

# Introdução

## 1.1 PRELIMINARES

A mecânica dos fluidos é o ramo da mecânica do contínuo (conceito a ser introduzido em item posterior neste capítulo) que trata do movimento de líquidos e gases (estado fluido da matéria), incluindo o estado estacionário (fluido-estática). O estado fluido da matéria é o que é, predominantemente, encontrado na natureza, razão suficiente para seu estudo em detalhes. Em uma variedade de aplicações de engenharia, informações com respeito ao escoamento de fluidos são requeridas. Uns poucos exemplos em que o conhecimento de mecânica dos fluidos é essencial para determinar o desempenho do sistema são:

- equipamentos de processos e trocadores de calor em química e usinas de potência;
- turbomáquinas (hidráulica, a vapor, a gás);
- projeto de câmaras de combustão em fornos e motores IC (*internal combustion* – combustão interna) e ICO (*internal combustion oil* – combustão interna a óleo diesel), por exemplo;
- processamento de materiais, fundição de metais, moldagem por injeção de plásticos;
- escoamentos geofísicos, turbulência atmosférica, escoamentos subterrâneos;
- tecnologia aeroespacial.

Este livro abordará os conceitos e técnicas matemáticas básicos necessários para entender as equações de Navier-Stokes, bem como sua interpretação física e aplicações. Por meio de explicações claras e de exemplos, o livro tem como objetivo equipar os leitores com as ferramentas e *insights* necessários para compreender o desenvolvimento e a complexidade dessas equações.

O conjunto de equações definindo o movimento de um fluido para ser completo requer a satisfação das seguintes leis físicas:

- Lei de conservação da massa.
- Segunda lei de Newton do movimento.
- Lei de conservação da energia.

Em casos mais simples, como o caso de um fluido isotérmico, o princípio de conservação de energia reduz a conservação da energia mecânica. Sob tais condições, pode ser demonstrado que a segunda lei de Newton do movimento é equivalente ao princípio de conservação da energia. Daí para escoamentos isotérmicos, a lei de conservação da energia não necessita ser explicitamente usada na formulação para predição do comportamento do escoamento.

As leis físicas do movimento originam equações que não estão em termos de quantidades facilmente mensuráveis. Em um campo de escoamento, as quantidades mensuráveis são os componentes do vetor velocidade e a pressão termodinâmica. Entretanto, as leis do movimento são expressas em termo de tensões em um elemento de fluido.

Em análise de engenharia, é comum relacionar as tensões aos componentes do vetor velocidade, por meio de equações empíricas denominadas relações constitutivas. Essas equações contêm constantes indeterminadas, que devem ser conhecidas de maneira independente a partir de medições em laboratório. Enquanto uma variedade de relações constitutivas pode depender da escolha do fluido, a forma geral dessas relações é restringida pelas restrições da segunda lei de termodinâmica.

A segunda lei da termodinâmica impõe certas condições às constantes usadas para relacionar a tensão aos componentes da velocidade, de modo que há um único sentido de transferência da parcela irreversível da energia mecânica dissipada no campo de escoamento para energia térmica.

A solução das equações do movimento compostas pelas leis físicas tem como propósito a obtenção dos campos de velocidade e de pressão, em cada ponto no campo de escoamento e para todo tempo de escoamento. Com esses dados é possível, então, extrair informações úteis tais como forças atuando na estrutura, taxas de transferência de calor de corpos aquecidos e tempos de dispersão de poluentes na atmosfera, por exemplo.

Quando um fluido está em movimento, há um equilíbrio entre as forças internas e externas que agem sobre ele. Esse equilíbrio é conhecido como balanço de forças durante o escoamento de um fluido.

As forças internas incluem a tensão de cisalhamento, força viscosa e força relacionada à pressão. Resumidamente, a tensão de cisalhamento é a força que surge quando duas camadas de fluido se movem em velocidades diferentes. A força de viscosidade, por sua vez, é a força que surge devido ao atrito interno entre as moléculas do fluido. E, por fim, a componente relacionada à pressão corresponde à força que surge como resultado da diferença de pressão entre duas regiões do fluido.

Já as forças externas podem incluir a força gravitacional, a força de arrasto, a força de empuxo e a força eletromagnética, por exemplo. Em um escoamento qualquer, o balanço de tais forças é fundamental para descrever o comportamento do um fluido.

Se as forças internas forem maiores do que as forças externas, por exemplo, o fluido fluirá sem interrupção. Porém, se as forças externas sobrepujarem as internas, o fluido é impedido de fluir, ocorrendo assim sua estagnação.

O balanço de forças também é importante para determinar a velocidade do fluido, bem como a energia térmica e as espécies transportadas. Para tanto, torna-se necessário o uso de um modelo matemático robusto que possa descrever o comportamento de cada componente envolvida em um escoamento. As equações de Navier-Stokes são fundamentalmente equações de conservação que regem a variação de cada uma dessas componentes ao longo do tempo e do espaço. Em suma, essas equações descrevem a conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia para um escoamento, seja ele compressível ou não.

## 1.2 CONSERVAÇÃO DA MASSA

A conservação da massa é uma das leis fundamentais da física que se aplica ao escoamento de fluidos. Essa lei estabelece que a quantidade total de massa em um sistema fechado deve permanecer constante ao longo do tempo. Em outras palavras, a massa não pode ser criada nem destruída, apenas transferida ou transformada.

Em um escoamento, a conservação da massa é expressa pelo princípio da continuidade, que estabelece, em regime permanente, que a massa que entra em uma região deve ser igual à massa que sai dessa mesma região. Isso significa que a quantidade de fluido que flui através de uma seção transversal de um tubo, por exemplo, deve ser constante ao longo de seu comprimento. Na situação de regime não permanente, a quantidade de massa que escoava para dentro de uma dada região (denominada volume de controle) menos a quantidade de massa que escoava para fora deve ser acumulada naquele volume. Caso o sinal da acumulação seja negativo, isso significa que sai mais massa do que entra.

Para entender como a conservação da massa é aplicada em um escoamento, podemos considerar um tubo com uma seção transversal de área  $A$  e um fluido escoando através dele com uma velocidade  $v$ . A massa do fluido que passa através da seção transversal em um intervalo de tempo  $\Delta t$  é dada por:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A v \quad (1.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido. Essa equação indica que a variação temporal da massa que passa através da seção transversal é igual ao produto da densidade, da área transversal e da velocidade do fluido.

De acordo com o princípio da continuidade, em regime permanente, a massa que entra na seção transversal deve ser igual à massa que sai dela. Isso significa que a taxa de fluxo de massa que entra é igual à taxa de fluxo de massa que sai, ou seja:

$$\rho A v_{(\text{entrada})} = \rho A v_{(\text{saida})} \quad (1.2)$$

### 1.3 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A conservação da quantidade de movimento é mais uma das leis fundamentais da física que se aplica à mecânica dos fluidos. Essa lei estabelece que a quantidade total de movimento em um sistema fechado, por exemplo, deve permanecer constante ao longo do tempo, a menos que haja ação de uma força externa.

Na mecânica dos fluidos, a conservação da quantidade de movimento é expressa pela equação de Navier-Stokes, que descreve o movimento de um fluido viscoso. Essa equação estabelece que a força resultante que atua sobre um fluido é igual à taxa de variação da quantidade de movimento por unidade de volume, e é dada muito resumidamente por:

$$(\rho \mathbf{U})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = -\nabla P + \nabla^2 (\mu \mathbf{U}) + \mathbf{f} \quad (1.3)$$

### 1.4 HIPÓTESE DO CONTÍNUO

Em meio a inúmeras tentativas de definirmos um fluido, deparamos com uma certa (e por que não dizer uma irritante) dificuldade. Em contrapartida, somos mais atraídos para as conhecidas características apresentadas pelos fluidos. Alguém pode muito bem ressaltar que “fluido é tudo aquilo que escoar e se deforma”. Mas, no geral, tudo escoar. Os sólidos, por exemplo, escoam “muito pouco” quando submetidos às forças não equilibradas e ainda tendem a recuperar suas formas originais quando tais forças são removidas. Além do mais, assim como os fluidos, os sólidos se deformam quando submetidos a determinadas forças.

Porém, os fluidos escoam, por menor que sejam as magnitudes das forças não equilibradas, e não recuperam sua forma original com o cessamento dessas forças. De fato, uma “boa” definição de fluido não é algo trivial e, para nossa sorte, algo tão necessário. O estudo de um fluido está diretamente relacionado à análise de seu comportamento e de suas características, obrigando-nos a trabalhar com conceitos matemáticos e físicos. Neste livro, exploraremos os fluidos com base em seus aspectos gerais, considerando suas origens, descrição e consequências. Para tanto, faremos uso da linguagem matemática, na qual cada símbolo, entidade, operação etc. estará, em geral, associado a um significado físico.

Como ponto de partida, assumiremos que a **matéria que constitui o fluido é contínua**. Queremos, com essa hipótese, associar a cada ponto identificável do fluido uma partícula de fluido ou elemento de fluido. Fisicamente, sabemos que a matéria não é contínua. Porém, uma simples análise considerando a teoria cinética dos gases indica a ordem de grandeza do número de moléculas de ar contidas em um volume delimitado por um cubo com 1 mm de aresta. Nesse caso, em condições normais de temperatura e pressão (20 °C e 1 bar), temos  $N = 3 \times 10^{16}$  moléculas.

Com isso, alguém pode se sentir encorajado a questionar a necessidade do uso da hipótese do contínuo, considerando que poderíamos estudar a mecânica dos fluidos investigando a dinâmica de cada molécula do ar. **Mas será mesmo?** Vamos considerar uma situação envolvendo apenas a contagem do número de partículas contidas em  $1\text{mm}^3$  realizada por um computador cuja velocidade de leitura  $V_L$  é igual a  $10^6$  moléculas/s.

Nesse caso, o tempo necessário para essa tarefa é dado por:

$$t = \frac{N}{V_L} = \frac{3 \cdot 10^{16}}{10^6} = 3 \cdot 10^{10} \text{ s} \approx 964.5 \text{ anos}$$

Ou seja, o uso de métodos envolvendo dinâmica molecular para o estudo da mecânica dos fluidos acarreta a necessidade de dispêndio de tempo. Ressalta-se ainda que esse tempo computado se refere única e exclusivamente à leitura das  $3 \times 10^{16}$  moléculas, sem considerar os cálculos relacionados à dinâmica de cada uma, o que leva à necessidade de um tempo ainda maior. Outro aspecto importante está no fato de que estamos focados apenas em  $1 \text{ mm}^3$  de ar em condições de temperatura e pressão constantes, e isso praticamente não tem aplicação em problemas reais de engenharia. Por isso, o uso da hipótese do contínuo ainda corresponde à melhor opção que temos para o estudo da fluidodinâmica. Todavia, a hipótese do contínuo é razoável quando nos menores volumes de interesse do escoamento houver um grande número de moléculas do fluido.

Para investigarmos a validade da hipótese do contínuo, vamos partir da definição de densidade:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_1} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1.4)$$

onde  $\Delta V \rightarrow 0$ . A Figura 1.1 apresenta uma ilustração simples do comportamento da densidade em função da variação do volume de fluido. Observa-se que há um limite mínimo  $\Delta V_1$  no qual a densidade deixa de ter um valor constante e começa a apresentar flutuações em sua magnitude. Esse limite inferior corresponde à mínima variação de volume para que a hipótese do contínuo seja considerada válida. Para o caso do ar em

condições normais citadas anteriormente,  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$  apresentam ordens de grandeza de  $10^{-3}$  mm e 10 mm, respectivamente. Ou seja, para estudarmos problemas de engenharia com escoamento de ar, não precisaremos considerar elementos de fluido menores que  $10^{-3}$  mm, o que torna o custo computacional, por exemplo, muito menor.

Essa mesma ordem de grandeza encontrada para a aresta de um elemento de fluido do ar pode ser obtida por meio da teoria cinética dos gases, a partir da aproximação entre a viscosidade cinemática  $\nu$ , a velocidade do som  $c$  ( $\approx 340$  m/s) no meio e o caminho livre médio entre as moléculas  $\xi$ , de tal forma que a ordem de grandeza da viscosidade será  $\nu \approx c \xi$ .

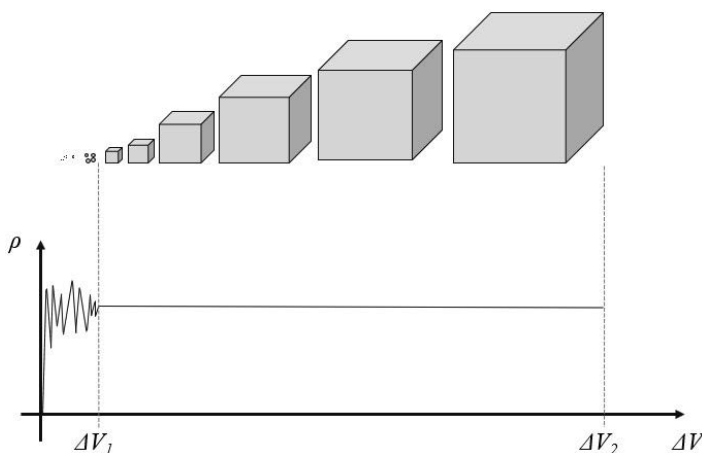
Pela definição de viscosidade cinemática:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.5)$$

onde  $\mu$  representa a viscosidade dinâmica, temos para o ar, sob condições normais:

$$\nu = \frac{1,8 \times 10^{-5} \text{ [Pa} \cdot \text{s]}}{1,2 \text{ [kg/m}^3\text{]}} \approx 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\xi \approx \frac{\nu}{c} \approx \frac{10^{-5}}{10^2} \approx 10^{-7} \text{ m} \approx 10^{-3} \text{ mm}$$



**Figura 1.1** Perfil da densidade do ar observado em elementos de volume de diferentes tamanhos.

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Na realidade, a distância entre as moléculas do ar é, em média, 25 vezes menor do que  $\xi$ . Assim, para um cubo com  $0,1 \mu\text{m}$  de aresta, podemos calcular o número de moléculas como igual a  $25^3 (= 15.625)$ , o que acarreta um erro médio de aproximadamente  $0,8\%$  no cálculo da densidade. Em suma, o tamanho do elemento de volume a ser escolhido para garantir a precisão no cálculo das propriedades locais (temperatura, pressão, densidade, viscosidade, entalpia etc.) deve ser suficientemente pequeno em escala macroscópica e grande em escala microscópica.

De fato, a mecânica estatística pode ser uma abordagem bastante poderosa para entendermos o comportamento de sistemas físicos constituídos de um grande número de partículas. Porém, aplicar essa abordagem à mecânica dos fluidos é uma tarefa extremamente desafiadora. Uma das principais dificuldades, por exemplo, está no fato de que as equações da quantidade de movimento são altamente não lineares, para as quais as soluções analíticas raramente são obtidas. E, quando são, diversas simplificações e suposições tornam-se necessárias.

O comportamento turbulento de um fluido, por exemplo, é complexo e caótico, o que dificulta a previsão precisa de sua dinâmica. Na verdade, o movimento turbulento é frequentemente modelado usando métodos estatísticos, mas isso pode levar a incertezas e a erros significativos nos resultados. Outro problema reside no fato de que as interações intermoleculares de um fluido são dependentes das distâncias entre as moléculas, o que acarreta mudanças significativas das propriedades dos fluidos. Também é um desafio o fato de a mecânica dos fluidos descrever fenômenos que envolvem muitos comprimentos de escala, provocando um enorme esforço matemático e computacional.

Além da densidade e da viscosidade (tanto a dinâmica  $\mu$  quanto a cinemática  $\nu$ ), outras propriedades importantes no estudo de fluidos são a condutividade térmica,  $k$ , e o calor específico à pressão constante,  $c_p$ . Em vários casos as propriedades são combinadas, formando outras propriedades. Temos como exemplos a difusividade térmica, definida como  $\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c_p}$  e o número de Prandtl, definido como  $Pr = \mu \frac{c_p}{k}$ . Usando a Equação (1.5) e a definição de difusividade térmica, podemos obter  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ .

## REFERÊNCIAS

BRUSH, S. G.; EVERITT, C. W. F. *Kinetic theory of gases: an anthology of classic papers with historical commentary*. London: Imperial College Press, 2003.

CHANDLER, D. *Introduction to modern statistical mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1987.

JEANS, J. *Elementary kinetic theory of gases*. New York: Dover Publications, [1965].

KITTEL, C.; KROEMER, H. *Thermal physics*. 2nd ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1980.

LAIDLER, K.; KING, D. *Gas kinetics and energy transfer*. New York: McGraw-Hill, [1983].

PATHRIA, R. K. *Statistical mechanics*. 2nd ed. Auckland: Butterworth-Heinemann, 1996.

PAULI, W. *Kinetic theory of gases*. New York: Dover Publications, [1983].

TOLMAN, R. C. *The principles of statistical mechanics*. New York: Dover Publications, 1979.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

### Exercício 1.1

Um recipiente com capacidade para 2 litros contém uma mistura de hidrogênio e oxigênio nas mesmas proporções. A pressão dentro do recipiente é de 1 atm à temperatura de 25°C. Se a temperatura for aumentada para 125°C e a pressão permanecer constante, qual será o novo volume ocupado pela mistura?

### Exercício 1.2

Considere um gás ideal contido em um recipiente com volume de 1 litro à temperatura de 25°C. Qual é a distância média entre as moléculas desse gás? Considere a distância média dada pela equação  $d = \left(\frac{V}{n}\right)^{1/3}$ , onde  $V$  e  $n$  correspondem ao volume ocupado pelo gás e  $n$  é o número de moléculas.

### Exercício 1.3

Considere um gás ideal contido em um recipiente com volume de 10 litros à temperatura de 27°C. Se a velocidade média das moléculas do gás for de 500 m/s, qual é a pressão do gás?

### Exercício 1.4

Estime a velocidade média das moléculas de água à temperatura de 90°C e à pressão de 1 atm. Considere  $v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ , onde  $M$  representa a massa molar da água.

**Exercício 1.5**

O ar tem uma viscosidade cinemática de  $1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  à temperatura de  $20^\circ\text{C}$ . Qual é a velocidade do som no ar nessa temperatura? Considere  $c = \sqrt{(\gamma RT)}$ , onde  $\gamma$  representa a razão  $c_p/c_v$ .

