

Jeferson Diehl de Oliveira
João Batista Campos Silva
Domisley Dutra Silva
Elaine Maria Cardoso

INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS FLUIDOS

Volume 1



INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS FLUIDOS

Blucher

Jeferson Diehl de Oliveira
João Batista Campos Silva
Domisley Dutra Silva
Elaine Maria Cardoso

INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS FLUIDOS

Volume 1

Aos nossos familiares,
pelo apoio incondicional em cada passo desta jornada.
O autor Jeferson Diehl de Oliveira dedica esta obra, em especial,
à sua esposa, Fernanda, e à sua mãe, Claci.

Agradecimentos

A realização deste livro foi possível graças ao apoio de diversas pessoas e instituições, às quais os autores expressam a sua mais profunda gratidão.

Agradecemos à Pró-Reitoria de Pós-Graduação da Unesp (PROPG) pelo suporte essencial à publicação desta obra, fortalecendo a disseminação do conhecimento na área de Engenharia e Ciências Mecânicas.

Às nossas famílias, pelo incentivo constante e compreensão durante as horas dedicadas a este projeto.

Aos colegas pesquisadores e professores, cujas discussões e colaborações foram fundamentais para enriquecer o conteúdo aqui apresentado.

Aos nossos alunos, por desafiarem e renovarem nosso compromisso com o ensino e a pesquisa, motivando-nos a sempre buscar a melhor forma de transmitir o conhecimento.

Por fim, agradecemos a todos os que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste livro. Que ele sirva como uma ferramenta útil para estudantes e profissionais que desejem aprofundar-se nos fundamentos da mecânica dos fluidos.

Conteúdo

Prefácio	11
1 Introdução	13
1.1 Preliminares	13
1.2 Conservação da massa	15
1.3 Conservação da quantidade de movimento	16
1.4 Hipótese do contínuo	16
Referências	19
Exercícios propostos	20
2 Fundamentos matemáticos	23
2.1 Escalares e vetores	23
2.2 Operações com vetores	24
2.2.1 Adição de vetores	26
2.2.2 Multiplicação de um vetor por um escalar	27
2.2.3 Representação de vetores em termos de suas coordenadas	27
2.2.4 Produto escalar de vetores	29
2.2.5 Produto vetorial ou produto cruzado (\times)	29
2.2.6 Produto escalar triplo	30
2.3 Notação indicial	31
2.4 Delta de Kronecker	32
2.5 Símbolo de permutação	33
2.6 Característica simétrica ou antissimétrica	34
2.7 Operações com vetores em notação indicial	35
2.7.1 Produto escalar	35
2.7.2 Produto vetorial	35
2.7.3 Produto escalar triplo	35
2.7.4 Identidade ϵ - δ	35
2.8 Alguns campos vetoriais	36
2.8.1 Gradiente de um escalar	37
2.8.2 Divergente	40
2.8.3 Rotacional	43
2.8.4 Teoremas integrais	47
2.9 Definição matemática de um vetor	52
2.10 Definição matemática de um tensor	55
2.10.1 Produto escalar	56
2.10.2 Produto vetorial	57
2.10.3 Produto tensorial (díade)	58
2.10.4 Produto escalar duplo ou dupla contração	58
2.10.5 Tensor simétrico e antissimétrico	59
2.10.6 Tensores especiais	60

2.10.7	Sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais	63
	Referências	71
	Exercícios propostos	72
3	Cinemática dos meios deformáveis	77
3.1	Descrições Lagrangiana e Euleriana	77
3.2	Caracterização de um elemento de fluido	79
3.3	Derivadas material (substancial) e espacial	80
3.4	Trajectoria, linhas de corrente e de emissão	82
3.5	Descrição matemática da dilatação	86
3.6	Equação diferencial da conservação da massa	89
3.7	Teorema do transporte de Reynolds (TTR)	91
3.8	Tensor gradiente de velocidade	93
3.9	Tensor taxa de deformação	95
3.10	Tensor vorticidade	100
3.11	Movimento geral de um elemento de volume	103
	Referências	104
	Exercícios propostos	105
4	Dinâmica dos meios deformáveis	107
4.1	Forças em meios deformáveis	107
4.2	Conservação do momento linear	108
4.3	Tensor tensão de Cauchy	109
4.4	Simetria do tensor tensão	111
4.5	Exemplos de aplicações da equação do movimento de Cauchy	113
4.5.1	Hidrostática	113
4.5.2	Forças sobre corpos em escoamento em regime permanente	115
	Referências	118
	Exercícios propostos	119
5	Conservação da energia em meios deformáveis	121
5.1	Equação da energia mecânica	122
5.2	Equação da energia térmica	123
5.3	Segunda lei da termodinâmica	125
5.4	Fluidos stokesianos	128
5.5	Hipótese de Fourier	130
5.6	Considerações sobre viscosidade e condutividade térmica	130
5.7	Equações gerais do movimento	133
5.8	Equação da energia térmica para fluidos newtonianos	135
	Referências	145
	Exercícios propostos	146

Prefácio

A mecânica dos fluidos é uma área de estudo fundamental nas ciências exatas e aplicadas, especialmente no campo da engenharia mecânica, e no centro dessa disciplina encontram-se as equações de Navier-Stokes, que descrevem o comportamento dos fluidos. Este livro nasce da necessidade de preencher uma lacuna na literatura acadêmica em língua portuguesa, ao oferecer uma abordagem mais madura e aprofundada sobre como podem ser obtidas as equações de Navier-Stokes, desde sua origem até as aplicações práticas.

Com foco em estudantes de graduação e pós-graduação das áreas exatas, especialmente engenheiros mecânicos, esta obra procura fornecer uma sólida compreensão das equações de Navier-Stokes e dos conceitos fundamentais que as cercam. Sua abordagem foi cuidadosamente planejada para auxiliar os leitores a dominarem esse tema desafiador e essencial no estudo da mecânica dos fluidos.

O livro está dividido em cinco capítulos, cada um deles abordando tópicos específicos e complementares para a compreensão das equações de Navier-Stokes. No Capítulo 1 é apresentada a hipótese do contínuo, que é crucial para a modelagem de fluidos como meios contínuos, e sua importância no contexto da mecânica dos fluidos. O Capítulo 2 trata dos fundamentos matemáticos necessários para o entendimento das equações de Navier-Stokes, abordando operações com vetores, notação indicial, operadores diferenciais, teoremas integrais, tensores e suas operações. No Capítulo 3, mergulhamos na cinemática dos meios deformáveis, explorando a derivada material, a equação diferencial da conservação da massa, o teorema do transporte de Reynolds e o movimento geral de um elemento de fluido. O Capítulo 4 concentra-se na dinâmica dos meios deformáveis, discutindo a conservação do momento linear, a hidrostática e as forças sobre corpos em escoamento em regime permanente. Por fim, o Capítulo 5 explora a conservação de energia em meios deformáveis, abordando a equação da energia mecânica, a equação da energia térmica e suas aplicações, bem como as características de fluidos stokesianos e, finalmente, as equações gerais do movimento e energia para fluidos newtonianos.

Em cada capítulo, além dos conceitos fundamentais, são apresentadas referências bibliográficas complementares para aqueles que desejem aprofundar seus estudos. Além disso, a obra oferece uma série de exercícios de fixação, com o objetivo de consolidar o conhecimento adquirido e de incentivar o desenvolvimento prático das habilidades relacionadas à mecânica dos fluidos. Esperamos que este livro seja uma valiosa fonte

de iniciação do conhecimento e de aprendizado e que desperte a curiosidade e o entusiasmo dos leitores para explorar e compreender aspectos das intrincadas nuances da mecânica dos fluidos, impulsionando-os a buscar inovação e excelência em suas jornadas acadêmicas e profissionais.

Introdução

1.1 PRELIMINARES

A mecânica dos fluidos é o ramo da mecânica do contínuo (conceito a ser introduzido em item posterior neste capítulo) que trata do movimento de líquidos e gases (estado fluido da matéria), incluindo o estado estacionário (fluido-estática). O estado fluido da matéria é o que é, predominantemente, encontrado na natureza, razão suficiente para seu estudo em detalhes. Em uma variedade de aplicações de engenharia, informações com respeito ao escoamento de fluidos são requeridas. Uns poucos exemplos em que o conhecimento de mecânica dos fluidos é essencial para determinar o desempenho do sistema são:

- equipamentos de processos e trocadores de calor em química e usinas de potência;
- turbomáquinas (hidráulica, a vapor, a gás);
- projeto de câmaras de combustão em fornos e motores IC (*internal combustion* – combustão interna) e ICO (*internal combustion oil* – combustão interna a óleo diesel), por exemplo;
- processamento de materiais, fundição de metais, moldagem por injeção de plásticos;
- escoamentos geofísicos, turbulência atmosférica, escoamentos subterrâneos;
- tecnologia aeroespacial.

Este livro abordará os conceitos e técnicas matemáticas básicos necessários para entender as equações de Navier-Stokes, bem como sua interpretação física e aplicações. Por meio de explicações claras e de exemplos, o livro tem como objetivo equipar os leitores com as ferramentas e *insights* necessários para compreender o desenvolvimento e a complexidade dessas equações.

O conjunto de equações definindo o movimento de um fluido para ser completo requer a satisfação das seguintes leis físicas:

- Lei de conservação da massa.
- Segunda lei de Newton do movimento.
- Lei de conservação da energia.

Em casos mais simples, como o caso de um fluido isotérmico, o princípio de conservação de energia reduz a conservação da energia mecânica. Sob tais condições, pode ser demonstrado que a segunda lei de Newton do movimento é equivalente ao princípio de conservação da energia. Daí para escoamentos isotérmicos, a lei de conservação da energia não necessita ser explicitamente usada na formulação para predição do comportamento do escoamento.

As leis físicas do movimento originam equações que não estão em termos de quantidades facilmente mensuráveis. Em um campo de escoamento, as quantidades mensuráveis são os componentes do vetor velocidade e a pressão termodinâmica. Entretanto, as leis do movimento são expressas em termo de tensões em um elemento de fluido.

Em análise de engenharia, é comum relacionar as tensões aos componentes do vetor velocidade, por meio de equações empíricas denominadas relações constitutivas. Essas equações contêm constantes indeterminadas, que devem ser conhecidas de maneira independente a partir de medições em laboratório. Enquanto uma variedade de relações constitutivas pode depender da escolha do fluido, a forma geral dessas relações é restringida pelas restrições da segunda lei de termodinâmica.

A segunda lei da termodinâmica impõe certas condições às constantes usadas para relacionar a tensão aos componentes da velocidade, de modo que há um único sentido de transferência da parcela irreversível da energia mecânica dissipada no campo de escoamento para energia térmica.

A solução das equações do movimento compostas pelas leis físicas tem como propósito a obtenção dos campos de velocidade e de pressão, em cada ponto no campo de escoamento e para todo tempo de escoamento. Com esses dados é possível, então, extrair informações úteis tais como forças atuando na estrutura, taxas de transferência de calor de corpos aquecidos e tempos de dispersão de poluentes na atmosfera, por exemplo.

Quando um fluido está em movimento, há um equilíbrio entre as forças internas e externas que agem sobre ele. Esse equilíbrio é conhecido como balanço de forças durante o escoamento de um fluido.

As forças internas incluem a tensão de cisalhamento, força viscosa e força relacionada à pressão. Resumidamente, a tensão de cisalhamento é a força que surge quando duas camadas de fluido se movem em velocidades diferentes. A força de viscosidade, por sua vez, é a força que surge devido ao atrito interno entre as moléculas do fluido. E, por fim, a componente relacionada à pressão corresponde à força que surge como resultado da diferença de pressão entre duas regiões do fluido.

Já as forças externas podem incluir a força gravitacional, a força de arrasto, a força de empuxo e a força eletromagnética, por exemplo. Em um escoamento qualquer, o balanço de tais forças é fundamental para descrever o comportamento do um fluido.

Se as forças internas forem maiores do que as forças externas, por exemplo, o fluido fluirá sem interrupção. Porém, se as forças externas sobrepujarem as internas, o fluido é impedido de fluir, ocorrendo assim sua estagnação.

O balanço de forças também é importante para determinar a velocidade do fluido, bem como a energia térmica e as espécies transportadas. Para tanto, torna-se necessário o uso de um modelo matemático robusto que possa descrever o comportamento de cada componente envolvida em um escoamento. As equações de Navier-Stokes são fundamentalmente equações de conservação que regem a variação de cada uma dessas componentes ao longo do tempo e do espaço. Em suma, essas equações descrevem a conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia para um escoamento, seja ele compressível ou não.

1.2 CONSERVAÇÃO DA MASSA

A conservação da massa é uma das leis fundamentais da física que se aplica ao escoamento de fluidos. Essa lei estabelece que a quantidade total de massa em um sistema fechado deve permanecer constante ao longo do tempo. Em outras palavras, a massa não pode ser criada nem destruída, apenas transferida ou transformada.

Em um escoamento, a conservação da massa é expressa pelo princípio da continuidade, que estabelece, em regime permanente, que a massa que entra em uma região deve ser igual à massa que sai dessa mesma região. Isso significa que a quantidade de fluido que flui através de uma seção transversal de um tubo, por exemplo, deve ser constante ao longo de seu comprimento. Na situação de regime não permanente, a quantidade de massa que escoava para dentro de uma dada região (denominada volume de controle) menos a quantidade de massa que escoava para fora deve ser acumulada naquele volume. Caso o sinal da acumulação seja negativo, isso significa que sai mais massa do que entra.

Para entender como a conservação da massa é aplicada em um escoamento, podemos considerar um tubo com uma seção transversal de área A e um fluido escoando através dele com uma velocidade v . A massa do fluido que passa através da seção transversal em um intervalo de tempo Δt é dada por:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A v \quad (1.1)$$

onde ρ é a densidade do fluido. Essa equação indica que a variação temporal da massa que passa através da seção transversal é igual ao produto da densidade, da área transversal e da velocidade do fluido.

De acordo com o princípio da continuidade, em regime permanente, a massa que entra na seção transversal deve ser igual à massa que sai dela. Isso significa que a taxa de fluxo de massa que entra é igual à taxa de fluxo de massa que sai, ou seja:

$$\rho A v_{(\text{entrada})} = \rho A v_{(\text{saida})} \quad (1.2)$$

1.3 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A conservação da quantidade de movimento é mais uma das leis fundamentais da física que se aplica à mecânica dos fluidos. Essa lei estabelece que a quantidade total de movimento em um sistema fechado, por exemplo, deve permanecer constante ao longo do tempo, a menos que haja ação de uma força externa.

Na mecânica dos fluidos, a conservação da quantidade de movimento é expressa pela equação de Navier-Stokes, que descreve o movimento de um fluido viscoso. Essa equação estabelece que a força resultante que atua sobre um fluido é igual à taxa de variação da quantidade de movimento por unidade de volume, e é dada muito resumidamente por:

$$(\rho \mathbf{U})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = -\nabla P + \nabla^2 (\mu \mathbf{U}) + \mathbf{f} \quad (1.3)$$

1.4 HIPÓTESE DO CONTÍNUO

Em meio a inúmeras tentativas de definirmos um fluido, deparamos com uma certa (e por que não dizer uma irritante) dificuldade. Em contrapartida, somos mais atraídos para as conhecidas características apresentadas pelos fluidos. Alguém pode muito bem ressaltar que “fluido é tudo aquilo que escoar e se deforma”. Mas, no geral, tudo escoar. Os sólidos, por exemplo, escoam “muito pouco” quando submetidos às forças não equilibradas e ainda tendem a recuperar suas formas originais quando tais forças são removidas. Além do mais, assim como os fluidos, os sólidos se deformam quando submetidos a determinadas forças.

Porém, os fluidos escoam, por menor que sejam as magnitudes das forças não equilibradas, e não recuperam sua forma original com o cessamento dessas forças. De fato, uma “boa” definição de fluido não é algo trivial e, para nossa sorte, algo tão necessário. O estudo de um fluido está diretamente relacionado à análise de seu comportamento e de suas características, obrigando-nos a trabalhar com conceitos matemáticos e físicos. Neste livro, exploraremos os fluidos com base em seus aspectos gerais, considerando suas origens, descrição e consequências. Para tanto, faremos uso da linguagem matemática, na qual cada símbolo, entidade, operação etc. estará, em geral, associado a um significado físico.

Como ponto de partida, assumiremos que a **matéria que constitui o fluido é contínua**. Queremos, com essa hipótese, associar a cada ponto identificável do fluido uma partícula de fluido ou elemento de fluido. Fisicamente, sabemos que a matéria não é contínua. Porém, uma simples análise considerando a teoria cinética dos gases indica a ordem de grandeza do número de moléculas de ar contidas em um volume delimitado por um cubo com 1 mm de aresta. Nesse caso, em condições normais de temperatura e pressão (20 °C e 1 bar), temos $N = 3 \times 10^{16}$ moléculas.

Com isso, alguém pode se sentir encorajado a questionar a necessidade do uso da hipótese do contínuo, considerando que poderíamos estudar a mecânica dos fluidos investigando a dinâmica de cada molécula do ar. **Mas será mesmo?** Vamos considerar uma situação envolvendo apenas a contagem do número de partículas contidas em 1mm^3 realizada por um computador cuja velocidade de leitura V_L é igual a 10^6 moléculas/s.

Nesse caso, o tempo necessário para essa tarefa é dado por:

$$t = \frac{N}{V_L} = \frac{3 \cdot 10^{16}}{10^6} = 3 \cdot 10^{10} \text{ s} \approx 964.5 \text{ anos}$$

Ou seja, o uso de métodos envolvendo dinâmica molecular para o estudo da mecânica dos fluidos acarreta a necessidade de dispêndio de tempo. Ressalta-se ainda que esse tempo computado se refere única e exclusivamente à leitura das 3×10^{16} moléculas, sem considerar os cálculos relacionados à dinâmica de cada uma, o que leva à necessidade de um tempo ainda maior. Outro aspecto importante está no fato de que estamos focados apenas em 1 mm^3 de ar em condições de temperatura e pressão constantes, e isso praticamente não tem aplicação em problemas reais de engenharia. Por isso, o uso da hipótese do contínuo ainda corresponde à melhor opção que temos para o estudo da fluidodinâmica. Todavia, a hipótese do contínuo é razoável quando nos menores volumes de interesse do escoamento houver um grande número de moléculas do fluido.

Para investigarmos a validade da hipótese do contínuo, vamos partir da definição de densidade:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_1} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1.4)$$

onde $\Delta V \rightarrow 0$. A Figura 1.1 apresenta uma ilustração simples do comportamento da densidade em função da variação do volume de fluido. Observa-se que há um limite mínimo ΔV_1 no qual a densidade deixa de ter um valor constante e começa a apresentar flutuações em sua magnitude. Esse limite inferior corresponde à mínima variação de volume para que a hipótese do contínuo seja considerada válida. Para o caso do ar em

condições normais citadas anteriormente, ΔV_1 e ΔV_2 apresentam ordens de grandeza de 10^{-3} mm e 10 mm, respectivamente. Ou seja, para estudarmos problemas de engenharia com escoamento de ar, não precisaremos considerar elementos de fluido menores que 10^{-3} mm, o que torna o custo computacional, por exemplo, muito menor.

Essa mesma ordem de grandeza encontrada para a aresta de um elemento de fluido do ar pode ser obtida por meio da teoria cinética dos gases, a partir da aproximação entre a viscosidade cinemática ν , a velocidade do som c (≈ 340 m/s) no meio e o caminho livre médio entre as moléculas ξ , de tal forma que a ordem de grandeza da viscosidade será $\nu \approx c \xi$.

Pela definição de viscosidade cinemática:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.5)$$

onde μ representa a viscosidade dinâmica, temos para o ar, sob condições normais:

$$\nu = \frac{1,8 \times 10^{-5} \text{ [Pa} \cdot \text{s]}}{1,2 \text{ [kg/m}^3\text{]}} \approx 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\xi \approx \frac{\nu}{c} \approx \frac{10^{-5}}{10^2} \approx 10^{-7} \text{ m} \approx 10^{-3} \text{ mm}$$

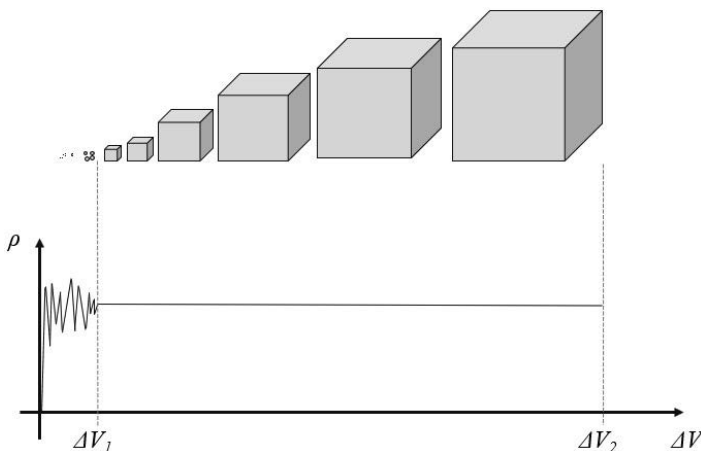


Figura 1.1 Perfil da densidade do ar observado em elementos de volume de diferentes tamanhos.

Fonte: elaborada pelos autores.

Na realidade, a distância entre as moléculas do ar é, em média, 25 vezes menor do que ξ . Assim, para um cubo com $0,1 \mu\text{m}$ de aresta, podemos calcular o número de moléculas como igual a $25^3 (= 15.625)$, o que acarreta um erro médio de aproximadamente $0,8\%$ no cálculo da densidade. Em suma, o tamanho do elemento de volume a ser escolhido para garantir a precisão no cálculo das propriedades locais (temperatura, pressão, densidade, viscosidade, entalpia etc.) deve ser suficientemente pequeno em escala macroscópica e grande em escala microscópica.

De fato, a mecânica estatística pode ser uma abordagem bastante poderosa para entendermos o comportamento de sistemas físicos constituídos de um grande número de partículas. Porém, aplicar essa abordagem à mecânica dos fluidos é uma tarefa extremamente desafiadora. Uma das principais dificuldades, por exemplo, está no fato de que as equações da quantidade de movimento são altamente não lineares, para as quais as soluções analíticas raramente são obtidas. E, quando são, diversas simplificações e suposições tornam-se necessárias.

O comportamento turbulento de um fluido, por exemplo, é complexo e caótico, o que dificulta a previsão precisa de sua dinâmica. Na verdade, o movimento turbulento é frequentemente modelado usando métodos estatísticos, mas isso pode levar a incertezas e a erros significativos nos resultados. Outro problema reside no fato de que as interações intermoleculares de um fluido são dependentes das distâncias entre as moléculas, o que acarreta mudanças significativas das propriedades dos fluidos. Também é um desafio o fato de a mecânica dos fluidos descrever fenômenos que envolvem muitos comprimentos de escala, provocando um enorme esforço matemático e computacional.

Além da densidade e da viscosidade (tanto a dinâmica μ quanto a cinemática ν), outras propriedades importantes no estudo de fluidos são a condutividade térmica, k , e o calor específico à pressão constante, c_p . Em vários casos as propriedades são combinadas, formando outras propriedades. Temos como exemplos a difusividade térmica, definida como $\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c_p}$ e o número de Prandtl, definido como $Pr = \mu \frac{c_p}{k}$. Usando a Equação (1.5) e a definição de difusividade térmica, podemos obter $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$.

REFERÊNCIAS

BRUSH, S. G.; EVERITT, C. W. F. *Kinetic theory of gases: an anthology of classic papers with historical commentary*. London: Imperial College Press, 2003.

CHANDLER, D. *Introduction to modern statistical mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1987.

JEANS, J. *Elementary kinetic theory of gases*. New York: Dover Publications, [1965].

KITTEL, C.; KROEMER, H. *Thermal physics*. 2nd ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1980.

LAIDLER, K.; KING, D. *Gas kinetics and energy transfer*. New York: McGraw-Hill, [1983].

PATHRIA, R. K. *Statistical mechanics*. 2nd ed. Auckland: Butterworth-Heinemann, 1996.

PAULI, W. *Kinetic theory of gases*. New York: Dover Publications, [1983].

TOLMAN, R. C. *The principles of statistical mechanics*. New York: Dover Publications, 1979.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 1.1

Um recipiente com capacidade para 2 litros contém uma mistura de hidrogênio e oxigênio nas mesmas proporções. A pressão dentro do recipiente é de 1 atm à temperatura de 25°C. Se a temperatura for aumentada para 125°C e a pressão permanecer constante, qual será o novo volume ocupado pela mistura?

Exercício 1.2

Considere um gás ideal contido em um recipiente com volume de 1 litro à temperatura de 25°C. Qual é a distância média entre as moléculas desse gás? Considere a distância média dada pela equação $d = \left(\frac{V}{n}\right)^{1/3}$, onde V e n correspondem ao volume ocupado pelo gás e n é o número de moléculas.

Exercício 1.3

Considere um gás ideal contido em um recipiente com volume de 10 litros à temperatura de 27°C. Se a velocidade média das moléculas do gás for de 500 m/s, qual é a pressão do gás?

Exercício 1.4

Estime a velocidade média das moléculas de água à temperatura de 90°C e à pressão de 1 atm. Considere $v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, onde M representa a massa molar da água.

Exercício 1.5

O ar tem uma viscosidade cinemática de $1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ à temperatura de 20°C . Qual é a velocidade do som no ar nessa temperatura? Considere $c = \sqrt{(\gamma RT)}$, onde γ representa a razão c_p/c_v .

Fundamentos matemáticos

Este capítulo apresenta uma breve revisão do cálculo vetorial, focando desde noções básicas como a definição de grandezas escalares e vetoriais até conceitos um pouco mais avançados, que muitas vezes podem fugir das ementas das disciplinas dos cursos de graduação – por exemplo, circulação, **teorema de Stokes e tensores**. Este último, de fato, é um agente matemático de suma importância para o entendimento físico das equações de Navier-Stokes. Ao longo do capítulo, além da revisão de conceitos, exemplos serão apresentados com o intuito de reforçar o entendimento de cada tópico.

2.1 ESCALARES E VETORES


Grandezas escalares: grandezas escalares são grandezas físicas que podem ser completamente descritas por um único valor numérico, acompanhado de uma unidade de medida. Elas não têm direção ou sentido associado, apenas magnitude. Alguns exemplos de grandezas escalares incluem massa, temperatura, comprimento, área, volume, tempo, densidade, pressão, energia, entre outras. Ao realizar operações com grandezas escalares, como soma, subtração, multiplicação e divisão, os valores numéricos podem ser combinados diretamente, sem necessidade de considerar a direção ou o sentido da grandeza.

Grandezas vetoriais: grandezas vetoriais são grandezas físicas que têm magnitude, direção e sentido. Ou seja, elas são completamente descritas por um valor numérico acompanhado de uma unidade de medida, uma direção e um sentido. Alguns exemplos de grandezas vetoriais incluem o deslocamento, a velocidade, a aceleração, a força, o gradiente de temperatura, o gradiente de pressão, entre outras. Quando duas ou mais grandezas vetoriais são combinadas, é necessário considerar a direção e o sentido de cada uma delas. Isso significa que as operações com grandezas vetoriais, como soma, subtração e multiplicação, não são realizadas apenas com os valores numéricos, mas também com as direções e os sentidos das grandezas.

Apesar de o formalismo matemático exigir a necessidade de um sistema de referência para trabalharmos com grandezas vetoriais, o **princípio da invariância** garante que as propriedades do vetor independam do sistema de referência escolhido para representá-lo. Ou seja, esse princípio assegura que um sistema de equações vetoriais válidos em determinado sistema de referência seja válido em qualquer outro sistema. Quanto à representação, existe uma notação que usa negritos, ou setas, ou sublinhados, ou

barras superiores, que é a mais familiar, denominada notação de Gibbs. Uma alternativa de notação desenvolvida por Einstein, denominada notação indicial, que será vista posteriormente, usa subscritos ou sobrescritos para indicar componentes de vetores. Notação matricial também é usada para vetores e tensores (entes matemáticos a serem definidos mais adiante). Exemplos da notação de Gibbs são mostrados a seguir.

Tabela 2.1 Exemplos da notação de Gibbs

Gráfica	
Simbólica	$\vec{v}, V, \hat{v}, \langle \cdot \rangle$
Matemática*	$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

* De fato, existem diversas representações matemáticas encontradas na literatura. Algumas outras serão apresentadas ao longo do livro.

Fonte: elaborada pelos autores.

2.2 OPERAÇÕES COM VETORES

Toda vez que quisermos caracterizar a orientação de um vetor, faremos isso por meio do vetor. Um vetor unitário é um vetor com magnitude igual a 1. Ele é utilizado para especificar uma direção ou um sentido em um sistema de coordenadas. Os vetores unitários são especialmente úteis em cálculos envolvendo grandezas vetoriais, pois permitem a decomposição de um vetor em suas componentes em diferentes direções. Os vetores cartesianos, também conhecidos como vetores unitários ortogonais, são definidos como aqueles que apontam na direção dos eixos coordenados de um sistema de coordenadas cartesianas.

Os vetores unitários são úteis em muitas aplicações da física e da matemática, como na decomposição de vetores em suas componentes em diferentes direções, na representação de campos vetoriais e na resolução de equações diferenciais que envolvem grandezas vetoriais.

Um vetor unitário \hat{a} , por exemplo, na orientação de \vec{A} é definido por

$$\hat{a} \equiv \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \quad (2.1)$$

onde $|\vec{A}|$ representa a magnitude de \vec{A} .

Já a componente A em uma orientação qualquer \hat{B} é dada por

$$A_B = |\vec{A}| \cos(\theta) \quad (2.2)$$

e sua magnitude é representada na Figura 2.1.

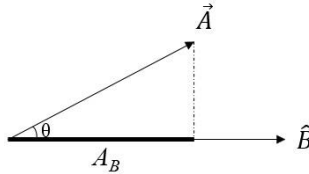


Figura 2.1 Representação gráfica da magnitude da projeção do vetor \vec{A} orientado em \hat{B} .

Fonte: elaborada pelos autores.

Neste livro, vamos considerar vetores ditos “livres”, cuja posição no espaço não viola o princípio da invariância, conforme ilustração da Figura 2.2(a). Vetores livres são vetores que podem ser movidos livremente no espaço sem alterar sua magnitude, direção ou sentido. Ou seja, eles podem ser transladados livremente para qualquer ponto do espaço sem que tenham suas propriedades vetoriais afetadas. Um exemplo comum de vetor livre é o vetor posição, que descreve a posição de um ponto em relação a um sistema de coordenadas. Esse vetor pode ser movido livremente sem afetar a posição do ponto em questão. Os vetores livres são diferentes dos vetores deslizantes, que têm um ponto de aplicação fixo e podem ser deslocados apenas ao longo de uma reta. Esses vetores são comumente utilizados em análises de estruturas e mecânica dos sólidos.

Caso os seis vetores apresentem a mesma orientação e sentido, os vetores são **equivalentes**. Em contrapartida, se o vetor for preso a um determinado ponto, ele é dito fixo. Ao prender-se à linha de ação, os vetores serão denominados deslizantes, como mostrado na Figura 2.2(b).

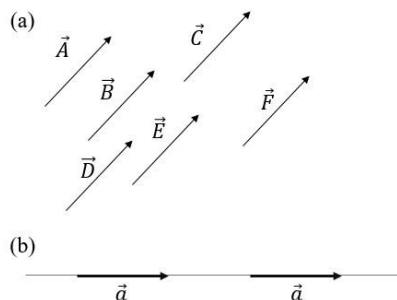


Figura 2.2 Representação gráfica de (a) vetores “livres” e equivalentes e (b) um vetor deslizante.

Fonte: elaborada pelos autores.

2.2.1 Adição de vetores

De forma simbólica, temos

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C} \quad (2.3)$$

Conseqüentemente, temos as propriedades:

- Comutativa:

$$\vec{B} + \vec{C} = \vec{C} + \vec{B} \quad (2.4)$$

- Associativa:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \quad (2.5)$$

Graficamente, podemos representar a soma com as propriedades comutativa e associativa, conforme a Figura 2.3.

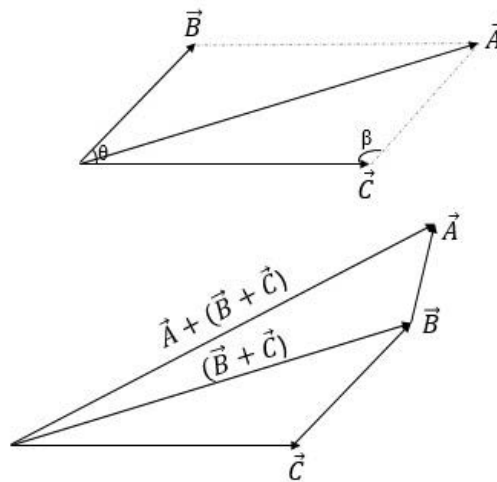


Figura 2.3 Projeção gráfica da soma de vetores.

Fonte: elaborada pelos autores.

De maneira geral, se conhecermos o ângulo de abertura θ entre dois vetores \vec{B} e \vec{C} , podemos determinar o módulo da soma entre os vetores por meio da **regra do paralelogramo**:

$$A = \sqrt{|\vec{B}|^2 + |\vec{C}|^2 + 2|\vec{B}||\vec{C}|\cos(\theta)} \quad (2.6)$$

Como $\theta = \pi - \beta$,

$$\cos(\theta) = \cos(\pi - \beta) = \cos(\pi) \cos(\beta) + \text{sen}(\pi) \text{sen}(\beta) = -\cos(\beta)$$

Logo, a regra do paralelogramo pode ser expressa na forma:

$$A = \sqrt{|\vec{B}|^2 + |\vec{C}|^2 - 2|\vec{B}||\vec{C}| \cos(\beta)} \quad (2.7)$$

2.2.2 Multiplicação de um vetor por um escalar

De forma geral, temos que

$$m\vec{A} = \underbrace{\vec{A} + \vec{A} + \dots + \vec{A}}_{m \text{ vezes}} \quad (2.8)$$

com as seguintes propriedades:

• Comutativa: $m\vec{A} = \vec{A}m$ (2.9)

• Distributiva: $(c_1 + c_2)\vec{A} = c_1\vec{A} + c_2\vec{A}$ (2.10)

$$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B} \quad (2.11)$$

Em qualquer situação, a constante escalar que multiplica um vetor pode ser uma simples constante de proporcionalidade ou uma grandeza escalar. Obviamente, o resultado é um vetor que tem a mesma direção e sentido que o vetor original, mas com magnitude alterada pelo valor do escalar.

2.2.3 Representação de vetores em termos de suas coordenadas

Como toda representação gráfica de vetores precisa de coordenadas de um sistema de referência, todos os vetores podem ser representados por suas componentes nas orientações das coordenadas. Considerando o caso de um sistema de coordenadas cartesiano, os vetores de base \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} têm a mesma orientação em qualquer posição do espaço, conforme mostrado na Figura 2.4.

Ao representarmos um vetor \vec{V} por meio de suas componentes nas direções x , y e z , temos:

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (2.12)$$

onde cada uma das componentes v_x , v_y e v_z pode variar com x , y e z .

É importante ressaltar ainda que isso não acontece em todos os sistemas de referência, por exemplo, no sistema de coordenadas cilíndricas ou esféricas. Por conveniência, vamos adotar o sistema cartesiano representado pelos unitários \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 . Assim, um vetor \vec{V} qualquer representado nesse sistema será descrito como

$$\vec{V} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3 \quad (2.13)$$

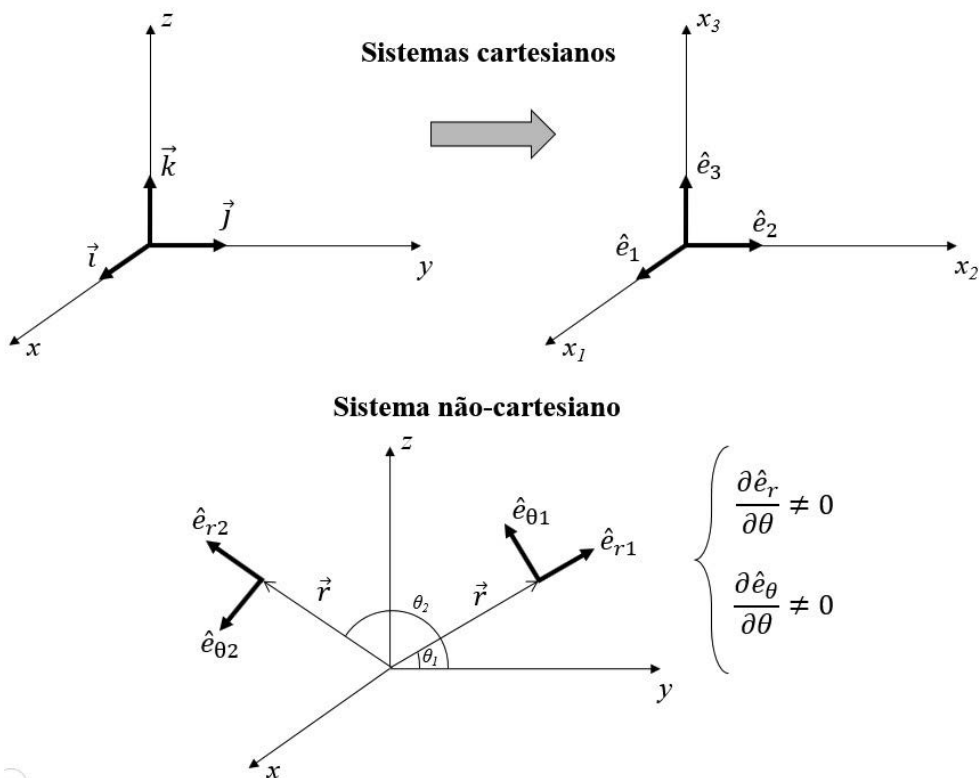


Figura 2.4 Troca de notação do sistema de coordenadas e vetores unitários.

Fonte: elaborada pelos autores.

2.2.4 Produto escalar de vetores

Ao considerarmos o ângulo θ entre dois vetores \vec{U} e \vec{V} , temos que o produto escalar entre eles é dado por

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}||\vec{V}| \cos(\theta) \quad (2.14)$$

com as propriedades:

- Comutativa:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U} \quad (2.15)$$

- Associativa:

$$(\vec{U} + \vec{V}) \cdot \vec{W} = \vec{U} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \vec{W} \quad (2.16)$$

2.2.5 Produto vetorial ou produto cruzado (\times)

Vamos considerar um exemplo em que dois vetores \vec{U} e \vec{V} estão projetados sobre o plano x_1x_2 , separados por um ângulo de abertura θ , com \vec{n} sendo o vetor unitário perpendicular a ambos os vetores, conforme apresentado na Figura 2.5. Dessa forma, matematicamente, o produto vetorial é dado por

$$\vec{U} \times \vec{V} = (|\vec{U}||\vec{V}| \sin(\theta)) \vec{n} \quad (2.17)$$

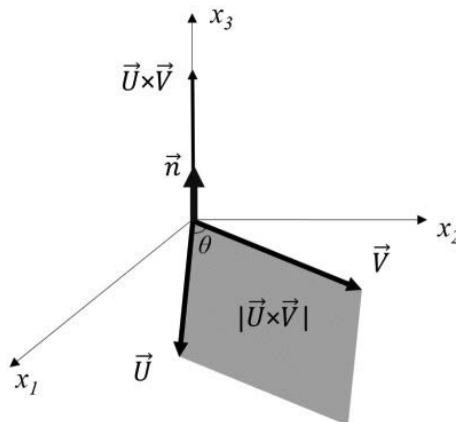


Figura 2.5 Representação gráfica do produto vetorial.

Fonte: elaborada pelos autores.

2.2.6 Produto escalar triplo

Considerando as projeções dos vetores \vec{U} , \vec{V} e \vec{W} na Figura 2.6, o produto escalar triplo é dado por

$$\vec{W} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = \vec{W} \cdot \left(|\vec{U}||\vec{V}| \sin(\theta) \right) \hat{n} = |\vec{W}||\vec{U}||\vec{V}| \sin(\theta) \cos(\varphi) \quad (2.18)$$

É conveniente destacar que

$$\begin{aligned} \vec{W} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) &= (\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} \\ &= (\vec{W} \times \vec{U}) \cdot \vec{V} \\ &= \vec{V} \cdot (\vec{W} \times \vec{U}) \\ &= (\vec{V} \times \vec{W}) \cdot \vec{U} \\ &= \vec{U} \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{W} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) &= -\vec{W} \cdot (\vec{V} \times \vec{U}) \\ &= -(\vec{V} \times \vec{U}) \cdot \vec{W} \\ &= -\vec{V} \cdot (\vec{U} \times \vec{W}) \\ &= -(\vec{U} \times \vec{W}) \cdot \vec{V} \\ &= -\vec{U} \cdot (\vec{W} \times \vec{V}) \\ &= -(\vec{W} \times \vec{V}) \cdot \vec{U} \end{aligned}$$

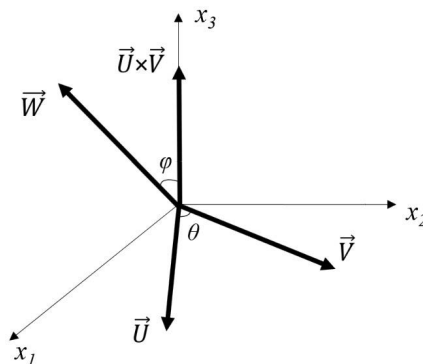


Figura 2.6 Representação gráfica dos vetores $\vec{U} \times \vec{V}$ e \vec{W} .

Fonte: elaborada pelos autores.

2.3 NOTAÇÃO INDICIAL

Devido à complexidade encontrada em operações envolvendo cálculo vetorial, o uso de notações mais simples se mostra muito vantajoso tanto na questão do tempo gasto quanto na compreensão de tais operações. Se considerarmos o caso do vetor dado pela Equação (2.13), observamos a necessidade da apresentação das três componentes ortogonais, independentes uma da outra. Porém, na notação indicial, esse vetor é representado da forma:

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{e}_i, \quad (2.19)$$

ou simplesmente

$$\vec{V} = v_i \hat{e}_i \quad (2.20)$$

Agora vamos considerar a soma do produto entre os módulos de componentes vetoriais ortogonais no espaço \mathbb{R}^3 , por exemplo. Nesse caso, temos:

$$u_j v_j = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (2.21)$$

e

$$u_k v_k w_l = u_1 v_1 w_l + u_2 v_2 w_l + u_3 v_3 w_l \quad (2.22)$$

Os índices j e k nas Equações (2.21) e (2.22) são chamados de **índices mudos** (índices repetidos), ao passo que o índice l da Equação (2.22) é chamado de **índice livre** (índice não repetido).

Para uma breve noção da ajuda que a notação indicial nos oferece, o produto de $u_i v_j$ é constituído da soma de 9 termos:

$$u_i v_j = \begin{cases} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ u_1 v_2 & u_2 v_2 & u_3 v_2 \\ u_1 v_3 & u_2 v_3 & u_3 v_3 \end{cases}$$

A simplicidade da notação indicial também nos concede algumas liberdades quanto à manipulação dos índices, que, por sua vez, são fundamentais no tratamento das equações de Navier-Stokes:

a) Os índices repetidos podem ser trocados por quaisquer outros índices repetidos que não estejam presentes.

$$u_i v_i = u_j v_j = u_n v_n$$

$$u_i v_i w_j \neq u_j v_i w_j$$

$$u_i v_i w_j = u_j v_j w_i$$

b) Não são permitidos mais de dois índices repetidos nas representações:

$$u_i v_i w_i = ?$$

c) O número de expressões que podemos associar na representação indicial é dado por 3^n , com n sendo o número de índices livres.

$$u_i v_i T_{kl} \quad \text{apresenta 9 termos } (3^2)$$

$$u_i v_j T_{ki} \quad \text{apresenta 9 termos } (3^2)$$

$$u_i v_j T_{kl} \quad \text{apresenta 81 termos } (3^4)$$

A notação T_{kl} indica uma grandeza denominada *tensor de segunda ordem*, como será explicado mais adiante.

d) Em qualquer expressão ou equação, todos os termos devem possuir os mesmos índices livres:

$$u_i v_j + w_k A_k T_{ij} = B_{ij}$$

2.4 DELTA DE KRONECKER

Uma representação do produto escalar das componentes unitárias entre dois vetores ortogonais no sistema de coordenadas cartesiano é dada pelo **delta de Kronecker** δ_{ij} , definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.23)$$

Como os índices i, j são livres, com ambos variando entre 1 e 3, δ_{ij} pode apresentar um total de 9 valores. Conseqüentemente, observamos que:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$$\delta_{ij}u_j = \delta_{i1}u_1 + \delta_{i2}u_2 + \delta_{i3}u_3 = u_i \quad (\text{contração de índices})$$

2.5 SÍMBOLO DE PERMUTAÇÃO

O **símbolo de permutação** ou **símbolo de Levi-Civita** é utilizado para a representação do produto vetorial entre vetores ortonormais:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se a permutação for par (cíclica)} \\ 0, & \text{se dois ou mais índices se repetirem} \\ -1, & \text{se a permutação for ímpar (anticíclica)} \end{cases} \quad (2.24)$$

No caso, a permutação pode ocorrer de duas formas: **cíclica** ou **anticíclica**, conforme ilustrado na Figura 2.7.

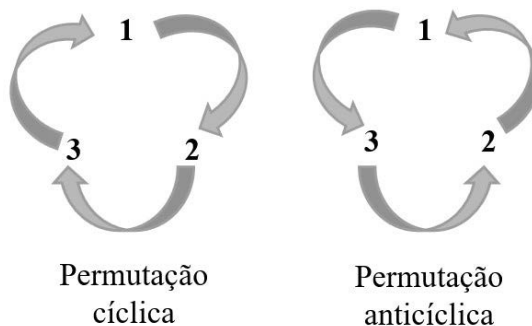


Figura 2.7 Caminho seguido durante as formas de permutação cíclica e anticíclica.

Fonte: elaborada pelos autores.

Resumidamente, temos:

ϵ_{ijk} apresenta 27 componentes, sendo 21 nulas e 6 não nulas.

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = 1 \quad (\text{permutação cíclica})$$

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$$

$$\epsilon_{ikj} = \epsilon_{kji} = \epsilon_{jik} = -1 \quad (\text{permutação anticíclica})$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$$

Para as demais configurações, o símbolo de permutação é igual a zero.

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \epsilon_{123} \hat{e}_3 = \hat{e}_3$$

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = \epsilon_{213} \hat{e}_3 = -\hat{e}_3$$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j \cdot \hat{e}_k = \epsilon_{ijm} \hat{e}_m \cdot \hat{e}_k = \epsilon_{ijm} \delta_{mk} = \epsilon_{ijk}$$

2.6 CARACTERÍSTICA SIMÉTRICA OU ANTISSIMÉTRICA

Grandezas físicas representadas por agentes matemáticos como matrizes e tensores podem apresentar uma importante característica: a **simetria**. Nesse caso, uma grandeza T_{ij} é dita **simétrica** se $T_{ij} = T_{ji}$. Caso $T_{ij} = -T_{ji}$, essa grandeza é dita **antissimétrica**. Por outro lado, se $T_{ij} \neq T_{ji}$ e $T_{ij} \neq -T_{ji}$, a grandeza não é nem simétrica nem antissimétrica. Com isso, observamos que:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (\text{simétrica})$$

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \quad (\text{antissimétrica})$$

$$T_{ijk} = T_{jik} = -T_{ikj}$$

(simétrica em relação aos índices ij e antissimétrica em relação a jk)

2.7 OPERAÇÕES COM VETORES EM NOTAÇÃO INDICIAL

2.7.1 Produto escalar

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_i V_i \quad (2.25)$$

Como as componentes são ortonormais, temos:

$$U_i V_j = (U_i \hat{e}_i) \cdot (V_j \hat{e}_j) = U_i V_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) = U_i V_j \delta_{ij} = U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3$$

2.7.2 Produto vetorial

$$\vec{U} \times \vec{V} = U_i V_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad (2.26)$$

$$U_i V_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = (U_i \hat{e}_i) \times (V_j \hat{e}_j) = U_i V_j (\hat{e}_i \times \hat{e}_j)$$

2.7.3 Produto escalar triplo

$$\vec{W} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = W_i U_j V_k \epsilon_{ijk} \quad (2.27)$$

$$W_i U_j V_k \epsilon_{ijk} = W_i \hat{e}_i \cdot (U_j \hat{e}_j \times V_k \hat{e}_k) = W_i U_j V_k \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) = W_i U_j V_k \epsilon_{j k p} \hat{e}_p$$

2.7.4 Identidade ϵ - δ

A relação entre os símbolos de Kronecker e de permutação é dada por

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{prs} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{jp} & \delta_{jr} & \delta_{js} \\ \delta_{kp} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

A partir dessa identidade, podemos demonstrar que:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ijk}\epsilon_{irs} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{ji} & \delta_{jr} & \delta_{js} \\ \delta_{ki} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \end{vmatrix} = \\
 &= \delta_{ii}\delta_{jr}\delta_{ks} + \underbrace{(\delta_{ji}\delta_{is})}_{\delta_{js}}\delta_{kr} + \underbrace{(\delta_{ki}\delta_{ir})}_{\delta_{kr}}\delta_{js} \\
 &\quad - \delta_{ki}\delta_{jr}\delta_{is} - \delta_{kr}\delta_{js}\underbrace{\delta_{ii}}_3 - \delta_{ks}\delta_{ji}\delta_{ir} \\
 &= \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr} \\
 \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijs} &= \delta_{jj}\delta_{ks} - \underbrace{(\delta_{js}\delta_{kj})}_{\delta_{ks}} \\
 &= 2\delta_{ks} \\
 \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 6
 \end{aligned}$$

2.8 ALGUNS CAMPOS VETORIAIS

Considere um elemento de volume esférico ΔV (Figura 2.8), delimitado pela superfície S e cujo centro, em relação à origem do sistema de coordenadas, está localizado no ponto P , descrito pela Equação (2.29):

$$\vec{r}(x, y, z) = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3 \quad (2.29)$$

Ao escolhermos aleatoriamente um elemento infinitesimal de área dS , com um vetor normal \hat{n} apontando para fora da superfície, e considerando que esse elemento de volume possa estar imerso em um campo escalar $\varphi(\vec{r})$ e/ou em um campo vetorial $\vec{C}(\vec{r})$, vamos relembrar as definições de alguns operadores relacionados ao cálculo vetorial.

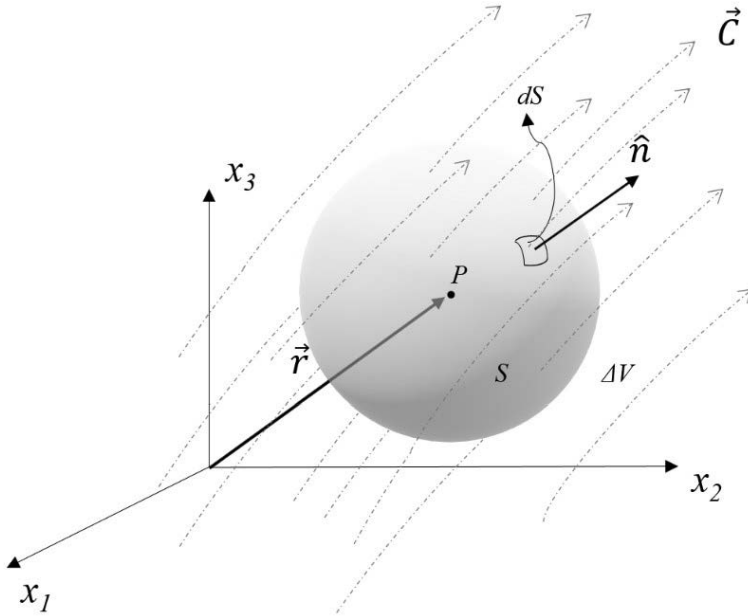


Figura 2.8 Elemento de volume em torno de um ponto P imerso em um campo vetorial \vec{C} qualquer.

Fonte: elaborada pelos autores.

2.8.1 Gradiente de um escalar

O operador **nabla** ($\vec{\nabla}$), quando aplicado a um campo escalar φ , resulta na formação de um campo vetorial denominado gradiente, que indica a direção e o sentido do crescimento do campo φ . Matematicamente, o gradiente de um campo escalar φ é definido como

$$\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int \hat{n} \varphi(\vec{r}) ds \quad (2.30)$$

Destaca-se ainda o fato de que o gradiente de um campo escalar não é meramente um recurso para simplificar a equação para a derivada direcional do campo. De fato, tanto o comprimento quanto a direção fornecem importantes características intrínsecas à própria natureza do campo que está sendo considerado.

Para esclarecer ainda mais a definição do gradiente, vamos considerar um sistema cartesiano de coordenadas imerso em um campo escalar φ , conforme mostrado na Figura 2.9. Nessa situação, vamos ainda considerar dois pontos distintos no campo, descritos pelos vetores posição \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$. Assim:

$$d\vec{r} = dx_1\hat{e}_1 + dx_2\hat{e}_2 + dx_3\hat{e}_3 \quad (2.31)$$

Logo,

$$d\varphi = \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \quad (2.32)$$

Como,

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3) \\ &= \varphi(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dx_3 - \varphi(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\hat{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\hat{e}_3 \right) \cdot (dx_1\hat{e}_1 + dx_2\hat{e}_2 + dx_3\hat{e}_3) \quad (2.33)$$

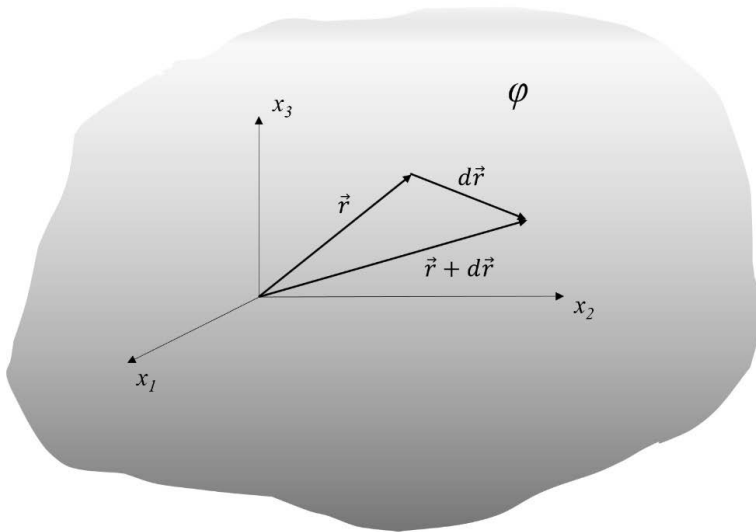


Figura 2.9 Campo escalar φ em um sistema de coordenadas cartesiano.

Fonte: elaborada pelos autores.

Por definição, o operador **nabla** é dado por

$$\vec{\nabla}(\cdot) \equiv \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot) = \hat{e}_i \partial_i(\cdot) \quad (2.34)$$

Dessa forma,

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}\varphi \cdot (ds \vec{S}) \quad (2.35)$$

Com isso, obtemos a derivada direcional:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{S} \quad (2.36)$$

Vamos considerar um caso em particular em que o vetor direção \vec{S} é tangente à curva de nível φ , com o gradiente do campo $\vec{\nabla}\varphi$ perpendicular à respectiva curva, conforme ilustrado na Figura 2.10. Assim, a derivada direcional é igual a zero, pois em cada caso φ é sempre constante, não indicando o sentido de crescimento do campo.

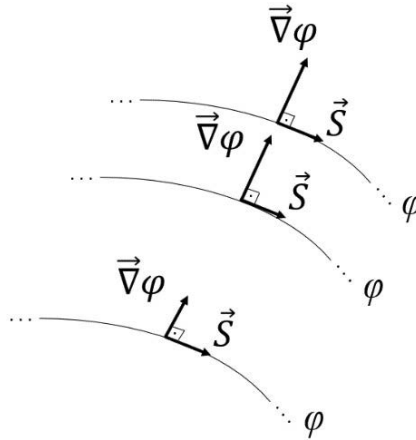


Figura 2.10 Projeção do gradiente e do vetor direção em três curvas distintas do campo escalar φ .

Fonte: elaborada pelos autores.

Com isso, podemos chegar a duas conclusões: **1ª)** o gradiente é sempre normal à superfície do campo escalar φ e **2ª)** representa a taxa de variação direcional desse campo escalar ao longo do espaço.

2.8.2 Divergente

O operador **divergente** ($\vec{\nabla} \cdot$) é sempre aplicado a um campo vetorial \vec{C} qualquer, resultando na formação de um campo escalar e indicando a quantidade líquida de fluxo do campo vetorial que entra e sai. Em suma, podemos dizer que o divergente de um campo vetorial indica um valor associado à quantidade total de “nascedouros” e “sumidouros” intrínsecos ao campo vetorial que transpassa a superfície S do volume a ser avaliado (o que sai menos o que entra).

Dada a definição matemática do divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int \hat{n} \cdot \vec{C}(\vec{r}) dS \quad (2.37)$$

E levando em consideração as características mostradas na Figura 2.11, concluímos que:

$\hat{n} \cdot \vec{C}$ representa o fluxo de \vec{C} através do elemento de área superficial dS ;

$(\hat{n} \cdot \vec{C}) dS$ representa o escoamento de \vec{C} através de dS ;

$\int (\hat{n} \cdot \vec{C}) dS$ representa o escoamento líquido de \vec{C} através de S .

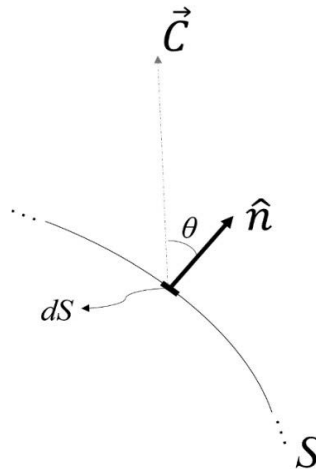


Figura 2.11 Campo vetorial \vec{C} transpassando uma superfície S que apresenta o mesmo valor de uma grandeza escalar, com um certo ângulo θ em relação à normal dessa superfície.

Fonte: elaborada pelos autores.

Matematicamente, o divergente é o produto escalar do operador **nabla** com o campo vetorial. Dessa forma, temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = (\hat{e}_i \partial_i) \cdot (C_j \hat{e}_j) = \hat{e}_i \cdot \partial_i (C_j \hat{e}_j) \quad (2.38)$$

Esta é a forma geral do divergente do campo vetorial. Porém, para o caso de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{C} &= \hat{e}_i \cdot \left(\underbrace{C_j \partial_i \hat{e}_j + \hat{e}_j \partial_i C_j}_0 \right) \\ &= \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \partial_i C_j) \\ &= \partial_i C_j \delta_{ij} \\ &= \partial_i C_i \end{aligned}$$

Para elucidarmos a definição do divergente dada na Equação (2.37), vamos exemplificar um caso contendo um elemento de volume cúbico e um sistema cartesiano, como o mostrado na Figura 2.12.

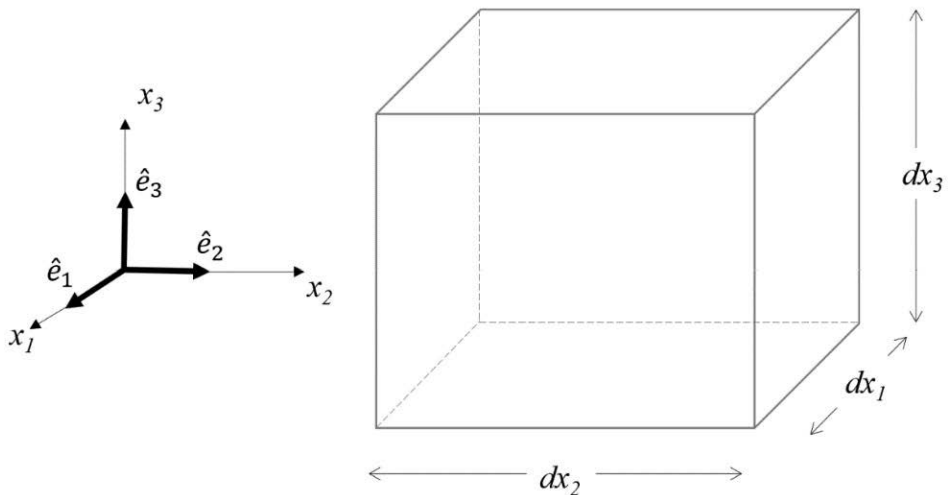


Figura 2.12 Elemento de volume cúbico.

Fonte: elaborada pelos autores.

Vamos considerar o campo vetorial

$$\vec{C} = C_1 \hat{e}_1 + C_2 \hat{e}_2 + C_3 \hat{e}_3$$

Como se trata de um cubo, vamos representar a integral ao longo da superfície S por meio do somatório das seis faces ($A_1 + A_2 + \dots + A_6$):

$$\int \hat{n} \cdot \vec{C}(\vec{r}) ds = \sum_{i=1}^6 \int_{A_i} \hat{n} \cdot \vec{C}(\vec{r}) dA$$

Para a face A_1 :

$$\int_{A_1} \hat{e}_1 \cdot (C_1 \hat{e}_1 + C_2 \hat{e}_2 + C_3 \hat{e}_3) dx_2 dx_3 \approx C_1 \left(x_1 + \frac{dx_1}{2}, x_2, x_3\right) dx_2 dx_3$$

Para a face A_2 :

$$\approx -C_1 \left(x_1 - \frac{dx_1}{2}, x_2, x_3\right) dx_2 dx_3$$

Somando as contribuições, temos:

$$\begin{aligned} & \left[C_1 \left(x_1 + \frac{dx_1}{2}, x_2, x_3\right) - C_1 \left(x_1 - \frac{dx_1}{2}, x_2, x_3\right) \right] dx_2 dx_3 \\ &= \left[\left(C_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) - \left(C_1(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) \right] dx_2 dx_3 \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

Ao procedermos da mesma forma com as outras quatro faces, obtemos:

$$\int \hat{n} \cdot \vec{C}(\vec{r}) ds = \left(\frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \frac{\partial C_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

Como $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, segue que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int \hat{n} \cdot \vec{C}(\vec{r}) dA = \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \frac{\partial C_3}{\partial x_3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C}(\vec{r}) = \partial_i C_i$$

Um campo vetorial \vec{U} com divergência nula, $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$, é denominado **campo solenoidal**.

2.8.3 Rotacional

Antes de apresentarmos a definição do rotacional e discutirmos algumas de suas peculiaridades, convém definirmos uma grandeza chamada **circulação**. Considere uma curva fechada C delimitando uma região R do espaço no instante de tempo $t = 0$, como exemplificado na Figura 2.13. Nesse caso, \hat{t} e \vec{u} correspondem, respectivamente, ao vetor tangente à curva C e ao vetor velocidade junto à curva.

Ao considerarmos o elemento de curva dl , a circulação Γ é definida como:

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{u} \cdot \hat{t} dl \quad (2.39)$$

Ao considerarmos o fato de a circulação poder variar ao longo do tempo, o **teorema da circulação de Kelvin** define:

$$\Gamma_{C_t} = \oint_{C_t} \vec{u} \cdot \hat{t} dl \quad (2.40)$$

O teorema afirma que a circulação Γ_{C_t} em torno de um caminho fechado em um fluido em rotação é constante no tempo, desde que não haja forças externas atuando sobre o fluido.

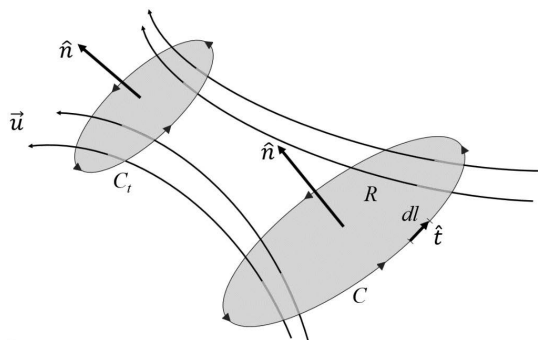


Figura 2.13 Representação da circulação.

Fonte: elaborada pelos autores.

Vamos examinar três diferentes situações envolvendo a obtenção da circulação em campos de velocidade em duas dimensões. Na primeira situação (Figura 2.14), vamos considerar um escoamento com velocidade $\vec{u} = u_{x_2} \hat{e}_2$. Primeiramente, vamos decompor a curva C em quatro curvas distintas com seus vetores tangentes.

$$\Gamma_C = \int_{C_1} (u_{x_2} \hat{e}_2 \cdot \hat{t}_1) dl_1 + \int_{C_2} (u_{x_2} \hat{e}_2 \cdot \hat{t}_2) dl_2 + \int_{C_3} (u_{x_2} \hat{e}_2 \cdot \hat{t}_3) dl_3 + \int_{C_4} (u_{x_2} \hat{e}_2 \cdot \hat{t}_4) dl_4$$

Obviamente, as componentes \hat{t}_1 e \hat{t}_3 são perpendiculares ao campo de velocidade, resultando que as parcelas de circulação das faces C_1 e C_3 sejam iguais a zero. Já as componentes \hat{t}_2 e \hat{t}_4 encontram-se na mesma direção, mas em sentidos opostos. Dessa forma:

$$\Gamma_C = 0 - u_{x_2} l_2 + 0 + u_{x_2} l_4$$

$$\Gamma_C = 0$$

Esse resultado já era esperado, pois, uma vez que o campo de velocidade é constante ao longo do espaço, não há como existir circulação nesse campo.

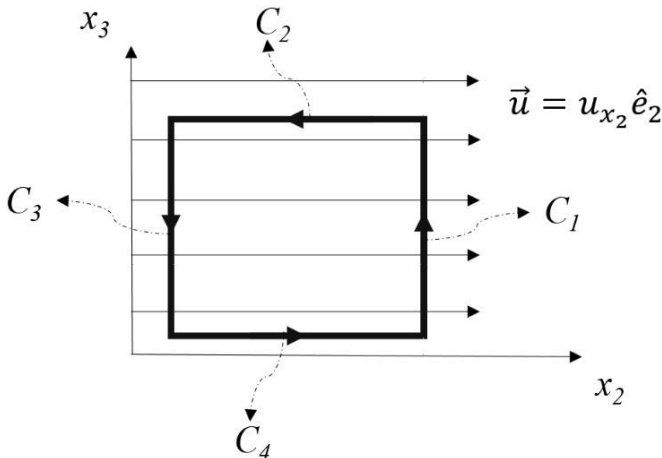


Figura 2.14 Curva fechada imersa em um campo de velocidade unidimensional constante.

Fonte: elaborada pelos autores.

Em um segundo exemplo, vamos considerar um campo de velocidade $\vec{u} = z \hat{e}_2$ mostrado na Figura 2.15.

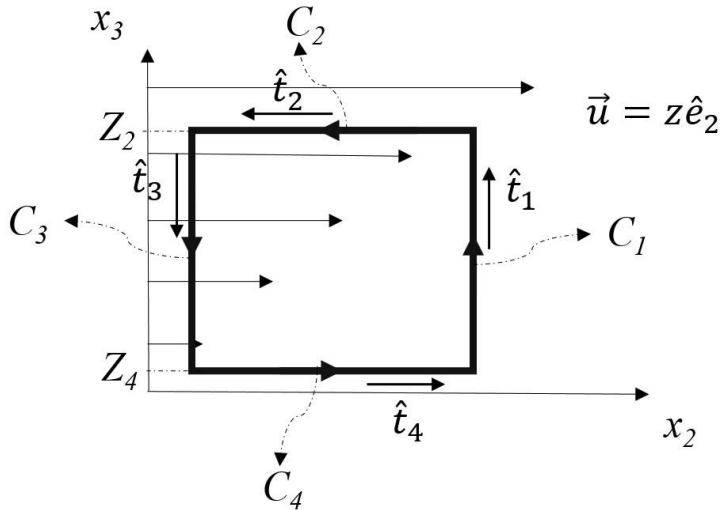


Figura 2.15 Curva fechada imersa em um campo de velocidade unidimensional variando na direção da componente x_3 .

Fonte: elaborada pelos autores.

Considerando as mesmas componentes,

$$\Gamma_C = \int_{C_1} (Z\hat{e}_2 \cdot \hat{t}_1) dl_1 + \int_{C_2} (Z\hat{e}_2 \cdot \hat{t}_2) dl_2 + \int_{C_3} (Z\hat{e}_2 \cdot \hat{t}_3) dl_3 + \int_{C_4} (Z\hat{e}_2 \cdot \hat{t}_4) dl_4$$

Nesse caso,

$$\Gamma_C = 0 - Z_2 l_2 + 0 + Z_4 l_4,$$

E, como $l_2 = l_4$,

$$\Gamma_C = (Z_4 - Z_2)l$$

O fato de o campo de velocidade aumentar linearmente em relação à componente x_3 tem como consequência a presença de uma circulação não nula.

Por fim, vamos considerar um terceiro exemplo para sistema de coordenadas cilíndrico. Nesse caso, vamos considerar um campo de velocidade linearmente proporcional

ao raio com origem no centro do sistema de coordenadas, com orientação na componente \hat{e}_θ : $\vec{u} = \Omega r \hat{e}_\theta$, como mostrado na Figura 2.16.

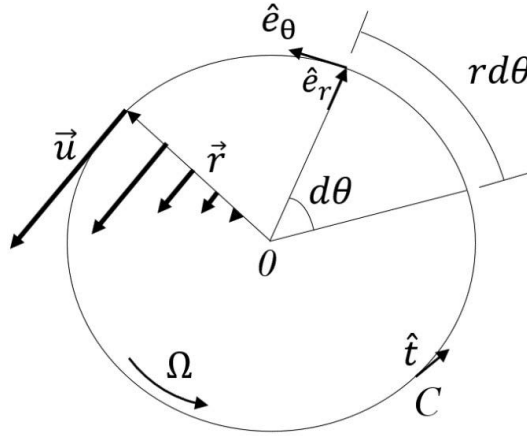


Figura 2.16 Campo de velocidade centrado em O com uma velocidade angular Ω .

Fonte: elaborada pelos autores.

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{u} \cdot \hat{i} \, dl$$

Nesse caso, é importante perceber que $\hat{i} = \hat{e}_\theta$ e que $dl = r \, d\theta$. Assim,

$$\Gamma_C = \oint_0^{2\pi} \Omega r \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta r \, d\theta$$

$$\Gamma_C = 2\pi\Omega r^2$$

Ao tomarmos a definição matemática do rotacional de um campo vetorial \vec{U} qualquer:

$$\hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r})) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \int_S \hat{n} \cdot \vec{U}(\vec{r}) \, dl = \frac{\Gamma_C}{\Delta S} \quad (2.41)$$

Podemos concluir que o rotacional de um campo vetorial cuja normal a uma região plana delimitada por uma curva fechada C em um dado ponto O corresponde à circulação do campo por unidade de área. Se considerarmos o terceiro exemplo dado na Figura 2.16, com o vetor normal sendo \hat{k} , temos que:

$$\begin{aligned}
 \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{r})) &= (\vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{r})) \cdot \hat{k} \\
 &= (\partial_i \hat{e}_i \times u_j \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_k \\
 &= \partial_i (u_j \epsilon_{ijl} \hat{e}_l) \cdot \hat{e}_k \\
 \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{r})) &= \partial_i u_j \epsilon_{ijk}
 \end{aligned}$$

No caso em que $\vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{r}) = 0$, o campo vetorial é denominado **irrotacional**.

2.8.4 Teoremas integrais

Alguns teoremas são fundamentais na compreensão do comportamento de campos escalares ou vetoriais em um determinado espaço delimitado, por sua vez, por uma superfície fechada. O caso generalizado de uma classe de teoremas integrais é chamado **teorema de Gauss**, dado por:

$$\int_V \nabla * \phi dV = \int_S \hat{n} * \phi dS \quad (2.42)$$

onde ϕ corresponde a um campo escalar, vetorial ou tensorial e $*$ a uma operação qualquer.

Para o caso de um campo escalar φ qualquer, temos:

$$\int_V \nabla \varphi dV = \int_S \hat{n} \varphi dS \quad (2.43)$$

Se tanto o campo quanto a operação forem vetoriais, temos:

$$\int_V \nabla \times \vec{U} dV = \int_S \hat{n} \times \vec{U} dS \quad (2.44)$$

Já para o caso de um campo vetorial com operação sendo o produto escalar, temos o **teorema da divergência**:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{U} dV = \int_S \hat{n} \cdot \vec{U} dS \quad (2.45)$$

De fato, o teorema da divergência (muitas vezes chamado de teorema de Gauss) é de suma importância para a mecânica dos fluidos, pois mostra que “o escoamento líquido de um campo vetorial (um campo de velocidade, por exemplo) através de uma superfície fechada é igual à integral do divergente desse campo sobre o volume delimitado pela superfície”.

Vamos demonstrar o teorema da divergência por meio de um exemplo, considerando um campo de velocidade dado por: $\vec{U} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3$ atravessando uma casca semiesfera de raio unitário $R = 1$, conforme ilustrado na Figura 2.17.

Nesse caso, a superfície S é constituída por duas partes distintas: a tampa (localizada sobre o plano x_1x_2) e a superfície da semiesfera. Logo, o escoamento líquido através de S é dado por:

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{U} dS = \int_{S, \text{tampa}} \hat{n}_{\text{tampa}} \cdot \vec{U} dS + \int_{S, \text{semiesf}} \hat{n}_{\text{semiesf}} \cdot \vec{U} dS$$

onde:

$$\hat{n}_{\text{tampa}} = -\hat{e}_3, \quad \hat{n}_{\text{semiesf}} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3$$

$$\begin{aligned} \int_{S, \text{tampa}} \hat{n}_{\text{tampa}} \cdot \vec{U} dS &= \int_{S, \text{tampa}} (-\hat{e}_3) \cdot (x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3) dS \\ &= \int_{S, \text{tampa}} z dS = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S, \text{semiesf}} \hat{n}_{\text{semiesf}} \cdot \vec{U} dS &= \int_{S, \text{semiesf}} (x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3) \cdot (x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3) dS \\ &= \int_{S, \text{semiesf}} (x^2 + y^2 + z^2) dS \\ &= \int_{S, \text{semiesf}} r^2 dS \\ &= \frac{4\pi R^2}{2} = 2\pi \end{aligned}$$

Como:

$$\nabla \cdot \vec{U} = \nabla \cdot (x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3) = 3,$$

o lado esquerdo do teorema é dado por:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{U} \, dV &= \int_V 3 \, dV \\ &= \frac{3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{2} = 2\pi \end{aligned}$$

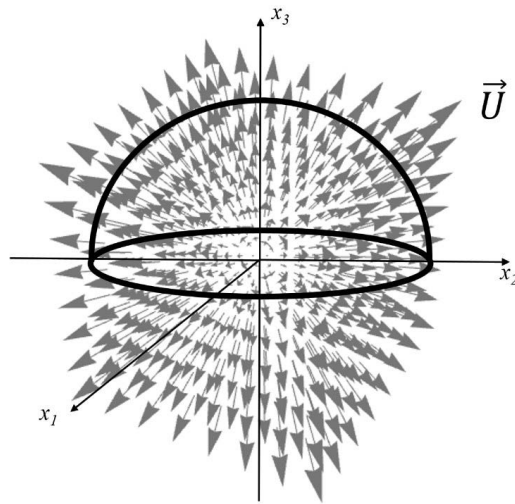


Figura 2.17 Campo \vec{U} de velocidade transpassando a casca semiesférica de raio $R = 1$.

Fonte: elaborada pelos autores.

Na Equação (2.41), ao considerarmos ΔS tendendo a zero, podemos reescrevê-la na forma:

$$\hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r})) \, dS = \int_S \hat{n} \cdot \vec{U}(\vec{r}) \, dl \quad (2.46)$$

Se considerarmos uma superfície aberta, orientável e seccionalmente suave, como mostrado na Figura 2.18, obtemos a equação que descreve o **teorema de Stokes**:

$$\int_S \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r})) dS = \int_C \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl \quad (2.47)$$

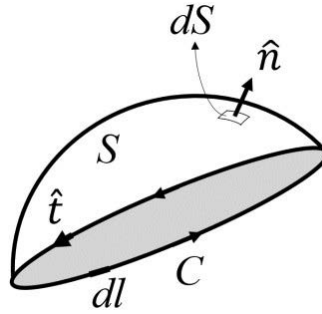


Figura 2.18 Exemplo de superfície aberta, orientável e seccionalmente suave.

Fonte: elaborada pelos autores.

A conclusão a que chegamos é que o teorema de Stokes diz que “a soma de todos os rotacionais ao longo de todos os elementos de superfície é igual à soma das projeções do campo vetorial em relação à componente tangencial da curva C da superfície, que, por sua vez, é igual à circulação”.

Para reforçar essa definição, vamos considerar um exemplo com uma curva fechada C , formada pelas curvas C_1 e C_2 , como mostrado na Figura 2.19.

Nesse caso, a circulação será dada por

$$\int_C \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl = \int_{C_1} \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl - \int_{C_2} \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl$$

Pelo teorema de Stokes, temos que

$$\int_S \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r})) dS = \int_{C_1} \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl - \int_{C_2} \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl$$

Para o caso de um campo irrotacional ($\vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r}) = 0$), concluímos que

$$\int_{C_1} \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl = \int_{C_2} \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl$$

indicando que a integral aberta entre dois pontos quaisquer independe do caminho. De maneira geral, para qualquer caminho escolhido, temos que

$$\int_C \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)$$

Ainda, se C for uma curva fechada, temos

$$\oint_C \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl = 0$$

Se considerarmos duas posições muito próximas entre si, \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$, temos que \vec{U} passa a ser uma constante, e

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = d\varphi = \vec{U} \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \hat{t} dl$$

Como $\hat{t} dl = d\vec{r}$

$$d\varphi = \vec{U} \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} d\vec{r}$$

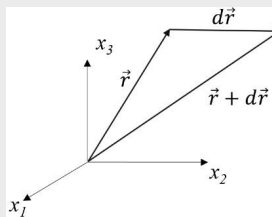
$$d\varphi = \vec{U} \cdot d\vec{r}$$

Como $d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r}$

$$\vec{U} \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{U} = \vec{\nabla}\varphi$$

onde φ corresponde a um campo escalar potencial de \vec{U} .



Com base nesse exemplo simples, podemos concluir que, para um campo irrotacional:

- $\vec{U} = \vec{\nabla}\varphi$ (o campo vetorial é igual ao gradiente de uma função potencial).
- $\int_C \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl$ independe da curva C escolhida.
- $\oint_C \hat{t} \cdot \vec{U}(\vec{r}) dl$ é sempre nula, pois \vec{U} corresponde a um campo conservativo.

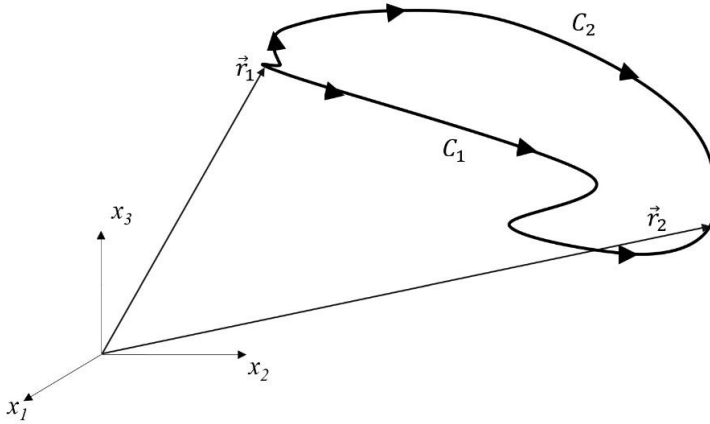


Figura 2.19 Curva fechada C formada por duas curvas distintas C_1 e C_2 , delimitadas pelos vetores posição \vec{r}_1 e \vec{r}_2 .

Fonte: elaborada pelos autores.

2.9 DEFINIÇÃO MATEMÁTICA DE UM VETOR

Conforme mencionado anteriormente, o princípio da invariância garante que tanto a magnitude quanto a orientação de um vetor independem do sistema de referência adotado. Dessa forma,

$$\vec{U} = U_i \hat{e}_i = U'_j \hat{e}'_j \quad (\text{o vetor é o mesmo tanto no sistema } \hat{e}_i \text{ quanto no sistema } \hat{e}'_j).$$

Ao conhecermos as componentes U_i , podemos obter as componentes U'_j por meio da relação entre \hat{e}_i e \hat{e}'_j :

Com base nas projeções, podemos afirmar que:

$$\vec{U} = U_i \hat{e}_i = U_1 \hat{e}_1 + U_2 \hat{e}_2$$

$$U'_1 = \hat{e}'_1 \cdot \vec{U} = \hat{e}'_1 \cdot U_i \hat{e}_i = \hat{e}'_1 \cdot (U_1 \hat{e}_1 + U_2 \hat{e}_2)$$

$$U'_2 = \hat{e}'_2 \cdot \vec{U} = \hat{e}'_2 \cdot U_i \hat{e}_i = \hat{e}'_2 \cdot (U_1 \hat{e}_1 + U_2 \hat{e}_2)$$

Se considerarmos que:

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 = \cos(\theta)$$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 = \cos(\theta)$$

Convencionando:

$$\Gamma_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j,$$

temos:

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 \\ \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

De maneira geral:

$$\vec{U} = U_i \hat{e}_i$$

Como:

$$U'_j = \Gamma_{ij} U_i$$

e:

$$U_i = \Gamma_{ik} U'_k,$$

concluimos que:

$$U'_j = \Gamma_{ij} \Gamma_{ik} U'_k$$

Como se pode demonstrar que:

$$\Gamma_{ij} \Gamma_{ik} = \delta_{jk},$$

vamos considerar $j = 1$ e $k = 2$, logo:

$$\Gamma_{11}\Gamma_{12} + \Gamma_{21}\Gamma_{22} = 0$$

ou:

$$\cos(\theta)(-\sin(\theta)) + \cos(\theta)\sin(\theta) = 0$$

Por outro lado, se considerarmos $j = k = 1$, temos:

$$\Gamma_{11}\Gamma_{11} + \Gamma_{21}\Gamma_{21} = 1$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Por fim, podemos dar uma definição para um vetor qualquer:

Um vetor é um agente ou entidade matemática que associa um escalar a uma determinada orientação no espaço por meio da transformação:

$$U_s = \hat{s} \cdot \vec{U}$$

2.10 DEFINIÇÃO MATEMÁTICA DE UM TENSOR

A partir da última definição apresentada de vetor, percebemos a necessidade de associarmos um escalar a uma determinada orientação no espaço por meio de um vetor. Já quando surge a necessidade de associarmos um vetor a uma orientação espacial, precisaremos de um agente matemático chamado **tensor**.

Um tensor de segunda ordem em um sistema cartesiano, por exemplo, é um agente matemático contendo 9 componentes que se transforma conforme a representação:

$$T'_{ij} = C_{mi} C_{nj} T_{mn},$$

quando o sistema de coordenadas se transforma de acordo com:

$$\chi'_j = \Gamma_{ij} \chi_i$$

A relação entre um vetor e um tensor pode fornecer uma compreensão mais física de um tensor:

Um tensor é um agente ou entidade matemática que associa um vetor a uma determinada orientação no espaço por meio da transformação:

$$\hat{t}_s = \hat{s} \cdot \overline{\overline{T}}$$

Em suma, concluímos que:

$\varphi \rightarrow$ tensor de ordem zero

$\vec{U} \rightarrow$ tensor de primeira ordem $\vec{U} = U_i \hat{e}_i$

$\mathbf{T} \rightarrow$ tensor de segunda ordem $\mathbf{T} = T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$

$\overline{\overline{T}} \rightarrow$ tensor de terceira ordem $\overline{\overline{T}} = T_{ijk} \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k$

Note que:

$$\vec{t}_i = \hat{e}_i \cdot \mathbf{T} = \hat{e}_i \cdot (T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k) = T_{jk} \delta_{ij} \hat{e}_k = T_{ik} \hat{e}_k$$

$$\vec{t}_i = T_{i1} \hat{e}_1 + T_{i2} \hat{e}_2 + T_{i3} \hat{e}_3$$

Para $\vec{t}_i \cdot \hat{e}_2$, por exemplo, nós temos: $\vec{t}_i \cdot \hat{e}_2 = T_{i2}$

2.10.1 Produto escalar

$$\vec{u} \cdot \overline{\overline{T}} = (u_i \hat{e}_i) \cdot (T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k) \quad (2.48)$$

$$(u_i \hat{e}_i) \cdot (T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k) = u_i T_{jk} \delta_{ij} \hat{e}_k = u_i T_{ik} \hat{e}_k$$

$$\overline{\overline{T}} \cdot \vec{u} = (T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k) \cdot (u_i \hat{e}_i) \quad (2.49)$$

$$(T_{jk}\hat{e}_j\hat{e}_k) \cdot (u_i\hat{e}_i) = u_i T_{jk} \delta_{ki} \hat{e}_j = u_i T_{ji} \hat{e}_j = u_i T_{ki} \hat{e}_k$$

$$\overline{\overline{T}} \cdot \overline{\overline{U}} = (T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j) \cdot (U_{km}\hat{e}_k\hat{e}_m) \quad (2.50)$$

$$(T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j) \cdot (U_{km}\hat{e}_k\hat{e}_m) = T_{ij} U_{km} \delta_{jk} \hat{e}_i \hat{e}_m = T_{ij} U_{jm} \hat{e}_i \hat{e}_m$$

$$\overline{\overline{U}} \cdot \overline{\overline{T}} = (U_{km}\hat{e}_k\hat{e}_m) \cdot (T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j) \quad (2.51)$$

$$(U_{km}\hat{e}_k\hat{e}_m) \cdot (T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j) = T_{ij} U_{km} \delta_{mi} \hat{e}_k \hat{e}_j = T_{ij} U_{ki} \hat{e}_k \hat{e}_j$$

2.10.2 Produto vetorial

$$\vec{u} \times \overline{\overline{T}} = u_i \vec{e}_i \times T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k \quad (2.52)$$

$$u_i \vec{e}_i \times T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k = u_i T_{jk} \epsilon_{ijm} \hat{e}_m \hat{e}_k$$

$$\overline{\overline{T}} \times \vec{u} = (T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k) \times (u_i \vec{e}_i) \quad (2.53)$$

$$(T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k) \times (u_i \vec{e}_i) = u_i T_{jk} \epsilon_{kim} \hat{e}_j \hat{e}_m$$

$$\overline{\overline{U}} \times \overline{\overline{T}} = (U_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j) \times (T_{km} \vec{e}_k \vec{e}_m) \quad (2.54)$$

$$(U_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j) \times (T_{km} \vec{e}_k \vec{e}_m) = U_{ij} T_{km} \epsilon_{jkl} \hat{e}_i \hat{e}_l \hat{e}_m$$

2.10.3 Produto tensorial (díade)

Este terceiro produto consiste em uma operação entre dois vetores de dimensões m e n que resulta em um tensor de dimensão $m \times n$:

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = [u_i][v_i^T] \quad (2.55)$$

$$[u_i][v_i^T] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix}$$

Tomamos como exemplo:

$$\begin{aligned} \vec{u} \otimes \vec{v} &= (3\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2)(-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) \\ &= -3\hat{e}_1\hat{e}_1 + 6\hat{e}_1\hat{e}_2 - 4\hat{e}_2\hat{e}_1 + 8\hat{e}_2\hat{e}_2 \end{aligned}$$

2.10.4 Produto escalar duplo ou dupla contração

Considere os vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} . Podemos formar, por exemplo, as diádicas:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b}, \quad \vec{c} \otimes \vec{d} = \vec{c}\vec{d}.$$

Define-se como produto escalar duplo ou dupla contração; definição esta geralmente encontrada em textos de mecânica do contínuo e que segue a definição original de Gibbs:

$$\vec{a}\vec{b} : \vec{c}\vec{d} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) \quad (2.56)$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) = a_i \hat{e}_i \cdot c_k \hat{e}_k \quad b_j \hat{e}_j \cdot d_l \hat{e}_l = a_i b_j c_k d_l \delta_{ik} \delta_{jl} = a_i b_j c_i d_j$$

Realizando uma dupla contração entre dois tensores de segunda ordem, $\overline{\overline{R}}$ e $\overline{\overline{S}}$, teremos:

$$\overline{\overline{R}} : \overline{\overline{S}} = R_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j : S_{kl} \hat{e}_k \hat{e}_l = R_{ij} S_{kl} \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k \quad \hat{e}_j \cdot \hat{e}_l = R_{ij} S_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = R_{ij} S_{ij} \quad (2.57)$$

A dupla contração entre duas diádicas ou entre dois tensores de segunda ordem dá origem a um escalar. Uma segunda definição de duplo produto escalar ou dupla contração é encontrada em vários textos de mecânica dos fluidos, na forma:

$$\vec{a}\vec{b} : \vec{c}\vec{d} = (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (2.58)$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) = a_i \hat{e}_i \cdot d_l \hat{e}_l \ b_j \hat{e}_j \cdot c_k \hat{e}_k = a_i b_j c_k d_l \delta_{il} \delta_{jk} = a_i b_j c_j d_i$$

Esta segunda definição é equivalente à primeira definição fazendo a dupla contração:

$$\vec{a}\vec{b} : (\vec{c}\vec{d})^T = \vec{a}\vec{b} : \vec{d}\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (2.59)$$

Em textos de mecânica dos fluidos, usando coordenadas cartesianas, os duplos produtos escalares geralmente encontrados são feitos entre tensores simétricos, e a primeira ou a segunda definição leva a resultados idênticos. Em cada texto, deve-se seguir a definição adotada pelo autor. Alternativamente, pode-se obter a dupla contração entre dois tensores de segunda ordem como o traço do tensor obtido de uma contração simples entre o transposto de um deles e o outro.

$$\overline{\overline{R}} : \overline{\overline{S}} = \text{tr}(\overline{\overline{R}}^T \cdot \overline{\overline{S}}) = \text{tr}(\overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{S}}^T) = \text{tr}(\overline{\overline{S}}^T \cdot \overline{\overline{R}}) = \text{tr}(\overline{\overline{S}} \cdot \overline{\overline{R}}^T)$$

Em suma, concluímos que:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} \rightarrow$ tensor de ordem zero ou um escalar.
- $\vec{u} \times \vec{v} \rightarrow$ tensor de primeira ordem ou um vetor.
- $\vec{u} \otimes \vec{v} \rightarrow$ tensor de segunda ordem ou diádica.
- $\vec{a}\vec{b} : \vec{c}\vec{d} \rightarrow$ tensor de ordem zero ou um escalar.
- $\overline{\overline{R}} : \overline{\overline{S}} \rightarrow$ tensor de ordem zero ou um escalar.

2.10.5 Tensor simétrico e antissimétrico

Todo tensor de segunda ordem pode ser decomposto em um tensor simétrico e outro antissimétrico. Por definição:

- Se $T_{ij} = T_{ji}$, o tensor é **simétrico** (S_{ij}).
- Se $T_{ij} = -T_{ji}$, o tensor é **antissimétrico** (A_{ij}).

Assim:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \quad (2.60)$$

onde:

$$S_{ij} = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} \quad (2.61)$$

e:

$$A_{ij} = \frac{T_{ij} - T_{ji}}{2} \quad (2.62)$$

2.10.6 Tensores especiais

O **tensor transposto** de T_{ij} é definido como:

$$\overline{\overline{T}} = T_{ji} \hat{e}_i \hat{e}_j \quad (2.63)$$

Observe que:

$$\vec{u} \cdot \overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}} \cdot \vec{u}$$

O **tensor identidade** (simétrico) e o **tensor permutação** (antissimétrico) são dados pelas Equações (2.64) e (2.65), respectivamente:

$$\overline{\overline{I}} = \delta_{ji} \hat{e}_i \hat{e}_j \quad (2.64)$$

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k \quad (2.65)$$

O conceito de isotropia está relacionado com a independência de uma grandeza em relação à sua orientação espacial. Um **tensor** é considerado **isotrópico** se suas componentes não se alteram com a rotação do sistema de coordenadas. Ainda, em relação à isotropia, podemos destacar que:

- a) Todo tensor de ordem zero é isotrópico.
 b) Não existem tensores de primeira ordem que sejam isotrópicos (com exceção do vetor nulo).
 c) Todo tensor de qualquer ordem é isotrópico se suas componentes forem nulas.
 d) Todo tensor isotrópico de segunda ordem pode ser escrito como um múltiplo de um tensor identidade:

$$\bar{\bar{U}} = \alpha \bar{\bar{I}}$$

- e) Todo tensor isotrópico de terceira ordem pode ser escrito como um múltiplo de um tensor permutação:

$$\bar{\bar{\bar{U}}} = \beta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}}$$

- f) Todo tensor isotrópico de quarta ordem pode ser escrito como uma combinação linear:

$$\bar{\bar{\bar{\bar{U}}}} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}$$

Todo tensor simétrico de segunda ordem pode ser representado na forma:

$$\bar{\bar{T}} = \sigma \bar{\bar{I}} \quad (2.66)$$

onde σ corresponde a uma grandeza escalar. Mas, para isso, um sistema de coordenadas ortonormal deve ser encontrado, no qual os vetores associados pelo tensor às direções e sentidos dados pelos eixos de coordenadas sejam paralelos a esses eixos. Esse sistema de coordenadas é chamado de **eixo principal do tensor**. Se considerarmos $\hat{\vartheta}$ o vetor alinhado ao sistema de eixo principal do tensor, temos:

$$\hat{\vartheta} \cdot \bar{\bar{T}} = \sigma \hat{\vartheta} \quad (2.67)$$

Pela notação indicial,

$$\vartheta_i T_{ij} = \sigma \delta_{ij} \vartheta_i \quad (2.68)$$

ou

$$(T_{ij} - \sigma \delta_{ij}) \vartheta_i = 0 \quad (2.69)$$

Uma solução não trivial será possível se considerarmos nulo o determinante das componentes entre parênteses junto ao lado esquerdo da Equação (2.65).

$$\det \left(\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\epsilon_{ijk} (T_{1i} - \sigma \delta_{1i})(T_{2j} - \sigma \delta_{2j})(T_{3k} - \sigma \delta_{3k}) = 0$$

Cuja solução é dada pela equação característica do tensor,

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.70)$$

onde I_1, I_2 e I_3 correspondem aos três invariantes do tensor.

- $I_1 = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{tr} \bar{\bar{T}}$ (traço do tensor $\bar{\bar{T}}$)
- $I_2 = \frac{(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji})}{2} = \frac{(\text{tr}^2 \bar{\bar{T}} - \text{tr} \bar{\bar{T}}^2)}{2}$
- $I_3 = \epsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k} = \det \bar{\bar{T}}$

Ao obtermos as raízes de σ_i (autovalores de $\bar{\bar{T}}$), podemos reescrever o tensor na forma:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Dado um exemplo de tensor

$$U_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

vamos encontrar um sistema de coordenadas onde tal tensor pode ser reescrito na forma de um tensor diagonal.

Logo,

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \sigma & 0 & 4 \\ 0 & 3 - \sigma & 1 \\ 1 & 5 & -\sigma \end{bmatrix} = -\sigma^3 + 5\sigma^2 + 8\sigma - 22 = 0,$$

cujas soluções são:

$$\sigma_1 = \frac{7 + \sqrt{5}}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}, \quad \sigma_3 = -2$$

Assim, o tensor pode ser reescrito na forma:

$$U_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{7+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2.10.7 Sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais

Como mencionado anteriormente, o princípio da invariância garante a imutabilidade de um vetor independentemente do sistema de coordenadas adotado. Em muitas situações, sistemas curvilíneos ortogonais (não cartesianos), como coordenadas cilíndricas ou esféricas, podem ou devem ser adotados para a análise de um determinado problema fluidodinâmico. Sabemos que, em sistemas cartesianos, um vetor de base qualquer independe de sua posição, e a variação de uma de suas componentes em relação a um dos eixos ortogonais é nula. Ou seja,

$$\partial_i \hat{e}_j = 0$$

Contudo, se $\partial_i \hat{e}_j$ não for nulo para qualquer valor de i e j , esse sistema será chamado de **curvilíneo**. Para um sistema polar, por exemplo, temos

$$\begin{aligned} \partial_r \hat{e}_r &= \partial_r \hat{e}_\theta = 0 \\ \partial_\theta \hat{e}_\theta &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\partial_{\theta} \hat{e}_r \neq 0$$

Conseqüentemente, para expressarmos as equações vetoriais em um sistema de coordenadas curvilíneas, precisaremos de uma expressão para o operador *nabla*, bem como a dependência dos vetores de base em relação à posição.

2.10.7.1 Determinação do operador nabla

A partir do vetor posição no novo sistema de coordenadas,

$$\vec{r} = F_i u_i \hat{e}_i \quad (2.72)$$

onde F_i representa um fator de escala. Já que as componentes u_i podem não corresponder a dimensões do sistema, podemos expressar $d\vec{r}$ no novo sistema de coordenadas:

$$d\vec{r} = F_i du_i \hat{e}_i \quad (2.73)$$

Convém destacar que, para um sistema cartesiano, temos:

$$(d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \quad (2.74)$$

Já para o sistema curvilíneo:

$$(d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = (F_1 du_1)^2 + (F_2 du_2)^2 + (F_3 du_3)^2 \quad (2.75)$$

Como a variação de dx_1 em termos das variações das componentes du_i , por exemplo, é dada por:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x_1}{\partial u_3} du_3$$

de forma geral, temos

$$dx_m = \frac{\partial x_m}{\partial u_j} du_j \quad (2.76)$$

Logo,

$$\left(\frac{\partial x_m}{\partial u_j} du_j\right) \cdot \left(\frac{\partial x_m}{\partial u_k} du_k\right) = F_i^2 du_i du_i \quad (2.77)$$

Já na forma de um produto escalar, temos

$$\left(\frac{\partial x_m}{\partial u_j} du_j \hat{e}_m\right) \cdot \left(\frac{\partial x_n}{\partial u_k} du_k \hat{e}_n\right) = F_i^2 du_i du_i \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x_m}{\partial u_j} \hat{e}_m\right) \cdot \left(\frac{\partial x_n}{\partial u_k} \hat{e}_n\right) du_j du_k &= F_i^2 du_i du_i \\ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} \hat{e}_m\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \hat{e}_n\right) du_j du_k &= F_i^2 du_i du_i \end{aligned}$$

Uma vez que esse sistema curvilíneo é ortogonal ($i \neq j$), temos

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k}\right) = 0 \quad (2.79)$$

Na Equação (2.73), somente os termos $j = k$ permanecerão.

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)^2\right] du_1^2 + \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_2}\right)^2\right] du_2^2 + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_3}\right)^2\right] du_3^2 = F_1^2 du_1^2 + F_2^2 du_2^2 + F_3^2 du_3^2 \end{aligned}$$

Como as coordenadas são independentes, concluímos que o fator de escala é dado por

$$F_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_i}\right)^2} \quad (2.80)$$

Agora vamos definir a representação de $d\vec{r}$ no sistema com as componentes u_i , com base no sistema de coordenadas polares apresentado na Figura 2.21.

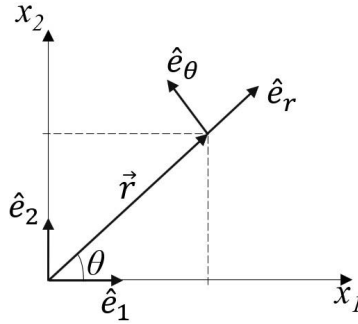


Figura 2.21 Sistema de coordenadas polares.

Fonte: elaborada pelos autores.

Nesse caso,

$$x = x_1 = \underbrace{r}_{u_1} \cos\left(\underbrace{\theta}_{u_2}\right)$$

$$y = x_2 = r \operatorname{sen}(\theta) \quad \Rightarrow \quad x_2 = u_1 \operatorname{sen}(u_2)$$

Logo,

$$F_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2} = \sqrt{\cos^2(u_2) + \operatorname{sen}^2(u_2)} = 1$$

$$F_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\right)^2} = \sqrt{(-u_1 \operatorname{sen}(u_2))^2 + (u_1 \cos(u_2))^2}$$

$$= u_1 \sqrt{(-\operatorname{sen}^2(u_2)) + \cos^2(u_2)} = u_1 = r$$

Então, nesse caso:

$$d\vec{r} = F_1 du_1 \hat{e}_1 + F_2 du_2 \hat{e}_2$$

$$d\vec{r} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta$$

Como $d\vec{r}$ está associado a uma função potencial φ , temos

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} du_3 \quad (2.81)$$

Então,

$$(F_1 du_1 \hat{e}_1 + F_2 du_2 \hat{e}_2 + F_3 du_3 \hat{e}_3) \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} du_3 \quad (2.82)$$

E, ao multiplicarmos a componente \hat{e}_i pelo gradiente de φ , temos

$$\hat{e}_i \cdot \vec{\nabla} \varphi = \frac{1}{F_i} \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} \quad (2.83)$$

Logo,

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{1}{F_1} \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{F_2} \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{F_3} \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} \hat{e}_3 \quad (2.84)$$

Em suma, temos o gradiente nas coordenadas polar, cilíndrica (Figura 2.22(a)) e esférica (Figura 2.22(b)) dado pelas Equações (2.85), (2.86) e (2.87), respectivamente.

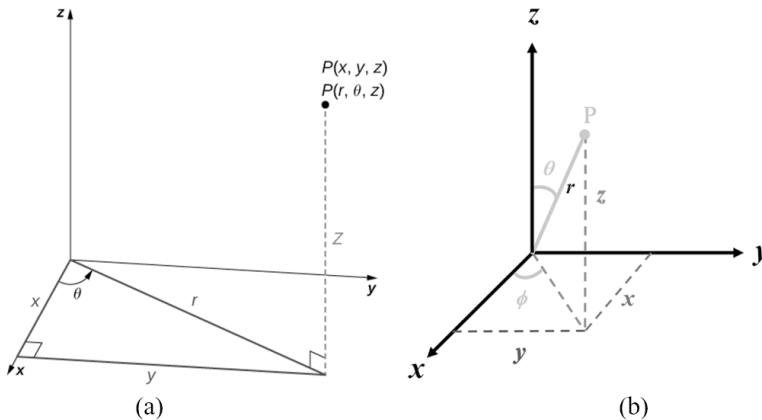


Figura 2.22 Sistema de coordenadas: (a) cilíndricas, (b) esféricas.

Fonte: elaborada pelos autores.

$$\nabla \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \quad (2.85)$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{e}_z \quad (2.86)$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi \quad (2.87)$$

2.10.7.2 Determinação da dependência dos vetores de base

Por fim, precisaremos analisar a dependência dos vetores de base em relação ao sistema de coordenadas. Observando as projeções dos vetores unitários da Figura 2.21, temos:

$$\hat{e}_r = \hat{e}_1 \cos(\theta) + \hat{e}_2 \sin(\theta)$$

$$\hat{e}_\theta = -\hat{e}_1 \sin(\theta) + \hat{e}_2 \cos(\theta)$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial r} = 0$$

Porém,

$$\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta} = -\hat{e}_1 \sin(\theta) + \hat{e}_2 \cos(\theta) = \hat{e}_\theta$$

$$\frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\theta} = -\hat{e}_1 \cos(\theta) - \hat{e}_2 \sin(\theta) = -\hat{e}_r$$

De forma geral, podemos escrever:

$$\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial u_j} = \frac{\hat{e}_j}{F_i} \frac{\partial F_j}{\partial u_i} - \delta_{ij} \nabla F_i \quad (2.88)$$

onde \hat{e}_i , \hat{e}_j e ∇F_i pertencem ao novo sistema de coordenadas.

Assim, podemos reescrever o divergente, o rotacional e o laplaciano de um escalar da seguinte maneira:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{F_1 F_2 F_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 F_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_1 F_3 V_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_1 F_2 V_3) \right] \quad (2.89)$$

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{F_1 F_2 F_3} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 F_1 & \hat{e}_2 F_2 & \hat{e}_3 F_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ F_1 V_1 & F_2 V_2 & F_3 V_3 \end{vmatrix} \quad (2.90)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{F_1 F_2 F_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{F_2 F_3}{F_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{F_1 F_3}{F_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{F_1 F_2}{F_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \right) \right] \quad (2.91)$$

A dependência dos vetores de base pode ter implicações relevantes na resolução de sistemas de equações lineares e na determinação da dimensão de um espaço vetorial. É importante notar que a independência dos vetores de base é uma condição necessária para que eles formem uma base, mas não é suficiente. A base também deve ser ortogonal para que possamos determinar facilmente as coordenadas de um vetor em relação a essa base.

Em suma, a dependência dos vetores de base é uma condição em que pelo menos um vetor de uma base pode ser expresso como combinação linear dos outros vetores de base. Isso pode ter implicações importantes na álgebra linear e na geometria, e é necessário para determinar um conjunto de vetores que formam uma base em um espaço vetorial.

Existem outras operações envolvendo o operador nabla que são de interesse em mecânica dos fluidos, por exemplo, a operação de produto diádico entre nabla e um vetor e a divergência de um tensor, definidas como $\nabla \vec{V}$ e $\nabla \cdot \overline{\overline{T}}$, respectivamente. Se usarmos o operador para um sistema de coordenadas não cartesiano, podemos demonstrar que o tensor $\nabla \vec{V} = \sum_i \frac{\hat{e}_i}{F_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \hat{e}_j + V_j \frac{\partial \hat{e}_j}{\partial x_i} \right)$ é:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{V} = & \frac{\hat{e}_1}{F_1} \left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial u_1} + \frac{V_2}{F_2} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} + \frac{V_3}{F_3} \frac{\partial F_1}{\partial u_3} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial u_1} - \frac{V_1}{F_2} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial u_1} - \frac{V_1}{F_3} \frac{\partial F_1}{\partial u_3} \right) \hat{e}_3 \right] \\ & + \frac{\hat{e}_2}{F_2} \left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial u_2} - \frac{V_2}{F_1} \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial u_2} + \frac{V_3}{F_3} \frac{\partial F_2}{\partial u_3} + \frac{V_1}{F_1} \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial u_2} - \frac{V_2}{F_3} \frac{\partial F_2}{\partial u_3} \right) \hat{e}_3 \right] \\ & + \frac{\hat{e}_3}{F_3} \left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial u_3} - \frac{V_3}{F_1} \frac{\partial F_3}{\partial u_1} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial u_3} - \frac{V_3}{F_2} \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial u_3} + \frac{V_1}{F_1} \frac{\partial F_3}{\partial u_1} + \frac{V_2}{F_2} \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \right) \hat{e}_3 \right] \end{aligned} \quad (2.92)$$

Matematicamente, $(\nabla\vec{V})^T$ é o gradiente do vetor \vec{V} como definido em textos de mecânica do contínuo. Em coordenadas cartesianas:

$$\nabla\vec{V} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \hat{e}_i \hat{e}_j, \quad \text{grad}(\vec{V}) = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \hat{e}_i \hat{e}_j,$$

que é o mesmo resultado de $(\nabla\vec{V})^T$.

De maneira análoga, podemos demonstrar que o divergente de um tensor de segunda ordem é o vetor:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\bar{T}} &= \frac{\hat{e}_1}{F_1 F_2 F_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 F_3 T_{11}) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 F_1 T_{21}) \right. \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_1 F_2 T_{31}) + F_2 \left(T_{13} \frac{\partial F_1}{\partial u_3} - T_{33} \frac{\partial F_3}{\partial u_1} \right) \\ &\quad \left. + F_3 \left(T_{12} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} - T_{22} \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \right) \right] + \\ &+ \frac{\hat{e}_2}{F_1 F_2 F_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 F_3 T_{12}) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 F_1 T_{22}) \right. \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_1 F_2 T_{32}) + F_3 \left(T_{21} \frac{\partial F_2}{\partial u_1} - T_{11} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \right) \\ &\quad \left. + F_1 \left(T_{23} \frac{\partial F_2}{\partial u_3} - T_{33} \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \right) \right] + \\ &+ \frac{\hat{e}_3}{F_1 F_2 F_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 F_3 T_{13}) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 F_1 T_{23}) \right. \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_1 F_2 T_{33}) + F_1 \left(T_{32} \frac{\partial F_3}{\partial u_2} - T_{22} \frac{\partial F_2}{\partial u_3} \right) \\ &\quad \left. + F_2 \left(T_{31} \frac{\partial F_3}{\partial u_1} - T_{11} \frac{\partial F_1}{\partial u_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.93)$$

REFERÊNCIAS

- ARIS, R. *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Mineola: Dover Publications, 1962.
- BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- BOURNE, D. E.; KENDALL, P. C. *Vector analysis and cartesian tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- BRAND, L. *Vector analysis*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1967.
- DAVIS, H. F.; SNIDER, A. D. *Introduction to vector analysis*. Boston: Allyn & Bacon, 1987.
- FLEISCH, D. *A student's guide to vectors and tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- GIBBS, J. W. *Vector analysis: a text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Williard Gibbs*. London: Yale University Press, 1922.
- HUBBARD, J. H.; HUBBARD, B. B. *Vector calculus, linear algebra and differential forms: a unified approach*. London: Pearson, 1998.
- KANOUSSIS, D. P. *Multiple integrals and vector analysis: for engineers and scientists*. [S. l.]: Independently published, 2021.
- KUNDU, P. K.; COHEN, I. M.; DOWLING, D. R. *Fluid mechanics*. 6th ed. Cambridge: Academic Press, 2015.
- LIPSCHUTZ, S.; SPIEGEL, M. R.; SPELLMAN, D. *Vector analysis and an introduction to tensor analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 2009.
- SHORTER, L. R. *Problems and worked solutions in vector analysis*. Mineola: Dover Publications, 2014.
- STRACK, O. D. L. *Applications of vector analysis and complex variables in engineering*. New York: Springer, 2020.
- STRANG, G. *Linear algebra and its applications*. 2nd ed. Cambridge: Academic Press, 1980.

VINCE, J. *Vector analysis for computer graphics*. 2nd ed. New York: Springer, 2021.

WEATHERBURN, C. E. *Advanced vector analysis with application to mathematical physics*. La Salle: Open Court Publishing Company, 1948.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 2.1

Prove as seguintes igualdades utilizando a notação indicial:

- $(U \cdot W)V - (U \cdot V)W = U \times (V \times W)$
- $\alpha \nabla \beta + \beta \nabla \alpha = \nabla(\alpha \beta)$
- $U \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot U = \nabla \cdot (\varphi U)$
- $\nabla \cdot (\alpha \nabla \beta - \beta \nabla \alpha) = \alpha \nabla^2 \beta - \beta \nabla^2 \alpha$
- $\varphi(\nabla \times U) + (\nabla \varphi) \times U = \nabla \times (\varphi U)$
- $\nabla \cdot (\nabla \times U) = 0$

Exercício 2.2

Calcule o resultado das seguintes expressões:

- δ_{ii}
- $\delta_{ij} \delta_{ij}$
- $\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\beta} \delta_{\alpha\gamma}$
- $\partial_i x_i$
- $\partial_i x_j$
- $\epsilon_{ijk} \delta_{jk}$

Exercício 2.3

Simplifique as expressões a seguir e justifique aquelas que não fazem sentido:

- | | |
|--|--|
| a) $\delta_{ii} \delta_{ij}$ | h) $\delta_{ii} u_{km}$ |
| b) $\delta_{ik} \delta_{kj}$ | i) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha u_\beta$ |
| c) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\beta u_\gamma$ | j) $\delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}$ |
| d) $\delta_{ii} \delta_{ii}$ | k) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\beta\gamma}$ |
| e) $\delta_{ik} u_{jk}$ | l) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \partial_\gamma \varphi$ |
| f) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\beta}$ | m) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\beta v_\gamma$ |
| g) $\delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta}$ | n) $\delta_{ij} \delta_{ik}$ |

Exercício 2.4

Escreva em notação indicial a componente \hat{e}_1 da seguinte equação:

$$\vec{F} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) dV + \int_S \rho \vec{u} (\hat{n} \cdot \vec{u}) dS$$

Exercício 2.5

Considerando o campo de velocidade

$$U = 3x^2z\hat{e}_1 - 2xy^2\hat{e}_2 + 4y^2z\hat{e}_3,$$

determine

$$\int_S \hat{n} \cdot U dS$$

onde S corresponde a uma superfície cúbica delimitada pelos planos $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$. Aplique o teorema da divergência para comprovar sua resposta.

Exercício 2.6

Demonstre as seguintes igualdades:

- $U^T \cdot u = u \cdot U$
- $\text{tr } U = \text{tr } U^T$
- $(u \times v) \cdot U = u \cdot (v \times U)$
- $\text{tr}(U + V) = \text{tr } U + \text{tr } V$
- $\nabla \cdot (\phi U) = \phi \nabla \cdot U + U^T \cdot \nabla \phi$
- $\nabla(\phi u) = \phi \nabla u + (\nabla \phi)u$

Exercício 2.7

Escreva o tensor de segunda ordem

$$\bar{\bar{T}} = 2\hat{e}_1\hat{e}_1 - 3\hat{e}_1\hat{e}_3 + 4\hat{e}_2\hat{e}_1 - 6\hat{e}_2\hat{e}_2 + 8\hat{e}_3\hat{e}_1 + 5\hat{e}_3\hat{e}_2,$$

como a soma de um tensor simétrico e um tensor antissimétrico.

Exercício 2.8

Considerando a forma de $\nabla\vec{V}$, mostre que o seu tensor transposto é:

$$\begin{aligned}
 (\nabla\vec{V})^T &= \frac{1}{F_1} \left(\frac{\partial V_1}{\partial u_1} + \frac{V_2}{F_2} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} + \frac{V_3}{F_3} \frac{\partial F_1}{\partial u_3} \right) \hat{e}_1 \hat{e}_1 \\
 &+ \frac{1}{F_2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial u_2} - \frac{V_2}{F_1} \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \right) \hat{e}_1 \hat{e}_2 \\
 &+ \frac{1}{F_3} \left(\frac{\partial V_1}{\partial u_3} - \frac{V_3}{F_1} \frac{\partial F_3}{\partial u_1} \right) \hat{e}_1 \hat{e}_3 \\
 &+ \frac{1}{F_1} \left(\frac{\partial V_2}{\partial u_1} - \frac{V_1}{F_2} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \right) \hat{e}_2 \hat{e}_1 \\
 &+ \frac{1}{F_2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial u_2} + \frac{V_3}{F_3} \frac{\partial F_2}{\partial u_3} + \frac{V_1}{F_1} \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \right) \hat{e}_2 \hat{e}_2 \\
 &+ \frac{1}{F_3} \left(\frac{\partial V_2}{\partial u_3} - \frac{V_3}{F_2} \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \right) \hat{e}_2 \hat{e}_3 \\
 &+ \frac{1}{F_1} \left(\frac{\partial V_3}{\partial u_1} - \frac{V_1}{F_3} \frac{\partial F_1}{\partial u_3} \right) \hat{e}_3 \hat{e}_1 \\
 &+ \frac{1}{F_2} \left(\frac{\partial V_3}{\partial u_2} - \frac{V_2}{F_3} \frac{\partial F_2}{\partial u_3} \right) \hat{e}_3 \hat{e}_2 \\
 &+ \frac{1}{F_3} \left(\frac{\partial V_3}{\partial u_3} + \frac{V_1}{F_1} \frac{\partial F_3}{\partial u_1} + \frac{V_2}{F_2} \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \right) \hat{e}_3 \hat{e}_3
 \end{aligned}$$

Exercício 2.9

Considere a diádica

$$\nabla \vec{U} = \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \hat{e}_i \hat{e}_j$$

e um tensor simétrico $\overline{\overline{\tau}}$. Usando as duas formas de fazer uma dupla contração, mostre que ambos os resultados são idênticos.

Exercício 2.10

Fazendo $\overline{\overline{T}} = \nabla \vec{V}$ na forma do divergente de um tensor, pode-se obter o laplaciano do vetor \vec{V} definido como

$$\nabla^2 \vec{V} \quad (\text{note que } \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla).$$

Obtenha uma expressão matemática para avaliar o laplaciano do vetor em coordenadas cartesianas.

Cinemática dos meios deformáveis

Após uma breve introdução de conceitos matemáticos fundamentais necessários para modelagem matemática do meio contínuo, vamos analisar alguns conceitos físicos para a compreensão do movimento dos fluidos. Para isso, vamos “atacar” o problema do deslocamento de um elemento de volume a partir das descrições **euleriana** e **lagrangiana**.

Apesar da descrição que realizaremos sobre o movimento do fluido sem a preocupação com suas causas, é importante ressaltar que, independentemente da descrição adotada, algumas hipóteses devem ser consideradas:

- a) A matéria é contínua.
- b) Os elementos de fluido estão sempre relacionados a pontos matematicamente identificáveis.
- c) Um elemento de fluido só pode ocupar uma dada posição em um dado instante de tempo.

3.1 DESCRIÇÕES LAGRANGIANA E EULERIANA

Do ponto de vista **lagrangiano** (descrição material), o movimento dos elementos de fluido é acompanhado ao longo do tempo, bem como a variação das propriedades intrínsecas a esses elementos, a partir de um ponto inicial, com o volume de controle se movendo junto ao fluido. A solução das equações do movimento para cada elemento de fluido é relativamente simples, pois implica apenas a localização espacial de cada partícula a cada instante de tempo por meio da segunda lei de Newton. Também é importante ressaltar que, nessa descrição, os elementos de fluido podem apresentar variação de seu volume e formato ao longo do tempo devido, por exemplo, à variação de sua densidade, sem que haja violação da conservação da massa.

A Figura 3.1 apresenta um exemplo da descrição lagrangiana para duas partículas distintas X_1 e X_2 , ao longo dos instantes de tempo $t = 0, 1, 2$ (indicados pelos sobrescritos).

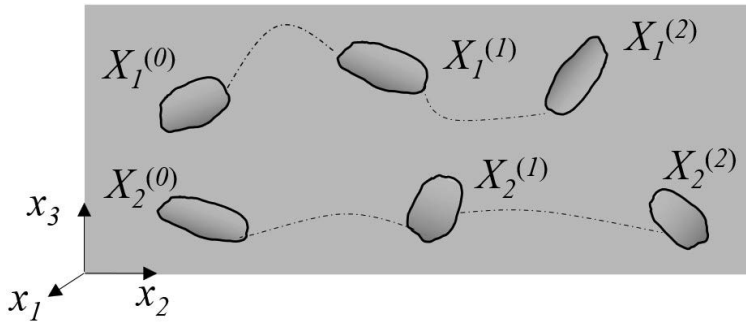


Figura 3.1 Descrição lagrangiana de dois elementos de fluido ao longo do tempo.

Fonte: elaborada pelos autores.

Já do ponto de vista euleriano (**descrição espacial**), o volume de controle é fixo e as propriedades dos elementos de fluido são calculadas em função do tempo à medida que o escoamento passa através de pontos fixos no espaço. Essa descrição pode apresentar algumas vantagens, como soluções mais simples para as equações do movimento, devido ao fato de que, computacionalmente, precisamos apenas calcular as propriedades dos elementos de volume em pontos fixos, sem a necessidade de guardar a informação da localização individual de cada partícula, bem como variações de seu tamanho e volume. A Figura 3.2 apresenta um exemplo de dois pontos fixos dentro do volume de controle onde as propriedades do fluido são medidas ao longo de cada instante de tempo.

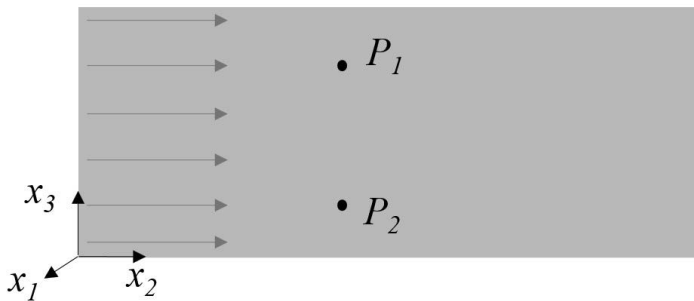


Figura 3.2 Descrição euleriana com dois pontos fixos onde as propriedades são calculadas ao longo do tempo.

Fonte: elaborada pelos autores.

É indiscutível que ambas as descrições apresentam vantagens, desvantagens e limitações, dependendo do caso estudado. Por isso, diversos autores focam seus esforços na análise das características de tais descrições, que remontam à década de 1930, demonstrando a descrição material por meio de equações complexas, e chegam a trabalhos mais

atuais que apresentam resultados comparativos entre as duas descrições para fenômenos envolvendo a deposição de partículas em escoamentos turbulentos.

3.2 CARACTERIZAÇÃO DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

A descrição da posição de um elemento de fluido pode ser dada como uma função de sua posição inicial \vec{r}_0 no instante de tempo $t = 0$:

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t) \quad (3.1)$$

De fato, essa equação representa uma transformação que leva a partícula, localizada inicialmente em \vec{r}_0 , para distintas novas posições ao longo do tempo. Porém, também podemos descrever a posição inicial do elemento por

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}, t) \quad (3.2)$$

Da mesma forma, podemos expressar qualquer propriedade do elemento de fluido como $\phi(\vec{r}, t)$ ou $\phi(\vec{r}_0, t)$. Para o caso da velocidade de um elemento de fluido que se encontra na posição \vec{r} no instante t , temos

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t) \quad (3.3)$$

ou, para o caso da posição inicial \vec{r}_0 no instante t ,

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}_0, t) \quad (3.4)$$

Ou seja, a descrição de seu movimento pode ser obtida considerando as variáveis independentes (\vec{r}, t) ou (\vec{r}_0, t) . As coordenadas (\vec{r}, t) são chamadas de **eulerianas**, espaciais ou de campo, pois a posição considerada é fixa ao longo do tempo. Já as coordenadas (\vec{r}_0, t) são ditas **lagrangianas, materiais ou convectivas**, pois nelas o **ponto de matéria** (elemento de volume) é fixo ao longo do tempo.

Para avaliar a diferença entre as duas abordagens, vamos tomar como exemplo um campo de velocidade descrito por

$$\vec{u}(y, t) = \frac{y + 2t}{t} \hat{e}_1$$

com a posição

$$y = (1 + t^3) y_0$$

$$\begin{aligned}\vec{u}(y, t) &= \frac{y + 2t}{t} \hat{e}_1 \\ \vec{u}(y_0, t) &= \frac{(1 + t^3)y_0 + 2t}{t} \hat{e}_1 \\ \vec{u}(y_0, t) &= \left(y_0 t^2 + \frac{y_0}{t} + 2 \right) \hat{e}_1\end{aligned}$$

Embora $\vec{u}(y, t) \neq \vec{u}(y_0, t)$, é importante lembrar que estamos descrevendo o mesmo escoamento. Em suma, a descrição de qualquer propriedade pode ser expressa por

$$\underbrace{\phi(\vec{r}, t)}_{\text{fixa a posição dentro do volume de controle}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\phi(\vec{r}_0, t)}_{\text{fixa a matéria (elemento de volume)}}$$

3.3 DERIVADAS MATERIAL (SUBSTANCIAL) E ESPACIAL

Para qualquer propriedade φ , podemos definir as seguintes derivadas:

$$\underbrace{\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\vec{r}}}_{\text{derivada espacial}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0}}_{\text{derivada material}}$$

Em nome da simplicidade, vamos adotar a seguinte notação:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\vec{r}} \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{dt} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0}$$

Com a propriedade descrita em coordenadas espaciais, a derivada material é dada por:

$$\frac{d\phi(\vec{r}, t)}{dt} = \left. \frac{\partial \phi(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t)}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} = \left. \frac{\partial \phi(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t)}{\partial x_i} \right|_t \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{\vec{r}_0} + \left. \frac{\partial \phi(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t)}{\partial t} \right|_{\vec{r}} \quad (3.5)$$

Como $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$, temos:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|_t \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} = \left. \frac{\partial (x_i \hat{e}_i)}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} \cdot \hat{e}_j \partial_i \phi = \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \phi$$

Assim:

$$\frac{d\phi(\vec{r}, t)}{dt} = \left. \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} = \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \phi \quad (3.6)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação (3.6) é chamado de **termo transiente** e está relacionado com o fato de que a grandeza ϕ pode não estar em um regime permanente, sofrendo variações ao longo do tempo (dependência explícita do tempo). Ainda é importante destacar que, no referencial euleriano, o escoamento pode estar em regime permanente para um determinado sistema de referência e em regime transiente em relação a outro.

Já o segundo termo da direita da Equação (3.6) é denominado **termo convectivo** e está relacionado ao fato de a grandeza ϕ estar sendo transportada pela velocidade \vec{U} ao longo das coordenadas espaciais, considerando as variações da própria grandeza ao longo do espaço através do operador gradiente.

Agora, vamos tomar como exemplo $\phi = \vec{r}$. A derivada material é:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} = \vec{U} \cdot \nabla \vec{r} + \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}} = \vec{U} \cdot \vec{I} + 0 = \vec{U}$$

Como era de esperar, a derivada material da posição corresponde ao vetor velocidade. Também é importante ressaltar que:

$$\vec{U} = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} \neq \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}}$$

A derivada material não necessariamente é obtida para uma única grandeza. Assim, para duas grandezas ϕ_1 e ϕ_2 , temos pela regra da cadeia:

$$\frac{d(\phi_1 \phi_2)}{dt} = \phi_1 \frac{d\phi_2}{dt} + \phi_2 \frac{d\phi_1}{dt} \quad (3.7)$$

3.4 TRAJETÓRIA, LINHAS DE CORRENTE E DE EMISSÃO

A soma dos deslocamentos infinitesimais de elemento de fluido ao longo do tempo corresponde a sua trajetória. Como a Equação (3.1) descreve a posição em função do tempo, temos que os módulos das componentes de velocidade nos três eixos cartesianos são dados por:

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad u_2 = \frac{dx_2}{dt}, \quad u_3 = \frac{dx_3}{dt}$$

Ao tomarmos como exemplo o campo de velocidade dado $\vec{U} = 3xt \hat{e}_1 + t \hat{e}_2$, temos

$$u_1 = \frac{dx}{dt} = 3xt$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^t 3t dt$$

$$x = x_0 e^{\frac{3}{2}t^2}$$

$$u_2 = \frac{dy}{dt} = t$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^t t dt$$

$$y = y_0 + \frac{t^2}{2}$$

Uma vez que os valores de x_0 e y_0 forem definidos, a trajetória da partícula pode ser descrita por

$$\vec{r} = (x_0 e^{\frac{3}{2}t^2}) \hat{e}_1 + (y_0 + \frac{t^2}{2}) \hat{e}_2$$

Já a **linha de corrente** corresponde a uma curva no espaço tangente ao vetor velocidade em cada ponto, para cada instante de tempo, conforme exemplificado na Figura 3.3. Para os planos x - y , x - z e y - z , temos

$$x - y : \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

$$x - z : \frac{dx}{dz} = \frac{u}{w}$$

$$y - z : \frac{dy}{dz} = \frac{v}{w}$$

Logo,

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (3.8)$$

A solução dessas equações para cada instante de tempo t resulta em uma equação na forma $z = z(x, y)$ correspondente à linha de corrente que pode ser determinada considerando as funções paramétricas $x = x(\sigma)$, $y = y(\sigma)$ e $z = z(\sigma)$. E, em termos do parâmetro σ , concluímos que

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \sigma$$

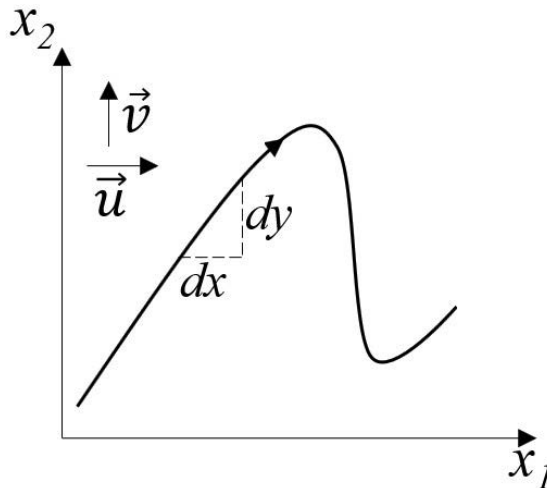


Figura 3.3 Linha de corrente de um elemento de fluido.

Fonte: elaborada pelos autores.

Com t sendo fixado, podemos reescrever na forma indicial

$$\frac{dx_i}{ds} = U_i(\vec{r}, t) \quad (3.9)$$

Voltando ao exemplo anterior,

$$\frac{dx}{ds} = 3xt$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^\sigma 3t d\sigma$$

$$x = x_0 e^{3t\sigma}$$

$$\frac{dy}{ds} = t$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^\sigma t d\sigma$$

$$y = y_0 + t\sigma$$

Como

$$\sigma = \frac{y - y_0}{t},$$

a linha de corrente pode ser dada por

$$x = x_0 e^{3(y-y_0)}$$

ou

$$y = y_0 + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x}{x_0} \right)$$

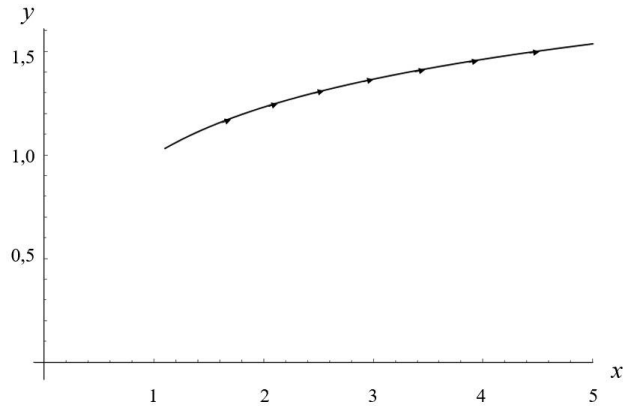


Figura 3.4 Linha de corrente obtida, considerando a posição inicial $x_0 = y_0 = 1$, a partir do campo de velocidade dado por $\vec{U} = 3xt \hat{e}_1 + t \hat{e}_2$:

Fonte: elaborada pelos autores.

Durante o estudo de um escoamento, um corante pode ser usado para identificar a trajetória seguida pelas partículas do fluido ao longo do tempo. A linha de emissão corresponde à curva formada por todas as partículas que passam em uma determinada posição espacial \vec{r}_1 em um intervalo de tempo $0 \leq \tau \leq t$, como exemplificado na Figura 3.5. Ou seja, uma partícula qualquer na posição $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}, t)$ está sobre a linha de emissão de \vec{r}_1 se em qualquer instante de tempo τ ela passou por \vec{r}_1 . Consequentemente, a linha de emissão é obtida a partir da Equação (3.1), considerando que $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}_1, \tau)$.

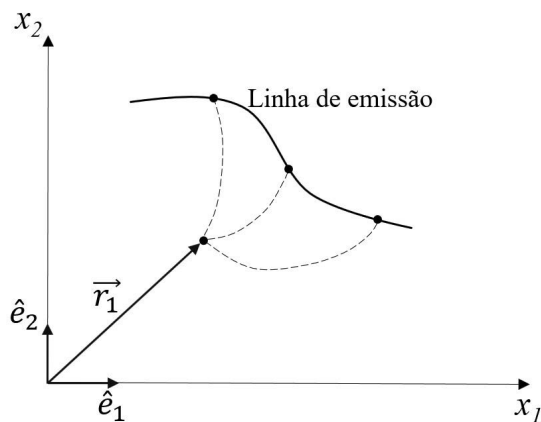


Figura 3.5 Linha de emissão gerada por todas as partículas que passam no ponto localizado em \vec{r}_1 no intervalo de tempo τ .

Fonte: elaborada pelos autores.

Ainda fazendo uso do exemplo anterior, sabemos que

$$x = x_0 e^{\frac{3}{2}t^2}$$

$$x_0 = x_1 e^{-\frac{3}{2}\tau^2}$$

Logo, a posição em x pode ser reescrita como

$$x = (x_1 e^{-\frac{3}{2}\tau^2}) e^{\frac{3}{2}t^2}$$

$$x = x_1 e^{\frac{3}{2}(t^2 - \tau^2)}$$

$$y = y_0 + \frac{t^2}{2}$$

$$y_0 = y_1 - \frac{\tau^2}{2}$$

$$y = (y_1 - \frac{\tau^2}{2}) + \frac{t^2}{2}$$

$$y = y_1 + \frac{1}{2}(t^2 - \tau^2)$$

3.5 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DA DILATAÇÃO

Ao escoar, um elemento de fluido pode sofrer variação de seu volume e forma devido a efeitos de compressão ou expansão, e, matematicamente, precisamos ser capazes de determinar esse comportamento do espaço. Considere o sistema apresentado na Figura 3.6, em que um elemento de volume sofre um efeito de dilatação.

O volume material no instante $t = 0$ é dado por

$$\delta V_0 = dx_{01} \cdot dx_{02} \cdot dx_{03} \quad (3.10)$$

Ao considerarmos um tempo genérico, podemos representar δV no sistema cartesiano por meio da relação

$$d\vec{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0i}} dx_{0i} \hat{e}_i \quad (3.11)$$

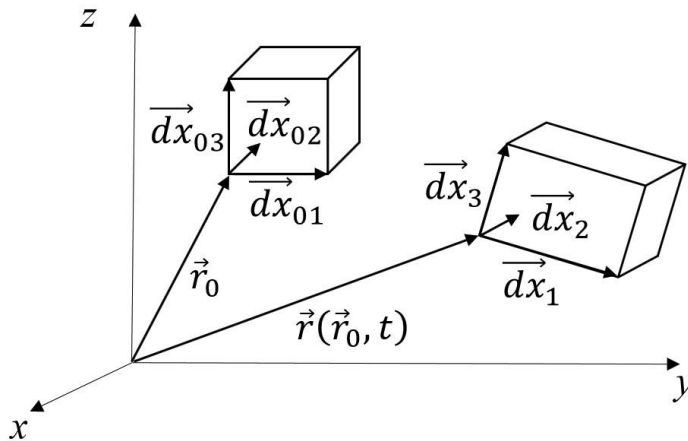


Figura 3.6 Efeito da dilatação em um elemento de volume a partir de um sistema de coordenadas.

Fonte: elaborada pelos autores.

ou seja,

$$d\vec{x}_1 = \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} dx_{01} \hat{e}_i$$

$$d\vec{x}_2 = \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} dx_{02} \hat{e}_j$$

$$d\vec{x}_3 = \frac{\partial x_k}{\partial x_{03}} dx_{03} \hat{e}_k$$

Como, de fato, o volume é dado por

$$\delta V = d\vec{x}_1 \cdot (d\vec{x}_2 \times d\vec{x}_3) \quad (3.12)$$

$$\delta V = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{03}} dx_{01} dx_{02} dx_{03} \quad (3.13)$$

onde a expressão $\epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{03}}$ representa a matriz jacobiana J do movimento do volume material, que, por sua vez, é dada por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{03}} \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

consequentemente,

$$\delta V = J \delta V_0 \quad (3.15)$$

Para condições de **escoamento isocórico (isovolumétrico)**, onde $\delta V = \delta V_0$, independentemente de sua forma, J é igual a 1. Porém, é importante ressaltar que fluidos incompressíveis sempre escoam isocoricamente, pois sua densidade sempre se mantém constante. Em contrapartida, fluidos compressíveis podem ou não apresentar comportamento isocórico.

Ao tomarmos as posições exemplificadas anteriormente, temos:

$$d\vec{x} \equiv d\vec{x}_1 = \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 \hat{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 \hat{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 \hat{e}_3$$

$$d\vec{x}_1 = e^{\frac{3}{2}t^2} dx_0 \hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

$$d\vec{y} \equiv d\vec{x}_2 = \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 \hat{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 \hat{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0 \hat{e}_3$$

$$d\vec{x}_2 = 0\hat{e}_1 + 1 dy_0 \hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

Como a componente z é nula, podemos concluir que

$$z = z_0, \quad \text{logo}$$

$$d\vec{z} \equiv d\vec{x}_3 = \frac{\partial x}{\partial z_0} dz_0 \hat{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial z_0} dz_0 \hat{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0 \hat{e}_3$$

$$d\vec{x}_3 = 0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 1 dz_0\hat{e}_3$$

Conseqüentemente,

$$J = \begin{vmatrix} e^{\frac{3}{2}t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\delta V = (e^{\frac{3}{2}t^2} \cdot 1 \cdot 1) \delta V_0$$

Isso mostra que o elemento de volume sofre uma variação temporal a uma taxa exponencial na direção x , sendo nulo nas outras componentes.

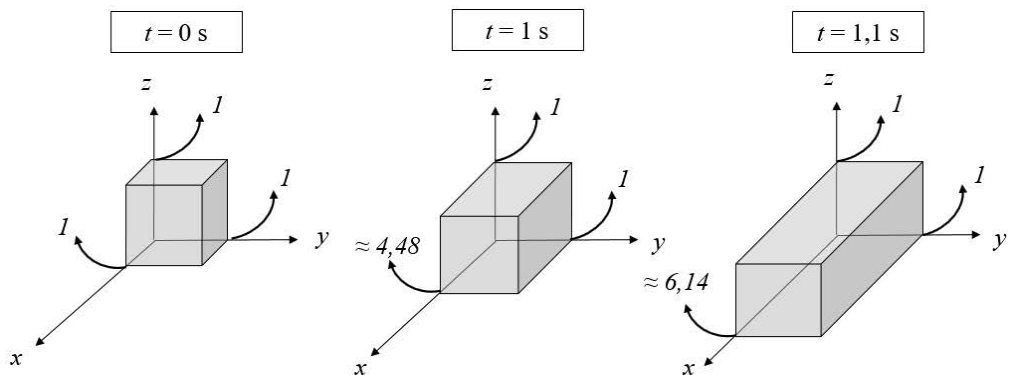


Figura 3.7 Exemplo da variação volumétrica do elemento de volume em função do tempo descrita por $\delta V(t) = (e^{\frac{3}{2}t^2}) \delta V_0$.

Fonte: elaborada pelos autores.

3.6 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

A variação volumétrica em relação ao tempo de um elemento de volume pode ser dada por

$$\frac{dV}{dt} = \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{U} dS \quad (3.16)$$

Ao aplicarmos o teorema da divergência, temos

$$\frac{dV}{dt} = \int_{V(t)} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} dV \quad (3.17)$$

Se considerarmos o limite do tempo tendendo a zero, concluímos que

$$\frac{d}{dt} \delta V = (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \delta V \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta V}{\delta V_0} \right) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \frac{\delta V}{\delta V_0} \quad (3.19)$$

Como $\delta V = J \delta V_0$,

$$\frac{dJ}{dt} = J \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \quad (3.20)$$

Assim, concluímos que o divergente de \vec{U} pode ser reescrito na forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} (\delta V) \quad (3.21)$$

Por exemplo, para um escoamento isocórico, $J = 1$, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.22)$$

ou seja, o divergente de \vec{U} representa a taxa de variação do volume material por unidade de volume. Se considerarmos que $\delta V = \delta m / \rho$, obtemos

$$\frac{\delta m}{\rho} = J \frac{\delta m}{\rho_0} \quad (3.23)$$

ou

$$\rho_0 = J \rho \quad (3.24)$$

Por definição,

$$\frac{d\rho_0}{dt} = 0 \quad (3.25)$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(J\rho) = 0 \quad (3.26)$$

Com base na jacobiana,

$$J \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dJ}{dt} = 0 \quad (3.27)$$

$$J \frac{d\rho}{dt} + \rho J \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.29)$$

Outra forma é dada pela substituição da derivada material na Equação (3.29). Assim,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.30)$$

Ao lembrarmos que $\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U})$, obtemos então **a equação diferencial da conservação da massa**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (3.31)$$

3.7 TEOREMA DO TRANSPORTE DE REYNOLDS (TTR)

O estudo de uma propriedade contida em um determinado elemento de volume ao longo do tempo é extremamente difícil, para não dizer quase impossível. Dessa forma, não devemos nos concentrar em um elemento de fluido específico, mas sim sobre no movimento total de um fluido ao longo de um dispositivo ou estrutura contidos em um volume de controle. Em suma, desejamos transformar as equações de um sistema lagrangiano para um sistema euleriano. Vamos considerar uma propriedade ϕV por unidade de volume. Temos

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi_V dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \phi_V J dV_0 \quad (3.32)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} (\phi_V J) dV_0 = \int_{V_0} \left(\phi_V \frac{dJ}{dt} + J \frac{d\phi_V}{dt} \right) dV_0 = \int_{V_0} \left(\phi_V \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \frac{d\phi_V}{dt} \right) J dV_0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi_V dV = \int_{V(t)} \left(\frac{d\phi_V}{dt} + \phi_V \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \right) dV \quad (3.33)$$

ou, transformando o segundo termo da Equação (3.33) de integral de volume para integral de superfície usando a Equação (2.45):

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi_V dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \phi_V}{\partial t} dV + \int_{S(t)} (\hat{n} \cdot \vec{U}) \phi_V dS \quad (3.34)$$

$$\underbrace{\frac{d\Phi}{dt}}_{\text{Taxa de variação temporal da propriedade}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi_V dV}_{\text{Taxa de variação temporal da propriedade dentro do volume de controle}} + \underbrace{\int_{S(t)} (\hat{n} \cdot \vec{U}_r) \phi_V dS}_{\text{Taxa líquida de fluxo da propriedade através da superfície de controle}} \quad (3.35)$$

Para podermos compreender o poder do TTR, vamos analisar um exemplo simples, considerando um tanque de base circular cujo diâmetro é igual a D_1 e com altura H , cheio de água contendo duas saídas também circulares com os diâmetros de D_2 e D_3 , conforme ilustrado na Figura 3.8. Vamos determinar a equação que descreve o tempo necessário para que o tanque seja totalmente esvaziado.

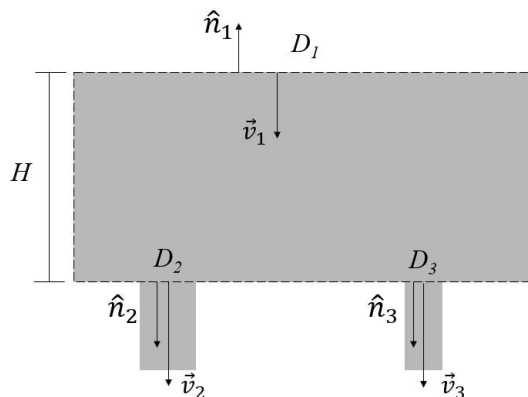


Figura 3.8 Exemplo de uma aplicação do TTR: teorema do transporte de Reynolds.

Fonte: elaborada pelos autores.

Com base na Figura 3.8, podemos observar que

$$\vec{v}_1 = -\frac{dH}{dt}$$

Nesse caso, vamos considerar que

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_3 = C_D \sqrt{2gH}$$

Logo,

$$0 = \int_{S_1} (-\hat{n}_1 \cdot \rho \vec{v}_1) dS + \int_{S_2} (\hat{n}_2 \cdot \rho \vec{v}_2) dS + \int_{S_3} (\hat{n}_3 \cdot \rho \vec{v}_3) dS$$

$$0 = -\hat{n}_1 \cdot \rho \vec{v}_1 S_1 + \hat{n}_2 \cdot \rho \vec{v}_2 S_2 + \hat{n}_3 \cdot \rho \vec{v}_3 S_3$$

$$0 = -\rho v_1 S_1 + \rho v_2 S_2 + \rho v_3 S_3$$

$$0 = -v_1 D_1^2 + v_2 D_2^2 + v_3 D_3^2$$

$$\frac{dH}{dt} D_1^2 = C_D \sqrt{2gH} D_2^2 + C_D \sqrt{2gH} D_3^2$$

$$\int_0^H \frac{dH}{H^{1/2}} = \int_0^t C_D \sqrt{2gH} \left(\frac{D_2^2 + D_3^2}{D_1^2} \right) dt$$

$$t = \frac{1}{C_D} \left(\frac{D_1^2}{D_2^2 + D_3^2} \right) \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

3.8 TENSOR GRADIENTE DE VELOCIDADE

Como estamos estudando a cinemática do ponto de vista dos elementos de fluido, vamos ampliar essa discussão e explorar a análise do movimento entre os elementos e, a partir daí, caracterizar a deformação destes. Como podemos observar na Figura 3.9, a diferença de velocidade é dada por

$$d\vec{U} = \vec{U}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{U}(\vec{r}) \quad (3.36)$$

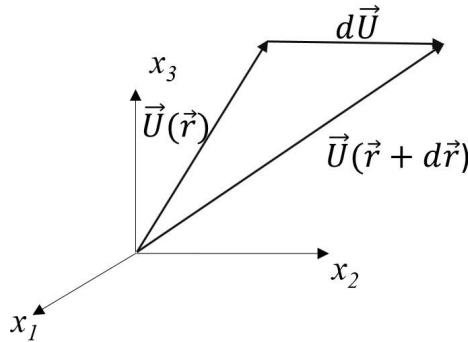


Figura 3.9 Projeção dos vetores velocidade em função dos vetores posição.

Fonte: elaborada pelos autores.

Considerando que os elementos de fluido estão muito próximos entre si, concluímos que

$$\vec{U}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{U}(\vec{r}) + d\vec{U} = \vec{U}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} dx_i \quad (3.37)$$

Como

$$d\vec{U} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} dx_i = dx_i \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \partial_j \vec{U},$$

podemos representar $d\vec{U}$ como

$$d\vec{U} = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \quad (3.38)$$

onde $\vec{\nabla} \vec{U}$ é o tensor gradiente de velocidade e contém toda a informação necessária para podermos descrever o movimento de deformação do fluido. Assim como todo tensor, o tensor gradiente de velocidade pode ser escrito como a soma de um tensor simétrico e um antissimétrico. Ou seja,

$$\vec{\nabla} \vec{U} = \partial_i U_j \hat{e}_i \hat{e}_j = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_i U_j + \partial_j U_i) \hat{e}_i \hat{e}_j}_{\bar{D}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_i U_j - \partial_j U_i) \hat{e}_i \hat{e}_j}_{\bar{\Omega}} \quad (3.39)$$

onde $\overline{\overline{D}}$ e $\overline{\overline{\Omega}}$ são o **tensor taxa de deformação** e o **tensor vorticidade**, respectivamente. Ou seja,

$$\vec{\nabla}\vec{U} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}} \quad (3.40)$$

sendo

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{U} + (\vec{\nabla}\vec{U})^T) \quad (3.41)$$

e

$$\overline{\overline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{U} - (\vec{\nabla}\vec{U})^T) \quad (3.42)$$

3.9 TENSOR TAXA DE DEFORMAÇÃO

Considerando que o tensor taxa de deformação pode ser representado por

$$\overline{\overline{D}} = D_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j, \quad (3.43)$$

primeiramente vamos interpretar o significado físico desse tensor, considerando o caso $i = j$. Com base na Figura 2.9, observamos que

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}) = \frac{d}{dt}[(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{r}] \quad (3.44)$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}) = \vec{U}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{U}(\vec{r}) \quad (3.45)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}) = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\vec{U} \quad (3.46)$$

Se considerarmos que $d\vec{r} = ds\hat{r}$, temos

$$\frac{d}{dt}(ds^2) = 2ds \frac{d}{dt}(ds) \quad (3.47)$$

$$2ds \frac{d}{dt}(ds) = \frac{d}{dt}(d\vec{r} \cdot d\vec{r}) \quad (3.48)$$

$$2ds \frac{d}{dt}(ds) = \frac{d}{dt}(d\vec{r}) \cdot d\vec{r} + d\vec{r} \cdot \frac{d}{dt}(d\vec{r}) \quad (3.49)$$

$$2ds \frac{d}{dt}(ds) = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot d\vec{r} + d\vec{r} \cdot d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \quad (3.50)$$

Mas, como $d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot d\vec{r} = d\vec{r} \cdot d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U}$, então

$$2ds \frac{d}{dt}(ds) = 2d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot d\vec{r} \quad (3.51)$$

Ao dividirmos por ds^2 , temos

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = \frac{dx_i}{ds} (D_{ij} + \Omega_{ij}) \frac{dx_j}{ds} \quad (3.53)$$

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} D_{ij} + \underbrace{\left(\frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} \Omega_{ij} \right)}_{\substack{\text{simétrico} \\ \text{antissimétrico}}} \quad (3.54)$$

0

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = \vec{r} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \vec{r} \quad (3.55)$$

Agora, se considerarmos, por exemplo, D_{11} e $\vec{r} = \hat{e}_1$, temos

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = \hat{e}_1 \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \hat{e}_1 = D_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}$$

Com isso, concluímos que D_{11} representa a taxa de deformação longitudinal por unidade de comprimento de um elemento de fluido na orientação de \hat{e}_1 . Obviamente, valores negativos e positivos de D_{11} correspondem aos fenômenos de contração e esticamento, respectivamente.

Também é conveniente ressaltar que D_{ii} representa o divergente do campo de velocidade. Ou seja,

$$D_{ii} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) = \text{tr } \overline{\overline{D}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{U}$$

Ao considerarmos o volume infinitesimal de um elemento de fluido, sua taxa de variação é dada por

$$\frac{d}{dt}(dV) = \frac{d}{dt}(dx_1) dx_2 dx_3 + dx_1 \frac{d}{dt}(dx_2) dx_3 + dx_1 dx_2 \frac{d}{dt}(dx_3) \quad (3.56)$$

Como

$$\frac{d}{dt}(dx_1) = U_1(x_1 + dx_1) - U_1(x_1) = dU_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1 \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{dt}(dx_2) = U_2(x_2 + dx_2) - U_2(x_2) = dU_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} dx_2 \quad (3.58)$$

$$\frac{d}{dt}(dx_3) = U_3(x_3 + dx_3) - U_3(x_3) = dU_3 = \frac{\partial U_3}{\partial x_3} dx_3 \quad (3.59)$$

Então,

$$\frac{d}{dt}(dV) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.60)$$

Agora vamos interpretar fisicamente D_{ij} quando $i \neq j$. Considere dois vetores posição apresentados na Figura 3.10. Como observado, ambos os vetores apresentam um ângulo θ entre si. Assim,

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = \frac{d}{dt}(ds_1 ds_2 \cos \theta) \quad (3.61)$$

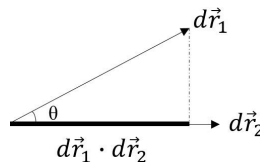


Figura 3.10 Representação gráfica do produto escalar entre dois vetores.

Fonte: elaborada pelos autores.

Mas:

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = \frac{d}{dt}(d\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_2 + d\vec{r}_1 \cdot \frac{d}{dt}(d\vec{r}_2) \quad (3.62)$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = d\vec{U}_1 \cdot d\vec{r}_2 + d\vec{r}_1 \cdot d\vec{U}_2 \quad (3.63)$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = (d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}\vec{U}) \cdot d\vec{r}_2 + (d\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}\vec{U}) \cdot d\vec{r}_1 \quad (3.64)$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}\vec{U} + d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}\vec{U}^T \quad (3.65)$$

Mas, como podemos escrever

$$\vec{\nabla}\vec{U} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}$$

$$\vec{\nabla}\vec{U}^T = \overline{\overline{D}}^T + \overline{\overline{\Omega}}^T = \overline{\overline{D}} - \overline{\overline{\Omega}}$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \cdot (\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}) + d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 \cdot (\overline{\overline{D}} - \overline{\overline{\Omega}}) \quad (3.66)$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) = 2d\vec{r}_1 \cdot \overline{\overline{D}} \cdot d\vec{r}_2, \quad (3.67)$$

Ao aplicarmos a regra da cadeia na Equação 3.61, igualarmos a Equação 3.67 e dividirmos por $ds_1 ds_2$, temos

$$\frac{d}{ds_1} \frac{d}{dt}(ds_1) \cos(\theta) + \frac{d}{ds_2} \frac{d}{dt}(ds_2) \cos(\theta) - \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} = 2 \frac{d\vec{r}_1}{ds_1} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \frac{d\vec{r}_2}{ds_2} \quad (3.68)$$

Se considerarmos a condição de ortogonalidade entre as componentes 1 e 2, temos

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds_1} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \frac{d\vec{r}_2}{ds_2} = -\frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.69)$$

Lembrando que

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds_1} = \hat{r}_1 = \hat{e}_1$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{ds_2} = \hat{r}_2 = \hat{e}_2$$

$$\hat{e}_1 \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \hat{e}_2 = D_{12} \quad (3.70)$$

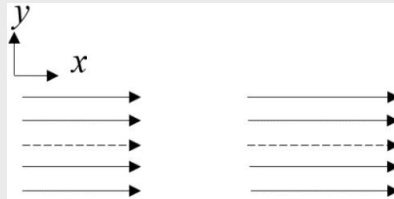
$$D_{12} = -\frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.71)$$

ou seja, $D_{12}(= D_{21})$, por exemplo, corresponde à metade da taxa de decréscimo do ângulo entre dois elementos de fluido em \hat{e}_1 e \hat{e}_2 . Essa interpretação também se aplica aos casos D_{13} e D_{23} . Para maior compreensão, vamos analisar dois casos distintos, considerando os campos de velocidade $\vec{u} = cx\hat{e}_1$ e $\vec{u} = cy\hat{e}_1$.

Para $\vec{u} = cx\hat{e}_1$, temos que $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$, exceto $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = c$.

$$\overline{\overline{D}}_{ij} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, observamos que a deformação (ou movimento) é puramente longitudinal ou extensional.



Para $\vec{u} = cy\hat{e}_1$, apenas $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = c \neq 0$.

$$\overline{\overline{D}}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{2} & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

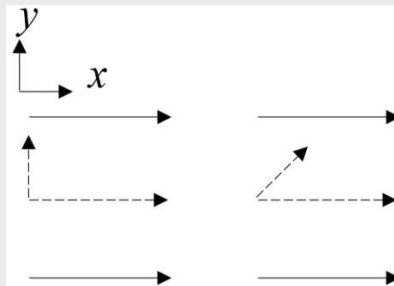
pois

$$D_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{c}{2}$$

e

$$D_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{c}{2}$$

Indicando que a deformação é puramente cisalhante.



Por fim, é importante destacar que, caso $\overline{\overline{D}}$ seja nulo, o movimento é rígido, não havendo nenhuma deformação. E, como $\overline{\overline{D}}$ sempre pode ser diagonalizado, toda a deformação pode ser reduzida a um movimento puramente extensional, devido ao fato de o tensor ser simétrico.

3.10 TENSOR VORTICIDADE

Com base na definição matemática do tensor vorticidade apresentada na Equação (3.42), podemos escrever

$$\epsilon_{ijk} \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.72)$$

$$\epsilon_{ijk} \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{U})_k + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{U})_k \quad (3.73)$$

ou seja,

$$\epsilon_{ijk} \Omega_{ij} = (\vec{\nabla} \times \vec{U})_k = \omega_k \quad (3.74)$$

que, por sua vez, corresponde ao vetor vorticidade na direção k . De fato, a Equação (3.74) nos mostra que o tensor vorticidade aplicado em um ponto define a vorticidade desse ponto. Vamos considerar que

$$\epsilon_{klm} \omega_k = \epsilon_{klm} \epsilon_{ijk} \Omega_{ij} = \epsilon_{klm} \epsilon_{kij} \Omega_{ij} \quad (3.75)$$

$$\epsilon_{klm} \omega_k = (\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi})\Omega_{ij} \quad (3.76)$$

$$\epsilon_{klm} \omega_k = \Omega_{lm} - \Omega_{ml} = \Omega_{lm} + \Omega_{lm} \quad (3.77)$$

$$\Omega_{lm} = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \omega_k \quad (3.78)$$

ou seja, as três componentes da vorticidade definem por completo as componentes do tensor vorticidade. Assim,

$$\overline{\overline{\Omega}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Para maior compreensão da interpretação física do tensor vorticidade, vamos considerar um movimento local sem a existência de qualquer efeito de deformação. Assim,

$$d\vec{U} = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} = d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\Omega}} \quad (3.80)$$

Como

$$d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\Omega}} = dx_i \Omega_{ij} \hat{e}_j \quad (3.81)$$

$$d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\Omega}} = dx_i \frac{1}{2} \epsilon_{kij} \omega_k \hat{e}_j = \frac{1}{2}(\vec{\omega} \times d\vec{r}) \quad (3.82)$$

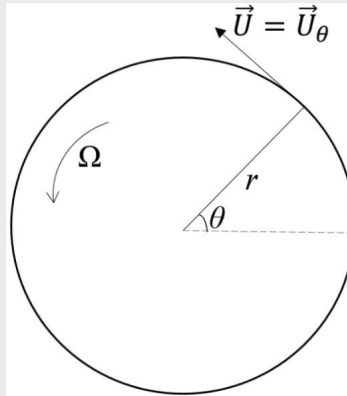
Logo,

$$d\vec{U} = \frac{1}{2}(\vec{\omega} \times d\vec{r}) \quad (3.83)$$

Vamos analisar dois exemplos, considerando os campos de velocidade descritos por $\vec{U} = U_\theta \hat{e}_\theta$ e $\vec{U} = \frac{U_{\max}}{\delta} Y \hat{e}_1$.

No primeiro caso, observamos que o elemento apresenta o comportamento de um corpo rígido, com uma velocidade angular constante Ω , pois

$$\vec{U} = U_\theta \hat{e}_\theta = \Omega r \hat{e}_\theta$$



Logo, a vorticidade pode ser dada por

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{U} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ U_r & U_\theta & U_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) = 2\Omega \hat{e}_z$$

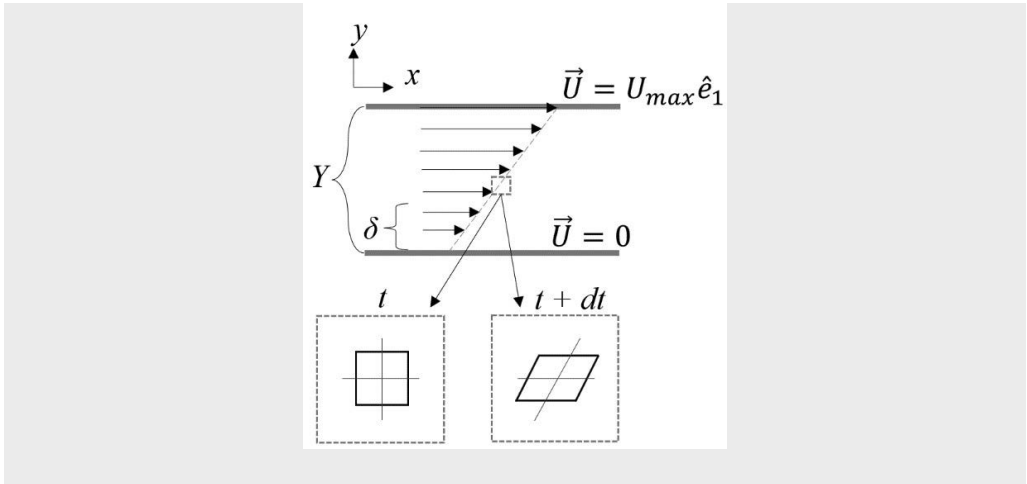
Para $\vec{U} = \frac{U_{\max}}{\delta} Y \hat{e}_1$, temos que

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{U} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \hat{e}_k$$

$$\vec{\omega} = -\frac{U_{\max}}{\delta} \hat{e}_k$$

Consequentemente, a velocidade angular é

$$\vec{\Omega} = -\frac{U_{\max}}{2\delta} \hat{e}_k \quad [\text{rad/s}]$$



3.11 MOVIMENTO GERAL DE UM ELEMENTO DE VOLUME

Uma vez que o movimento de um elemento de volume pode ser descrito em termos de seu vetor velocidade em função do espaço, temos

$$\vec{U}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{U}(\vec{r}) + d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \quad (3.84)$$

ou seja,

$$\vec{U}(\vec{r} + d\vec{r}) = \underbrace{\vec{U}(\vec{r})}_{\text{Efeito da translação}} + \underbrace{d\vec{r} \cdot \overline{\overline{D}}}_{\text{Efeito da deformação linear e angular}} + \underbrace{d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\Omega}}}_{\text{Efeito da rotação}} \quad (3.85)$$

Essa separação de componentes facilita a compreensão e a análise do comportamento do escoamento e é conhecida como **teorema de decomposição de Cauchy-Stokes**. A Figura 3.11 ilustra os possíveis comportamentos apresentados por um elemento de volume durante um escoamento.

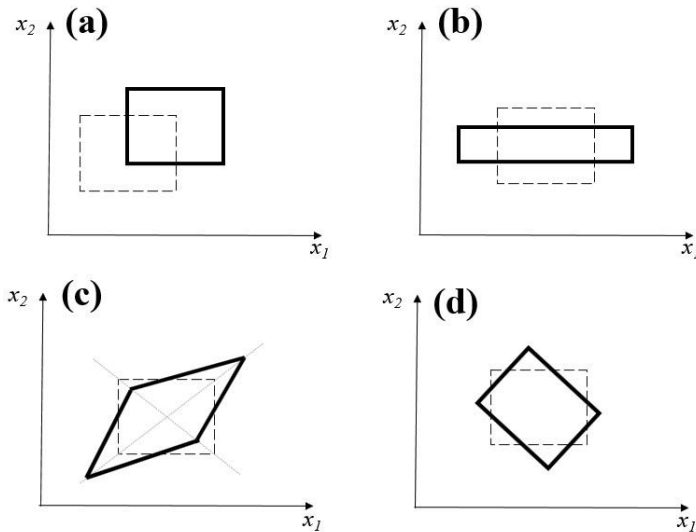


Figura 3.11 Decomposição do movimento de um elemento de volume separado em: (a) translação; (b) deformação linear; (c) deformação angular e (d) rotação.

Fonte: elaborada pelos autores.

REFERÊNCIAS

ALLEN, M. B. *Continuum mechanics: the birthplace of mathematical models*. Hoboken: John Wiley & Sons Inc, 2015.

ARIS, R. *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Mineola: Dover Publications, 1962.

AZARPIRA, M.; ZARRATI, A. R.; FARROKHZAD, P. Comparison between the Lagrangian and Eulerian approach in simulation of free surface air-core vortices. *Water*, Basel, v. 13, n. 5, p. 726, mar. 2021.

BURESTI, G. *Elements of fluid dynamics*. London: Imperial College Press, 2012.

CAPALDI, F. M. *Continuum mechanics: constitutive modeling of structural and biological materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

FEIREISL, E.; KARPER, T. G.; POKORNÝ, M. *Mathematical theory of compressible viscous fluids: analysis and numerics*. Basel: Birkhäuser, 2016.

LEAL, L. G. *Advanced transport phenomena fluid mechanics and convective transport processes*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

MAHANI, H.; MUGGERIDGE, A. H.; ASHJARI, M. A. Vorticity as a measure of heterogeneity for improving coarse grid generation. *Petroleum Geoscience*, Bath, v. 15, n. 1, p. 91–102, 2009.

MARTINEC, Z. *Principles of continuum mechanics: a basic course for physicists*. Basel: Birkhäuser, 2019.

SKIEPKO, T. *On the Reynolds transport theorem for fluid systems: fundamentals and applications*. Saarbrücken: Lap Lambert Academic Publishing, 2015.

WITELSKI, T.; BROWEN, M. *Methods of mathematical modelling: continuous systems and differential equations*. New York: Springer, 2015.

XU, Z.; HAN, Z.; QU, H. Comparison between Lagrangian and Eulerian approaches for prediction of particle deposition in turbulent flows. *Powder Technology*, Amsterdam, v. 360, p. 141–150, 2020.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 3.1

Determine a derivada substancial da propriedade

$$\phi(t, x, y, z) = 2x^2yz^3 \cos(\pi t).$$

Exercício 3.2

Considerando um campo de velocidade dado por

$$\vec{U} = 4xt \vec{e}_1 - 4yt \vec{e}_2,$$

e a condição inicial $x_0 = y_0 = 2$, determine a equação da trajetória da partícula.

Exercício 3.3

Um escoamento cisalhante simples é descrito pelo campo de velocidade

$$\vec{U} = 2x \hat{j}.$$

Determine as trajetórias das partículas de fluido para esse escoamento. Considere quatro pontos materiais definidos pelos vértices de um retângulo cujas posições em $t = 0$ são: $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 1)$. Determine a posição ocupada por esses pontos materiais em $t = 3$. Mostre em um diagrama no plano $x - y$ a posição ocupada por esses pontos materiais nos instantes $t = 0$ e $t = 3$.

Exercício 3.4

Um campo de velocidade é descrito por

$$\vec{U} = x(1 + t) \hat{i} + 4y(1 + t) \hat{j} + 6(1 + t) \hat{k}.$$

Determine:

- A aceleração em coordenadas espaciais.
- A aceleração em coordenadas materiais.
- Se o escoamento é isocórico.

Exercício 3.5

Considere um escoamento descrito pelo campo de velocidade

$$\vec{U} = x(4x + 1) \hat{j}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Determine:

- O perfil de velocidade para esse escoamento.
- O tensor gradiente de velocidade.
- O tensor taxa de deformação.
- O esquema do perfil de vorticidade.
- O tensor vorticidade.

Dinâmica dos meios deformáveis

Neste capítulo vamos analisar a dinâmica do fluido levando em consideração as forças que podem produzir movimento nele. De fato, existem dois tipos de forças capazes de produzir movimento em meios deformáveis: forças de corpo ou forças de campo e forças de superfície ou forças de contato, que serão descritas a seguir.

4.1 FORÇAS EM MEIOS DEFORMÁVEIS

1. Forças de corpo (ou forças de campo): forças que atuam através do material sob a ação de campos (forças por unidade de massa). Exemplos: força da gravidade, força elétrica, força magnética. Por essa definição, temos:

$$\int_m \vec{f}(\vec{r}) dm = \int_{V(t)} \vec{f}(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV \quad (4.1)$$

E nesse caso, considerando a força da gravidade, por exemplo, a força de campo corresponde à própria aceleração da gravidade; tem-se:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{g}$$

2. Forças de superfície (ou forças de contato): forças que atuam nas fronteiras superficiais que envolvem o elemento de volume (forças por unidade de área). Exemplos: pressão e tensão de cisalhamento.

A representação da força de superfície na forma

$$\text{Força de superfície} = \int_S \vec{T}_n(\vec{r}, \hat{n}) dS \quad (4.2)$$

facilita a compreensão da dinâmica de um meio deformável. De fato, essa descrição é conhecida como **princípio das tensões de Cauchy** e enunciada da seguinte forma: “Em torno de qualquer superfície imaginária fechada no escoamento existe uma distribuição do vetor tensão \vec{T}_n , cuja resultante e momento são equivalentes àqueles causados pelo material (no caso, fluido) que envolve a superfície”.

4.2 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

O princípio fundamental do movimento dos fluidos estabelece que toda taxa de variação da quantidade de movimento de um volume material $V(t)$ corresponde exatamente à resultante das forças que atuam sobre $V(t)$. Esse princípio pode ser descrito matematicamente por meio do **primeiro postulando de Euler**, dado por:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \int_{S(t)} \vec{T}_n dS + \int_{V(t)} \rho \vec{f} dV \quad (4.3)$$

Ao considerarmos o TTR, temos:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \int_{V(t)} \left[\frac{d}{dt} (\rho \vec{U}) + \rho \vec{U} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] dV \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \int_{V(t)} \left[\rho \frac{d\vec{U}}{dt} + \underbrace{\left(\vec{U} \frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{U} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \right)}_{\substack{=0 \\ \text{Conservação da massa}}} \right] dV \quad (4.5)$$

Logo, quando está implícita a conservação da massa:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \int_{V(t)} \rho \frac{d\vec{U}}{dt} dV \quad (4.6)$$

$$\int_{V(t)} \rho \frac{d\vec{U}}{dt} dV = \int_{S(t)} \vec{T}_n dS + \int_{V(t)} \rho \vec{f} dV \quad (4.7)$$

Mas $\vec{T}_n = \hat{n} \cdot \mathbf{T}$, onde \mathbf{T} representa o **tensor tensão de Cauchy**, que, por sua vez, fornece o estado de tensões no fluido. Portanto,

$$\int_{V(t)} \rho \frac{d\vec{U}}{dt} dV = \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{\bar{T}} dS + \int_{V(t)} \rho \vec{f} dV \quad (4.8)$$

Ao aplicarmos o teorema de Gauss, temos

$$\int_{V(t)} \rho \frac{d\vec{U}}{dt} dV = \int_{V(t)} \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{T}} dV + \int_{V(t)} \rho \vec{f} dV \quad (4.9)$$

$$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{d\vec{U}}{dt} - \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} - \rho \vec{f} \right) dV = 0 \quad (4.10)$$

Uma forma alternativa é dada como

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \right) = \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} + \rho \vec{f} \quad (4.11)$$

Em notação indicial, a componente \hat{e}_i da Equação (4.11) é dada por

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \partial_j u_i \right) = \partial_j \bar{\bar{T}}_{ji} + \rho f_i$$

É importante observar que, na notação de índices dos componentes do tensor das tensões, $\bar{\bar{T}}_{ij}$, i corresponde à orientação da normal e j à orientação da força. $\bar{\bar{T}}_{ji}$ corresponde à transposta de $\bar{\bar{T}}_{ij}$. Comumente, são designados:

- $\tau \rightarrow$ tensões cisalhantes.
- $\sigma \rightarrow$ tensões normais.

Já em coordenadas cartesianas, para \hat{i} , por exemplo, temos:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x + \frac{\partial \bar{\bar{T}}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\bar{T}}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\bar{T}}_{zx}}{\partial z}$$

4.3 TENSOR TENSÃO DE CAUCHY

Agora vamos explorar em mais detalhes o tensor $\bar{\bar{T}}$. Para isso, vamos aplicar a conservação da quantidade de movimento linear em elemento de volume esférico com diâmetro d . Assim,

- $V(t) \propto d^3$

$$\bullet S(t) \propto d^2$$

Ao dividirmos a Equação (4.2) por d^2 , e aplicando o limite $d \rightarrow 0$, observamos que

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{d^2} \int_{S(t)} \vec{T}_n dS = 0 \quad (4.12)$$

Agora, ao analisarmos um elemento de fluido cilíndrico de altura infinitesimal h , como mostrado na Figura 4.1, temos

$$\int_{S(t)} \vec{T}_n dS = \int_{S_1(t)} \vec{T}_n dS + \int_{S_2(t)} \vec{T}_n dS = 0 \quad (4.13)$$

Isso mostra que

$$\vec{T}_n + \vec{T}_{-n} = 0 \quad (4.14)$$

De fato, o tensor tensão atuando em ambos os lados de uma mesma superfície, em um dado ponto, é igual em magnitude, porém com sentidos opostos. Esse resultado é equivalente à terceira lei de Newton e uma aplicação direta do princípio da variação da quantidade de movimento, que é o lema de Cauchy, que estabelece que o vetor tensão \vec{T} satisfaz o princípio da ação e reação em qualquer instante de tempo e em qualquer ponto \vec{r} a partir do elemento de superfície com orientação dada por \hat{n} , isto é, $\vec{T}(\vec{r}, \hat{n}, t) = -\vec{T}(\vec{r}, -\hat{n}, t)$.

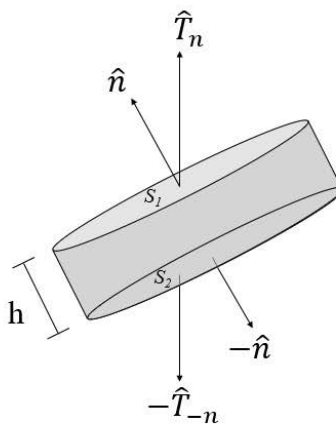


Figura 4.1 Projeções das componentes unitárias \hat{n} e \hat{T}_n sobre duas superfícies opostas em um elemento de fluido.

Fonte: elaborada pelos autores.

4.4 SIMETRIA DO TENSOR TENSÃO

Segundo o **primeiro postulado de Euler**, que estabelece a conservação da quantidade de movimento angular, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{U} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{f} dV + \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{T}_n dS \quad (4.15)$$

Do TTR, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{U} dV = \int_{V(t)} \rho \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{U}) dV \quad (4.16)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{U} dV = \int_{V(t)} \rho \left[\underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{U} \right)}_0 + \vec{r} \times \frac{d\vec{U}}{dt} \right] dV \quad (4.17)$$

Logo,

$$\int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \frac{d\vec{U}}{dt} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{f} dV + \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{T}_n dS \quad (4.18)$$

$$\int_{V(t)} \underbrace{\vec{r} \times \left(\rho \frac{d\vec{U}}{dt} - \rho \vec{f} \right)}_{=\vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{T}}} dV = \int_{S(t)} \vec{r} \times \underbrace{\vec{T}_n}_{\hat{n} \cdot \vec{\bar{T}}} dS \quad (4.19)$$

Assim,

$$\int_{V(t)} \left(\vec{r} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{T}} \right) dV = \int_{S(t)} \vec{r} \times (\hat{n} \cdot \vec{\bar{T}}) dS \quad (4.20)$$

$$\int_{V(t)} \left(\vec{r} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{T}} \right) dV = - \int_{S(t)} \hat{n} \cdot (\vec{\bar{T}} \times \vec{r}) dS \quad (4.21)$$

$$\int_{V(t)} \left(\vec{r} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{T}} \right) dV = - \int_{V(t)} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\bar{T}} \times \vec{r}) dV \quad (4.22)$$

Ao considerarmos a componente i da Equação (4.22), por exemplo, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \epsilon_{ijk} x_j \partial_m T_{mk} dV &= - \int_{V(t)} \epsilon_{ikj} \partial_m (T_{mk} x_j) dV \\ &= \int_{V(t)} \epsilon_{ijk} (x_j \partial_m T_{mk} + T_{mk} \partial_m x_j) dV \end{aligned}$$

$$\int_{V(t)} \left[\epsilon_{ijk} x_j \partial_m T_{mk} - \epsilon_{ijk} x_j \partial_m T_{mk} - \underbrace{\epsilon_{ijk} T_{mk}}_{\delta_{mj}} \partial_m x_j \right] dV = 0$$

$$\int_{V(t)} \epsilon_{ijk} T_{jk} dV = 0$$

Consequentemente,

$$\epsilon_{ijk} T_{jk} dV = 0$$

Ao multiplicarmos a equação anterior por ϵ_{ilm} , temos

$$\begin{aligned} \epsilon_{ilm} \epsilon_{ijk} T_{jk} &= (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) T_{jk} \\ &= T_{lm} - T_{ml} = 0 \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que o tensor tensão de Cauchy é simétrico (**segundo postulado de Euler**), pois

$$T_{lm} = T_{ml}$$

4.5 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DE CAUCHY

4.5.1 Hidrostática

Em repouso, um elemento de volume não apresenta componentes cisalhantes, mas somente tensões normais. Com isso, a *tensão hidrostática* é simplesmente a média das três componentes de tensão normal de qualquer tensor de tensão. Assim,

$$\sigma_{\text{hidro}} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad (4.23)$$

Dessa forma, podemos descrever essa característica como

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{\text{hidro}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{hidro}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{hidro}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Com isso, concluímos que

$$\sigma_{\text{hidro}} = \frac{1}{3} \text{tr}(T_{ij}) = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

Como $\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, o tensor tensão pode ser expresso na forma

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \sigma_{ii} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Uma vez que no regime hidrostático a tensão hidrostática é contrabalanceada única e exclusivamente pela **pressão hidrostática** p , podemos concluir que

$$\sigma_{\text{hidro}} = -p = -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

Assim, para um fluido em repouso, podemos escrever o tensor tensão na forma

$$\bar{\bar{T}} = -p \bar{\bar{I}}$$

O sinal negativo, por sua vez, deve-se ao fato de que o volume material é submetido a um esforço de compressão. Dessa maneira,

$$T_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Ao retornarmos à equação do movimento, considerando que o fluido está em repouso ($\vec{U} = 0$), temos

$$\rho \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot (p\vec{I}) \quad (4.25)$$

$$\rho \vec{f} = \hat{e}_k \partial_k \cdot (pI_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j) = \partial_i (p\delta_{ij} \hat{e}_j) = \hat{e}_i \partial_i p$$

Logo,

$$\rho \vec{f} = \vec{\nabla} p \quad (4.26)$$

Para o campo gravitacional em um sistema cartesiano, concluímos que

$$\vec{f} = -g\hat{k},$$

com

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

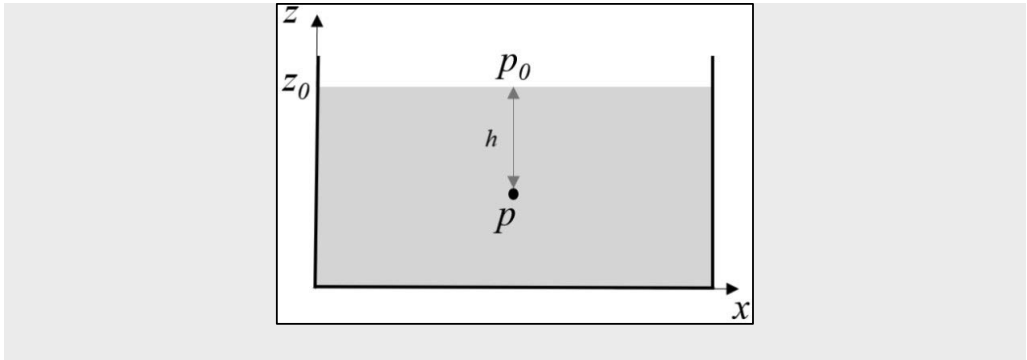
Como exemplo, vamos analisar o comportamento da pressão em função da profundidade de um tanque.

Assumindo que a densidade é constante,

$$\int_{p_0}^p dp = -\rho g \int_{z_0}^z dz$$

$$p = -\rho g(z - z_0) + p_0$$

$$p = \rho gh + p_0$$



4.5.2 Forças sobre corpos em escoamento em regime permanente

Para o caso envolvendo escoamento, o tensor tensão é descrito por

$$\overline{\overline{T}} = -p \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{P}} \quad (4.27)$$

ou

$$T_{ij} = p \delta_{ij} + P_{ij} \quad (4.28)$$

onde o tensor $\overline{\overline{P}}$ é o tensor tensão viscosa, que corresponde à componente do tensor tensão associada ao movimento do elemento de volume. Ao analisarmos o caso em que $i = j$, temos

$$T_{ii} = -3p + P_{ii}$$

Logo, observamos que

$$\underbrace{\frac{T_{ii}}{3}}_{\text{Pressão mecânica}} = \underbrace{(-p)}_{\text{Pressão termodinâmica}} + \underbrace{\frac{P_{ii}}{3}}_{\text{Pressão normal viscosa}}$$

Com isso, podemos afirmar que, para fluidos em repouso, $P_{ii} = 0$ e a pressão termodinâmica corresponde a uma média das tensões normais. Outra conclusão é de que, para fluidos em movimento, p é diferente da pressão mecânica.

Para um escoamento qualquer,

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \quad (4.29)$$

Na ausência de forças de corpo em condição de regime permanente,

$$\rho \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} = \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \quad (4.30)$$

Como

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = \rho \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} + \underbrace{\vec{U} (\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}))}_{=0 \text{ (regime permanente)}} \quad (4.31)$$

Assim,

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \quad (4.32)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U} - \overline{\overline{T}}) = 0 \quad (4.33)$$

Considerando um escoamento em torno de um corpo rígido, conforme mostrado na Figura 4.2, a Equação (4.33) pode ser expressa na forma integral como

$$\int_{V(t)} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U} - \overline{\overline{T}}) dV = \int_{S(t)} \hat{n} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U} - \overline{\overline{T}}) dS = 0 \quad (4.34)$$

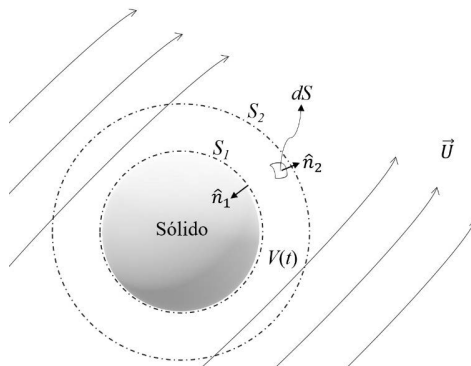


Figura 4.2 Escoamento em torno de um corpo sólido.

Fonte: elaborada pelos autores.

Ao decompor a integral de superfície em dois termos relacionados às áreas S_1 e S_2 , temos

$$\int_{S_1(t)} \hat{n}_1 \cdot (\rho \vec{U} \vec{U} - \vec{T}) dS + \int_{S_2(t)} \hat{n}_2 \cdot (\rho \vec{U} \vec{U} - \vec{T}) dS = 0, \quad (4.35)$$

considerando que

$$\hat{n} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dS = (\hat{n} \cdot \rho \vec{U}) \vec{U} dS \quad (4.36)$$

onde $\hat{n} \cdot \rho \vec{U}$ é o fluxo de massa na direção da componente normal \hat{n} . Dessa forma, ao considerarmos que a superfície S_1 é impermeável,

$$\int_{S_1(t)} \hat{n}_1 \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dS = 0 \quad (4.37)$$

Em contrapartida, a componente

$$\int_{S_1(t)} \hat{n}_1 \cdot \vec{T} dS$$

representa a força exercida pelo corpo sobre o volume material $V(t)$. Assim, a força de escoamento sobre um corpo sólido é dada por

$$\vec{F}_D = - \int_{S_1(t)} \hat{n}_1 \cdot \vec{T} dS \quad (4.38)$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\vec{F}_D = - \int_{S_2(t)} \hat{n}_2 \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dS + \int_{S_2(t)} \hat{n}_2 \cdot \vec{T} dS \quad (4.39)$$

Caso S_2 esteja posicionado suficientemente longe do corpo, podemos ignorar a ação das forças viscosas e expressar a força do escoamento como

$$\vec{F}_D = - \int_{S_2(t)} \hat{n}_2 \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dS + \int_{S_2(t)} \hat{n}_2 \cdot (-p \vec{I}) dS \quad (4.40)$$

ou

$$\vec{F}_D = - \int_{S_2(t)} \hat{n}_2 \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dS - \int_{S_2(t)} p \hat{n}_2 dS \quad (4.41)$$

REFERÊNCIAS

- ALLEN, M. B. *Continuum mechanics: the birthplace of mathematical models*. Hoboken: John Wiley & Sons Inc, 2015.
- ARIS, R. *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Mineola: Dover Publications, 1962.
- BURESTI, G. *Elements of fluid dynamics*. London: Imperial College Press, 2012.
- FEIREISL, E.; KARPER, T. G.; POKORNÝ, M. *Mathematical theory of compressible viscous fluids: analysis and numerics*. Basel: Birkhäuser, 2016.
- LEAL, L. G. *Advanced transport phenomena fluid mechanics and convective transport processes*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- MAHANI, H.; MUGGERIDGE, A. H.; ASHJARI, M. A. Vorticity as a measure of heterogeneity for improving coarse grid generation. *Petroleum Geoscience*, Bath, v. 15, n. 1, p. 91–102, 2009.
- MARTINEC, Z. *Principles of continuum mechanics: a basic course for physicists*. Basel: Birkhäuser, 2019.
- PETRILA, T.; TRIF, D. *Basics of fluid mechanics and introduction to computational fluid dynamics*. New York: Springer, 2005.
- SADD, M. H. *Continuum mechanics modeling of material behavior*. Cambridge: Academic Press, 2018.
- SKIEPKO, T. *On the Reynolds transport theorem for fluid systems: fundamentals and applications*. Saarbrücken: Lap Lambert Academic Publishing, 2015.
- SMITH, D. R. *An introduction to continuum mechanics: after Truesdell and Noll*. New York: Springer, 1993.
- TEMAN, R.; MIRANVILLE, A. *Mathematical modeling in continuum mechanics*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- WITELSKI, T.; BROWEN, M. *Methods of mathematical modelling: continuous systems and differential equations*. New York: Springer, 2015.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS**Exercício 4.1**

Considere um meio sólido cúbico de aresta a . Nesse meio, uma força de intensidade igual a F é aplicada na direção positiva de x sobre a face lateral do cubo. Determine os componentes do tensor de Cauchy.

Exercício 4.2

Demonstre que

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{R(t)} \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\nabla} \vec{U} \cdot \vec{V} \right) \cdot d\vec{r}$$

onde \vec{V} corresponde a uma função vetorial, \vec{U} é o vetor velocidade e $R(t)$ uma curva material.

Exercício 4.3

Determine o divergente do tensor tensão considerando um campo de velocidade dado por

$$\vec{U} = 2yz \hat{i} + z(1+x) \hat{j} + 5(y-x) \hat{k} \quad [\text{m/s}]$$

Considere $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$.

Exercício 4.4

Determine o vetor força de campo resultante em uma condição hidrostática para um fluido com densidade $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ submetido a um campo de pressão dado por

$$p = 9.8z \quad [\text{Pa}].$$

Exercício 4.5

Demonstre que a aceleração de um elemento de fluido pode ser expressa na forma

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} U^2}{2} + (\vec{\nabla} \times \vec{U}) \times \vec{U}.$$

Conservação da energia em meios deformáveis

Ao estendermos a primeira lei da termodinâmica a um elemento de volume $V(t)$, observamos que sua taxa de aumento da energia é igual à taxa com que o calor é transferido para esse elemento somada à taxa com que o trabalho é realizado sobre ele. A fim de quantificarmos matematicamente o princípio da conservação da energia, vamos definir as seguintes quantidades:

1. Energia de $V(t)$, E

$$E = \int_{V(t)} \rho \left(e + \frac{U^2}{2} \right) dV \quad (5.1)$$

onde e corresponde à energia interna por unidade de massa e $U^2/2 = (\vec{U} \cdot \vec{U})/2$ à energia cinética por unidade de massa. Note que a parcela correspondente à energia potencial foi desconsiderada na Equação (5.1).

2. Taxa de aquecimento, Q

$$Q = - \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{q} dS + \int_{V(t)} \rho \dot{q} dV \quad (5.2a)$$

onde \vec{q} representa o vetor densidade de fluxo de calor e \dot{q} a taxa de geração de calor por unidade de massa. Em alguns textos, a taxa de calor é representada como \dot{Q} em Watts, o vetor densidade de fluxo é representado como \vec{q}'' em Watts/m² e a taxa de geração de calor é apresentada por unidade de volume e representada como \dot{q}''' em Watts/m³. Usando esta última nomenclatura, a taxa de aquecimento pode ser escrita como

$$\dot{Q} = - \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{q}'' dS + \int_{V(t)} \dot{q}''' dV \quad (5.2b)$$

3. Potência mecânica, P

$$P = \int_{S(t)} \vec{t}_n \cdot \vec{U} dS + \int_{V(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{U} dV \quad (5.3)$$

onde a primeira e a segunda integrais correspondem às potências mecânicas devido às forças de superfície e de corpo, respectivamente.

Com base em tais componentes, podemos escrever a equação de conservação da energia (primeira lei da termodinâmica) na forma

$$\frac{DE}{Dt} = Q + P \quad (5.4)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(e + \frac{U^2}{2} \right) dV = - \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{q} dS + \int_{V(t)} \rho \dot{q} dV + \int_{S(t)} \vec{t}_n \cdot \vec{U} dS + \int_{V(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{U} dV \quad (5.5)$$

Aplicarmos o TTR e o teorema da divergência, temos a equação da energia (equação da conservação da energia) para meios deformáveis:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{U^2}{2} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho \dot{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{U}) \quad (5.6)$$

5.1 EQUAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

De fato, essa equação corresponde à soma das energias interna e cinética de meios deformáveis. Porém, muitas vezes é conveniente separar esses componentes de energia. Para isso, multiplica-se escalarmente a equação da conservação da quantidade de movimento de Cauchy pelo vetor velocidade \vec{U} .

$$\vec{U} \cdot \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{U} \cdot \rho \vec{f} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \quad (5.7)$$

Mas, como

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right) = \vec{U} \cdot \frac{D\vec{U}}{Dt},$$

obtemos apenas a equação da energia mecânica, dada por

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \quad (5.8)$$

Como o tensor tensão viscosa, apresentado na Equação (4.27), está relacionado à viscosidade do fluido, a equação (5.8) pode ser reescrita na forma

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \cdot (-p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{P}}) \quad (5.9)$$

ou

$$\underbrace{\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right)}_I = \underbrace{\rho \vec{f} \cdot \vec{U}}_{II} - \underbrace{\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p}_{III} + \underbrace{\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{P}}}_{IV} \quad (5.10)$$

onde:

- I. Taxa de variação da energia cinética do elemento de volume.
- II. Potência mecânica devido às forças de corpo.
- III. Potência mecânica associada à aceleração do elemento de volume pelas forças de pressão.
- IV. Potência mecânica relacionada à aceleração do elemento de volume pelas forças viscosas (normais e cisalhantes).

5.2 EQUAÇÃO DA ENERGIA TÉRMICA

O último termo do lado direito da Equação (5.6) pode ser escrito na forma

$$\vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{U}) = \partial_i (T_{ij} U_j) = U_j \partial_i T_{ij} + T_{ij} \partial_i U_j = \vec{U} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}}) + \text{Tr}(\bar{\bar{T}}^T \cdot \vec{\nabla} \vec{U})$$

$$\text{Mas } \text{Tr}(\bar{\bar{T}}^T \cdot \vec{\nabla} \vec{U}) \equiv \bar{\bar{T}}^T : \vec{\nabla} \vec{U}$$

Assim, também podemos reescrever a Equação (5.8) na forma

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{U}) - \bar{\bar{T}} : \vec{\nabla} \vec{U} \quad (5.11)$$

Ao subtrairmos a Equação (5.11) da Equação (5.6), obtemos

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho \dot{q} + \overline{\overline{T}} : \vec{\nabla} \vec{U} \quad (5.12)$$

Lembrando que

$$\overline{\overline{T}} : \vec{\nabla} \vec{U} = \overline{\overline{T}} : (\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}})$$

Mas, como $\overline{\overline{T}}$ é simétrico e $\overline{\overline{\Omega}}$ é antissimétrico, logo

$$\overline{\overline{T}} : \vec{\nabla} \vec{U} = \overline{\overline{T}} : \overline{\overline{D}}$$

Além disso,

$$\overline{\overline{T}} : \overline{\overline{D}} = (-p\delta_{ij} + P_{ij})D_{ij}$$

Dessa forma, a equação da energia térmica é dada por

$$\underbrace{\rho \frac{De}{Dt}}_I = \underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \vec{q}}_II + \underbrace{\rho \dot{q}}_III - \underbrace{p \vec{\nabla} \cdot \vec{U}}_IV + \underbrace{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}_V \quad (5.13)$$

onde:

- I. Taxa de variação da energia térmica do elemento de volume.
- II. Potência associada à condução de calor.
- III. Potência associada a um termo fonte.
- IV. Taxa de trabalho associada à deformação do elemento de volume pelo campo de pressão (trabalho reversível).
- V. Taxa de trabalho associada à taxa de dissipação viscosa do elemento de volume (trabalho irreversível).

Por fim, podemos concluir que a equação da conservação da energia mecânica (equação do movimento) está relacionada (acoplada) à equação da energia térmica por meio da potência de tensão ($\overline{\overline{T}} : \vec{\nabla} \vec{U}$). Isso mostra que, quando a potência de tensão é nula ou quase, não há nenhuma relação entre o movimento do fluido e seu estado térmico.

5.3 SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

Por meio da **desigualdade de Clausius**, a **segunda lei da termodinâmica** estabelece que, para um processo qualquer,

$$\oint_C \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (5.14)$$

onde $\oint_C \delta Q$ representa a integral cíclica da transferência de calor e a grandeza $(\delta Q/T)$ corresponde a uma variável de estado.

Para um processo qualquer, a partir da desigualdade de Clausius, sabemos que a variação da entropia entre dois estados termodinâmicos 1 e 2 é dada por

$$\Delta S_{12} \equiv S_2 - S_1 \geq \oint_C \frac{\delta Q}{T} \quad (5.15)$$

Logo, as variações de entropia para processos reversíveis e irreversíveis são dadas, respectivamente, por

$$\Delta S_{12} = \oint_C \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} \quad (5.16)$$

$$\Delta S_{12} > \oint_C \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{irrev}} \quad (5.17)$$

Porém, independentemente do processo, a variação infinitesimal da entropia pode ser descrita com duas componentes independentes associadas a uma parcela reversível e outra irreversível:

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} + dS_{\text{irrev}} \quad (5.18)$$

Ao considerarmos um elemento de volume ao longo de um escoamento, a taxa da variação de entropia de tal elemento de volume pode ser descrita na forma

$$\frac{DS}{Dt} = \underbrace{\left(\frac{DS}{Dt} \right)_{\text{rev}}}_{\text{Devido ao aquecimento}} + \underbrace{\left(\frac{DS}{Dt} \right)_{\text{irrev}}}_{\text{Devido às irreversibilidades internas}} \quad (5.19)$$

Devido ao aquecimento Devido às irreversibilidades internas

onde

$$S = \int_{V(t)} \rho \underbrace{s}_{\text{Entropia específica}} dV \quad (5.20)$$

Assim, as componentes reversível e irreversível da variação de entropia são dadas por

$$\frac{DS_{\text{rev}}}{Dt} = \int_{S(t)} \frac{-\hat{n} \cdot \vec{q}}{T} dS + \int_{V(t)} \frac{\rho \dot{q}}{T} dV \quad (5.21)$$

e

$$\frac{DS_{\text{irrev}}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho s_{\text{irrev}} dV = \int_{V(t)} \rho \frac{Ds_{\text{irrev}}}{Dt} dV \quad (5.22)$$

Dessa forma,

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho s dV = \int_{S(t)} \frac{-\hat{n} \cdot \vec{q}}{T} dS + \int_{V(t)} \frac{\rho \dot{q}}{T} dV + \int_{V(t)} \rho \frac{Ds_{\text{irrev}}}{Dt} dV \quad (5.23)$$

Ao aplicarmos o teorema da divergência, temos

$$\int_{V(t)} \left[\rho \frac{Ds}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{\rho \dot{q}}{T} - \rho \frac{Ds_{\text{irrev}}}{Dt} \right] dV = 0 \quad (5.24)$$

ou seja,

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) + \frac{\rho \dot{q}}{T} + \rho \frac{Ds_{\text{irrev}}}{Dt} \quad (5.25)$$

Com base na primeira **lei da termodinâmica**, sabemos que

$$dE = \delta Q + \delta W = Tds - pdv \quad (5.26)$$

Em termos de propriedades específicas, a taxa de variação da energia total é dada por

$$\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt} - p \frac{dv}{dt} \quad (5.27)$$

porém,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (\rho^{-1}) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$$

Consequentemente,

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho T \frac{Ds}{Dt} + p \underbrace{\left(\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right)}_{-\vec{\nabla} \cdot \vec{U}} \quad (5.28)$$

Mas o lado esquerdo da Equação (5.28) também pode ser expresso na forma

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho \dot{q} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} \quad (5.29)$$

ou

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho \dot{q} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} \quad (5.30)$$

Assim, a primeira lei da termodinâmica em termos de entropia para um elemento de volume é descrita como

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{q}}{T} + \frac{\rho \dot{q}}{T} + \frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} \quad (5.31)$$

Ao substituírmos a Equação (5.31) na Equação (5.25), obtemos

$$-\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{q}}{T} + \frac{\rho \dot{q}}{T} + \frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) + \frac{\rho \dot{q}}{T} + \rho \frac{Ds_{\text{irrev}}}{Dt} \quad (5.32)$$

e, considerando que

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{q}}{T} - \frac{\vec{q}}{T^2} \cdot \vec{\nabla} T$$

obtemos a expressão para a taxa de geração de entropia devido a irreversibilidades internas em $V(t)$ na forma:

$$\rho \frac{Ds_{\text{irrev}}}{Dt} = \underbrace{-\frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2}}_{\text{Devido ao aquecimento}} + \underbrace{\frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T}}_{\text{Devido aos efeitos viscosos}} \quad (5.33)$$

Por fim, podemos escrever a primeira lei da termodinâmica em termos de entropia na forma

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{q}}{T} + \frac{\rho \dot{q}}{T} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2} + \frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} \quad (5.34)$$

Em suma, em todos os processos de transferência de calor, **sempre haverá uma parcela reversível e outra irreversível**. E a parcela associada aos efeitos de irreversibilidade será tanto maior quanto maior for o gradiente de temperatura.

A partir deste ponto, serão apresentadas as principais equações relacionadas a uma classe de fluidos, chamados de **fluidos newtonianos**. Também serão apresentadas a lei de Fourier, a viscosidade expansional, bem como uma breve apresentação das equações de Navier-Stokes.

5.4 FLUIDOS STOKESIANOS

Com base nas equações vistas até aqui, vamos considerar uma classe de fluidos denominados fluidos stokesianos, ou fluidos de Stokes. Para tanto, vamos adotar as seguintes condições:

- I. O fluido é considerado isocórico.
- II. O fluido é homogêneo (o tensor tensão $\overline{\overline{T}}$ não depende da posição \vec{r}).
- III. O tensor tensão depende somente das condições termodinâmicas locais e do tensor deformação $\overline{\overline{D}}$, não apresentando dependência de outras grandezas cinemáticas, como o tensor vorticidade $\overline{\overline{\Omega}}$, por exemplo.
- IV. Quando o tensor deformação for nulo, $\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}}$.

Vamos considerar a relação entre os tensores tensão e deformação dada por função polinomial:

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \beta\overline{\overline{D}} + \gamma\overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}} \quad (5.35)$$

Ao considerarmos que o tensor tensão tenha apenas uma dependência linear com o tensor deformação, obteremos

$$\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{A}} : \overline{\overline{D}} \quad (5.36)$$

ou

$$P_{ij} = A_{ijkl} D_{kl} \quad (5.37)$$

Já que P_{ij} é assumido ser uma combinação linear de D_{kl} e considerando a condição de simetria, o tensor A_{ijkl} pode ser expresso na forma

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \quad (5.38)$$

Assim,

$$P_{ij} = (\lambda \delta_{ij} D_{kk} + \eta \delta_{ik} D_{jl} + \gamma \delta_{il} D_{jk}) D_{kl} \quad (5.39)$$

$$P_{ij} = \lambda \delta_{ij} D_{kk} + \eta D_{ij} + \gamma D_{ji} \quad (5.40)$$

Uma vez que o tensor deformação é simétrico, temos

$$P_{ij} = \lambda \delta_{ij} D_{kk} + \underbrace{(\eta + \gamma)}_{2\mu} D_{ij} \quad (5.41)$$

Assim,

$$\overline{\overline{P}} = \lambda \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + 2\mu \overline{\overline{D}} \quad (5.42)$$

Com isso, podemos expressar o tensor tensão na forma:

$$\overline{\overline{T}} = -p \overline{\overline{I}} + \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{D}} \quad (5.43)$$

onde λ e μ correspondem ao segundo coeficiente de viscosidade e à viscosidade absoluta, respectivamente.

5.5 HIPÓTESE DE FOURIER

Da mesma forma que relacionamos o tensor $\overline{\overline{T}}$ a $\overline{\nabla} \cdot \vec{U}$, podemos, por analogia, relacionar o fluxo de calor \vec{q} com $\overline{\nabla} T$ na forma:

$$\vec{q} = -\overline{\overline{K}}(\overline{\nabla} T) \quad (5.44)$$

ou

$$q_i = -K_{ij} \partial_j T \quad (5.45)$$

onde $\overline{\overline{K}}$ representa o tensor condutividade térmica. Porém, se assumirmos uma condição isotrópica, temos

$$K_{ij} = k \delta_{ij} \quad (5.46)$$

Dessa forma, a **lei de Fourier** pode ser dada por

$$\vec{q} = -k(\overline{\nabla} T) \quad (5.47)$$

5.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE VISCOSIDADE E CONDUTIVIDADE TÉRMICA

Como demonstrado anteriormente, a parcela irreversível da variação da entropia pode ser descrita com duas componentes independentes, respeitando a lei de Clausius:

$$\rho \frac{Ds_i}{Dt} = -\frac{\vec{q} \cdot \overline{\nabla} T}{T^2} + \frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} \geq 0 \quad (5.48)$$

Logo,

$$-\frac{\vec{q} \cdot \overline{\nabla} T}{T^2} \geq 0 \quad (5.49)$$

e

$$\frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} \geq 0 \quad (5.50)$$

Ao considerarmos a lei de Fourier, a Equação (5.47) pode ser reescrita como:

$$\frac{k|\vec{\nabla}T|^2}{T^2} \geq 0 \quad (5.51)$$

Uma vez que a condutividade térmica é sempre uma propriedade com sinal positivo, o fluxo de calor sempre flui no sentido oposto ao do gradiente de temperatura.

Com base no tensor tensão viscosa, dado pela Equação (5.42), temos

$$\frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} = \frac{[\lambda\delta_{ij}\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + 2\mu D_{ij}]D_{ij}}{T} \geq 0 \quad (5.52)$$

Assim, para qualquer escoamento:

$$\lambda D_{ii}D_{jj} + 2\mu D_{ij}D_{ij} \geq 0 \quad (5.53)$$

Se considerarmos um escoamento com **expansão puramente volumétrica**, temos

$$D_{ij} = \alpha\delta_{ij} \quad (5.54)$$

Logo,

$$\lambda(3\alpha)^2 + 2\mu(3\alpha^2) \geq 0 \quad (5.55)$$

resultando na desigualdade

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0 \quad (5.56)$$

E, para o caso de um escoamento cisalhante puro:

$$D_{ij} = \alpha \quad (\text{caso } i \neq j) \quad (5.57)$$

e

$$D_{ii} = 0 \quad (5.58)$$

Assim,

$$\mu \geq 0 \quad (5.59)$$

Por conveniência, costuma-se chamar o lado direito da desigualdade dada na Equação (5.56) de viscosidade expansional β . Dessa forma, podemos reescrever a Equação (5.43) em termos indiciais, obtendo a expressão geral para fluidos newtonianos:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \left(\beta - \frac{2}{3}\mu\right) \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + 2\mu D_{ij} \quad (5.60)$$

Ao considerarmos apenas o traço do tensor tensão, obtemos

$$T_{ii} = -3p + 3\left(\beta - \frac{2}{3}\mu\right) \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + 2\mu D_{ij} \quad (5.61)$$

$$T_{ii} = -3p + 3\left(\beta - \frac{2}{3}\mu\right) \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + 2\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \quad (5.62)$$

$$T_{ii} = -3p + 3\beta \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \quad (5.63)$$

Ao dividirmos por 3, temos a pressão mecânica na forma:

$$\frac{T_{ii}}{3} = -\bar{p} = -p + \beta \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \quad (5.64)$$

Dessa forma, podemos concluir que, para um fluido em movimento, a pressão mecânica não é necessariamente igual à pressão termodinâmica. Porém, para melhor compreensão física da Equação (5.64), vamos multiplicar todos os seus termos pelo divergente da velocidade $\vec{\nabla} \cdot \vec{U}$:

$$\underbrace{-\bar{p} \vec{\nabla} \cdot \vec{U}}_{\text{Trabalho mecânico realizado pelas tensões normais}} = \underbrace{-p \vec{\nabla} \cdot \vec{U}}_{\text{Trabalho realizado pela deformação do volume material}} + \underbrace{\beta (\vec{\nabla} \cdot \vec{U})^2}_{\text{Trabalho irreversível relacionado à deformação causada por forças viscosas}} \quad (5.65)$$

Aqui é importante ressaltar que β corresponde a uma viscosidade associada à compressibilidade do elemento de fluido e também à mudança de energia: rotação, translação e vibração, por exemplo. Já o termo $\beta (\vec{\nabla} \cdot \vec{U})^2$ está intrinsecamente relacionado à transferência mecânica para a escala molecular.

A partir deste ponto, é importante ponderarmos sobre algumas observações pertinentes:

- a) Tanto μ quanto β são propriedades exclusivas do fluido e não podem ser determinadas por meio da teoria do contínuo.

- b) Para gases monoatômicos, a teoria cinética dos gases prevê $\beta = 0$.
- c) A hipótese de Stokes assume que $\beta = 0$, o que é equivalente a considerar que $-p = \frac{2}{3}T_{ii}$, pois $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. E isso é equivalente a assumir que a pressão mecânica é igual à pressão termodinâmica ($\bar{p} = p$).

5.7 EQUAÇÕES GERAIS DO MOVIMENTO

Até agora, fomos apresentados às equações que descrevem a conservação da massa, a conservação da quantidade de movimento e a conservação da energia térmica, dadas, respectivamente, por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (5.66)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \right) = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \quad (5.67)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho \dot{q} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \bar{\bar{P}} : \bar{\bar{D}} \quad (5.68)$$

É importante ressaltar que, para fluidos newtonianos, o tensor tensão é expresso como

$$\bar{\bar{T}} = \left[-p + \left(\beta - \frac{2}{3}\mu \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \right] \bar{\bar{I}} + 2\mu \bar{\bar{D}} \quad (5.69)$$

Ao considerarmos a viscosidade β nula, a média das pressões normais corresponderá à média das pressões hidrostáticas. Assim,

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \left(\beta - \frac{2}{3}\mu \right) \delta_{ij} \partial_k U_k + 2\mu D_{ij} \quad (5.70)$$

Uma vez que

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} = \hat{e}_k \partial_k T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \quad (5.71)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} = \partial_i T_{ij} \hat{e}_j = \partial_j T_{ji} \hat{e}_i, \quad (5.72)$$

temos

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} = \left[-\partial_i p + \partial_i \left(\beta - \frac{2}{3} \mu \right) \partial_k U_k + 2 \partial_j \mu D_{ij} \right] \hat{e}_i \quad (5.73)$$

Ao substituírmos a Equação (5.73) na equação da conservação da quantidade de movimento (Equação 5.67), obtemos a forma geral das equações de Navier-Stokes para a quantidade de movimento:

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \left[\left(\beta - \frac{2}{3} \mu \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \right] + 2\vec{\nabla} \cdot (\mu \overline{\overline{D}}) + \rho \vec{f} \quad (5.74)$$

A equação da conservação da quantidade de movimento também pode ser reescrita considerando três situações particulares. A primeira é baseada em uma condição em que as viscosidades β e μ sejam constantes. Nesse caso,

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \left(\beta - \frac{2}{3} \mu \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + 2\mu \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{D}} + \rho \vec{f} \quad (5.75)$$

e considerando o fato de que

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \left(\nabla^2 \vec{U} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right), \quad (5.76)$$

temos

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \left(\beta + \frac{1}{3} \mu \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \vec{f} \quad (5.77)$$

A segunda situação refere-se a um escoamento a volume constante, ou seja, um escoamento isocórico ($\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$). Assim, a equação da conservação da quantidade de movimento adquire a forma

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + 2\vec{\nabla} \cdot (\mu \overline{\overline{D}}) + \rho \vec{f} \quad (5.78)$$

Porém,

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \overline{\overline{D}}) = \mu \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{D}} \cdot \vec{\nabla} \mu \quad (5.79)$$

Conseqüentemente,

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + 2\mu \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{D}} + 2\overline{\overline{D}} \cdot \vec{\nabla} \mu + \rho \vec{f} \quad (5.80)$$

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\nabla^2 \vec{U} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right) \right] + (\vec{\nabla}\vec{U} + \vec{\nabla}\vec{U}^T) \cdot \vec{\nabla}\mu + \rho \vec{f} \quad (5.81)$$

Assim, a equação da conservação da quantidade de movimento é expressa na forma

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{U} + (\vec{\nabla}\vec{U} + \vec{\nabla}\vec{U}^T) \cdot \vec{\nabla}\mu + \rho \vec{f} \quad (5.82)$$

Por fim, considerando o caso onde ambos ρ e μ sejam constantes, temos

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \vec{f} \quad (5.83)$$

ou simplesmente

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}p + \nu \nabla^2 \vec{U} + \vec{f} \quad (5.84)$$

As Equações (5.83) e (5.84) representam a forma não conservativa da equação da quantidade de movimento para fluidos newtonianos e são de grande importância para a modelagem de escoamentos complexos, nos quais efeitos advectivos, por exemplo, são significativos. No entanto, é importante ressaltar que, em muitos casos, a forma não conservativa da equação não é suficiente para representar o comportamento de fluidos, mesmo em casos simples. Por isso, a escolha da forma mais apropriada depende da natureza do problema em questão e das simplificações adotadas.

5.8 EQUAÇÃO DA ENERGIA TÉRMICA PARA FLUIDOS NEWTONIANOS

De maneira geral, os fluidos podem ou não apresentar condições isotérmicas. Neste último caso, tanto a densidade quanto a viscosidade dinâmica do fluido são funções da temperatura (ou seja, $\rho = \rho(T)$ e $\mu = \mu(T)$). Isso nos leva à necessidade de obter um campo de temperatura para o fluido.

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho \dot{q} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}},$$

$$\vec{q} = -k(\vec{\nabla}T)$$

e

$$\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} = \left[\left(\beta - \frac{2}{3}\mu \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{D}} \right] : \overline{\overline{D}}$$

Ao considerarmos a hipótese de Stokes, $\beta = 0$,

$$\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} = \text{tr} \left\{ \left[\left(-\frac{2}{3}\mu \text{tr} \overline{\overline{D}} \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{D}} \right)^T \cdot \overline{\overline{D}} \right] \right\}$$

$$\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} = \mu \left[-\frac{2}{3} \text{tr}(\overline{\overline{D}}) \text{tr}(\overline{\overline{D}}) + 2 \text{tr}(\overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}}) \right]$$

$$\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} = \mu \left\{ 2 \left[-\frac{1}{3} \text{tr}^2(\overline{\overline{D}}) + \text{tr}(\overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}}) \right] \right\}$$

A expressão contida dentro das chaves é conhecida como **função dissipativa viscosa** Φ . Ou seja,

$$\Phi = 2 \left[-\frac{1}{3} \text{tr}^2(\overline{\overline{D}}) + \text{tr}(\overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}}) \right]$$

Dessa maneira, podemos reescrever a equação da energia na forma

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla}T) + \rho\dot{q} - p\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \mu\Phi \quad (5.85)$$

A partir deste ponto, a descrição da energia pode ser obtida considerando o calor específico do fluido, tendo em vista que esta propriedade indica a quantidade de energia térmica necessária para aumentar uma unidade de massa em uma unidade de temperatura. Logo, sua definição é dada por

$$c = \frac{dq}{dT} \quad (5.86)$$

Considerando que a primeira lei da termodinâmica estabelece que

$$dq = de + p dv \quad (5.87)$$

tanto a temperatura T quanto a energia e podem ser expressas em termos da pressão p e do volume específico v . Assim,

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_p dv + \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)_v dp \quad (5.88)$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p dv + \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v dp \quad (5.89)$$

Consequentemente,

$$c = \frac{\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_p dv + \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)_v dp + p dv}{\left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p dv + \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v dp} \quad (5.90)$$

A Equação (5.90) é uma generalização do calor específico de um meio material qualquer. Porém, para os fluidos, principalmente, é importante distinguirmos dois casos: condições à pressão constante e condições a volume constante.

Para uma condição à pressão constante, temos

$$c_p = \frac{\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_p dv + p dv}{\left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p dv} \quad (5.91)$$

Como

$$p dv = \left(\frac{\partial(pv)}{\partial v} \right)_p dv$$

temos que

$$c_p = \frac{\left(\frac{\partial e}{\partial v} + \frac{\partial(pv)}{\partial v} \right)_p dv}{\left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p dv}$$

ou seja,

$$c_p = \frac{\partial(e + pv)}{\partial T} \quad (5.92)$$

Como a entalpia h pode ser definida como $h = e + pv$, concluímos que

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (5.93)$$

Para a condição a volume constante, obtemos

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \quad (5.94)$$

Com base na equação de Gibbs, dada pela Equação (5.26), podemos concluir que uma porção infinitesimal de energia é dada por

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_v ds + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_s dv \quad (5.95)$$

A Equação (5.95) é obtida a partir de

$$de = Tds - pdv$$

E, pelas relações de Maxwell (vide textos de termodinâmica clássica), obtemos as definições de T e p dadas por

$$T \equiv \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_v$$

e

$$p \equiv - \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_s$$

Com isso, podemos relacionar as variações de temperatura e pressão em função do volume e da entropia:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_s = \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_v \right]_s$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_v = \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_s \right]_v$$

Isso nos leva à obtenção de uma das relações de Maxwell:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v$$

Ao revisitarmos a equação da energia dada pela Equação (5.95), percebemos que podemos reescrevê-la em termos do calor específico a volume constante. Pois,

$$de = c_v dT + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T dv \quad (5.96)$$

Se considerarmos o fato de que

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T - p \left(\frac{\partial v}{\partial v}\right)_T \quad (5.97)$$

Assim,

$$de = c_v dT + \left[T \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T - p \right] dv \quad (5.98)$$

A partir das relações de Maxwell, temos que

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

E, considerando as relações de diferenciação, obtemos

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

Dessa forma,

$$de = c_v dT + \left[-T \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - p \right] dv \quad (5.99)$$

A partir deste ponto, devemos considerar o fato de que os gases reais, por exemplo, não se comportam como gases ideais. Tanto a compressão quanto a expansão de gases reais estão intrinsecamente relacionadas às interações moleculares e influenciam nas propriedades termodinâmicas. Dessa forma, precisamos considerar o **coeficiente de compressibilidade isotérmica**

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

e o coeficiente de expansão térmica,

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

Dessa forma, um componente infinitesimal de energia pode ser expresso na forma

$$de = c_v dT + \left[\frac{\beta T}{\kappa} - p \right] dv \quad (5.100)$$

e

$$\frac{De}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt} + \left[\frac{\beta T}{\kappa} - p \right] \frac{Dv}{Dt} \quad (5.101)$$

Tomando a relação entre volume específico e massa específica, na Equação (5.101), podemos deduzir que

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{D}{Dt} (\rho^{-1}) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

e considerando que

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U}$$

De fato, a Equação (5.101) demonstra que a taxa de variação temporal da energia térmica é proporcional à taxa de variação temporal do volume do elemento de fluido. Isso possibilita algumas importantes deduções a partir de gases ideais, por exemplo.

Para um gás ideal,

$$pv = RT,$$

onde R representa a constante particular do gás ideal. Logo,

$$p = \rho RT, \quad \rho = \frac{p}{RT}$$

Como

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{RT} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1}{RT} = \frac{1}{p}$$

e

$$\beta = \frac{1}{T}$$

E, por fim,

$$de = c_v dT$$

Assim, a Equação (5.101) toma a forma

$$\frac{De}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt} + \left[\frac{\beta T}{\kappa} - p \right] \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \quad (5.102)$$

Retomando a equação da energia, temos

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} + \left[\frac{\beta T}{\kappa} - p \right] \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \rho \dot{q} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \mu \Phi \quad (5.103)$$

Com isso, obtemos a forma c_v da equação da energia

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) - \left(\frac{\beta T}{\kappa} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \rho \dot{q} + \mu \Phi \quad (5.104)$$

Com base na definição de entalpia, podemos reescrever a equação da energia térmica na forma

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{Dv}{Dt} + v \frac{Dp}{Dt} \quad (5.105)$$

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + \frac{p}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \quad (5.106)$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} + p \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \frac{Dp}{Dt} \quad (5.107)$$

Como a equação da energia térmica também pode ser reescrita como uma função da entalpia, obtemos

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \frac{Dp}{Dt} + \rho \dot{q} + \mu \Phi \quad (5.108)$$

Para escrevermos a Equação (5.108) em função da temperatura, devemos considerar que $h = h(T, p)$.

Como

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp$$

e

$$dh = de + (pdv + vdp) = Tds - pdv + (pdv + vdp)$$

Logo,

$$dh = Tds + vdp$$

Dessa forma,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T + v \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T = T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T + v$$

Usando a relação de Maxwell, temos

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -v\beta$$

Assim,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = -\frac{T\beta}{\rho} + \frac{1}{\rho}$$

e

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho} [1 - T\beta] dp$$

Que, em termos de taxa total, fica

$$\frac{Dh}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt} + \frac{1}{\rho} [1 - T\beta] \frac{Dp}{Dt}$$

Dessa maneira, a forma c_p da equação da energia é dada por

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \rho \dot{q} + \mu \Phi \quad (5.109)$$

Assim, concluímos que as equações de Navier-Stokes em coordenadas retangulares, para viscosidade constante, são dadas por:

1. Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.110)$$

2. Equação da quantidade de movimento na direção x:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho f_x \end{aligned} \quad (5.111)$$

3. Equação da quantidade de movimento na direção y:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho f_y \end{aligned} \quad (5.112)$$

4. Equação da quantidade de movimento na direção z:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho f_z \end{aligned} \quad (5.113)$$

5. Equação da conservação da energia em termos de c_v :

$$\begin{aligned} & \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\ & \quad - \frac{\beta T}{\kappa} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho \dot{q} + \mu \Phi \end{aligned} \quad (5.114)$$

6. Equação da conservação da energia em termos de c_p :

$$\begin{aligned} & \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\ & \quad - \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \rho \dot{q} + \mu \Phi \end{aligned} \quad (5.115)$$

onde a função dissipação viscosa é dada por

$$\begin{aligned} \Phi = & 2 \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.116)$$

Com isso, vimos então as equações fundamentais que descrevem a fluidodinâmica para fluidos newtonianos. A abordagem adotada ao longo do livro não é canônica e, obviamente, como inúmeras obras já publicadas sobre esse assunto, não contempla todas as nuances envolvidas no raciocínio e conhecimento necessários para obtenção das equações constitutivas da fluidodinâmica. Porém, de maneira geral, optou-se por uma forma ao mesmo tempo clara e minimamente madura, necessárias para um maior entendimento de como podemos alcançar essas equações.

O estudante ou pesquisador deve buscar mais detalhes em outras bibliografias sempre que não se sentir seguro quanto à compreensão de algum tópico em questão. A fluidodinâmica é um ramo que requer muita atenção, e uma análise mais profunda de cada termo de cada uma das equações é de vital importância. No volume 2 será apresentada uma discussão mais ampla sobre os termos das equações constitutivas.

REFERÊNCIAS

- AJAEV, V. S. *Interfacial fluid mechanics: a mathematical modeling approach*. New York: Springer, 2012.
- ARIS, R. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. Mineola: Dover Publications, 1990.
- BAILLY, C.; COMTE-BELLOT, G. *Turbulence*. New York: Springer, 2015.
- BEJAN, A. *Convective heat transfer*. 3rd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2004.
- BURESTI, G. *Elements of fluid dynamics*. London: Imperial College Press, 2012.
- CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. 2nd ed. New York: John Wiley, 1991.

CHORIN, A. J.; MARSDEN, J. E. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. 3rd ed. New York: Springer, 1992.

DURST, F. *Fluid mechanics: an introduction to the theory of fluid flows*. Berlin: Springer Verlag, 2008.

FEIREISL, E.; KARPER, T. G.; POKORNÝ, M. *Mathematical theory of compressible viscous fluids: analysis and numerics*. Basel: Birkhäuser, 2016.

HAUKE, G. *An introduction to fluid mechanics and transport phenomena*. New York: Springer, 2008.

KLEINSTREUER, C. *Modern fluid dynamics*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2018.

KUNDU, P. K.; COHEN, I. M.; DOWLING, D. R. *Fluid mechanics*. 6th ed. Cambridge: Academic Press, 2015.

LEAL, L. G. *Advanced transport phenomena fluid mechanics and convective transport processes*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

LESIEUR, M. *Turbulence in fluids*. 4th ed. New York: Springer, 2008.

YAMAGUCHI, H. *Engineering fluid mechanics*. New York: Springer, 2008.

ZEYTOUNIAN, R. KH. *Asymptotic modelling of fluid flow phenomena*. New York: Springer, 2002.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 5.1

Deduza a Equação (5.94) a partir da Equação (5.90).

Exercício 5.2

Determine se as seguintes relações termodinâmicas são válidas:

$$a) \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v, \quad b) \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p, \quad c) \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

Exercício 5.3

Considerando que a equação de um gás ideal pode ser descrita por

$$p = \rho RT,$$

onde R representa a constante de Boltzmann, demonstre que

$$\frac{De}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt}.$$

Exercício 5.4

Com base na equação da energia térmica junto à equação de Gibbs, mostre que

$$\frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} \geq \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2}.$$

Exercício 5.5

Demonstre que a relação entre os calores específicos c_p e c_v pode ser expressa como

$$c_p = \frac{T\beta^2}{\rho\kappa} + c_v,$$

sendo β e κ o coeficiente de expansão térmica e o fator de compressibilidade isotérmica.

Exercício 5.6

Considerando que a entalpia é dada por $h = e + pv$, mostre que a equação da energia térmica pode ser expressa como

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla} T) + \frac{Dp}{Dt} + \rho\dot{q} + \mu\Phi.$$

Exercício 5.7

Com base na definição, em uma forma alternativa, da função de dissipação viscosa:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\beta - \frac{2}{3}\mu \right) (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{D}} \right] : \overline{\overline{D}},$$

mostre que

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\rho} \left(D_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) D_{ij} + \frac{\beta}{\rho} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) D_{ij} \delta_{ij},$$

ou

$$\varepsilon = 2\nu \left(D_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)^2 + \frac{\beta}{\rho} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2.$$

Exercício 5.8

As equações de um escoamento independentes do sistema de coordenadas podem ser escritas como:

Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0$$

Momentum de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial(\rho \vec{U})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{P}}$$

Forma c_p da equação de energia térmica:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \rho \dot{q} + \bar{\bar{P}} : \vec{\nabla} \vec{U}$$

Obtenha as equações de movimento em:

- coordenadas cilíndricas;
- coordenadas esféricas.