot (T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k) = T_{jk} \delta_{ij} \hat{e}_k = T_{ik} \hat{e}_k$$

$$\vec{t}_i = T_{i1} \hat{e}_1 + T_{i2} \hat{e}_2 + T_{i3} \hat{e}_3$$

Para  $\vec{t}_i \cdot \hat{e}_2$ , por exemplo, nós temos:  $\vec{t}_i \cdot \hat{e}_2 = T_{i2}$

### 2.10.1 Produto escalar

$$\vec{u} \cdot \overline{\overline{T}} = (u_i \hat{e}_i) \cdot (T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k) \quad (2.48)$$

$$(u_i \hat{e}_i) \cdot (T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k) = u_i T_{jk} \delta_{ij} \hat{e}_k = u_i T_{ik} \hat{e}_k$$

$$\overline{\overline{T}} \cdot \vec{u} = (T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k) \cdot (u_i \hat{e}_i) \quad (2.49)$$

$$(T_{jk}\hat{e}_j\hat{e}_k) \cdot (u_i\hat{e}_i) = u_i T_{jk} \delta_{ki} \hat{e}_j = u_i T_{ji} \hat{e}_j = u_i T_{ki} \hat{e}_k$$

$$\overline{\overline{T}} \cdot \overline{\overline{U}} = (T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j) \cdot (U_{km}\hat{e}_k\hat{e}_m) \quad (2.50)$$

$$(T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j) \cdot (U_{km}\hat{e}_k\hat{e}_m) = T_{ij} U_{km} \delta_{jk} \hat{e}_i \hat{e}_m = T_{ij} U_{jm} \hat{e}_i \hat{e}_m$$

$$\overline{\overline{U}} \cdot \overline{\overline{T}} = (U_{km}\hat{e}_k\hat{e}_m) \cdot (T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j) \quad (2.51)$$

$$(U_{km}\hat{e}_k\hat{e}_m) \cdot (T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j) = T_{ij} U_{km} \delta_{mi} \hat{e}_k \hat{e}_j = T_{ij} U_{ki} \hat{e}_k \hat{e}_j$$

## 2.10.2 Produto vetorial

$$\vec{u} \times \overline{\overline{T}} = u_i \vec{e}_i \times T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k \quad (2.52)$$

$$u_i \vec{e}_i \times T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k = u_i T_{jk} \epsilon_{ijm} \hat{e}_m \hat{e}_k$$

$$\overline{\overline{T}} \times \vec{u} = (T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k) \times (u_i \vec{e}_i) \quad (2.53)$$

$$(T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k) \times (u_i \vec{e}_i) = u_i T_{jk} \epsilon_{kim} \hat{e}_j \hat{e}_m$$

$$\overline{\overline{U}} \times \overline{\overline{T}} = (U_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j) \times (T_{km} \vec{e}_k \vec{e}_m) \quad (2.54)$$

$$(U_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j) \times (T_{km} \vec{e}_k \vec{e}_m) = U_{ij} T_{km} \epsilon_{jkl} \hat{e}_i \hat{e}_l \hat{e}_m$$

### 2.10.3 Produto tensorial (díade)

Este terceiro produto consiste em uma operação entre dois vetores de dimensões  $m$  e  $n$  que resulta em um tensor de dimensão  $m \times n$ :

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = [u_i][v_i^T] \quad (2.55)$$

$$[u_i][v_i^T] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

Tomamos como exemplo:

$$\begin{aligned} \vec{u} \otimes \vec{v} &= (3\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2)(-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) \\ &= -3\hat{e}_1\hat{e}_1 + 6\hat{e}_1\hat{e}_2 - 4\hat{e}_2\hat{e}_1 + 8\hat{e}_2\hat{e}_2 \end{aligned}$$

### 2.10.4 Produto escalar duplo ou dupla contração

Considere os vetores  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  e  $\vec{d}$ . Podemos formar, por exemplo, as diádicas:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b}, \quad \vec{c} \otimes \vec{d} = \vec{c}\vec{d}.$$

Define-se como produto escalar duplo ou dupla contração; definição esta geralmente encontrada em textos de mecânica do contínuo e que segue a definição original de Gibbs:

$$\vec{a}\vec{b} : \vec{c}\vec{d} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) \quad (2.56)$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) = a_i \hat{e}_i \cdot c_k \hat{e}_k \quad b_j \hat{e}_j \cdot d_l \hat{e}_l = a_i b_j c_k d_l \delta_{ik} \delta_{jl} = a_i b_j c_i d_j$$

Realizando uma dupla contração entre dois tensores de segunda ordem,  $\overline{\overline{R}}$  e  $\overline{\overline{S}}$ , teremos:

$$\overline{\overline{R}} : \overline{\overline{S}} = R_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j : S_{kl} \hat{e}_k \hat{e}_l = R_{ij} S_{kl} \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k \quad \hat{e}_j \cdot \hat{e}_l = R_{ij} S_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = R_{ij} S_{ij} \quad (2.57)$$

A dupla contração entre duas diádicas ou entre dois tensores de segunda ordem dá origem a um escalar. Uma segunda definição de duplo produto escalar ou dupla contração é encontrada em vários textos de mecânica dos fluidos, na forma:

$$\vec{a}\vec{b} : \vec{c}\vec{d} = (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (2.58)$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) = a_i \hat{e}_i \cdot d_l \hat{e}_l \ b_j \hat{e}_j \cdot c_k \hat{e}_k = a_i b_j c_k d_l \delta_{il} \delta_{jk} = a_i b_j c_j d_i$$

Esta segunda definição é equivalente à primeira definição fazendo a dupla contração:

$$\vec{a}\vec{b} : (\vec{c}\vec{d})^T = \vec{a}\vec{b} : \vec{d}\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (2.59)$$

Em textos de mecânica dos fluidos, usando coordenadas cartesianas, os duplos produtos escalares geralmente encontrados são feitos entre tensores simétricos, e a primeira ou a segunda definição leva a resultados idênticos. Em cada texto, deve-se seguir a definição adotada pelo autor. Alternativamente, pode-se obter a dupla contração entre dois tensores de segunda ordem como o traço do tensor obtido de uma contração simples entre o transposto de um deles e o outro.

$$\overline{\overline{R}} : \overline{\overline{S}} = \text{tr}(\overline{\overline{R}}^T \cdot \overline{\overline{S}}) = \text{tr}(\overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{S}}^T) = \text{tr}(\overline{\overline{S}}^T \cdot \overline{\overline{R}}) = \text{tr}(\overline{\overline{S}} \cdot \overline{\overline{R}}^T)$$

Em suma, concluímos que:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} \rightarrow$  tensor de ordem zero ou um escalar.
- $\vec{u} \times \vec{v} \rightarrow$  tensor de primeira ordem ou um vetor.
- $\vec{u} \otimes \vec{v} \rightarrow$  tensor de segunda ordem ou diádica.
- $\vec{a}\vec{b} : \vec{c}\vec{d} \rightarrow$  tensor de ordem zero ou um escalar.
- $\overline{\overline{R}} : \overline{\overline{S}} \rightarrow$  tensor de ordem zero ou um escalar.

### 2.10.5 Tensor simétrico e antissimétrico

Todo tensor de segunda ordem pode ser decomposto em um tensor simétrico e outro antissimétrico. Por definição:

- Se  $T_{ij} = T_{ji}$ , o tensor é **simétrico** ( $S_{ij}$ ).
- Se  $T_{ij} = -T_{ji}$ , o tensor é **antissimétrico** ( $A_{ij}$ ).

Assim:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \quad (2.60)$$

onde:

$$S_{ij} = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} \quad (2.61)$$

e:

$$A_{ij} = \frac{T_{ij} - T_{ji}}{2} \quad (2.62)$$

### 2.10.6 Tensores especiais

O **tensor transposto** de  $T_{ij}$  é definido como:

$$\overline{\overline{T}} = T_{ji} \hat{e}_i \hat{e}_j \quad (2.63)$$

Observe que:

$$\vec{u} \cdot \overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}} \cdot \vec{u}$$

O **tensor identidade** (simétrico) e o **tensor permutação** (antissimétrico) são dados pelas Equações (2.64) e (2.65), respectivamente:

$$\overline{\overline{I}} = \delta_{ji} \hat{e}_i \hat{e}_j \quad (2.64)$$

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k \quad (2.65)$$

O conceito de isotropia está relacionado com a independência de uma grandeza em relação à sua orientação espacial. Um **tensor** é considerado **isotrópico** se suas componentes não se alteram com a rotação do sistema de coordenadas. Ainda, em relação à isotropia, podemos destacar que:

- a) Todo tensor de ordem zero é isotrópico.  
 b) Não existem tensores de primeira ordem que sejam isotrópicos (com exceção do vetor nulo).  
 c) Todo tensor de qualquer ordem é isotrópico se suas componentes forem nulas.  
 d) Todo tensor isotrópico de segunda ordem pode ser escrito como um múltiplo de um tensor identidade:

$$\bar{\bar{U}} = \alpha \bar{\bar{I}}$$

- e) Todo tensor isotrópico de terceira ordem pode ser escrito como um múltiplo de um tensor permutação:

$$\bar{\bar{\bar{U}}} = \beta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}}$$

- f) Todo tensor isotrópico de quarta ordem pode ser escrito como uma combinação linear:

$$\bar{\bar{\bar{\bar{U}}}} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}$$

Todo tensor simétrico de segunda ordem pode ser representado na forma:

$$\bar{\bar{T}} = \sigma \bar{\bar{I}} \quad (2.66)$$

onde  $\sigma$  corresponde a uma grandeza escalar. Mas, para isso, um sistema de coordenadas ortonormal deve ser encontrado, no qual os vetores associados pelo tensor às direções e sentidos dados pelos eixos de coordenadas sejam paralelos a esses eixos. Esse sistema de coordenadas é chamado de **eixo principal do tensor**. Se considerarmos  $\hat{\vartheta}$  o vetor alinhado ao sistema de eixo principal do tensor, temos:

$$\hat{\vartheta} \cdot \bar{\bar{T}} = \sigma \hat{\vartheta} \quad (2.67)$$

Pela notação indicial,

$$\vartheta_i T_{ij} = \sigma \delta_{ij} \vartheta_i \quad (2.68)$$

ou

$$(T_{ij} - \sigma \delta_{ij}) \vartheta_i = 0 \quad (2.69)$$

Uma solução não trivial será possível se considerarmos nulo o determinante das componentes entre parênteses junto ao lado esquerdo da Equação (2.65).

$$\det \left( \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\epsilon_{ijk} (T_{1i} - \sigma \delta_{1i})(T_{2j} - \sigma \delta_{2j})(T_{3k} - \sigma \delta_{3k}) = 0$$

Cuja solução é dada pela equação característica do tensor,

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.70)$$

onde  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  correspondem aos três invariantes do tensor.

- $I_1 = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{tr} \bar{\bar{T}}$  (traço do tensor  $\bar{\bar{T}}$ )
- $I_2 = \frac{(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji})}{2} = \frac{(\text{tr}^2 \bar{\bar{T}} - \text{tr} \bar{\bar{T}}^2)}{2}$
- $I_3 = \epsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k} = \det \bar{\bar{T}}$

Ao obtermos as raízes de  $\sigma_i$  (autovalores de  $\bar{\bar{T}}$ ), podemos reescrever o tensor na forma:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Dado um exemplo de tensor

$$U_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

vamos encontrar um sistema de coordenadas onde tal tensor pode ser reescrito na forma de um tensor diagonal.

Logo,

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \sigma & 0 & 4 \\ 0 & 3 - \sigma & 1 \\ 1 & 5 & -\sigma \end{bmatrix} = -\sigma^3 + 5\sigma^2 + 8\sigma - 22 = 0,$$

cujas soluções são:

$$\sigma_1 = \frac{7 + \sqrt{5}}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}, \quad \sigma_3 = -2$$

Assim, o tensor pode ser reescrito na forma:

$$U_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{7+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

### 2.10.7 Sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais

Como mencionado anteriormente, o princípio da invariância garante a imutabilidade de um vetor independentemente do sistema de coordenadas adotado. Em muitas situações, sistemas curvilíneos ortogonais (não cartesianos), como coordenadas cilíndricas ou esféricas, podem ou devem ser adotados para a análise de um determinado problema fluidodinâmico. Sabemos que, em sistemas cartesianos, um vetor de base qualquer independe de sua posição, e a variação de uma de suas componentes em relação a um dos eixos ortogonais é nula. Ou seja,

$$\partial_i \hat{e}_j = 0$$

Contudo, se  $\partial_i \hat{e}_j$  não for nulo para qualquer valor de  $i$  e  $j$ , esse sistema será chamado de **curvilíneo**. Para um sistema polar, por exemplo, temos

$$\begin{aligned} \partial_r \hat{e}_r &= \partial_r \hat{e}_\theta = 0 \\ \partial_\theta \hat{e}_\theta &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\partial_\theta \hat{e}_r \neq 0$$

Conseqüentemente, para expressarmos as equações vetoriais em um sistema de coordenadas curvilíneas, precisaremos de uma expressão para o operador *nabla*, bem como a dependência dos vetores de base em relação à posição.

### 2.10.7.1 Determinação do operador nabla

A partir do vetor posição no novo sistema de coordenadas,

$$\vec{r} = F_i u_i \hat{e}_i \quad (2.72)$$

onde  $F_i$  representa um fator de escala. Já que as componentes  $u_i$  podem não corresponder a dimensões do sistema, podemos expressar  $d\vec{r}$  no novo sistema de coordenadas:

$$d\vec{r} = F_i du_i \hat{e}_i \quad (2.73)$$

Convém destacar que, para um sistema cartesiano, temos:

$$(d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \quad (2.74)$$

Já para o sistema curvilíneo:

$$(d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = (F_1 du_1)^2 + (F_2 du_2)^2 + (F_3 du_3)^2 \quad (2.75)$$

Como a variação de  $dx_1$  em termos das variações das componentes  $du_i$ , por exemplo, é dada por:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x_1}{\partial u_3} du_3$$

de forma geral, temos

$$dx_m = \frac{\partial x_m}{\partial u_j} du_j \quad (2.76)$$

Logo,

$$\left(\frac{\partial x_m}{\partial u_j} du_j\right) \cdot \left(\frac{\partial x_m}{\partial u_k} du_k\right) = F_i^2 du_i du_i \quad (2.77)$$

Já na forma de um produto escalar, temos

$$\left(\frac{\partial x_m}{\partial u_j} du_j \hat{e}_m\right) \cdot \left(\frac{\partial x_n}{\partial u_k} du_k \hat{e}_n\right) = F_i^2 du_i du_i \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x_m}{\partial u_j} \hat{e}_m\right) \cdot \left(\frac{\partial x_n}{\partial u_k} \hat{e}_n\right) du_j du_k &= F_i^2 du_i du_i \\ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} \hat{e}_m\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \hat{e}_n\right) du_j du_k &= F_i^2 du_i du_i \end{aligned}$$

Uma vez que esse sistema curvilíneo é ortogonal ( $i \neq j$ ), temos

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k}\right) = 0 \quad (2.79)$$

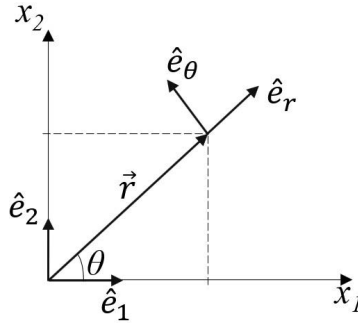
Na Equação (2.73), somente os termos  $j = k$  permanecerão.

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)^2\right] du_1^2 + \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_2}\right)^2\right] du_2^2 + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_3}\right)^2\right] du_3^2 = F_1^2 du_1^2 + F_2^2 du_2^2 + F_3^2 du_3^2 \end{aligned}$$

Como as coordenadas são independentes, concluímos que o fator de escala é dado por

$$F_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_i}\right)^2} \quad (2.80)$$

Agora vamos definir a representação de  $d\vec{r}$  no sistema com as componentes  $u_i$ , com base no sistema de coordenadas polares apresentado na Figura 2.21.



**Figura 2.21** Sistema de coordenadas polares.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Nesse caso,

$$x = x_1 = \underbrace{r}_{u_1} \cos\left(\underbrace{\theta}_{u_2}\right)$$

$$y = x_2 = r \operatorname{sen}(\theta) \quad \Rightarrow \quad x_2 = u_1 \operatorname{sen}(u_2)$$

Logo,

$$F_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2} = \sqrt{\cos^2(u_2) + \operatorname{sen}^2(u_2)} = 1$$

$$F_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\right)^2} = \sqrt{(-u_1 \operatorname{sen}(u_2))^2 + (u_1 \cos(u_2))^2}$$

$$= u_1 \sqrt{(-\operatorname{sen}^2(u_2)) + \cos^2(u_2)} = u_1 = r$$

Então, nesse caso:

$$d\vec{r} = F_1 du_1 \hat{e}_1 + F_2 du_2 \hat{e}_2$$

$$d\vec{r} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta$$

Como  $d\vec{r}$  está associado a uma função potencial  $\varphi$ , temos

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} du_3 \quad (2.81)$$

Então,

$$(F_1 du_1 \hat{e}_1 + F_2 du_2 \hat{e}_2 + F_3 du_3 \hat{e}_3) \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} du_3 \quad (2.82)$$

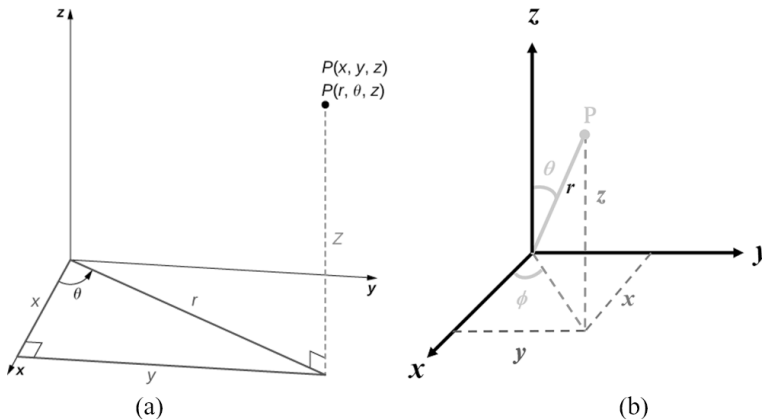
E, ao multiplicarmos a componente  $\hat{e}_i$  pelo gradiente de  $\varphi$ , temos

$$\hat{e}_i \cdot \vec{\nabla} \varphi = \frac{1}{F_i} \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} \quad (2.83)$$

Logo,

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{1}{F_1} \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{F_2} \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{F_3} \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} \hat{e}_3 \quad (2.84)$$

Em suma, temos o gradiente nas coordenadas polar, cilíndrica (Figura 2.22(a)) e esférica (Figura 2.22(b)) dado pelas Equações (2.85), (2.86) e (2.87), respectivamente.



**Figura 2.22** Sistema de coordenadas: (a) cilíndricas, (b) esféricas.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

$$\nabla \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \quad (2.85)$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{e}_z \quad (2.86)$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi \quad (2.87)$$

### 2.10.7.2 Determinação da dependência dos vetores de base

Por fim, precisaremos analisar a dependência dos vetores de base em relação ao sistema de coordenadas. Observando as projeções dos vetores unitários da Figura 2.21, temos:

$$\hat{e}_r = \hat{e}_1 \cos(\theta) + \hat{e}_2 \sin(\theta)$$

$$\hat{e}_\theta = -\hat{e}_1 \sin(\theta) + \hat{e}_2 \cos(\theta)$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial r} = 0$$

Porém,

$$\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta} = -\hat{e}_1 \sin(\theta) + \hat{e}_2 \cos(\theta) = \hat{e}_\theta$$

$$\frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\theta} = -\hat{e}_1 \cos(\theta) - \hat{e}_2 \sin(\theta) = -\hat{e}_r$$

De forma geral, podemos escrever:

$$\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial u_j} = \frac{\hat{e}_j}{F_i} \frac{\partial F_j}{\partial u_i} - \delta_{ij} \nabla F_i \quad (2.88)$$

onde  $\hat{e}_i$ ,  $\hat{e}_j$  e  $\nabla F_i$  pertencem ao novo sistema de coordenadas.

Assim, podemos reescrever o divergente, o rotacional e o laplaciano de um escalar da seguinte maneira:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{F_1 F_2 F_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 F_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_1 F_3 V_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_1 F_2 V_3) \right] \quad (2.89)$$

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{F_1 F_2 F_3} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 F_1 & \hat{e}_2 F_2 & \hat{e}_3 F_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ F_1 V_1 & F_2 V_2 & F_3 V_3 \end{vmatrix} \quad (2.90)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{F_1 F_2 F_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{F_2 F_3}{F_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{F_1 F_3}{F_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{F_1 F_2}{F_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \right) \right] \quad (2.91)$$

A dependência dos vetores de base pode ter implicações relevantes na resolução de sistemas de equações lineares e na determinação da dimensão de um espaço vetorial. É importante notar que a independência dos vetores de base é uma condição necessária para que eles formem uma base, mas não é suficiente. A base também deve ser ortogonal para que possamos determinar facilmente as coordenadas de um vetor em relação a essa base.

Em suma, a dependência dos vetores de base é uma condição em que pelo menos um vetor de uma base pode ser expresso como combinação linear dos outros vetores de base. Isso pode ter implicações importantes na álgebra linear e na geometria, e é necessário para determinar um conjunto de vetores que formam uma base em um espaço vetorial.

Existem outras operações envolvendo o operador nabla que são de interesse em mecânica dos fluidos, por exemplo, a operação de produto diádico entre nabla e um vetor e a divergência de um tensor, definidas como  $\nabla \vec{V}$  e  $\nabla \cdot \overline{\overline{T}}$ , respectivamente. Se usarmos o operador para um sistema de coordenadas não cartesiano, podemos demonstrar que o tensor  $\nabla \vec{V} = \sum_i \frac{\hat{e}_i}{F_i} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \hat{e}_j + V_j \frac{\partial \hat{e}_j}{\partial x_i} \right)$  é:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{V} = & \frac{\hat{e}_1}{F_1} \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial u_1} + \frac{V_2}{F_2} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} + \frac{V_3}{F_3} \frac{\partial F_1}{\partial u_3} \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial u_1} - \frac{V_1}{F_2} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \right) \hat{e}_2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial u_1} - \frac{V_1}{F_3} \frac{\partial F_1}{\partial u_3} \right) \hat{e}_3 \right] \\ & + \frac{\hat{e}_2}{F_2} \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial u_2} - \frac{V_2}{F_1} \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial u_2} + \frac{V_3}{F_3} \frac{\partial F_2}{\partial u_3} + \frac{V_1}{F_1} \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \right) \hat{e}_2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial u_2} - \frac{V_2}{F_3} \frac{\partial F_2}{\partial u_3} \right) \hat{e}_3 \right] \\ & + \frac{\hat{e}_3}{F_3} \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial u_3} - \frac{V_3}{F_1} \frac{\partial F_3}{\partial u_1} \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial u_3} - \frac{V_3}{F_2} \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \right) \hat{e}_2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial u_3} + \frac{V_1}{F_1} \frac{\partial F_3}{\partial u_1} + \frac{V_2}{F_2} \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \right) \hat{e}_3 \right] \end{aligned} \quad (2.92)$$

Matematicamente,  $(\nabla\vec{V})^T$  é o gradiente do vetor  $\vec{V}$  como definido em textos de mecânica do contínuo. Em coordenadas cartesianas:

$$\nabla\vec{V} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \hat{e}_i \hat{e}_j, \quad \text{grad}(\vec{V}) = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \hat{e}_i \hat{e}_j,$$

que é o mesmo resultado de  $(\nabla\vec{V})^T$ .

De maneira análoga, podemos demonstrar que o divergente de um tensor de segunda ordem é o vetor:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\bar{T}} &= \frac{\hat{e}_1}{F_1 F_2 F_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 F_3 T_{11}) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 F_1 T_{21}) \right. \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_1 F_2 T_{31}) + F_2 \left( T_{13} \frac{\partial F_1}{\partial u_3} - T_{33} \frac{\partial F_3}{\partial u_1} \right) \\ &\quad \left. + F_3 \left( T_{12} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} - T_{22} \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \right) \right] + \\ &+ \frac{\hat{e}_2}{F_1 F_2 F_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 F_3 T_{12}) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 F_1 T_{22}) \right. \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_1 F_2 T_{32}) + F_3 \left( T_{21} \frac{\partial F_2}{\partial u_1} - T_{11} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \right) \\ &\quad \left. + F_1 \left( T_{23} \frac{\partial F_2}{\partial u_3} - T_{33} \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \right) \right] + \\ &+ \frac{\hat{e}_3}{F_1 F_2 F_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 F_3 T_{13}) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 F_1 T_{23}) \right. \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_1 F_2 T_{33}) + F_1 \left( T_{32} \frac{\partial F_3}{\partial u_2} - T_{22} \frac{\partial F_2}{\partial u_3} \right) \\ &\quad \left. + F_2 \left( T_{31} \frac{\partial F_3}{\partial u_1} - T_{11} \frac{\partial F_1}{\partial u_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.93)$$

**REFERÊNCIAS**

- ARIS, R. *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Mineola: Dover Publications, 1962.
- BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- BOURNE, D. E.; KENDALL, P. C. *Vector analysis and cartesian tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- BRAND, L. *Vector analysis*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1967.
- DAVIS, H. F.; SNIDER, A. D. *Introduction to vector analysis*. Boston: Allyn & Bacon, 1987.
- FLEISCH, D. *A student's guide to vectors and tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- GIBBS, J. W. *Vector analysis: a text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Williard Gibbs*. London: Yale University Press, 1922.
- HUBBARD, J. H.; HUBBARD, B. B. *Vector calculus, linear algebra and differential forms: a unified approach*. London: Pearson, 1998.
- KANOUSSIS, D. P. *Multiple integrals and vector analysis: for engineers and scientists*. [S. l.]: Independently published, 2021.
- KUNDU, P. K.; COHEN, I. M.; DOWLING, D. R. *Fluid mechanics*. 6th ed. Cambridge: Academic Press, 2015.
- LIPSCHUTZ, S.; SPIEGEL, M. R.; SPELLMAN, D. *Vector analysis and an introduction to tensor analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 2009.
- SHORTER, L. R. *Problems and worked solutions in vector analysis*. Mineola: Dover Publications, 2014.
- STRACK, O. D. L. *Applications of vector analysis and complex variables in engineering*. New York: Springer, 2020.
- STRANG, G. *Linear algebra and its applications*. 2nd ed. Cambridge: Academic Press, 1980.

VINCE, J. *Vector analysis for computer graphics*. 2nd ed. New York: Springer, 2021.

WEATHERBURN, C. E. *Advanced vector analysis with application to mathematical physics*. La Salle: Open Court Publishing Company, 1948.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

### Exercício 2.1

Prove as seguintes igualdades utilizando a notação indicial:

- $(U \cdot W)V - (U \cdot V)W = U \times (V \times W)$
- $\alpha \nabla \beta + \beta \nabla \alpha = \nabla(\alpha \beta)$
- $U \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot U = \nabla \cdot (\varphi U)$
- $\nabla \cdot (\alpha \nabla \beta - \beta \nabla \alpha) = \alpha \nabla^2 \beta - \beta \nabla^2 \alpha$
- $\varphi(\nabla \times U) + (\nabla \varphi) \times U = \nabla \times (\varphi U)$
- $\nabla \cdot (\nabla \times U) = 0$

### Exercício 2.2

Calcule o resultado das seguintes expressões:

- $\delta_{ii}$
- $\delta_{ij} \delta_{ij}$
- $\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\beta} \delta_{\alpha\gamma}$
- $\partial_i x_i$
- $\partial_i x_j$
- $\epsilon_{ijk} \delta_{jk}$

### Exercício 2.3

Simplifique as expressões a seguir e justifique aquelas que não fazem sentido:

- |  |  |
|--|--|
| a) $\delta_{ii} \delta_{ij}$                       | h) $\delta_{ii} u_{km}$  |
| b) $\delta_{ik} \delta_{kj}$                       | i) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha u_\beta$                |
| c) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\beta u_\gamma$ | j) $\delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}$                           |
| d) $\delta_{ii} \delta_{ii}$                       | k) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\beta\gamma}$                   |
| e) $\delta_{ik} u_{jk}$                            | l) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \partial_\gamma \varphi$ |
| f) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\beta}$  | m) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\beta v_\gamma$                       |
| g) $\delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta}$     | n) $\delta_{ij} \delta_{ik}$   |

**Exercício 2.4**

Escreva em notação indicial a componente  $\hat{e}_1$  da seguinte equação:

$$\vec{F} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) dV + \int_S \rho \vec{u} (\hat{n} \cdot \vec{u}) dS$$

**Exercício 2.5**

Considerando o campo de velocidade

$$U = 3x^2z\hat{e}_1 - 2xy^2\hat{e}_2 + 4y^2z\hat{e}_3,$$

determine

$$\int_S \hat{n} \cdot U dS$$

onde  $S$  corresponde a uma superfície cúbica delimitada pelos planos  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$ ,  $0 < z < 1$ . Aplique o teorema da divergência para comprovar sua resposta.

**Exercício 2.6**

Demonstre as seguintes igualdades:

- $U^T \cdot u = u \cdot U$
- $\text{tr } U = \text{tr } U^T$
- $(u \times v) \cdot U = u \cdot (v \times U)$
- $\text{tr}(U + V) = \text{tr } U + \text{tr } V$
- $\nabla \cdot (\phi U) = \phi \nabla \cdot U + U^T \cdot \nabla \phi$
- $\nabla(\phi u) = \phi \nabla u + (\nabla \phi)u$

**Exercício 2.7**

Escreva o tensor de segunda ordem

$$\bar{\bar{T}} = 2\hat{e}_1\hat{e}_1 - 3\hat{e}_1\hat{e}_3 + 4\hat{e}_2\hat{e}_1 - 6\hat{e}_2\hat{e}_2 + 8\hat{e}_3\hat{e}_1 + 5\hat{e}_3\hat{e}_2,$$

como a soma de um tensor simétrico e um tensor antissimétrico.

**Exercício 2.8**

Considerando a forma de  $\nabla\vec{V}$ , mostre que o seu tensor transposto é:

$$\begin{aligned}
 (\nabla\vec{V})^T &= \frac{1}{F_1} \left( \frac{\partial V_1}{\partial u_1} + \frac{V_2}{F_2} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} + \frac{V_3}{F_3} \frac{\partial F_1}{\partial u_3} \right) \hat{e}_1 \hat{e}_1 \\
 &+ \frac{1}{F_2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial u_2} - \frac{V_2}{F_1} \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \right) \hat{e}_1 \hat{e}_2 \\
 &+ \frac{1}{F_3} \left( \frac{\partial V_1}{\partial u_3} - \frac{V_3}{F_1} \frac{\partial F_3}{\partial u_1} \right) \hat{e}_1 \hat{e}_3 \\
 &+ \frac{1}{F_1} \left( \frac{\partial V_2}{\partial u_1} - \frac{V_1}{F_2} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \right) \hat{e}_2 \hat{e}_1 \\
 &+ \frac{1}{F_2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial u_2} + \frac{V_3}{F_3} \frac{\partial F_2}{\partial u_3} + \frac{V_1}{F_1} \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \right) \hat{e}_2 \hat{e}_2 \\
 &+ \frac{1}{F_3} \left( \frac{\partial V_2}{\partial u_3} - \frac{V_3}{F_2} \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \right) \hat{e}_2 \hat{e}_3 \\
 &+ \frac{1}{F_1} \left( \frac{\partial V_3}{\partial u_1} - \frac{V_1}{F_3} \frac{\partial F_1}{\partial u_3} \right) \hat{e}_3 \hat{e}_1 \\
 &+ \frac{1}{F_2} \left( \frac{\partial V_3}{\partial u_2} - \frac{V_2}{F_3} \frac{\partial F_2}{\partial u_3} \right) \hat{e}_3 \hat{e}_2 \\
 &+ \frac{1}{F_3} \left( \frac{\partial V_3}{\partial u_3} + \frac{V_1}{F_1} \frac{\partial F_3}{\partial u_1} + \frac{V_2}{F_2} \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \right) \hat{e}_3 \hat{e}_3
 \end{aligned}$$

**Exercício 2.9**

Considere a diádica

$$\nabla \vec{U} = \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \hat{e}_i \hat{e}_j$$

e um tensor simétrico  $\overline{\overline{\tau}}$ . Usando as duas formas de fazer uma dupla contração, mostre que ambos os resultados são idênticos.

**Exercício 2.10**

Fazendo  $\overline{\overline{T}} = \nabla \vec{V}$  na forma do divergente de um tensor, pode-se obter o laplaciano do vetor  $\vec{V}$  definido como

$$\nabla^2 \vec{V} \quad (\text{note que } \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla).$$

Obtenha uma expressão matemática para avaliar o laplaciano do vetor em coordenadas cartesianas.

