

## CAPÍTULO 6

# Métodos de resolução do modelo teórico estaca-solo

São muitas as contribuições efetuadas por autores diversos com métodos para solucionar o problema de estacas carregadas lateralmente. Antes da era dos microcomputadores, para processamento de métodos numéricos como o MEF, as propostas foram efetuadas como variações às simplificações da resolução analítica da equação fundamental de integração da linha elástica, para vigas ou estacas em meio elástico, no caso, o meio solo. Alguns desses métodos tiveram como base a rigidez relativa estaca-solo, com fundamento teórico na relação tensão-deformação, como decorrência da mobilização do solo em consonância às deflexões da *LE*.

Alonso (2019) e Velloso e Lopes (2010) apresentam de forma bem detalhada os princípios de vários métodos de resolução do problema estaca-solo, focando, com destaque, métodos que apresentam simplicidades na aplicação, ou que proporcionam uma razoável aproximação dos resultados. A saber, Miche (1930), com uma contribuição significativa para o problema, apresentou uma solução considerando, nas análises, as deflexões da *LE* e a variação de  $k_h$  linearmente com a profundidade, fornecendo resultados para deslocamento no topo da estaca e momentos máximos em diversas situações específicas de aplicação. Seguiram-se outras contribuições, a exemplo, a de Hetenyi (1946), cuja resolução recai na viga sobre base elástica, considerando também as deflexões da *LE* da estaca e  $k_h$  constante ao longo da profundidade.

Também, com abordagem semelhante, seguiu-se a proposta de Matlock e Reese (1961), já com a auxílio de processamentos em computador, que apresenta seu método aplicado a várias situações da prática, tanto para estacas rígidas como flexíveis, com aplicações de forças e momentos independentes no topo da estaca, considerando a variação de  $K_h$  com a profundidade ou constante. A proposta dos autores destaca-se das anteriores, por apresentar, com o uso de tabelas, resultados para solicitações e deslocamentos da estaca ao longo da profundidade. De fácil aplicação, destaca-se Davisson e Robinson (1965), com um método baseado na analogia de comportamento estrutural entre uma estaca flexível inserida no solo, com trecho livre acima da superfície e um pilar de mesma característica estrutural da estaca, só que em balanço engastado na base. Esse método apresenta soluções para aplicação no topo, de força horizontal e momento, para a análise do comportamento lateral, e também, para o caso de uma força vertical aplicada no topo da estaca, para análise da carga crítica de flambagem.

Broms (1964), com outra abordagem, desenvolve um método baseado na carga de ruptura da estaca. A partir da resistência de uma seção da estaca a ser utilizada e das características do solo e rigidez da estaca-solo, ele apresenta, para diversas situações de vinculação, a máxima força horizontal passível de ser aplicada no topo da estaca.

Merece menção também, com tratamento pela teoria da elasticidade, o método de Poulos e Davis (1980), de solução matricial.

Neste trabalho, serão analisados alguns casos particulares de modelagem para a resolução analítica do problema estaca-solo, aplicada a estacas rígidas, seguindo-se de uma abordagem ao método de Davisson e Robinson, com a apresentação de suas características e resolução, destacando-se pela simplicidade de aplicação, útil ao pré-dimensionamento. O Capítulo 6 será concluído com o método de discretização do solo por coeficientes de mola, utilizando resolução analítica e numérica, por meio do MEF.

## 6.1 RESOLUÇÃO ANALÍTICA PARA ESTACAS ISOLADAS CONSIDERADAS RÍGIDAS E CARREGADAS LATERALMENTE

Considera-se, como hipótese simplificadora do modelo de equacionamento dos deslocamentos de uma estaca-solo considerada rígida, por processo analítico, que as deflexões da linha elástica possam ser desconsideradas frente sua pequena magnitude no resultado do problema. O equacionamento é efetuado para carregamentos aplicados diretamente ao elemento estrutural, seja uma estaca ou uma parede de contenção, podendo tratar-se de empuxos ativos ou cargas horizontais aplicadas junto à superfície do solo, que é tido como homogêneo. Assim, para análise do efeito

de flexão, a deflexão da linha elástica da estaca pode ser desprezada na determinação do equilíbrio estático e na determinação das tensões horizontais no solo.

### 6.1.1 Modelo para estaca-solo com um vínculo fixo

Havendo pelo menos um vínculo fixo às deformações horizontais, o problema se torna naturalmente estaticamente determinado, tendo como resolução as duas equações fundamentais da estática:

$$\Sigma F = 0,0$$

$$\Sigma M = 0,0$$

O elemento estaca-solo pode estar totalmente embutido no solo, ou parcialmente, sendo o segundo vínculo, considerado na resolução, a resultante das reações que se desenvolvem no solo contra a estaca ou parede, na face em que estará comprimida. Nesse caso, para o tratamento analítico, sobre a face em que ocorrerá a descompressão do solo devido ao deslocamento horizontal, aplica-se, diretamente, como carregamento, os empuxos ativos que se desenvolvem nessa face ou eventual carga externa junto à superfície do solo. Na face oposta, na profundidade em que a estaca se encontra embutida, determina-se as reações devido à compressão no solo, para que ocorra o equilíbrio estático, cuja resultante corresponde à reação do segundo vínculo. Demonstra-se, a seguir, com os Exemplos 6.1 e 6.2, aplicações desse caso em análise.

#### EXEMPLO 6.1

##### Parede de contenção

Determinar os esforços nas paredes de fundação e contenção de uma transposição viária em desnível, como indicado na figura a seguir, considerando que as paredes estejam travadas superiormente pelo tabuleiro e, na parte inferior, pela ficha de embutimento no solo. Considera-se que as paredes sejam contínuas por toda a largura da obra e que resistam aos esforços horizontais, segundo seu comportamento como parede e aos verticais, como estaca.

Nessa circunstância de projeto, normalmente, a escavação só é efetuada após o travamento superior. No entanto, como princípio de cálculo, será considerado que as deformações de desconfinamento, ao nível do terrapleno, ocorram em magnitude suficiente para que se desenvolvam empuxos ativos. Mantém-se,

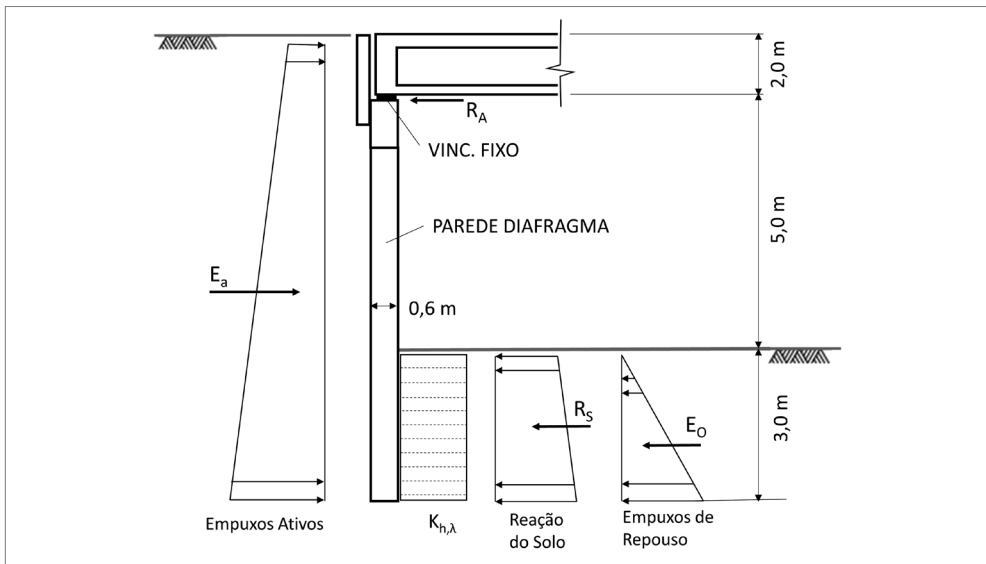
assim, o solo do terrapleno no estado ativo ou eventualmente nas camadas superiores, em um estado intermediário, objeto de verificação.

Como simplificação analítica, caso a rigidez estaca-solo seja inferior a 2,0, como descrito no Capítulo 5, seção 5.3 – Rigidez relativa estaca-solo –, a parede pode ser tratada como rígida, desconsiderando-se as deflexões da linha elástica, tendo em vista sua pequena magnitude frente às deformações horizontais do solo de confinamento. A ficha é tratada como um segundo vínculo, no caso, elástico, desenvolvendo reações à compressibilidade no solo. Nesse caso, a parede basicamente trabalha como uma estrutura estaticamente determinada, com dois vínculos, sendo um deles elástico, o solo.

Quanto às cargas móveis a serem aplicadas, no terrapleno, apesar das dimensões do veículo tipo *TB-450* serem discretas, segundo a NBR-7188 (ABNT, 2013), a carga distribuída a ser aplicada em sua projeção será considerada atuando de forma infinita por toda a superfície do terrapleno.

Ainda, também, para fins práticos, o coeficiente de recalque horizontal será admitido como constante na profundidade, correspondendo a solos argilosos. Deseja-se determinar as tensões finais no solo na profundidade da ficha, assim como, tendo em vista as condições de travamento da parede, verificar se efetivamente ocorreu as condições de desconfinamento para que se desenvolvam os empuxos ativos ao longo da profundidade da parede, no lado do terrapleno.

### Modelo de projeto



O estudo será efetuado para a faixa de 1,0m de largura da parede. Os carregamentos estão já fornecidos de forma distribuída para a faixa de 1,0m.

Dados

Argila siltosa pouco arenosa

$$\Phi = 22^\circ: K_a = 0,45$$

$$C = 20 \text{ kN/m}^2$$

$$\gamma_s = 19,0 \text{ kN/m}^3$$

$$\nu = 0,35: K_o = 0,54$$

$$K_{h,\lambda} = 12000 \text{ kN/m}^3$$

Concreto

$$E_c = 21 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

Verificação do valor da rigidez estaca x solo, para enquadramento na condição de estaca rígida, segundo o Capítulo, item 5.3:

$$\frac{\ell}{(R \text{ ou } T)} \leq 2 \rightarrow \text{rígida}$$

No caso de solos coesivos, aplicando-se a expressão:

$$R = \sqrt[4]{\frac{E_c \cdot I}{k_{h,\lambda} \cdot B}} = \sqrt[4]{\frac{21 \times 10^6 \cdot 0,018}{12000 \cdot 1,0}} = 2,37$$

sendo:

I - Momento de inércia determinado segundo a resistência dos materiais:

$$I = B \cdot d^3 / 12 = 1,0 \cdot 0,6^3 / 12 = 0,018 \text{ m}^4$$

$$\frac{\ell}{R} = \frac{3,0}{2,37} = 1,26 \leq 2 \rightarrow \text{rígida}$$

## Ações instabilizantes

Mesmo que a escavação inferior ao tabuleiro seja efetuada após a sua execução, parte-se do princípio de que haverá o desconfinamento do solo do terraplino, ao menos o suficiente para que se desenvolvam empuxos ativos contra a parede. Essa consideração deverá ser objeto de comprovação, a partir das deformações que ocorrerão na parede.

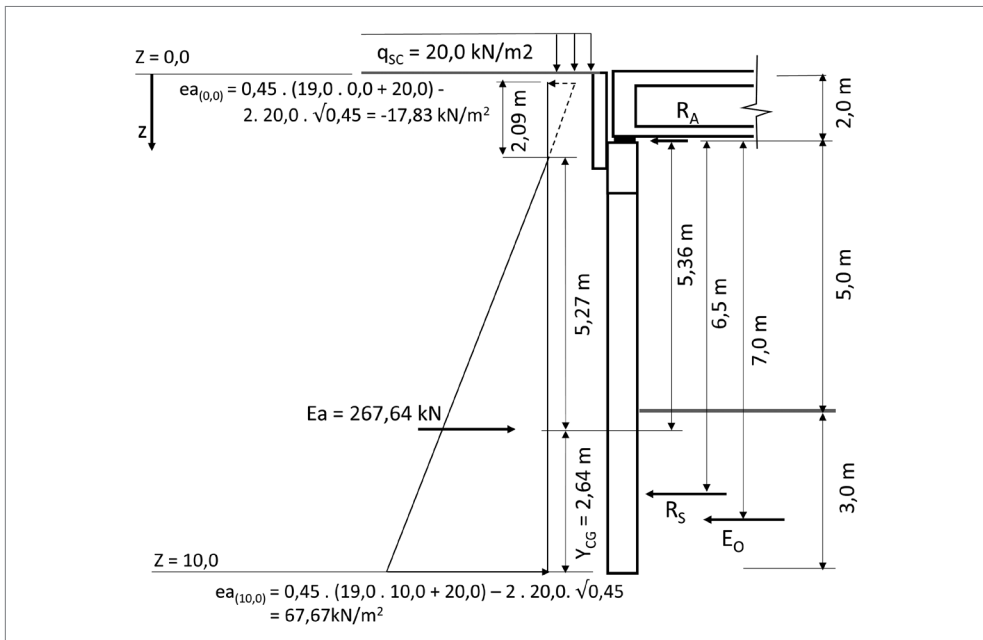
### Empuxos ativos na parede

$$ea = Ka \cdot (\gamma s \cdot z + q_{sc}) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{Ka} = 0,45 \cdot (19,0 \cdot z + 20,0) - 2 \cdot 20,0 \cdot \sqrt{0,45}$$

### Empuxos de repouso na ficha

$$eo_{max} = Ko \cdot \gamma s \cdot z = 0,54 \cdot 19,0 \cdot 3,0 = 30,78 \text{ kN/m}^2$$

$$Eo = 30,78 \cdot \left(\frac{3,0}{2}\right) = 46,17 \text{ kN}$$



Condição de equilíbrio

$$\sum F = 0$$

$$\sum M_{O''} = 0$$

$$\sum M_{O''} : 267,64 \cdot 5,36 - R_s \cdot 6,5 - 46,17 \cdot 7,0 = 0,0$$

$$R_s = 170,98 \text{ kN}$$

No equilíbrio da ficha, tem-se:

$$\Delta\sigma_{med} = 170,98 / 3,0 = 56,99 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\delta_{y,med} = \Delta\sigma_{med} / k_{h,\lambda} = 56,99 / 12000 = 0,0047 \text{ m}$$

$$\delta_{y(10,0)} = 0,0047 \cdot 8,0 / 6,5 = 0,0058 \text{ m}$$

$$\Delta\sigma_{max} = \delta_{y(10,0)} \cdot k_{h,\lambda} = 0,0058 \cdot 12000 = 69,60 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\therefore \sigma_{max} = e\sigma_{max} + \Delta\sigma_{max} = 30,78 + 69,60 = 100,38 \text{ kN} / \text{m}^2 .$$

Esquema das deformações da parede

- Deformação do solo no lado da ficha

$$\delta_{y(10,0)} = 0,0058 \text{ m (causada pelas reações no solo da ficha).}$$

- Desconfinamento do lado do terrapleno, para mobilização dos empuxos ativos.
- Empuxo de repouso em  $z = 10,0 \text{ m}$  (corresponde ao estado neutro de deformações)

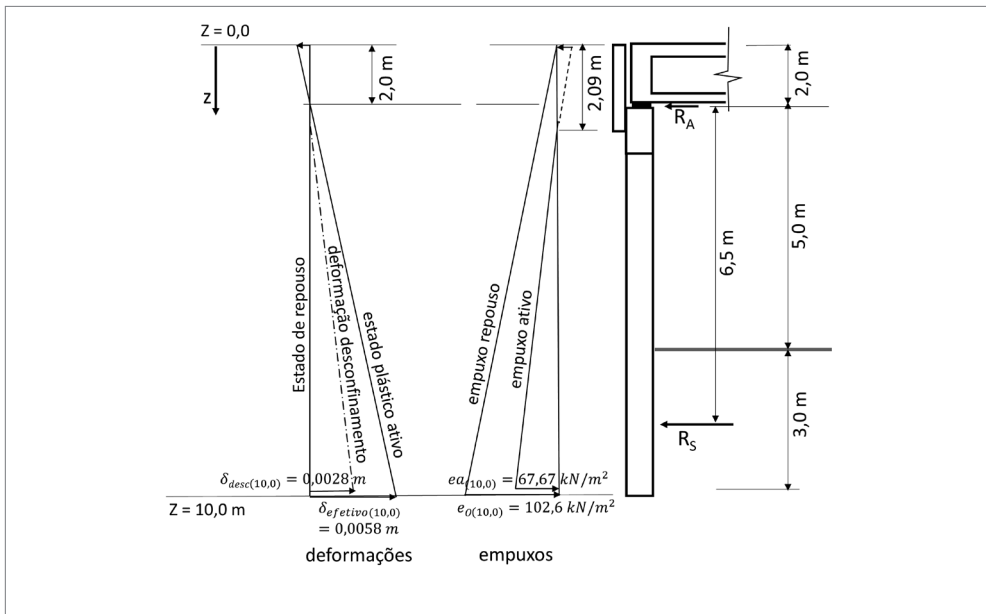
$$e\sigma_{(10,0)} = 10,0 \cdot 19,0 \cdot 0,54 = 102,6 \text{ kN} / \text{m}^2 \text{ kN} / \text{m}^2 .$$

- Deformação correspondente ao estado de desconfinamento em  $z = 10,0 \text{ m}$

$$\delta_{y(10,0)} = \frac{[e_{o(10,0)} - e_{a(10,0)}]}{k_{h,z}} = \frac{(102,6 - 67,67)}{12000} = 0,0028 \text{ m}.$$

- Deformação do solo da ficha por compressão:  $\delta_{y(10,0)} = 0,0058 \text{ m}$ .
- Deformação do solo do terrapleno por desconfinamento:  $\delta_{y(10,0)} = 0,0028 \text{ m}$ .
- Deformação plástica no solo do terrapleno:  $\Delta\delta_{y(10,0)} = 0,0058 \text{ m} > 0,0028 \text{ m}$ .

∴ a deformação total da parede em  $z = 10,0 \text{ m}$  ( $0,0058 \text{ m}$ ) é maior que a deformação mínima necessária para mobilizar os empuxos ativos: ( $0,0028 \text{ m}$ )



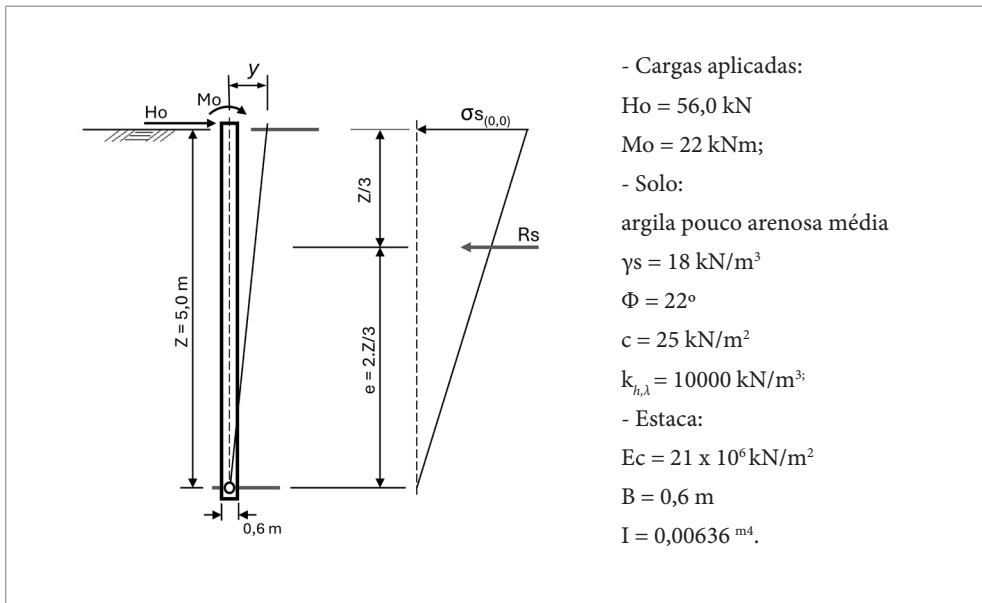
Obs.: desconsiderou-se, em favor da segurança, o não desconfinamento da parede no trecho acima do vínculo de contraventamento, que diante das deformações, mobilizaria empuxos de repouso somados a tensões de compressão.

## EXEMPLO 6.2

Estaca utilizada como ancoragem de tubulações

Suponha um bloco de ancoragem para tubulações sob pressão interna, concebido para resistir aos esforços externos por meio de uma única estaca escavada, que atravessa uma camada de solo homogêneo até a profundidade de 5,0 m, sendo interrompida por um estrato constituído por solos muito duros e resistentes. Nesse contato estaca-solo, pelo efeito de ponta, pode-se admitir a indeslocabilidade vertical e horizontal da estaca, estando livre, no entanto, para os deslocamentos rotacionais. Considerando a aplicação em seu topo, na superfície do solo, de uma força horizontal  $H_o = 56,0$  kN e um momento  $M_o = 22,0$  kNm, determinar a tensão e o recalque horizontais no solo junto à superfície. As características do solo e da estaca estão representadas a seguir.

Esquema de tensões no solo



Comportamento estrutural da estaca

A partir da rigidez estaca-solo, em 5.3, verifica-se o comportamento estrutural da estaca quanto a sua deformabilidade ao longo da profundidade.

Para solos argilosos:

$$R = \sqrt[4]{\frac{Ec \cdot I}{k_{h,\lambda} \cdot B}} = 2,583$$

$$\frac{\ell}{R} = 1,94 < 2 \rightarrow \text{estaca rígida}$$

Na condição de estaca rígida, pode-se considerar que as deflexões da LE não sejam significativas, admitindo-se uma distribuição linear de tensões decorrentes da deslocabilidade da estaca, como se verifica no esquema de deformações apresentado anteriormente. Na determinação das tensões no solo, desconsiderar a contribuição dos empuxos ativos na face descomprimida da estaca.

Determinação da reação resultante no solo  $R_s$

De acordo com o esquema de tensões no solo, representado na figura anterior:

$$R_s = H_0 + \frac{M_{0(z/3)}}{e} = 56,0 + \frac{115,34}{\left(\frac{2}{3}\right) \cdot 5,0} = 90,6 \text{ kN}$$

sendo:

$$M_{0(z/3)} = 56,0 \cdot 5,0 / 3 + 22,0 = 115,34 \text{ kNm}$$

Determinação da reação linear  $q_{s(0,0)}$  que atua na estaca, em  $z = 0,0 \text{ m}$

$$q_{s(0,0)} = \sigma_{s(0,0)} \cdot B = 60,40 \cdot 0,6 = 36,24 \text{ kN/m}$$

sendo:

$$\sigma_{s(0,0)} = \frac{2 \cdot R_s}{\ell} \cdot \frac{1}{B} \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

$$\sigma_{s(0,0)} = \frac{2 \cdot 90,6}{5,0} \cdot \frac{1}{0,6} = 60,40 \text{ kN/m}^2$$

Determinação da reação limite dos empuxos passivos do solo na superfície:  $ep_{z=0}$

A reação linear limite do solo contra a estaca corresponde ao empuxo passivo que atua na sua projeção horizontal, a ser determinado segundo a largura de influência dada pelas equações a seguir:

- Capítulo 3, item 3.3.3 – Empuxos passivos em estacas isoladas carregadas lateralmente

$$ep_z = (\gamma_s \cdot K_p \cdot z + 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_p}) \cdot (b_0 + b') \quad (3.3.3.3)$$

sendo:

$$\text{sendo : } b' = 0,65 \cdot \text{tg}(\varphi / 2) \cdot z \quad (3.3.3.2)$$

$$K_p = \frac{1 + \text{sen}22^\circ}{1 - \text{sen}22^\circ} = 2,19$$

para:  $z = 0,0 \text{ m}$ :  $b' = 0,0$

$$ep_{z=0} = 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_p} \cdot b_0$$

$$ep_{z=0} = 2 \cdot 25 \cdot \sqrt{2,19} \cdot 0,6 = 44,39 \frac{\text{kN}}{\text{m}} > qs_{,0} = 36,24 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \text{ OK}$$

Cálculo da deformação da estaca junto à superfície do solo, em  $z = 0,0 \text{ m}$

$$\delta_{(0,0)} = \frac{\sigma_{s(0,0)}}{k_{h,\lambda}} = \frac{60,40}{10000} = 0,0061 \text{ m}$$

### 6.1.2 Modelo para estaca-solo em “balanço”

As estacas ou paredes podem não dispor de qualquer vinculação fixa ao longo da altura escavada, sendo equilibrada unicamente pelo embutimento no solo, recebendo a denominação simplista de estacas ou paredes em balanço, quando apresentam um trecho desconfinado acima da superfície do solo, o que conduz a momentos solici-

tantes no topo da parte enterrada, que é o objeto do modelo analítico de cálculo proposto. A profundidade enterrada é denominada de ficha. Nesse caso, o equilíbrio mediante solicitações de tombamento é precário, pois com o aumento das solicitações, o equilíbrio tende a uma espiral divergente, havendo limitações para sua utilização, no entanto, a estabilidade da ficha pode ser conseguida, mesmo para solos pouco resistentes, aumentando-se sua profundidade. A estabilidade deve ser avaliada de forma criteriosa, determinando-se as deformações ao longo da profundidade por meio de métodos que considerem a interação solo-estrutura. No entanto, ocorrendo a plastificação do solo junto à superfície, que interrompe a linearidade das equações de equilíbrio, a solução analítica para o problema se torna por demais dificultosa, sendo mais eficientes os métodos numéricos, como o MEF.

Apresenta-se, como solução para o caso, um processo analítico para determinação dos deslocamentos e esforços em estacas rígidas. A resolução depende das características do solo e da carga aplicada. No desenvolvimento das expressões de cálculo, importa a profundidade em que a estaca se encontra enterrada.

Admite-se que a lei de variação do coeficiente de recalque horizontal seja uniforme, com variação linear ao longo da profundidade, partindo de valor nulo na superfície, no caso de solos arenosos, ou então, constante ao longo de toda a profundidade, no caso de solos coesivos. A aplicação do processo de cálculo pressupõe que a aplicação dos carregamentos ocorram no topo da estaca e provoquem deslocamentos de rotação e translação do eixo, mantendo-se a linha elástica, sem deflexões. Pode-se assumir,

para essa hipótese, que essa condição ocorra quando  $\frac{h}{RouT} \leq 2,0$ , sendo  $R$  ou  $T$  a

rigidez relativa estaca x solo, como visto no Capítulo 5, na seção 5.3.

Segue-se o desenvolvimento teórico do comportamento estrutural dessas estacas, para o caso de combinação de uma força horizontal  $H_0$  e um momento  $M_0$ , aplicados em seu topo. Devido à aplicação de  $H_0$  e  $M_0$ , a estaca, que por hipótese deve ser rígida, sofrerá uma translação  $\Delta x$  e uma rotação  $\varphi$ .

### *Aplicação para solos arenosos*

Os deslocamentos dos corpos rígidos ocorrem por meio dos movimentos de translação e rotação. Para o desenvolvimento do estudo do problema proposto, vai-se impor à estaca esses dois deslocamentos, a partir dos carregamentos aplicados no topo da estaca:  $H_0$  e  $M_0$ . Estudam-se, então, as tensões que serão geradas no solo para o equilíbrio dos carregamentos aplicados e suas reações de equilíbrio.

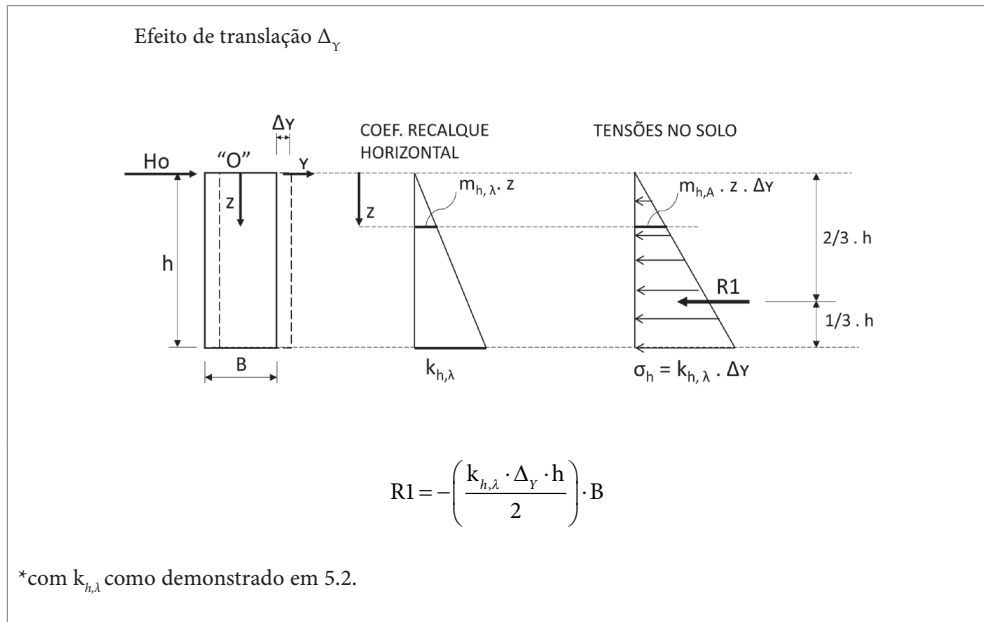


Figura 6.1 Esquemas de resolução para determinação da reação no solo devido ao efeito de translação horizontal da estaca.

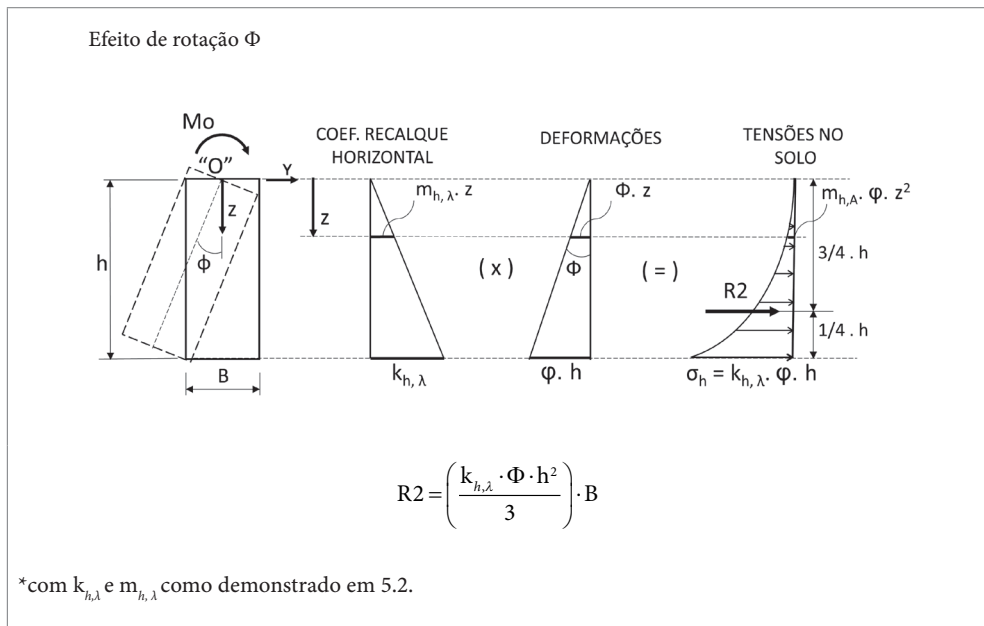
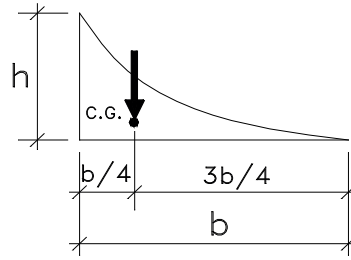


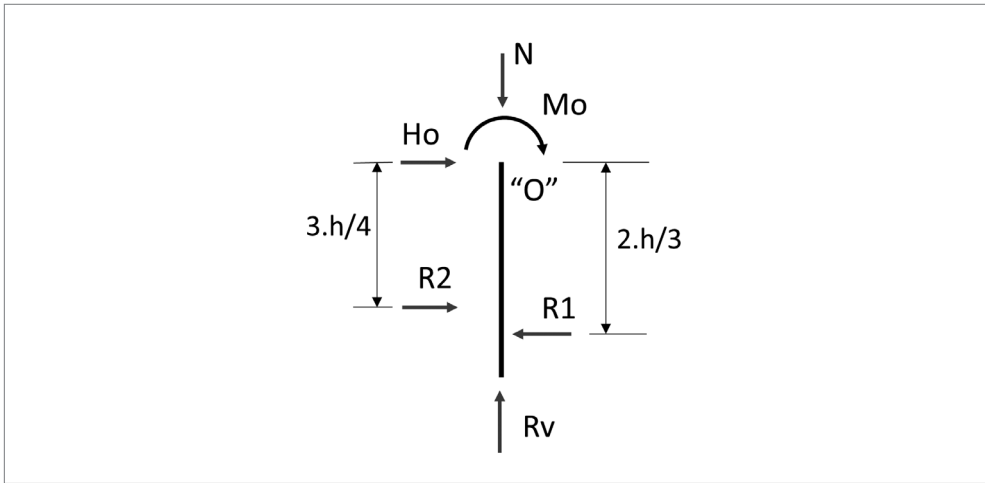
Figura 6.2 Esquemas de resolução para determinação da reação no solo devido ao efeito de rotação da estaca.

parábola do 2º grau

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{3}$$



Resumo dos esforços



Condição de equilíbrio

$$\sum V = 0 \rightarrow Rv = N$$

$$\sum H = 0 \rightarrow Ho = R1 - R2 \quad (6.1.1)$$

$$Ho = \frac{k_{h,\lambda} \cdot \Delta\gamma \cdot h \cdot B}{2} - \frac{k_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot h^2 \cdot B}{3}$$

$$\sum M^{\text{"O"}} = 0 \rightarrow Mo = -R1 \cdot \frac{2}{3} \cdot h + R2 \cdot \frac{3}{4} \cdot h$$

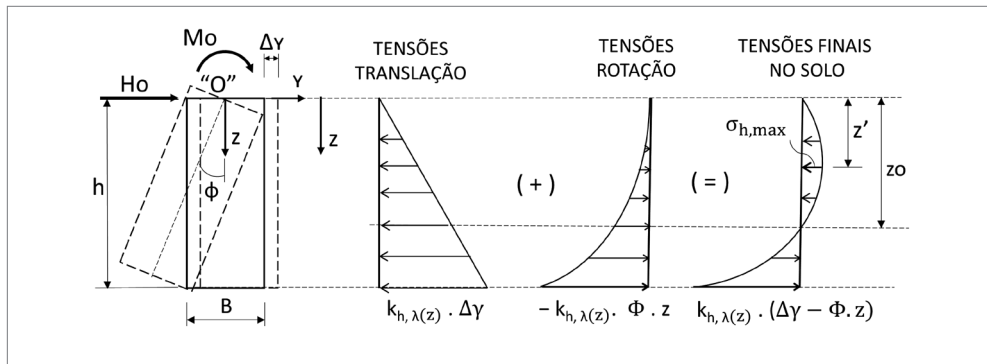
$$Mo = -\frac{k_{h,\lambda} \cdot B \cdot h^2 \cdot \Delta\gamma}{3} + \frac{k_{h,\lambda} \cdot B \cdot h^3 \cdot \Phi}{4} \quad (6.1.2)$$

Resolvendo o sistema de equações Ho e Mo, têm-se as deformações:

$$\Delta\gamma = \left( \frac{18 \cdot H_o}{h} + \frac{24 \cdot M_o}{h^2} \right) \cdot \frac{1}{k_{h,\lambda} \cdot B} \quad (6.1.3)$$

$$\Phi = \left( \frac{4 \cdot M_o}{k_{h,\lambda} \cdot B \cdot h^3} + \frac{4 \cdot \Delta\gamma}{3 \cdot h} \right) \quad (6.1.4)$$

*Tensões horizontais no solo*



**Figura 6.3** Esquemas de resolução para determinação da reação final no solo devido aos efeitos de translação e rotação da estaca.

As tensões horizontais ao longo da profundidade do fuste são:

$$\sigma_{h(z)} = k_{h,\lambda(z)} \cdot (\Delta\gamma - \Phi \cdot z) \quad (6.1.5)$$

Para  $z = 0$  ;  $\sigma_{h(0,0)} = 0$

Para  $z = h$  ;  $\sigma_{h(z)} = k_{h,\lambda(h)} \cdot (\Delta\gamma - \Phi \cdot h)$

Igualando a equação (6.1.5) a zero, encontramos a profundidade zo, em que ocorre o ponto de rotação da estaca:

temos que, para  $z = z_o$ :

$$z_o = \Delta\gamma / \Phi$$

fazendo:  $k_{h,\lambda(z)} = m_{h,\lambda} \cdot z$ , substituindo em (6.1.5), têm-se:

$$\sigma_{h(z)} = m_{h,\lambda} \cdot \Delta\gamma \cdot z - m_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot z^2 \quad (6.1.6)$$

Para se determinar o máximo valor das tensões no solo  $\sigma_{h,max}$ , efetua-se a derivada primeira de (6.1.6), igualando-se a zero, da qual se obtém a profundidade correspondente  $z'$ :

$$m_{h,\lambda} \cdot \Delta\gamma - 2 \cdot m_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot z' = 0$$

resultando:  $z' = \frac{\Delta\gamma}{2 \cdot \Phi}$

Substituindo em (6.1.6), resulta:

$$\sigma_{h,max} = -\frac{m_{h,\lambda} \cdot \Delta\gamma^2}{4 \cdot \Phi} \quad (6.1.7)$$

### *Determinação do esforço cortante e momento fletor ao longo do fuste*

Ao se multiplicar a equação (6.1.6) de tensões horizontais ao longo do fuste pela largura B, encontra-se o carregamento linear ao longo da estaca:  $q_{h,z}$  [kN / m].

$$q_{h,z} = \sigma_{h,\lambda(z)} \cdot B = -m_{h,\lambda} \cdot \Delta\gamma \cdot B \cdot z + m_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot B \cdot z^2 \quad (6.1.8)$$

Sabendo-se que  $q_{h,z} = \frac{dV(z)}{dz} \therefore V(z) = \int q_{h,z} \cdot dz$ , logo:

$$V(z) = -m_{h,\lambda} \cdot \Delta\gamma \cdot B \cdot \frac{z^2}{2} + m_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot B \cdot \frac{z^3}{3} + C$$

para  $z = 0$ :  $Vz = Ho$ , resulta então:  $C = Ho$

$$V(z) = Ho - m_{h,\lambda} \cdot \Delta\gamma \cdot B \cdot \frac{z^2}{2} + m_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot B \cdot \frac{z^3}{3} \quad (6.1.9)$$

analogamente  $M(z) = \int V(z) \cdot dz$ , logo

$$M(z) = H_0 \cdot z - \left[ \frac{m_{h,\lambda} \cdot \Delta_Y \cdot B}{6} \right] \cdot z^3 + \left[ \frac{m_{h,\lambda} \cdot \Delta \cdot B}{12} \right] \cdot z^4 + A$$

para  $z = 0$ :  $Mz = M_0$ , resulta então:  $A = M_0$

$$M(z) = M_0 + H_0 \cdot z - \left[ \frac{m_{h,\lambda} \cdot \Delta_Y \cdot B}{6} \right] \cdot z^3 + \left[ \frac{m_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot B}{12} \right] \cdot z^4 \quad (6.1.10)$$

Para se determinar o valor do máximo momento fletor ao longo do fuste da estaca, devemos procurar a seção na qual o esforço cortante é nulo.

$$V(z) = 0$$

Com o valor de  $z$  assim determinado, substituindo na equação (6.1.10), obtém-se  $M_{max}$ , que, conjuntamente com a força normal, permite efetuar o dimensionamento da estaca à flexo-compressão.

### *Aplicação em solos argilosos*

Em semelhança aos solos arenosos, para o desenvolvimento do estudo do problema proposto, impõe-se à estaca deslocamentos de translação e rotação, a partir da aplicação de carregamentos no topo da estaca:  $H_0$  e  $M_0$ , estudando-se, então, as tensões que serão geradas no solo para o equilíbrio dos carregamentos aplicados.

Para a resolução do problema, podem-se levar em conta os momentos de reação na base da estaca, devido à sua rotação angular. Normalmente, esse momento é de pequena magnitude se considerado como parcela de equilíbrio para a estabilidade da estaca, especialmente para estacas com diâmetro inferior a 1,0 m.

A formulação para resolução dos esforços, sem a consideração dos momentos na base, tem o desenvolvimento a seguir:

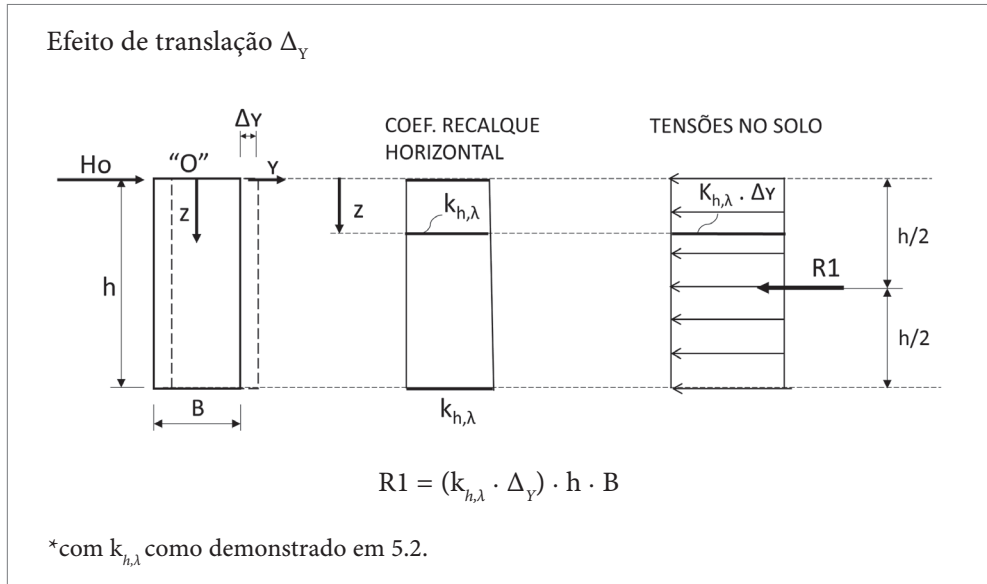


Figura 6.4 Esquema de reação no solo para o efeito de translação horizontal da parede.

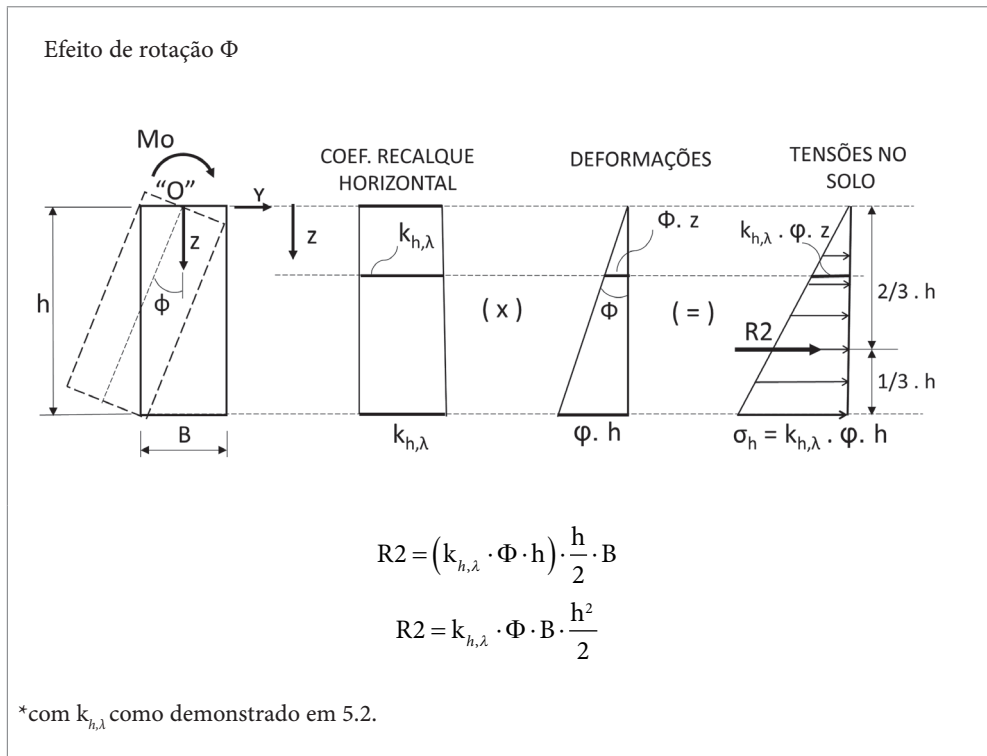
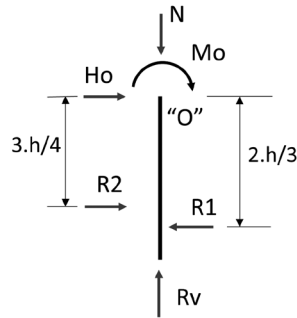


Figura 6.5 Esquema de reação no solo para o efeito rotacional da parede.

- Resumo dos esforços



- Condição de equilíbrio

$$\sum V = 0 \rightarrow R_v = N$$

$$\sum H = 0 \rightarrow H_o = R_1 - R_2$$

$$H_o = k_{h,\lambda} \cdot \Delta_Y \cdot h \cdot B - k_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot B \cdot \frac{h^2}{2} \quad (6.1.11)$$

$$\sum M^{\text{"O"}} = 0 \rightarrow M_o = -R_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot h + R_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot h$$

$$M_o = -k_{h,\lambda} \cdot \Delta_Y \cdot B \cdot \frac{h^2}{2} + k_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot B \cdot \frac{h^3}{3} \quad (6.1.12)$$

Resolvendo o sistema, temos as deformações:

$$\Delta_Y = \frac{H_o}{k_{h,\lambda} \cdot h \cdot B} + \Phi \cdot \frac{h}{2} \quad (6.1.13)$$

$$\Phi = \frac{M_o + H_o \cdot h / 2}{B \cdot k_{h,\lambda} \cdot h^3 / 12} \quad (6.1.14)$$

- Tensões horizontais no solo

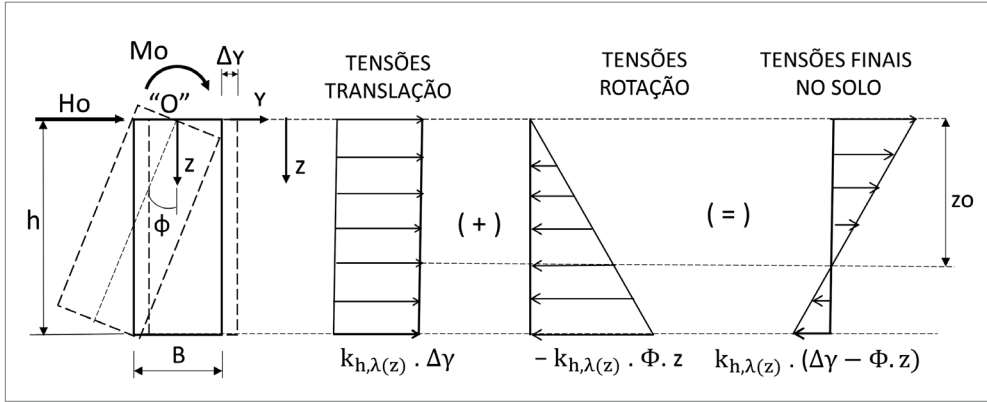


Figura 6.6 Esquema de reação no solo para os efeitos de translação e rotacional da parede.

- Tensões horizontais ao longo do fuste

$$\sigma_{h,z} = -k_{h,\lambda} \cdot (\Delta_Y - \Phi \cdot z) \quad (6.1.15)$$

Igualando a equação (6.1.15) a zero, encontramos a profundidade  $z_0$ , em que ocorre o ponto de rotação da estaca, temos que, para  $z = z_0$ :

$$z_0 = \Delta_Y / \Phi$$

- Cortantes ao longo do fuste

$$V(z) = H_0 - B \cdot k_{h,\lambda} \cdot \Delta_Y \cdot z + B \cdot k_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot \frac{z^2}{2} \quad (6.1.16)$$

- Momentos ao longo do fuste

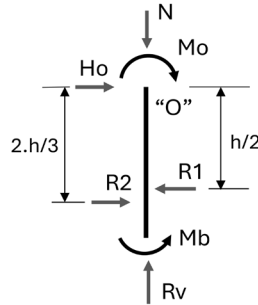
$$M(z) = M_0 + H_0 \cdot z - B \cdot k_{h,\lambda} \cdot \Delta_Y \cdot \frac{z^2}{2} + B \cdot k_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot \frac{z^3}{6} \quad (6.1.17)$$

Para se determinar o valor do máximo momento fletor ao longo do fuste da estaca, devemos procurar a seção na qual o esforço cortante é nulo.

$$V(z) = 0$$

Com o valor de  $z$  assim determinado, substituindo na equação (6.1.17), obtém-se  $M_{máx}$  que conjuntamente com a força normal, pode-se efetuar o dimensionamento da estaca à flexo-compressão.

Em se desejando considerar o momento  $M_b$  que ocorre na base da estaca, como parcela para a estabilidade e determinação dos esforços no fuste da estaca, tem-se o desenvolvimento a seguir:



O momento resultante na base é determinado em compatibilidade aos esforços e deformações, considerando-se a rigidez da base à rotação, conforme:

$$M_b = \phi_0 \cdot k_{v,\lambda} \cdot I_B \quad (6.1.18)$$

Retomando as condições de equilíbrio do problema, tem-se o sistema de equações:

$$\sum V = 0 \rightarrow R_v = N$$

$$\sum H = 0 \rightarrow H_o = R_1 - R_2$$

$$H_o = k_{h,\lambda} \cdot \Delta_Y \cdot h \cdot B - k_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot B \cdot \frac{h^2}{2} \quad (6.1.19)$$

$$\sum M^{O} = 0 \rightarrow M_o = -R_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot h + R_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot h$$

$$M_o = -k_{h,\lambda} \cdot \Delta_Y \cdot B \cdot \frac{h^2}{2} + k_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot B \cdot \frac{h^3}{3} \quad (6.1.20)$$

Introduzindo (6.1.18) em (6.1.20), tem-se:

$$M_o = -k_{h,\lambda} \cdot \Delta_Y \cdot B \cdot \frac{h^2}{2} + k_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot B \cdot \frac{h^3}{3} + \Phi \cdot k_{v,\lambda} \cdot I_B \quad (6.1.21)$$

Resolvendo o sistema das equações (6.1.19) e (6.1.21), tem-se:

$$\Delta_Y = \frac{H_0}{k_{h,\lambda} \cdot h \cdot B} + \Phi \cdot \frac{h}{2} \quad (6.1.22)$$

$$\Phi = \frac{M_0 + H_0 \cdot h / 2}{B \cdot k_{h,\lambda} \cdot \frac{h^3}{12} + k_{v,\lambda} \cdot I_B} \quad (6.1.23)$$

As equações dos esforços cortantes e momentos fletores serão:

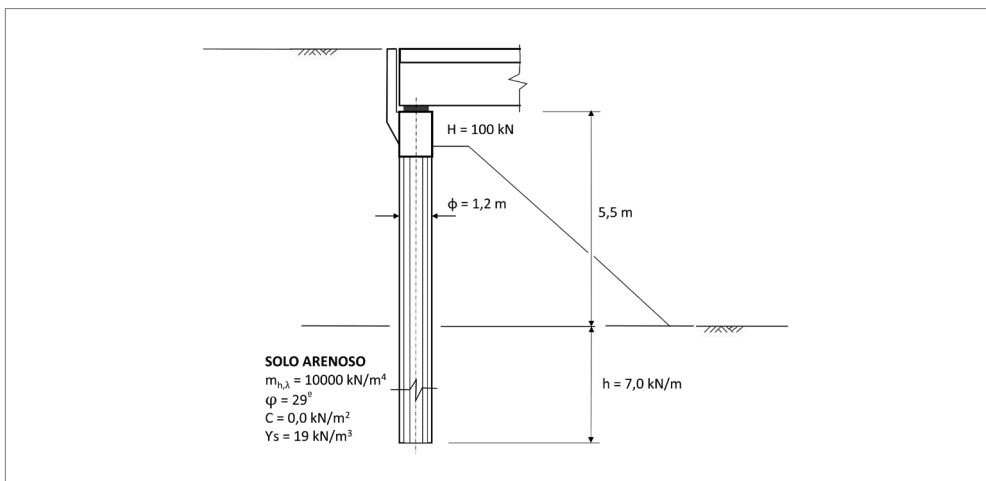
$$V(z) = H_0 - B \cdot k_{h,\lambda} \cdot \Delta_Y \cdot z + B \cdot k_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot \frac{z^2}{2} \quad (6.1.24)$$

$$M(z) = M_0 + H_0 \cdot z - B \cdot k_{h,\lambda} \cdot \Delta_Y \cdot \frac{z^2}{2} + B \cdot k_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot \frac{z^3}{6} \quad (6.1.25)$$

### EXEMPLO 6.3

Pilar-estaca de encontro de pontes

Determinar as tensões no solo e os diagramas de esforços cortantes e momentos fletores para o pilar x estaca do encontro esquematizado a seguir.



$$E_c = 21 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$I = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = 0,102 \text{ m}^4$$

A alternativa estrutural para encontros de pontes com fundações em estacas isoladas confinadas pressupõe que o solo de confinamento exerça um papel de reação horizontal aos esforços aplicados pela superestrutura, como também, que propicie uma natural redução aos efeitos de flambagem. Construtivamente, para cumprir esse papel, os aterros devem ser executados anteriormente às estacas, que são escavadas a partir de sua conclusão. Relativamente à determinação das deflexões e esforços horizontais nas fundações, os aspectos construtivos dos encontros interferem no resultado do seu equilíbrio, devendo-se avaliar cuidadosamente as fases de execução. Detalhes sobre tipos de encontro de pontes e suas etapas de execução podem ser vistos em Dinis (2011). No exemplo em questão, os encontros são denominados leves e normalmente são concebidos a partir de um par de estacas de grande diâmetro coroadas pelo bloco de apoio da superestrutura.

Para encontros leves, quanto à interpretação da estabilidade das fundações, alguns aspectos devem ser meticulosamente analisados, tendo em vista o confinamento da estaca-pilar. Questionam-se vários fatores na consideração dos efeitos favoráveis a esse confinamento. Em primeiro, a não configuração do meio contínuo solo, na superfície delimitada pelos taludes, pode fazer com que a extensão de compressibilidade horizontal frontal à estaca não seja suficiente para dissipar as tensões segundo a formação completa de um bulbo de tensões. Diante dessa baixa capacidade de reação à compressibilidade do aterro ao deslocamento horizontal, tem-se desconsiderado o confinamento do aterro, admitindo-se a estaca livre nessa altura. Além disso, os empuxos ativos que se desenvolveriam no solo de aterro ao redor da estaca, considerando os efeitos e a compressão axissimétricos em torno da estaca, com a formação de anéis de tensões de compressão perimetrais, se autoequilibram, anulando suas componentes sobre a própria estaca.

Diante das considerações realizadas, desconsidera-se o confinamento oferecido pelo solo do aterro, supondo assim, que toda a profundidade da estaca nele contido, se encontre livre.

## Modelo de cálculo adotado

$Mo = 100,0 \cdot 5,5 = 550,0 \text{ kNm}$   
 $Ho = 100,0 \text{ kN}$   
 $z$   
 prof. enterrada  
 $h = 7,0 \text{ m}$

$$T = \sqrt[5]{\frac{Ec \cdot I}{m_{h,\lambda} \cdot B}}$$

$$T = \sqrt[5]{\frac{21 \cdot 10^6 \cdot 0,102}{10000 \cdot 1,2}} = 2,82$$

$$l/T = 7,0/2,82 = 2,48 > 2,0^*$$

\* Tendo em conta que a deformada da LE não é significativa em relação aos deslocamentos da estaca, considera-se satisfeita a relação:  $l/T = 2,0$

## Deformações

$$k_{h,\lambda(h)} = m_{h,\lambda} \cdot h = 10000 \cdot 7,0 = 70000 \text{ kN/m}^3$$

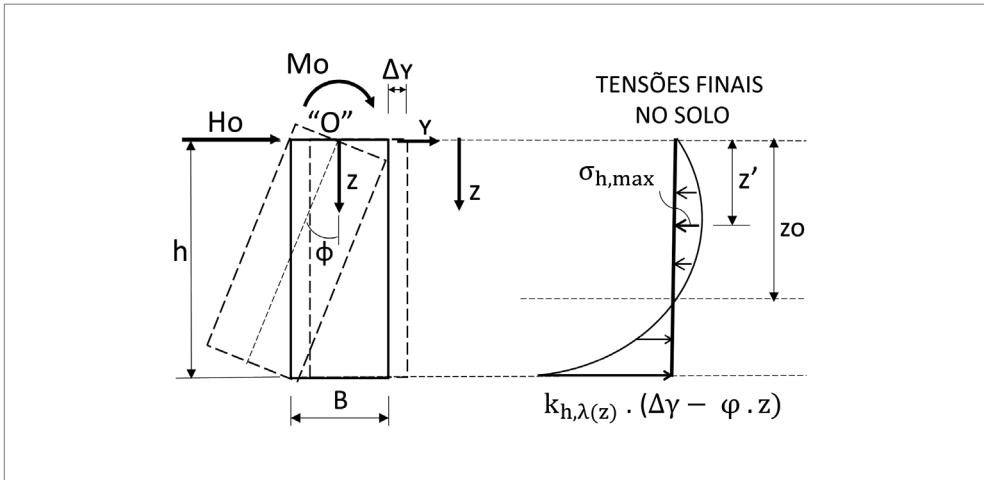
$$\Delta_Y = \left( \frac{18 \cdot Ho}{h} + \frac{24 \cdot Mo}{h^2} \right) \cdot \frac{1}{70000 \cdot B} =$$

$$= \left( \frac{18 \cdot 100}{7,0} + \frac{24 \cdot 550}{7,0^2} \right) \cdot \frac{1}{70000 \cdot 1,2} = 6,269 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Phi = \left( \frac{4 \cdot Mo}{k_{h,\lambda(h)} \cdot B \cdot h^3} + \frac{4 \cdot \Delta_Y}{3 \cdot h} \right) =$$

$$= \left( \frac{4 \cdot 550}{70000 \cdot 1,2 \cdot 7,0^3} + \frac{4 \cdot 6,269 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 7,0} \right) = 1,27 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

- Tensões no solo



- na profundidade h:

$$\sigma_{h(z)} = k_{h,\lambda(z)} \cdot (\Delta\gamma - \Phi \cdot z) = 70000 \cdot [6,269 \cdot 10^{-3} - (1,27 \cdot 10^{-3} \cdot 7,0)] = -183,5 \text{ kN/m}^2$$

- profundidade da tensão máxima z':

$$z' = \frac{\Delta\gamma}{2 \cdot \Phi} = \frac{6,269 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 1,27 \cdot 10^{-3}} = 2,47 \text{ m}$$

- tensão máxima:

$$\sigma_{h,\max} = -\frac{m_{h,\lambda} \cdot \Delta\gamma^2}{4 \cdot \Phi} = \frac{-70000 \cdot (6,269 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 7,0 \cdot 1,27 \cdot 10^{-3}} = -77,01 \text{ kN/m}^2$$

- profundidade da tensão nula

$$z_0 = \frac{\Delta\gamma}{\Phi} = \frac{6,296 \cdot 10^{-3}}{1,27 \cdot 10^{-3}} = 4,94 \text{ m}$$

Esforço cortante e momento fletor ao longo do fuste

$$V(z) = H_0 - \left[ \frac{m_{h,\lambda} \cdot \Delta\gamma \cdot B}{2} \right] \cdot z^2 + \left[ \frac{m_{h,\lambda} \cdot \varphi \cdot B}{3} \right] \cdot z^3$$

$$V(z) = 100 - \left[ \frac{10000 \cdot 6,269 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{2} \right] \cdot z^2 + \left[ \frac{10000 \cdot 1,27 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{3} \right] \cdot z^3$$

$$V(z) = 100 - [37,61] \cdot z^2 + [5,08] \cdot z^3$$

Para  $z = z_0 \rightarrow V(z) = V_{\max}$

$$z_0 = 4,94 \text{ m}$$

$$V_{\max} = 100 - 37,61 \cdot 4,94^2 + 5,08 \cdot 4,94^3 = 205,41 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} M(z) &= M_0 + H_0 \cdot z - \left[ \frac{m_{h,\lambda} \cdot \Delta\gamma \cdot B}{6} \right] \cdot z^3 + \left[ \frac{m_{h,\lambda} \cdot \Phi \cdot B}{12} \right] \cdot z^4 \\ &= 550 + 100 \cdot z - [12,54] \cdot z^3 + [1,27] \cdot z^4 \end{aligned}$$

$p/M_{\max} \rightarrow$  tem-se a partir de:  $V(z) = 0$

$$V(z) = 100 - \left[ \frac{10000 \cdot 6,269 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{2} \right] \cdot z^2 + \left[ \frac{10000 \cdot 1,27 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{3} \right] \cdot z^3$$

$$V(z) = 100 - [37,61] \cdot z^2 + [5,08] \cdot z^3 \rightarrow 5,08 \cdot z^3 - 37,61 \cdot z^2 + 100 = 0$$

$$\therefore z = 1,89 \rightarrow M_{\max}$$

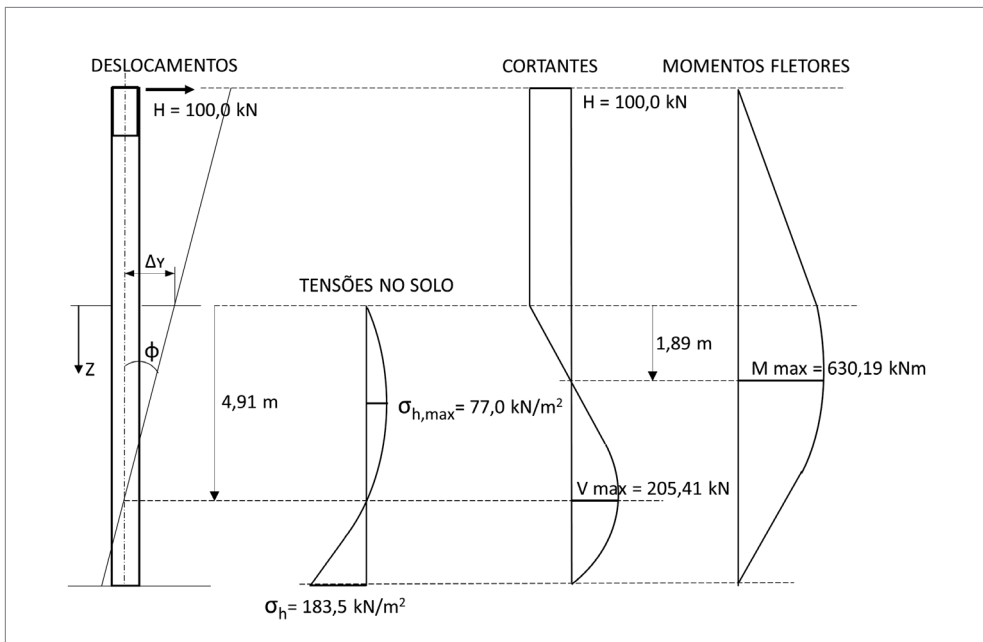
$$M_{\max} = 550 + 100 \cdot 1,89 - \left[ \frac{10000 \cdot 6,269 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{6} \right] \cdot 1,89^3 + \left[ \frac{10000 \cdot 1,27 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{12} \right] \cdot 1,89^4$$

$$M_{\max} = 550 + 189 - 84,66 + 16,05 = 670,39 \text{ kN.m}$$

Esforços ao longo da profundidade z

z[m]	V(z) [kN]	M(z) [kNm]
0,00	100,00	550,00
1,00	67,47	638,73
2,00	-9,80	670,00
3,00	-101,33	614,29
4,00	-176,64	472,56
5,00	-205,25	276,25
6,00	-156,68	87,28
7,00	0,0	0,0

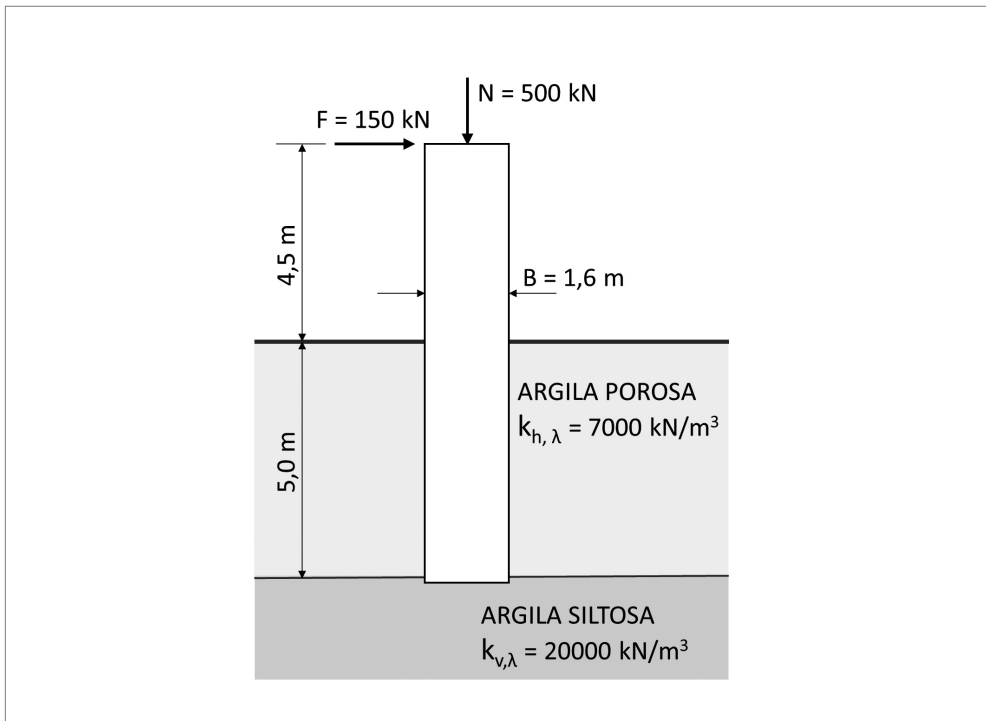
Esquema dos esforços e deformações



## EXEMPLO 6.4

Estaca curta isolada carregada lateralmente

Determinar as tensões verticais no solo da base de uma estaca curta e o diagrama de momentos fletores, considerando a participação do momento na base da estaca, como contribuição à sua estabilidade. A partir do esquema didático a seguir:

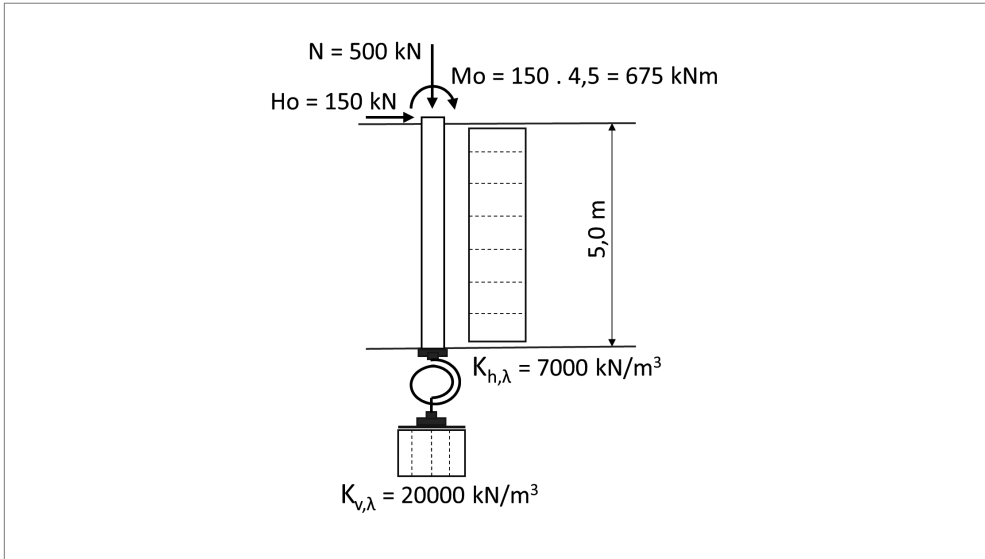


As estacas curtas recebem essa denominação devido ao fato de que as reações no solo não se equilibram, unicamente, a partir dos deslocamentos horizontais ao longo do fuste, resultando em momentos reativos na base da estaca, compatíveis com os esforços aplicados. Normalmente, essa característica se evidencia quando a rigidez estaca-solo for elevada, decorrente de grande diâmetro em relação à profundidade de embutimento.

No exemplo em questão, o coeficiente de recalque horizontal foi considerado constante com a profundidade e despreza-se as deflexões da LE, admitindo-se para a compatibilidade dos esforços somente as reações resultantes dos deslocamentos de corpo rígido, de translação e rotação.

Verifica-se que a equação dos momentos fletores, em sua resolução, apresentará um valor representativo diferente de zero na base da estaca, o qual corresponde ao momento de reação que se desenvolve.

Modelo de cálculo



O momento de inércia da base pode ser calculado segundo a resistência dos materiais:

$$I_B = \pi \cdot D^4 / 64 = \pi \cdot 1,6^4 / 64$$

$$I_B = 0,3217 \text{ m}^4$$

A partir de (6.1.22) e (6.1.23), tem-se:

$$\Phi = \frac{675,0 + 150,0 \cdot 5,0 / 2}{1,6 \cdot 7000 \cdot \frac{5,0^3}{12} + 20000 \cdot 0,3217} = 0,00853 \text{ rd}$$

$$\Delta_Y = \frac{150,0}{7000 \cdot 5,0 \cdot 1,6} + 0,00853 \cdot \frac{5,0}{2} = 0,0240 \text{ m}$$

A partir de (6.1.25), determina-se a equação de momentos fletores, como a seguir:

$$M(z) = 675,0 + 150,0 \cdot z - 1,60 \cdot 7000 \cdot 0,024 \cdot \frac{z^2}{2} + 1,60 \cdot 7000 \cdot 0,00853 \cdot \frac{z^3}{6}$$

Z (m)	M (z) (kNm)
0,0	675,00
1,0	706,52
2,0	564,78
3,0	345,32
4,0	143,67
5,0	54,88

→ Momento na base da estaca

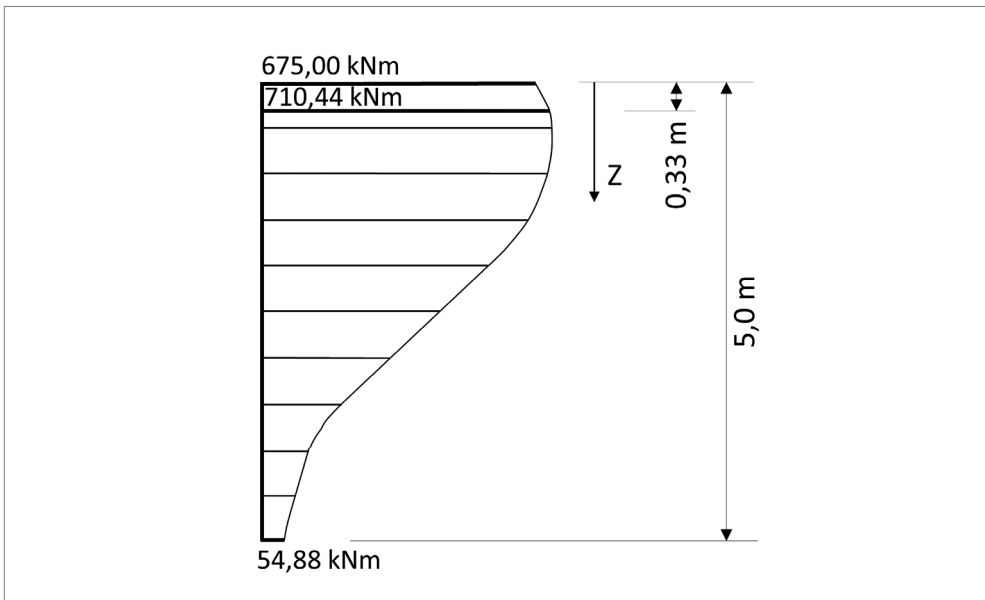
Para se determinar o valor do máximo momento fletor ao longo do fuste da estaca, deve-se procurar a seção na qual o esforço cortante é nulo. A partir de (6.1.24):

$$V(z) = 150,0 - 1,6 \cdot 7000 \cdot 0,024 \cdot z + 1,6 \cdot 7000 \cdot 0,00853 \cdot \frac{z^2}{2} = 0,0$$

$$z = 0,33 \rightarrow M(z) = M \text{ max}$$

$$M \text{ max} = 710,44 \text{ kNm}$$

Diagrama de momentos fletores



Tensões verticais na base

Aplicando-se as formulações da resistência dos materiais, relativamente a cargas excêntricas em uma seção genérica de pilar, assimilando-se à base da fundação, tem-se:

$$\sigma_v = \frac{N}{S} \pm \frac{M_L}{W_B} \therefore S = \pi \cdot \frac{B^2}{4} \therefore W_B = \pi \cdot \frac{B^3}{32}$$

$$S = \pi \cdot \frac{1,6^2}{4} = 2,01 \text{ m}^2$$

$$W_B = \pi \cdot \frac{1,6^3}{32} = 0,402 \text{ m}^3$$

$$\sigma_v = \frac{N}{S} \pm \frac{M_L}{W_B} = \frac{500}{2,01} \pm \frac{54,88}{0,402}$$

$$\sigma_{v,max} = 385,3 \text{ kN/m}^2 (+ / +)$$

$$\sigma_{v,min} = 112,2 \text{ kN/m}^2 (+ / -)$$

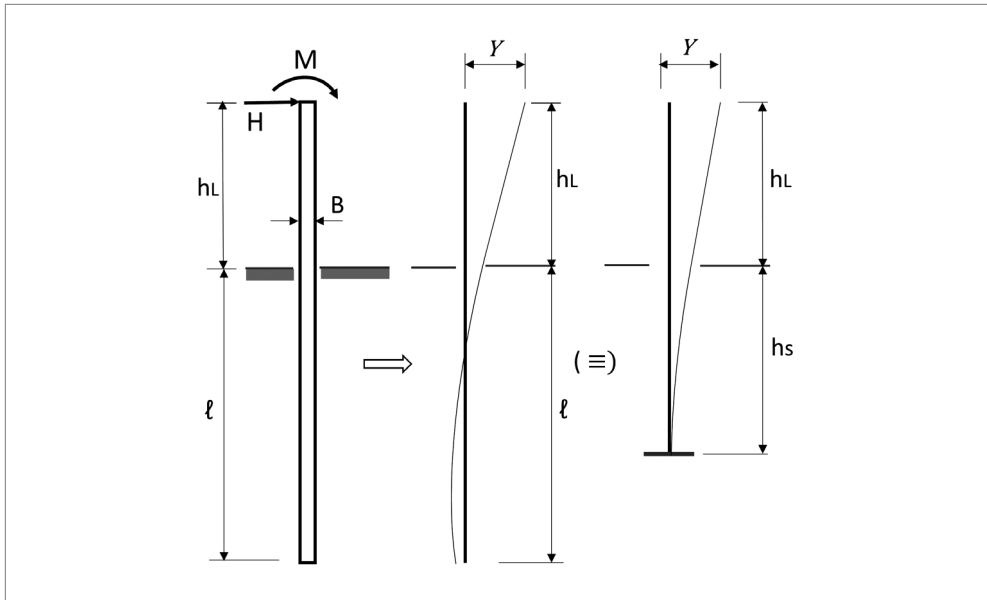
## 6.2 MÉTODO DE DAVISON E ROBINSON APLICADO ÀS ESTACAS FLEXÍVEIS

Davisson e Robinson (1965) apresenta uma proposta para resolução do problema estaca-solo, para o caso específico de estacas parcialmente enterradas, cuja base é uma analogia de comportamento estrutural entre uma estaca flexível inserida no solo, parcialmente enterrada, com um pilar de mesma característica estrutural da estaca, só que em balanço livre. São apresentadas soluções isoladas para aplicação de força horizontal e momento no topo da estaca, como também para uma força vertical axial, fornecendo subsídios para análise e determinação da carga crítica de flambagem. Mesmo sendo simplista, tendo em vista a facilidade de aplicação e razoável aproximação dos resultados, ainda encontra aplicações.

O método tem como base o coeficiente de reação horizontal do solo  $k_h$ , ou módulo de proporcionalidade do coeficiente horizontal  $m_h$ , utilizados para a determinação da rigidez relativa estaca-solo, fornecendo um fator de correlação entre a profundi-

dade embutida de estaca real, com uma estaca-pilar livre e engastada na base, como modelo de resolução para a determinação das deformações no topo. Somente tem validade para estacas flexíveis, em que  $(\ell/R$  ou  $\ell/T) > 4$ , segundo Capítulo 5, item 5.3. Para satisfazer a analogia entre o caso real e o análogo, o parâmetro de equivalência é a deformação no topo da estaca, que deve ser igual para os dois casos. Para a resolução analítica do problema, teve-se como base dois métodos então consagrados, de Hetenyi (1946), para  $k_h$  constante; e de Matlock e Reese (1961) para  $k_p$ , variando com a profundidade.

Definem-se parâmetros de flexibilidade para estacas inseridas no solo, fazendo-se uma correlação com estacas desconfiadas e engastadas na base, como mostra a Figura 6.7.



**Figura 6.7** – Correlação entre as deformações para uma estaca parcialmente embutida no solo e a equivalente livre em balanço pelo método de Davisson e Robinson.

O método define, assim, um comprimento  $h_e$  correspondente a uma estaca desconfiada e engastada na base, de tal forma que, quando carregada lateralmente, apresente a mesma deformação que a confinada no seu topo, mantendo-se as mesmas condições de carregamento.

Os parâmetros de flexibilidade são determinados, no Capítulo 5, item 5.3 – Rigidez relativa estaca-solo:

$$R = \sqrt[4]{\frac{E \cdot I}{k_{h,\lambda} \cdot B}} : \text{para argilas pré-adensadas}$$

$$T = \sqrt[5]{\frac{E \cdot I}{m_{h,\lambda} \cdot B}} : \text{para areias, siltes e argilas normalmente adensadas}$$

Sendo:

E – módulo de elasticidade da estaca;

I – momento de inércia da seção da estaca;

$k_{h,\lambda}$  – coeficiente de recalque horizontal constante;

$m_{h,\lambda}$  – módulo de proporcionalidade do coeficiente de recalque horizontal;

B – diâmetro da estaca.

A teoria somente tem validade se:  $\ell / (R \text{ ou } T) > 4$ .

Para a determinação de  $h_s$ , o método apresenta quatro ábacos, como mostra a Figura 6.8, sendo dois para o caso da análise à flexão, coluna a, e outros dois, para a análise da carga crítica de flambagem, coluna b. Em ambos os casos, diferencia-se a aplicação, a partir de ábacos distintos, um para a rigidez relativa R e outro para T.

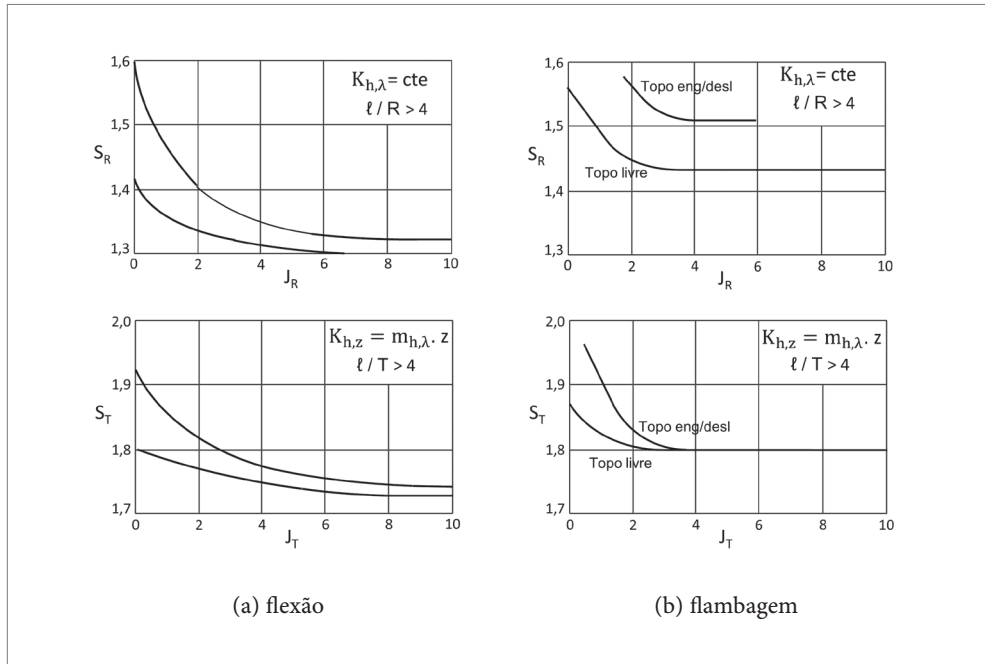
Para o caso de flexão, utiliza-se os ábacos da coluna a, sendo um para a rigidez relativa R e outro para T, como mostra a Figura 6.8. Em ambos os casos, a partir dos parâmetros:  $J_R = h_L / R$ ; ou  $J_T = h_L / T$ , obtém-se, pelos ábacos,  $S_R$  ou  $S_T$ , respectivamente. As curvas de cada ábaco referem-se à aplicação de momentos  $M$  ou cargas horizontais  $H$  aplicados no topo da estaca.

Fazendo  $S_R = h_s / R$ ; ou  $S_T = h_s / T$ ; determina-se o valor de  $h_s$ .

A carga crítica de flambagem pode ser calculada pela expressão a seguir, com  $S_R$  e  $J_R$  aplicados diretamente:

$$V_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot (R \text{ ou } T)^2 \cdot (S_R + J_R)} \quad (6.2.1)$$

Os valores de  $S_R$  ou  $S_T$  poderão ser obtidos a partir de dois ábacos que se referem ao caso de flambagem, um para a rigidez relativa R e outro para T, como se verifica na coluna b da Figura 6.8. Em ambos os casos, a partir dos parâmetros:  $J_R = h_L / R$ ; ou  $J_T = h_L / T$ , para os casos de topo da estaca engastada ou livre, obtém-se  $S_R$  ou  $J_T$ .



**Figura 6.8** Valores de  $S_R$  ou  $S_T$  para aplicação do método de Davisson e Robinson.

As curvas para determinação de  $h_s$ , no caso de flexão, seja para  $H$  ou  $M$ , apresentam pequena variação nos valores. Os próprios autores recomendam os seguintes valores para  $h_s$ , em função das curvas de variação de  $S_R$  ou  $S_T$ :

$\therefore$  para as argilas, se  $J_R > 2 \rightarrow S_R = 1,4$

$h_s = 1,4 R$ ;

ou

$\therefore$  para as areias, se  $J_T > 1 \rightarrow S_T = 1,8$

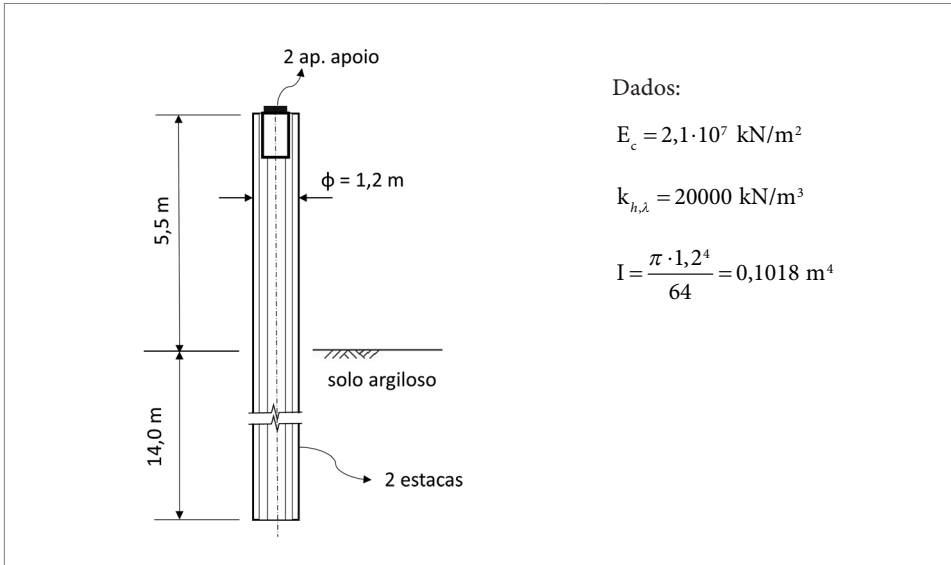
$h_s = 1,8 T$ .

Devido à própria configuração do método, os resultados para as deformações no topo da estaca apresentam boa aproximação de valores, já os momentos de engaste calculado com a estaca equivalente engastada resultam em valores maiores que os reais. Dinis (2012) apresenta vários casos de aplicação do método, referindo-se a fundações ou encontros leves de pontes, com o objetivo de determinar a rigidez dos elementos estruturais da infra/mesoestrutura. Segue o Exemplo 6.5, com aplicação imediata do método.

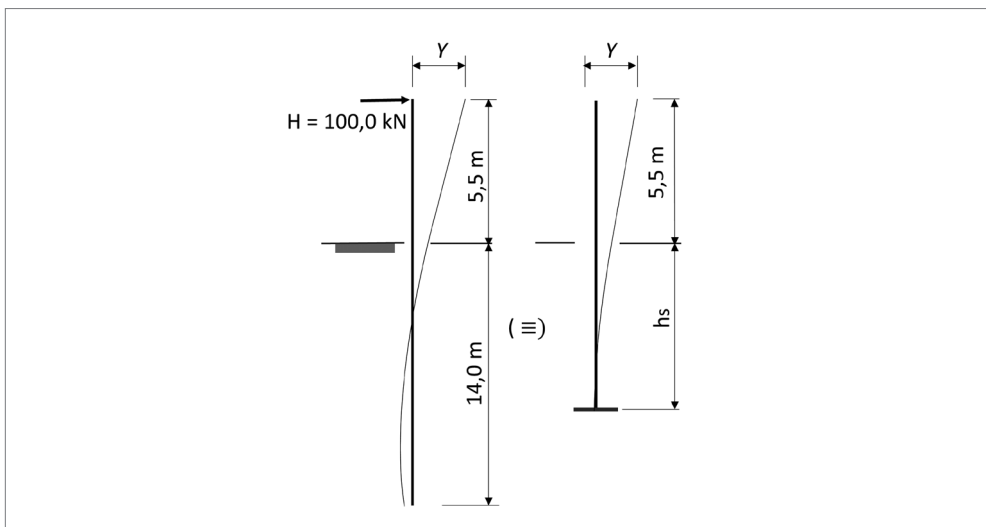
## EXEMPLO 6.5

Deformação em estaca-pilar por Davison e Robinson

Calcular o momento máximo e a deformação no topo do pilar-estaca, a seguir esquematizado, utilizando o método Davison e Robinson. Considerar que o aparelho de apoio transmita ao pilar uma força longitudinal de 100 kN.



Comprimento equivalente da estaca



A rigidez estaca x solo, para solos argilosos, vale:

$$R = \sqrt[4]{\frac{E \cdot I}{k_{h,\lambda} \cdot B}} = 2,26$$

$$\frac{h}{R} = \frac{14,0}{2,26} = 6,19 > 4,0 \rightarrow \text{a estaca é flexível}$$

Para solos argilosos, a altura equivalente ao trecho enterrado é obtida como a seguir:

$$h_s = 1,4 \cdot 2,26 = 3,17 \text{ m};$$

- Altura total equivalente do pilar-estaca equivalente:

$$h_e = 5,5 + 3,17 = 8,67 \text{ m}.$$

Determinação da deformação no topo da estaca

A carga horizontal por estaca será:

$$H = 100,0 / 2 = 50,0 \text{ kN}.$$

Momento de engaste:

$$M_{max} = 50,0 \cdot 8,67 = 433,50 \text{ kNm}.$$

Deformação no topo da estaca

$$\delta = \frac{H \cdot h_e^3}{E \cdot I} = \frac{100,0 \cdot 8,67^3}{21,10^6 \cdot 0,1018} = 0,0152 \text{ m}$$

### 6.3 MÉTODO PARA DISCRETIZAÇÃO DO SOLO POR COEFICIENTES DE MOLA

Esse método deriva da teoria de viga sobre apoio elástico, em que a viga se estabelece como um elemento estrutural flexível vinculado continuamente a um meio elástico, o solo. Emil Winkler (1867) apresentou um modelo simplificado para resolução do problema da viga sobre apoio elástico, em modelo unidimensional, que consiste em discretizar o solo em vínculos elásticos ao longo do elemento estrutural, que trabalham independentes uns dos outros e com resposta linear. Define-se para cada vínculo

um módulo de rigidez elástico  $K_M$  (kN/m), que recebe a denominação de coeficiente de mola. Assim, segundo a hipótese de Winkler, para estabelecer um modelo estrutural de cálculo, deve-se transformar o meio elástico contínuo, ou seja, o solo, em vínculos pontuais ou finitos que expressem características de rigidez. Nos estudos mais complexos, que levam as análises a um maior nível de sofisticação numérica, o solo é representado por meio de sistemas planos discretizados por uma malha de elementos finitos bidimensionais ou tridimensionais, que apresentam, inclusive, recursos para simular sua plastificação. Ver Capítulo 7, item 7.1 – Método evolutivo de tensões aplicado a modelos planos.

No entanto, de uso mais corrente e com suficiente aproximação, o problema tem sido resolvido numericamente de forma unidimensional, segundo o modelo de Winkler, por meio de modelos formados por barras, simulando determinado elemento estrutural, entremeadas por nós que unem as barras e possibilitam, por meio deles, prover o sistema estrutural de vínculos elásticos que representam o solo. Os vínculos são elementos de rigidez pontuais, podendo ter dimensões discretizadas, mas independentes entre si, normalmente denominados de coeficientes de mola  $K_M$ . O elemento de mola  $K_M$  (kN/m) concentra as tensões  $\sigma_s$  relativamente ao contato do solo com a estaca, em proporção à sua área de influência, o que resulta em reações pontuais  $R_s$  (kN) nos vínculos entre o solo e o elemento estrutural. As pressões de contato  $\sigma_s$  são proporcionais aos deslocamentos  $\rho$  do elemento estrutural, tendo como proporcionalidade o coeficiente de recalque do solo  $k_s$  (kN/m<sup>3</sup>), ver Capítulo 4, seção 4.1 e Capítulo 5, item 5.2. Assim, segundo esse modelo, o deslocamento  $\rho_i$  de um determinado elemento de mola  $K_{M,i}$ , de vinculação da viga ou estaca com o solo, gera uma reação  $R_{s_i} = \rho_i \cdot K_{M,i}$  (kN) no vínculo, que ocorre de forma independente aos deslocamentos dos elementos de mola adjacentes.

No caso do modelo da estaca carregada lateralmente, da mesma forma que para as vigas sobre apoio elástico, a solução numérica do problema permite, também, igualmente, ser efetuada de forma simplificada pela hipótese de Winkler, sendo que  $K_M$ , no caso, concentra as tensões no solo  $\sigma_h$ , que serão proporcionais aos deslocamentos  $y$  do elemento estrutural, tendo como proporcionalidade o coeficiente de recalque horizontal do solo  $k_h$  (kN/m<sup>3</sup>), ver Capítulo 5, item 5.2, expressão (5.2.8).

De maneira geral, o modelo enquadra-se na teoria da elasticidade, admitindo-se uma linearidade na resposta do solo aos deslocamentos, no intervalo de limite elástico, a partir do qual, uma vez ultrapassados, ocorrerá a plastificação do solo, que pode ocorrer por descompressão, utilizando-se para esse limite os empuxos ativos ou por compressão excessiva, nesse caso, os empuxos passivos. Em sistemas planos de análise, bidimensionais, os limites de plastificação podem ser determinados pelo critério Mohr-Coulomb, para cada elemento de solo discretizado no modelo de análise,

isoladamente, ver Exemplo 2.6. No caso do modelo Winkler, unidimensional, os limites de plastificação podem ser impostos por algoritmos não lineares, representados por curvas específicas  $p-y$ , pré-determinadas para cada solo, assumidas segundo suas propriedades e simplificações que se queira impor.

Assim,  $K_M$  representa um vínculo elástico, cujo comportamento estrutural reproduz as mesmas deformações axiais que ocorreriam em determinado elemento discreto do meio solo, de mesmo ponto de vinculação com a estaca, se considerado o meio solo contínuo, cujo módulo de deformação seria  $E_s$ . Pelo fato de a estaca aplicar ao solo deformações variáveis e contínuas em sua profundidade, essas deformações são determinadas por meio do coeficiente de recalque horizontal,  $k_{h,\lambda}$ , que considera, na determinação das deformações, o espraimento das tensões no meio contínuo solo, como visto no Capítulo 5, seção 5.2. A determinação do coeficiente de mola  $K_M$  se faz, concentrando-se a rigidez do solo, em vínculos isolados e independentes, que podem ser obtidos como mostra a Figura 6.9:

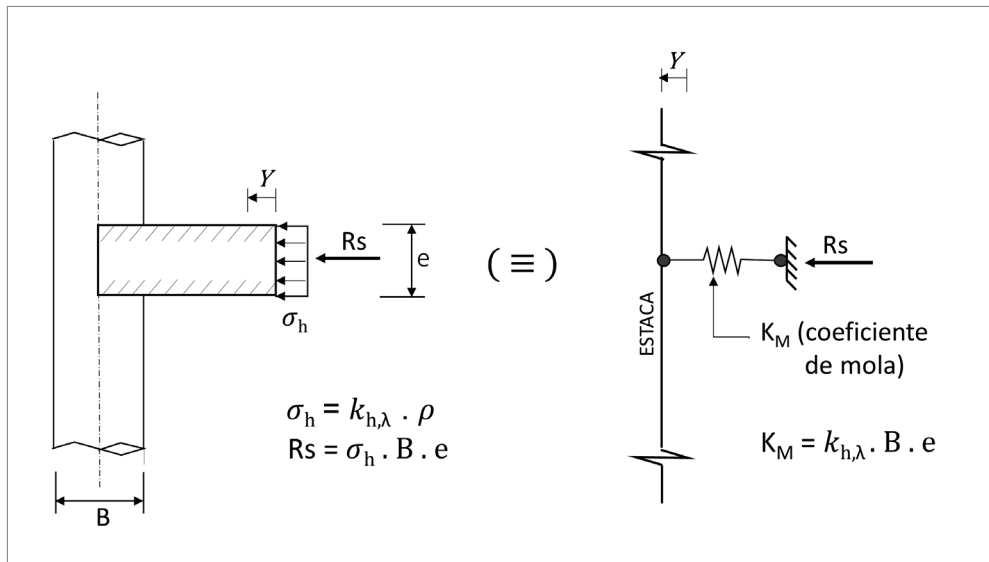


Figura 6.9 Caracterização do coeficiente de mola  $K_M$  na discretização do solo.

O coeficiente de mola, na verdade, em sua conotação a um vínculo elástico, tem analogia a um elemento estrutural que representa o solo, cujas características poderiam ser representadas como na Figura 6.10:

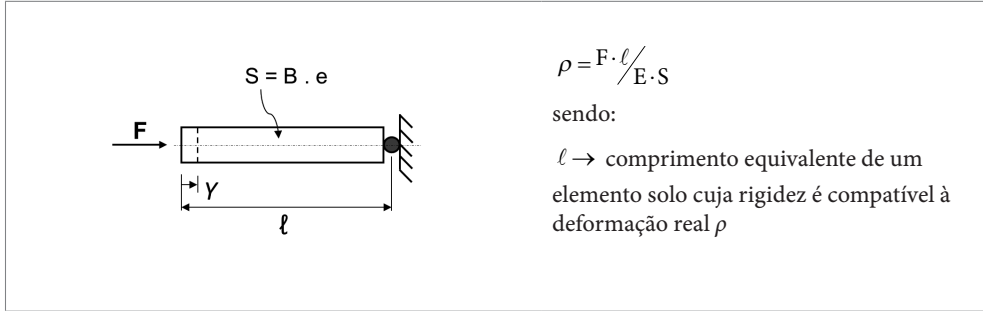


Figura 6.10 Analogia do coeficiente de mola  $K_M$  a uma barra estrutural.

Assim, para um carregamento aplicado por meio de uma superfície discreta contra o meio solo, considerando o espreadimento das tensões, faz com que a relação ( $\ell/S$ ) não seja linear, o que leva à própria definição do coeficiente de recalque horizontal  $k_h$  como uma relação direta entre a tensão aplicada e a deformação, em seu resultado final junto à face do elemento estrutural.

$$\rho = \frac{\sigma_h}{k_h} = \left( \frac{F}{S} \right) / (k_h) \quad (6.3.1)$$

Os softwares estruturais possibilitam a interpretação direta de um vínculo elástico por meio de sua rigidez, no caso, o elemento mola, cuja expressão para avaliação, quando aplicado ao vínculo de um segmento de barra, de área de projeção  $S = B \cdot e$ , será:

$$K_M = k_{h,\lambda} \cdot S (\text{kN/m}) \quad (6.3.2)$$

com  $k_{h,\lambda}$  determinado como em 5.2 e  $\lambda$  segundo a Tabela 5.2.

O modelo completo para o processamento de cálculo pode ser representado, como mostra a Figura 6.11:

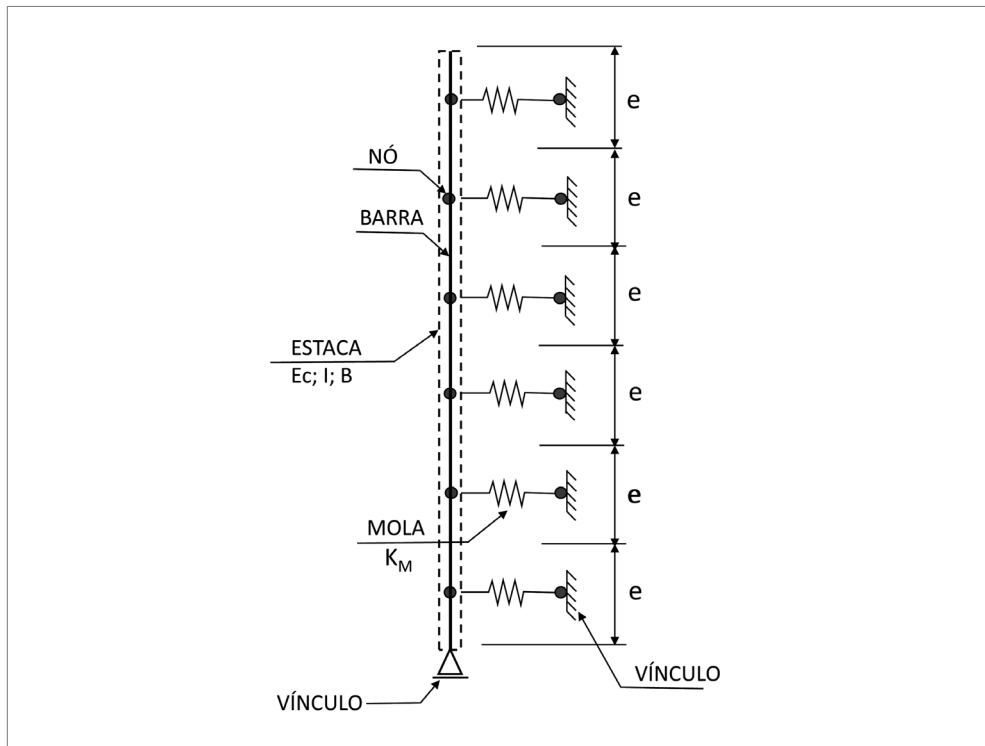


Figura 6.11 Modelo de processamento estaca-solo com vínculos de rigidez de mola  $K_M$

O modelo assim concebido, que utiliza barras estruturais e molas independentes representando o solo, unicamente, não reproduz com fidelidade o comportamento do solo mediante recalques em meio elástico contínuo, tendo em vista o efeito de espraiamento das tensões de compressão que ocorre no maciço, causado exatamente pela interação contínua entre as partículas do solo. O comportamento do solo refere-se a um efeito conjunto e integrado entre compressibilidade e cisalhamento. Há críticas quanto a validade do modelo de Winkler, tendo sido essa questão tratada por vários autores. Rosa (2013) cita algumas propostas efetuadas para reduzir as distorções causadas pela consideração de molas independentes, entre elas o modelo de Pasternack, que propõe interligar dois elementos de mola por uma membrana delgada a ser tensionada diante de deformações diferenciais, simulando o cisalhamento, e o modelo de Hetenyi (1946), que sugere a geração de uma viga elástica para interação entre as molas.

No entanto, qualquer rebuscamento teórico-analítico na tentativa de melhor aproximar os resultados a uma resposta mais realista que represente o comportamento do solo reduziria sua praticidade de aplicação. Para muitos problemas correntes da

engenharia, a precisão do método, mesmo com as diversas simplificações adotadas para sua aplicação, tem se mostrado suficiente.

### 6.3.1 Resolução analítica por coeficientes de mola

As aplicações do método levam a várias considerações, que são específicas a cada caso. O modelo mais simplista, com vínculos elásticos representando o solo, refere-se ao caso de vigas sobre apoio elástico, horizontais e apoiadas na superfície do solo. Para esse modelo, tendo em vista sua posição exatamente na delimitação do meio elástico semi-infinito, as deformações do elemento estrutural mobilizam diretamente a camada de solo abaixo da viga. Assim, o solo de base corresponde ao meio elástico que oferece apoio contínuo à viga, podendo ser interpretado, de acordo com o modelo de Winkler, como uma série de apoios elásticos independentes e contíguos. A maior quantidade de molas representará uma maior precisão na resolução estática do sistema. No entanto, é necessário atentar para o fato de que, mesmo que se admita espaçamentos infinitesimais entre as molas, trata-se de uma simplificação do meio solo contínuo, tendo em vista que o espraçamento das tensões no solo, ainda que consideradas na conformação do coeficiente de recalque horizontal,  $k_h$ , que terá dado origem às molas, não reproduz exatamente a situação real. Em sua aplicação, deve-se ater, em contrapartida, que se a viga for muito flexível, ou os carregamentos por demais excêntricos, na ausência de uma pré-compressão mínima no contato com o solo, poderá ocorrer seu descolamento parcial por decompressão do solo. Nessa situação, caso ocorra, devem-se efetuar correções na matriz estrutural, considerando a desmobilização dos vínculos que estariam submetidos ao efeito de descolamento, já que não mais responderão às deformações, por resultarem negativas, uma situação não admitida para os solos. Ver Figura 6.12.

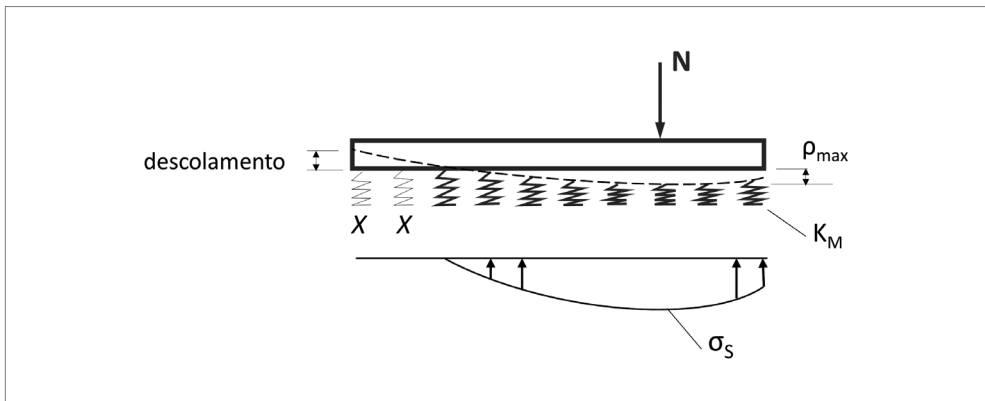


Figura 6.12 Modelo de molas para resolução estática de viga sobre apoio elástico.

Quanto ao problema estaca-solo, o elemento estrutural, por estar posicionado na vertical, estará inteiramente confinado pelo solo. No sentido do deslocamento horizontal da estaca, mediante carregamento, na face frontal, ocorrerão tensões de compressão junto ao solo e, na face oposta, descompressão. Nessa circunstância, deve-se prever elementos molas nas duas faces da estaca, de modo a dotar o modelo de uma vinculação que reproduza este estado de deformações no solo. Ocorre, no entanto, que a estaca, quando embutida no solo, ao se deslocar horizontalmente, forma um semianel perimetral de compressão na face oposta ao deslocamento, um arco de confinamento, como resultado do comportamento axissimétrico característico (ver Figura 6.13). Assim, na face oposta ao deslocamento frontal, o solo, sob descompressão, mantém seu estado de deformação estável, não acompanhando as deformações da estaca, ocorrendo seu descolamento relativamente ao solo. Da mesma forma, na face frontal da estaca, após ter ocorrido a compressão do solo, diante do descarregamento, no retorno da estaca à sua posição inicial, pelo mesmo fenômeno, pode o solo perder a pressão de contato com a estaca. O tipo de estaca e seu processo construtivo pode evidenciar, com maior ou menor intensidade, a manutenção do efeito de confinamento contra o solo após o deslocamento horizontal. Por exemplo, em estacas moldadas e preenchidas com nata de cimento sob pressão, a probabilidade de ocorrer desconfinamento na face descomprimida é menor. O mesmo acontece com as estacas cravadas, em menor intensidade. Já para as estacas moldadas de maior diâmetro, concretadas por gravidade, em especial, com a utilização de fluido estabilizador, a possibilidade de ocorrer o efeito de desconfinamento e a formação do anel de compressão é bem maior. Tipos de estacas e seus processos construtivos podem ser vistas em Abef (2022).

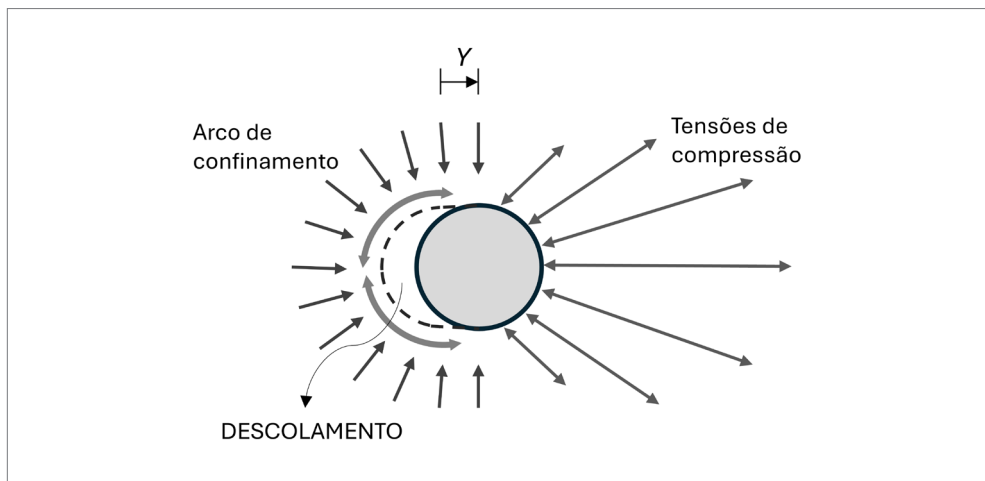


Figura 6.13 Efeito de desconcolamento do solo em estacas sob deformação horizontal.

Na modelagem do sistema solo-estaca, é comum adotar elementos mola em uma única face da estaca, assumindo que, nos trechos em que ocorrem inversões do deslocamento horizontal, as reações que resultarem negativas serão interpretadas como de compressão na face oposta. Assim, por simplificação, com essa consideração, evita-se a correção da matriz de processamento, que exigiria desativar as molas em que ocorreu o descolamento do solo. Ver Figura 6.14.

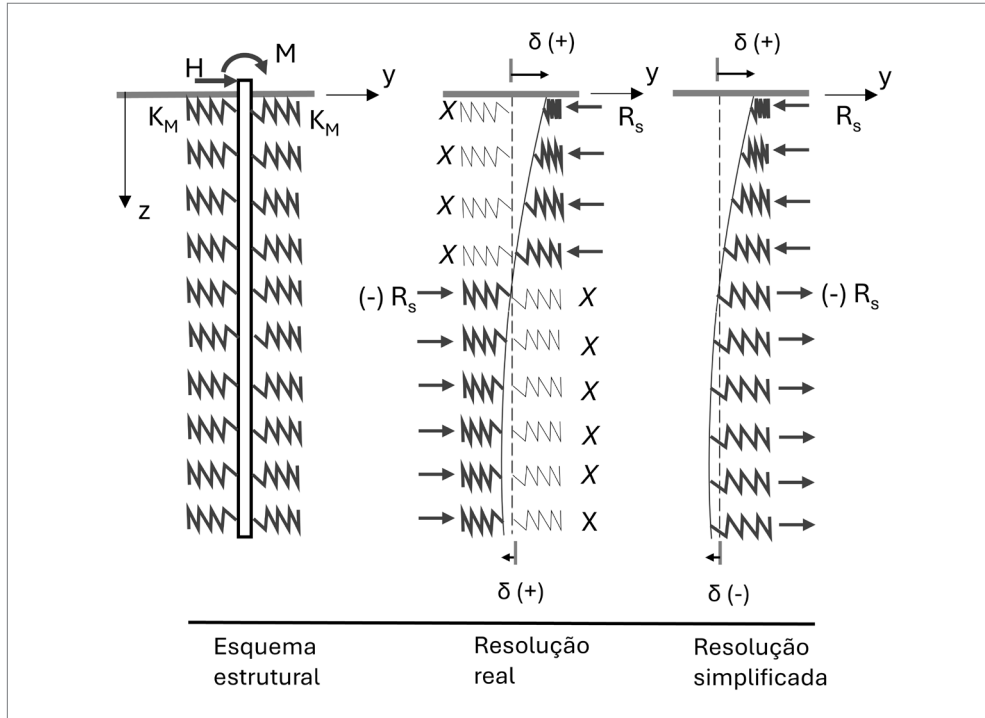


Figura 6.14 Modelo de molas para resolução estática de estacas carregadas lateralmente.

Em se tratando de estacas para a formação de paredes de contenção, por serem contínuas, não há, na horizontal, arqueamento de tensões por compressão pelo efeito de assimetria, assim, os efeitos do desconfinamento do lado da face descomprimida devem ser avaliados e considerados no modelo solo-estrutura, por meio de vinculações, no caso, utilizando-se elementos de mola. Esse modelo é bem representado pelo método evolutivo de tensões, como abordado no Capítulo 7. No entanto, tendo em conta que o confinamento existente do solo é sensível a pequenos deslocamentos da parede, o que leva normalmente à plastificação, atinge-se, na maior parte da profundidade, os limites estabelecidos pelos empuxos ativos. Dessa forma, é prática comum a simplificação desse modelo estático, assumindo-se o pleno desconfinamento do solo ao longo de toda a profundidade da estaca-parede, na face oposta à escavação,

desvinculando-a do solo e aplicando-se, diretamente, os empuxos ativos como carregamento horizontal. Ver Capítulo 6, exemplo 6.1. Contudo, caso o travamento superior for um tirante protendido, a ativação do solo em toda a altura da parede não ocorrerá, exigindo maior atenção ao problema, seja a partir de uma simplificação mais criteriosa ou pela adequação do modelo à força a ser aplicada pelo tirante, de modo a garantir sua reação pelo meio contínuo solo.

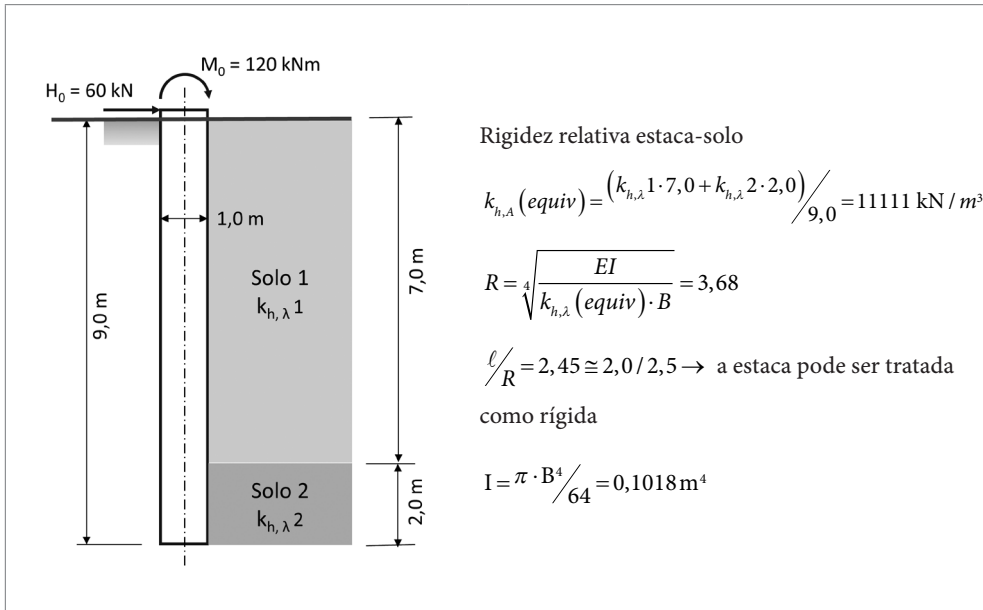
Em se considerando o comportamento do sistema estaca-solo como rígido, a resolução do problema pode ser efetuada por meio de cálculos analíticos, com o equacionamento em função dos deslocamentos da estaca no solo a partir dos movimentos de um corpo rígido, equilibrado pelas duas equações da estática:  $\Sigma F = 0$  e  $\Sigma M = 0$ . Ver Exemplo 6.3 e Exemplo 6.4.

Sendo o sistema flexível, por outro lado, devido à complexidade de sua resolução, deve-se recorrer a métodos numéricos, como o MEF. Ver: Exemplo 6.6 e Exemplo 6.7.

## EXEMPLO 6.6

Estaca isolada carregada lateralmente

Considerando uma estaca isolada com 9,0 m de profundidade, carregada na superfície por uma força horizontal  $H_0 = 60,0$  kN e um momento aplicado  $M_0 = 120,0$  kNm, segundo o esquema a seguir, determinar as máximas e mínimas deformações e tensões horizontais que ocorrem no solo, utilizar o modelo de resolução dos esforços com a consideração de molas elásticas representando o solo e as reações máxima e mínima nas molas, ao longo da estaca. O coeficiente de recalque horizontal refere-se já à forma da superfície de incidência, segundo Capítulo 5, item 5.2:  $k_{h,\lambda} 1 = 10000$  kN/m<sup>3</sup> ;  $k_{h,\lambda} 2 = 15000$  kN/m<sup>3</sup>  
 $E_c = 20 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>



Discretização da estaca-solo em modelo de molas

Adota-se como segmentação da profundidade de embutimento da estaca, segmentos de 1,0 m, o que corresponde a espaçamentos entre as molas de 1,0 m.

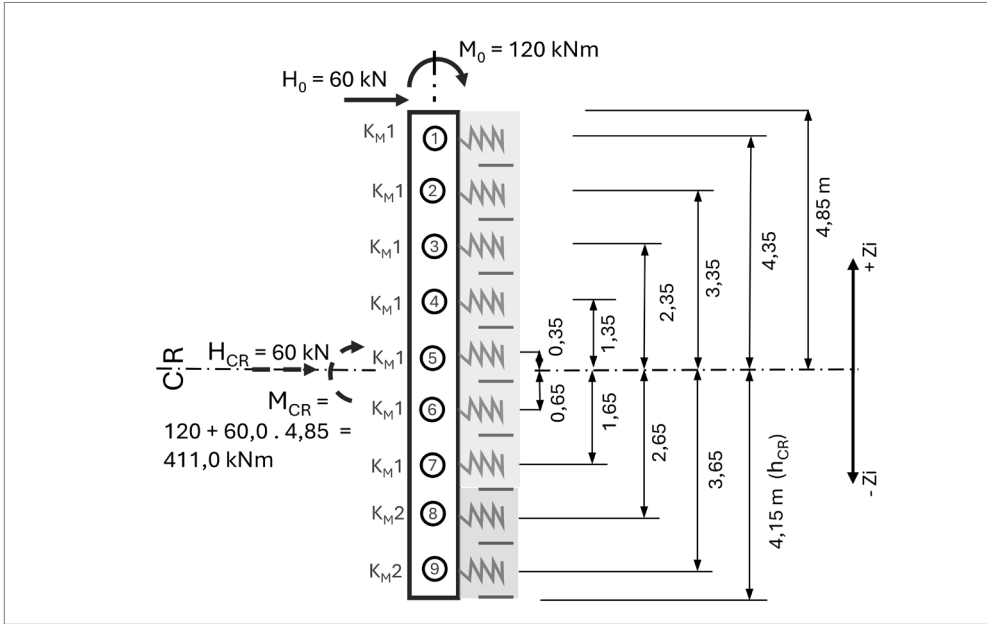
$$K_{M1} = B \cdot e = 10000 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 10000 \text{ kN/m}$$

$$K_{M2} = B \cdot e = 15000 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 15000 \text{ kN/m}$$

Esquema estrutural

Os esforços serão transladados para o CR – centro de rigidez dos vínculos elásticos, resolvendo-se o sistema com a consideração de equilíbrio de corpo rígido.

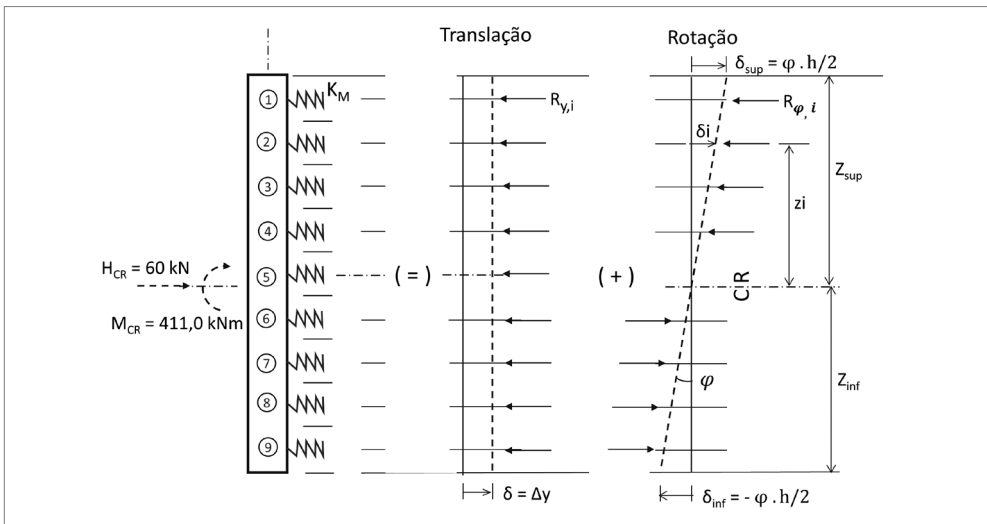
$$h_{CR} = \frac{7,0 \cdot 10000 \cdot 5,5 + 2,0 \cdot 15000 \cdot 1,0}{7,0 \cdot 10000 + 2,0 \cdot 15000} = 4,15 \text{ m}$$



Resolução

A determinação das tensões máximas e mínimas e o cálculo das reações nas molas será efetuada sob a consideração da estaca-solo como corpo rígido:

Efeitos de translação  $\Delta y$  e rotação  $\varphi$



$$\Sigma F = 0$$

$$H_{CR} = 9 \cdot \Delta y \cdot K_{h,\lambda(\text{equ})}$$

$$60,00 = 9 \cdot \Delta y \cdot 11111 \rightarrow \Delta y = 0,00067m$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_{CR} = \Sigma \delta i \cdot K_{M i} \cdot z_i$$

$$M_{CR} = \Sigma (\varphi \cdot z_i) \cdot K_{M i} \cdot z_i \rightarrow \varphi = \frac{M_{CR}}{\Sigma (K_{M i} \cdot z_i^2)}$$

$$\varphi = \frac{M_{CR}}{K_{M 1} \cdot (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 + z_7^2) + K_{M 2} \cdot (z_8^2 + z_9^2)}$$

$$\varphi = \frac{411,0}{10000 \cdot (1,35^2 + 2,35^2 + 3,35^2 + 4,35^2 + 0,35^2 + 0,65^2 + 1,65^2) + 15000 \cdot (2,65^2 + 3,65^2)} = 0,00058 \text{ rd}$$

Deformações

$$\delta_{sup} = (\Delta y + \varphi \cdot z_{sup}) = 0,00067 + 0,00058 \cdot 4,85 = 0,00348 m$$

$$\delta_{inf} = (\Delta y - \varphi \cdot z_{inf}) = 0,00067 - 0,00058 \cdot 4,15 = -0,00172 m$$

Tensões máximas e mínimas

$$\sigma_{max} = \delta_{sup} \cdot K_{M 1} = 0,00348 \cdot 10000 = 34,8 \text{ kN} / m^2 \text{ (compressão na face frontal)}$$

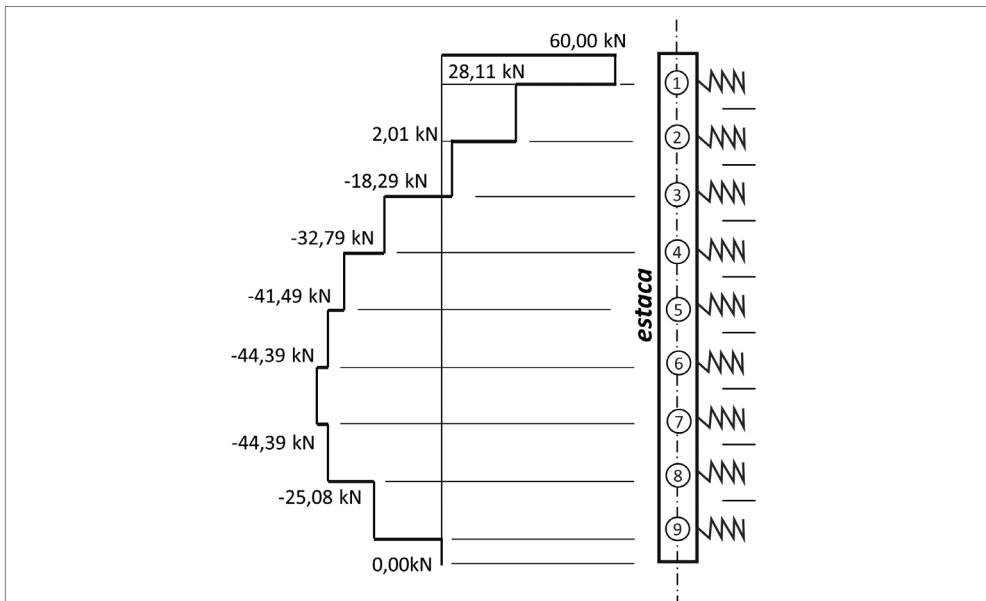
$$\sigma_{min} = \delta_{inf} \cdot K_{M 2} = -0,00172 \cdot 15000 = -25,8 \text{ kN} / m^2 \text{ (compressão na face oposta)}$$

## Reações nas molas

$R_{\text{mola } 1} = 31,89 \text{ kN}$	$R_{\text{mola},i} = R_y +/_- R_\phi$ $R_{\text{mola},i} = \left( \frac{H_{\text{CR}} \cdot K_{h,\lambda(i)}}{9 \cdot K_{h,\lambda(\text{equ})}} \right) +/_- (\phi \cdot z_i \cdot K_{M,i})$ $R_{\text{mola } 1} = \left( \frac{60,0 \cdot 10000}{9 \cdot 111111} \right) + (0,00058 \cdot 4,35 \cdot 10000) = 31,89 \text{ kN}$ $R_{\text{mola } 8} = \left( \frac{60,0 \cdot 15000}{9 \cdot 111111} \right) - (0,00058 \cdot 2,65 \cdot 15000) = -16,37 \text{ kN}$ → compressão na face oposta.
$R_{\text{mola } 2} = 26,10 \text{ kN}$	
$R_{\text{mola } 3} = 20,30 \text{ kN}$	
$R_{\text{mola } 4} = 14,50 \text{ kN}$	
$R_{\text{mola } 5} = 8,70 \text{ kN}$	
$R_{\text{mola } 6} = 2,90 \text{ kN}$	
$R_{\text{mola } 7} = -2,90 \text{ kN}$	
$R_{\text{mola } 8} = -16,37 \text{ kN}$	
$R_{\text{mola } 9} = -25,08 \text{ kN}$	

A partir das reações nas molas, ou do diagrama de tensões, pode-se calcular as forças cortantes e momentos fletores, como a seguir:

- Esforços Cortantes –  $V_i$



- Momento fletor máximo –  $M_{max}$

$$V = 0,0 \rightarrow Z = 2,5 \text{ m} \rightarrow M_{z=2,5} = M_{max}$$

$$M_{max} = -120,0 - 60,0 \cdot 2,5 + 31,89 \cdot 2,0 + 26,1 \cdot 1,0 = 180,12 \text{ kNm}$$

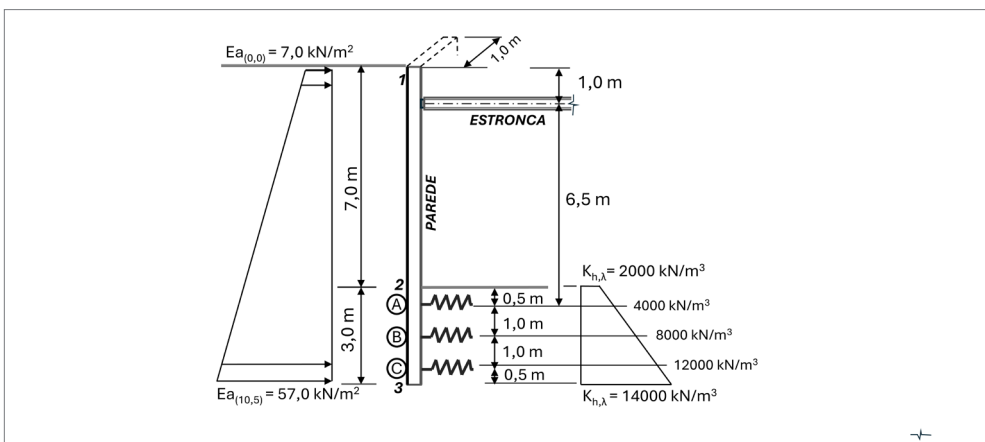
## EXEMPLO 6.7

Contenção de escavação utilizando-se parede contínua

Considerando uma parede contínua para conter uma escavação de 7,0 m de profundidade, com 3,0 m de ficha, escorada a 1,0 m da superfície do terreno por uma estronca metálica provisória, que será substituída posteriormente pela estrutura definitiva de tamponamento da escavação, verificar a estabilidade estrutural do conjunto, na fase provisória.

Determinar a deformação na base da parede, as reações na estronca, a tensão no solo da ficha, esforços cortantes ao longo da parede e momento fletor máximo. Supõe-se que ocorra o total desconfinamento do solo na face oposta à escavação, o que leva a se assumir os empuxos ativos como carregamentos, da forma com que estão no esquema a seguir. A largura teórica de cálculo a considerar é de 1,0 m e o coeficiente de recalque horizontal  $k_{h,\lambda}$  refere-se já à forma da superfície de incidência, segundo Capítulo 5, seção 5.2 – Coeficiente de recalque horizontal ( $k_{h,\lambda}$ ). Suponha que a parede tenha rigidez infinita relativamente ao solo.

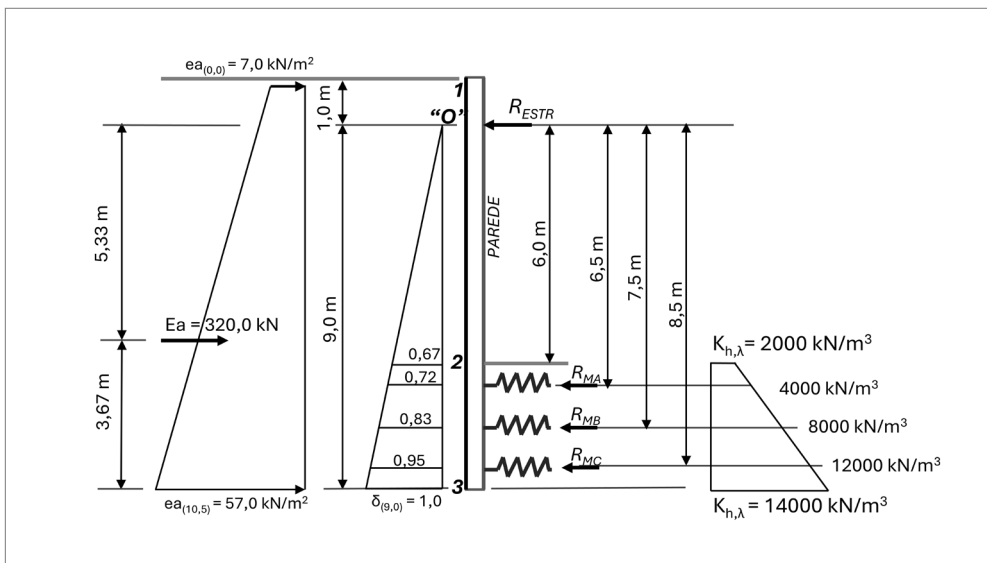
Modelo de cálculo



Para resolução, adotar como modelo a hipótese de Winkler, adotando, para representar a reação do solo da ficha, três molas, cuja rigidez deverá ser determinada a partir do diagrama de  $k_{h,\lambda}$ , como indicado no esquema. Utilizar a teoria dos corpos rígidos, tendo em vista que em qualquer ponto da estrutura da parede:  $\Sigma F = 0$  e  $\Sigma M = 0$ .

Determinar o valor da reação nas molas, o diagrama de cortantes e o máximo momento fletor que atua na parede.

Esquema teórico de resolução



Rigidez das molas

$$K_{M,A} = 4000 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 4000 \text{ kN/m}$$

$$K_{M,B} = 8000 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 8000 \text{ kN/m}$$

$$K_{M,C} = 12000 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 12000 \text{ kN/m}$$

Para  $\Sigma M^{\circ} = 0$ , tem-se:

$$320,0 \cdot 5,33 = 6,5 \cdot 4000 \cdot 0,72 \cdot \delta_9 + 7,5 \cdot 8000 \cdot 0,83 \cdot \delta_9 + 8,5 \cdot 12000 \cdot 0,95 \cdot \delta_9$$

$$\delta_9 = 0,0103 \text{ m.}$$

Reações nas molas

$$R_{M,A} = 0,72 \cdot 0,0103 \cdot 4000 = 26,66 \text{ kN}$$

$$R_{M,B} = 0,83 \cdot 0,0103 \cdot 8000 = 68,39 \text{ kN}$$

$$R_{M,C} = 0,95 \cdot 0,0103 \cdot 12000 = 117,42 \text{ kN}$$

Reação na estronca

$$RE = 320,0 - 26,66 - 68,39 - 117,42$$

$$RE = 107,53 \text{ KN}$$

Cortantes

$$V1 = 0,0 \text{ kN}$$

$$V''O'' = 7,0 \cdot 1,0 + (50,0/10) \cdot 1,0 \cdot 1,0 / 2 = 11,50 \text{ kN/m}$$

$$V2 = 7,0 \cdot 7,0 + (50,0/10) \cdot 7,0 \cdot 7,0 / 2 - 107,53 = 63,97 \text{ kN}$$

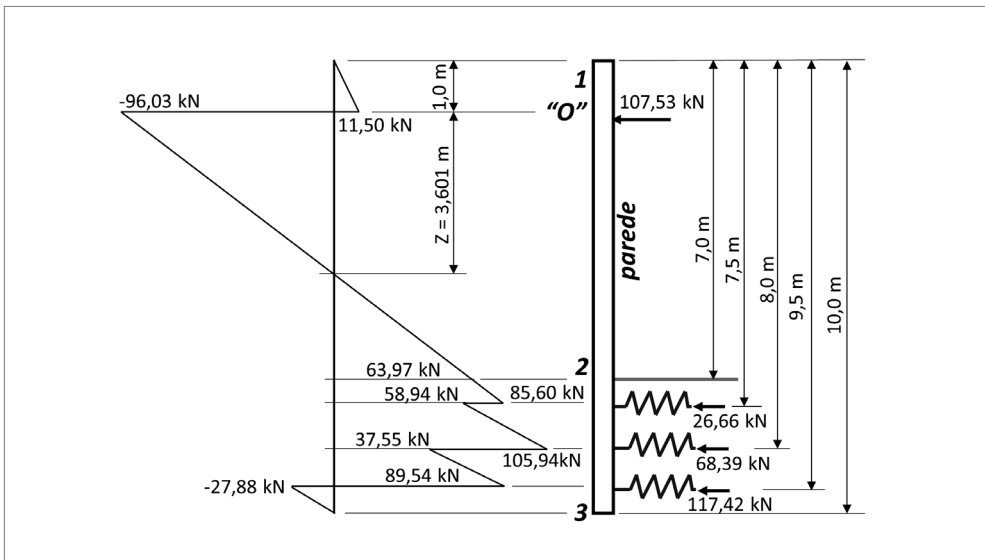
$$VA = 7,0 \cdot 7,5 + (50,0/10) \cdot 7,5 \cdot 7,5 / 2 - 107,53 - 26,66 = 58,94 \text{ kN}$$

$$VB = 7,0 \cdot 8,5 + (50,0/10) \cdot 8,5 \cdot 8,5 / 2 - 107,53 - 26,66 - 68,39 = 37,55 \text{ kN}$$

$$VC = 7,0 \cdot 9,5 + (50,0/10) \cdot 9,5 \cdot 9,5 / 2 - 107,53 - 26,66 - 68,39 - 117,42 = -27,88 \text{ kN}$$

kN

$$V3 = 7,0 \cdot 10,0 + (50,0/10) \cdot 10,0 \cdot 10,0 / 2 - 107,53 - 26,66 - 68,39 - 117,42 = 0,0$$



Momento máximo

$$x \rightarrow (V = 0,0) = 3,601 \text{ m}$$

$$M_{max} = - 7,0 \cdot 4,601 - 50,0/10 \cdot 4,601 \cdot 4,601 \cdot 4,601 / 6 + 107,53 \cdot 3,601 = 273,84 \text{ kNm}$$

### 6.3.2 Método dos elementos finitos aplicados a modelos com coeficientes de mola

Para análise de estacas carregadas lateralmente pelo MEF, é usual a utilização de sistemas formados por barras e nós, como mostra a Figura 6.11, com o solo representado por vínculos elásticos (molas), segundo a hipótese de Winkler, como desenvolvido em maiores detalhes, neste Capítulo. Ao se simular o comportamento do solo mediante a interação solo-estrutura, em modelos unidimensionais, aplicando-se o MEF, os recursos podem ser mais restritos em comparação aos modelos planos, no tocante à abrangência necessária que se deseja dar à resolução do problema. O comportamento dos vínculos elásticos (molas), conforme a curva tensão-deformação do solo pode ser pré-estabelecido na própria modelagem, por curvas p-y, de modo delimitar a variação das solicitações que levam à plasticidade do solo. Não havendo esse recurso, assume-se a proporcionalidade entre tensões e deformações no trecho elástico da curva, desativando-se os vínculos elásticos, ao se atingir a plastificação, inserindo-se forças corretivas correspondendo aos valores das reações de plastificação, nos referidos nós. De forma mais complexa, ainda, quando atingida a plastificação em determinado vínculo, pode-se inserir uma força corretiva, correspondente ao valor da parcela da reação que ultrapassou o limite estabelecido, de sinal contrário, de modo a ajustar a reação obtida pelo processamento ao valor que corresponde à tensão de plastificação em cada mola, repetindo-se o processamento a cada etapa de ajuste.

As demais considerações relativas à aplicação do método são similares às apresentadas no Capítulo 6, seção 6.3.1 – Resolução analítica por coeficientes de mola –, ajustando-se ao próprio problema em análise.

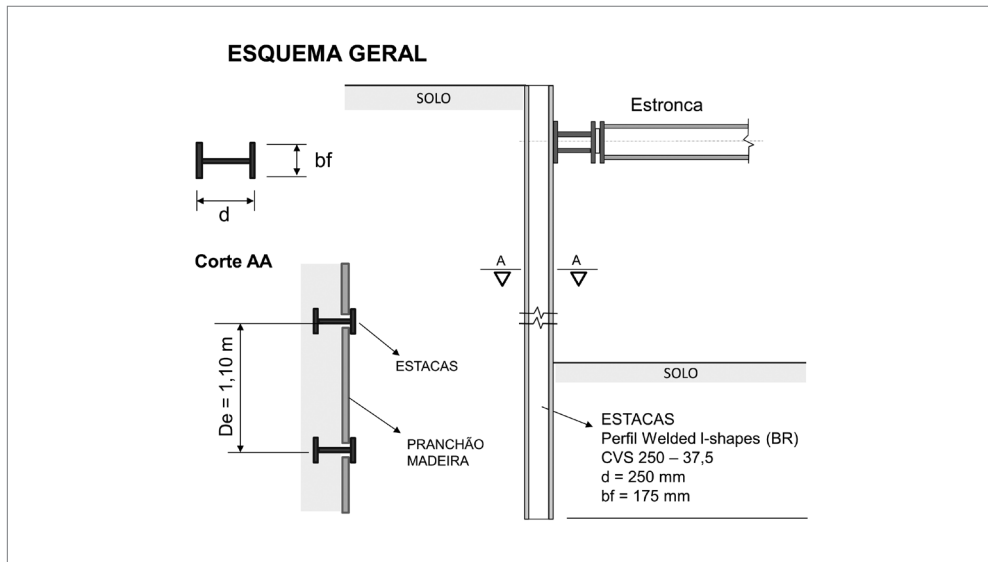
#### EXEMPLO 6.8

Contenção de escavação com estacas espaçadas

Verificar a estabilidade geotécnica de um escoramento para contenção da escavação de uma vala destinada à instalação de serviços públicos. A contenção consiste em uma pranchada formada por estacas metálicas espaçadas e entremeadas por pranchões de madeira. Ao nível superior, há um travamento efetuado por um estroncamento metálico, constituído por longarinas horizontais que dão suporte a estroncas espaçadas, travando as estacas. Verificar a estabilidade do

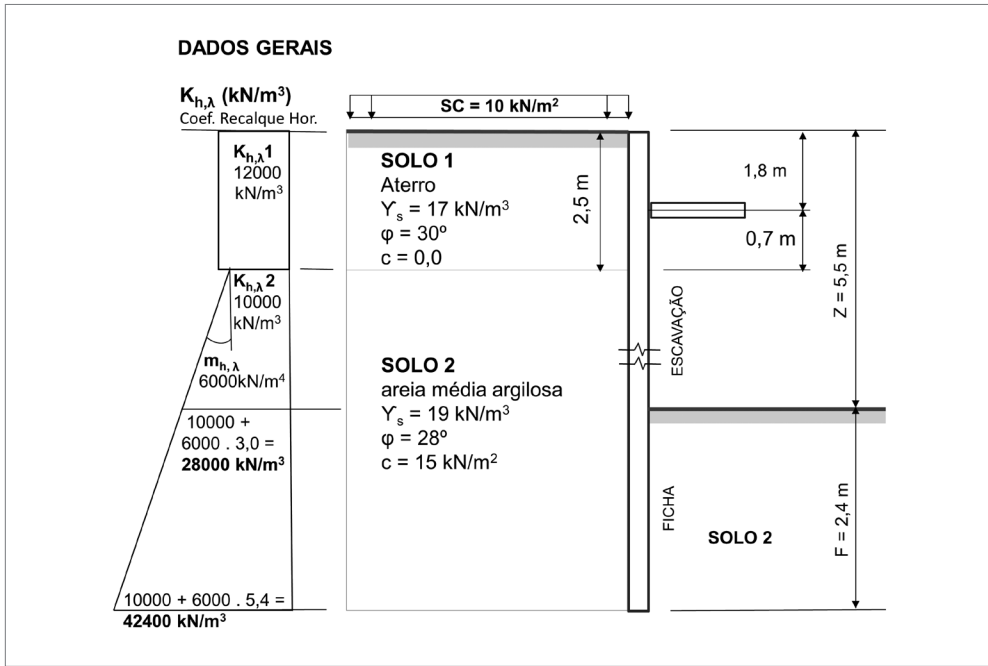
solo da ficha, a partir das tensões horizontais de compressão impostas pelas estacas e as máximas deformações e momentos fletores que ocorrem ao longo das estacas. Para resolução, será utilizado o MEF unidimensional, em um modelo de barras, nós e vínculos fixos e elásticos. Os vínculos a considerar são os travamentos oferecidos pelo escoramento e molas elásticas, segundo o modelo de Winkler.

### Detalhes construtivos

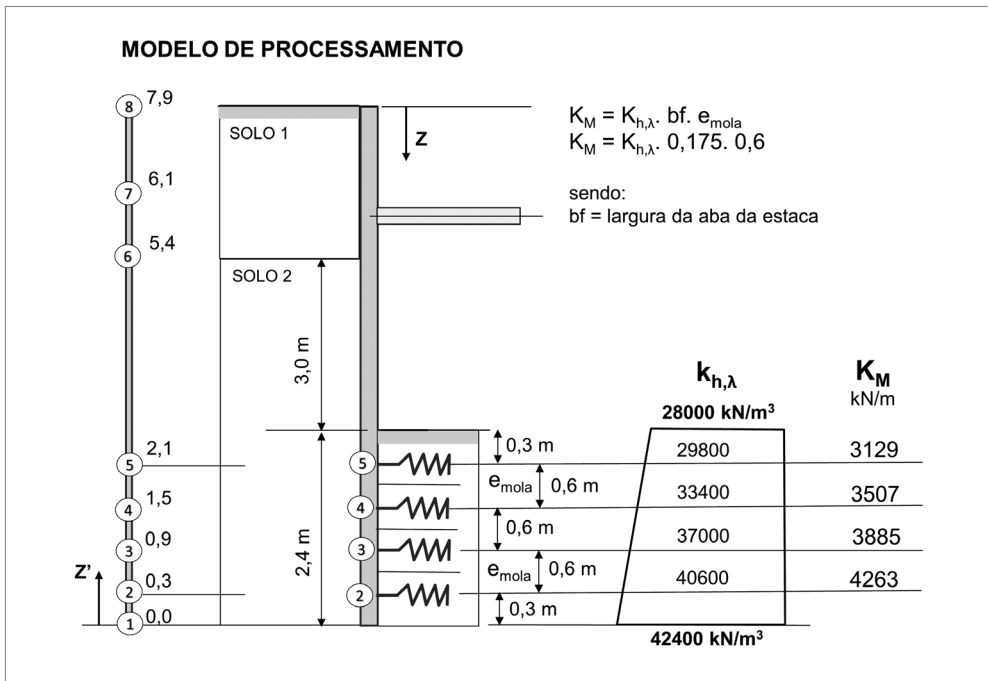


Para a análise, supor que todo o solo do terrapleno tenha sido desconfinado, prevalecendo, assim, a atuação dos empuxos ativos em toda a profundidade contida. Para avaliação dos limites de plastificação do solo da ficha, desconsiderar a atuação dos empuxos de repouso no equilíbrio da ficha, como estado inicial de tensões, tal qual indicado no Capítulo 3, item 3.3.3 – Empuxos passivos em estacas isoladas carregadas lateralmente –, tendo em conta a descontinuidade do escoramento. A análise da ruptura do solo da ficha será avaliada para cada elemento de mola elástica, efetuando-se a substituição das molas cujo limite elástico tenha sido ultrapassado, pela força limite correspondente à plastificação, determinada pelo estado limite passivo do solo, reprocessando-se, então, para essa nova condição.

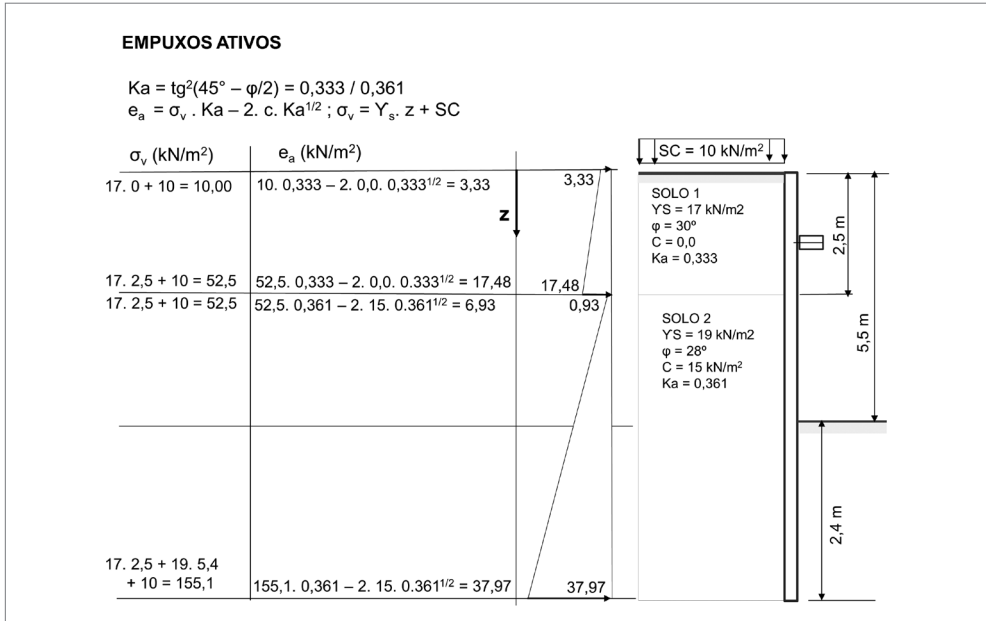
A estabilidade da ficha será verificada pelo fator de segurança  $FS = 1,5$ , na relação direta entre a resultante das reações limites, e a resultante das reações de compressão nos elementos de mola, obtidas pelo processamento.



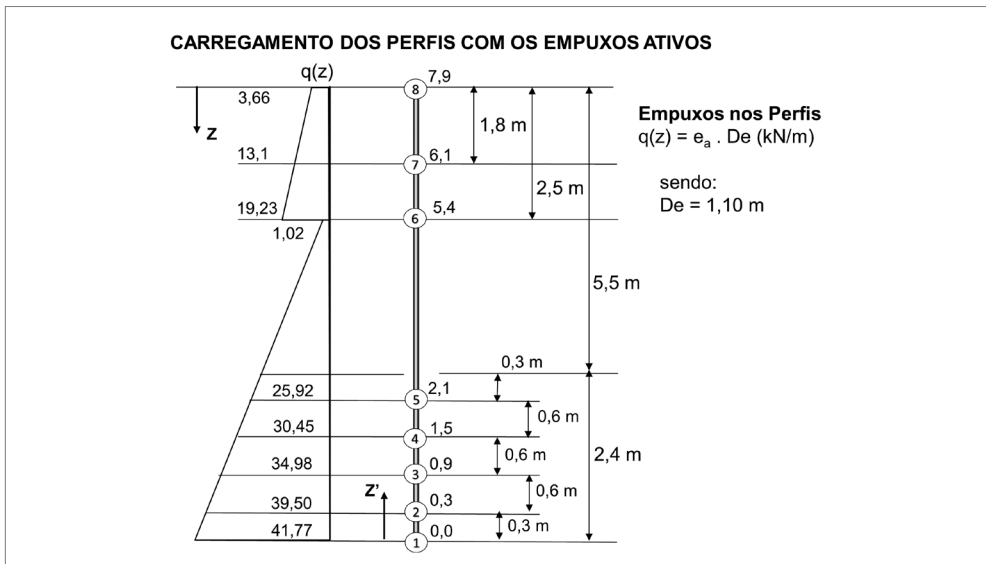
A rigidez das molas são determinadas como sendo diretamente proporcionais ao coeficiente de recalque horizontal  $k_{h,\lambda}$ , conforme a seguir:



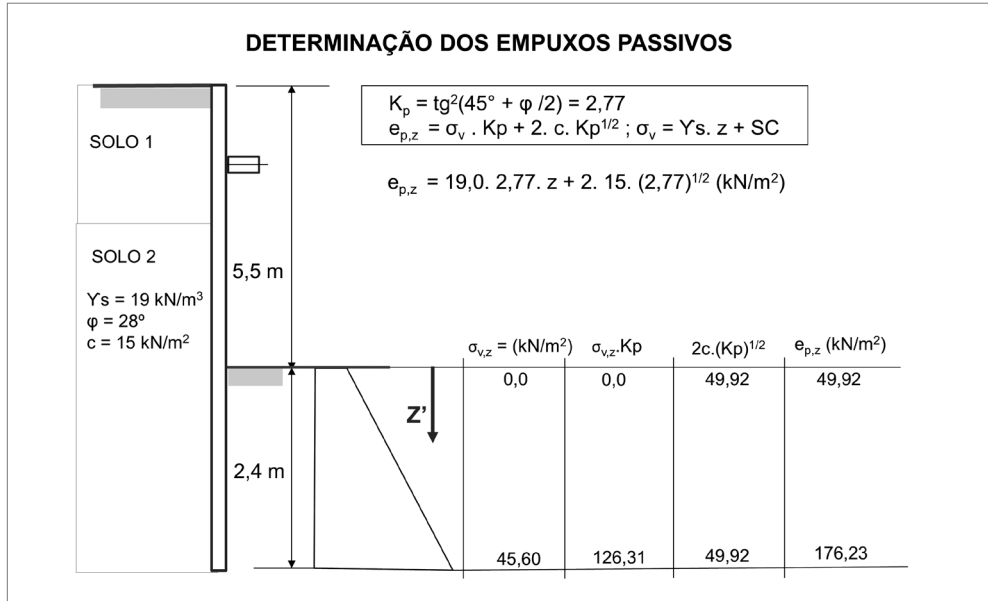
Os empuxos ativos que atuam no escoramento são aplicados em toda sua profundidade, desconsiderando eventuais trechos em que não tenha ocorrido o desconfinamento do solo do terrapleno, incidindo contra o paramento contínuo:



O modelo de processamento com os carregamentos dos empuxos ativos em cada barra estão indicados a seguir:



O limite de resistência do solo da ficha à compressão horizontal será considerado como sendo os empuxos passivos de Rankine. A pressão do empuxo é determinada, inicialmente, como atuando na projeção em área contra o paramento vertical, sendo então corrigida pela largura de propagação frontal às estacas.



Determinação da reação limite do solo contra as estacas

A reação limite do solo a considerar, trata-se do carregamento linear produzido pelas deformações horizontais limites, que resultam dos empuxos passivos. A componente linear das reações limites do solo contra as estacas, decorrentes das deformações da linha elástica, corresponde a duas grandezas multiplicativas, a primeira, uma variável, que é resultado da mobilização dos empuxos passivos do solo ao longo da profundidade da ficha. A segunda grandeza trata-se da largura de incidência na mobilização dos empuxos passivos, também variável.

Para considerar a largura de mobilização dos empuxos passivos, será utilizado o critério como apresentado em 3.3.3. A componente linear das reações limites do solo contra as estacas  $q_{p,z}$  será determinada segundo equação (3.3.3.3):

$$q_{p,z} = \left( \gamma_s \cdot K_p \cdot z + 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_p} \right) \cdot (b_0 + b') \text{ "kN / m"}$$

sendo:

$b_0$ : largura da aba da estaca;

$b' = 0,65 \cdot \operatorname{tg}\varphi' \cdot z$ : largura de espraiamento do empuxo passivo correspondente ao atrito interno do solo (3.3.3.2).

Cálculo das reações lineares limites do solo contra as estacas,  $q_{p,z}$

$$b' = 0,65 \cdot \operatorname{tg}28^\circ \cdot z = 0,346 \cdot z$$

$$q_{p,z} = \left(19,0 \cdot 2,77 \cdot z + 2 \cdot 15,0 \cdot \sqrt{2,773}\right) \cdot (0,175 + b')$$

$$q_{p,z} = (52,63 \cdot z + 49,92) \cdot (0,175 + b') \text{ kN / m}$$

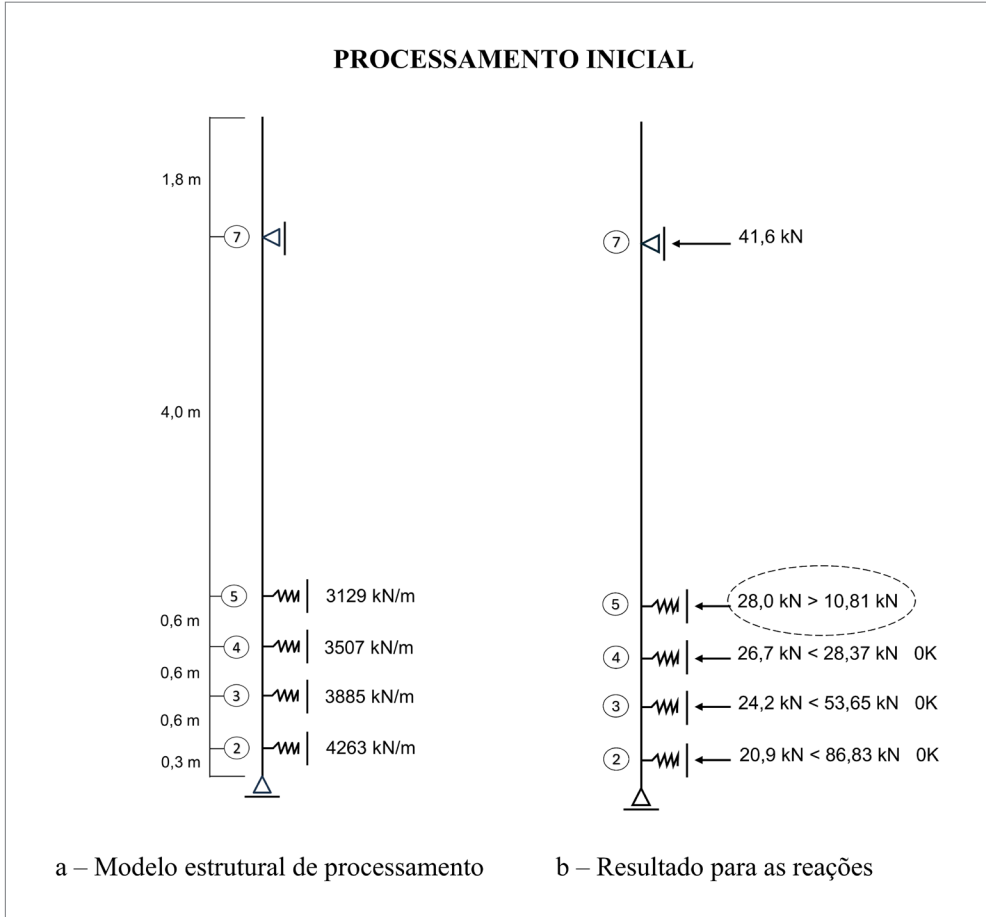
Reação limite das molas

$$R_{ult,mola} = e_{mola} \cdot q_{p,z} = 0,6 \cdot q_{p,z}$$

$\rightarrow Z$	$b = (0,175 + b')$ $(0,175 + 0,346 \cdot z)$	$q_{p,z}$ $(52,63 \cdot z + 49,92) \cdot b \text{ (kN / m)}$	$R_{ult,mola}$ $0,6 \cdot q_{p,z} \text{ (kN)}$
0,0	0,175	8,74	
0,3	0,279	18,02	10,81
0,9	0,486	47,28	28,37
1,5	0,694	89,43	53,65
2,1	0,902	144,72	86,83
2,4	1,01	177,99	

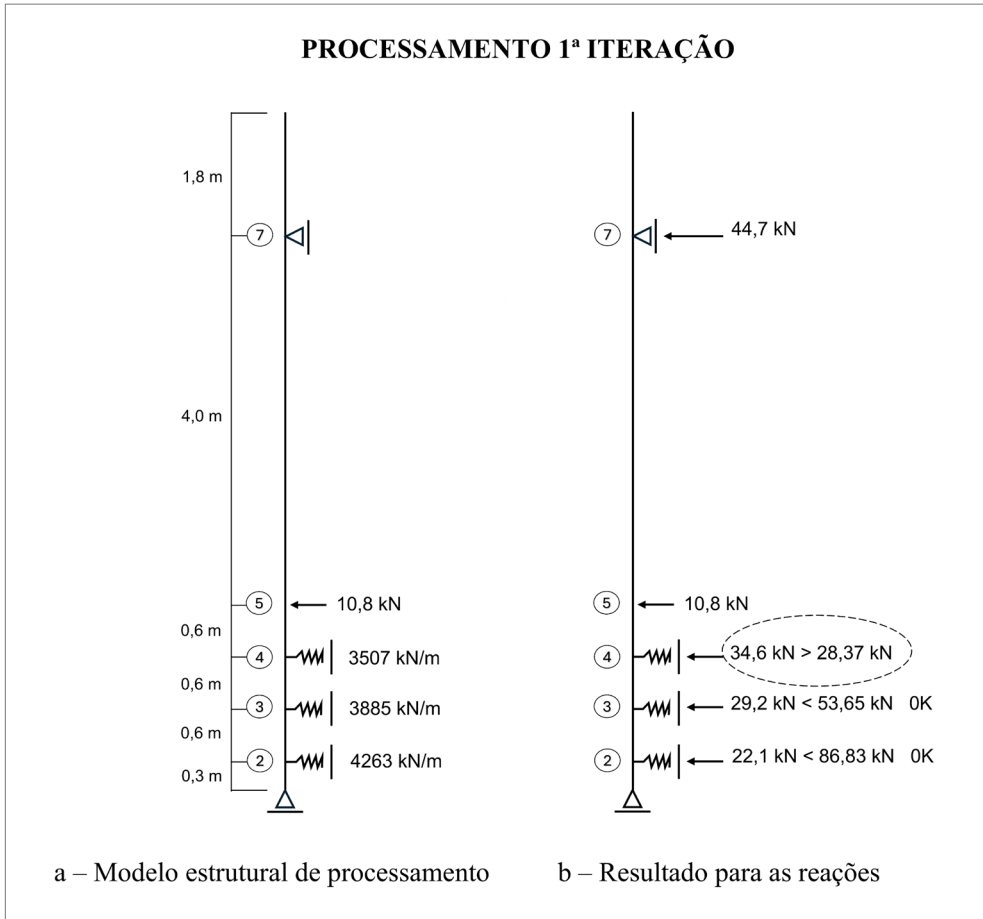
Com o modelo de processamento, a partir das barras entre os nós de 1 a 8, aplica-se a cada uma os carregamentos provenientes dos empuxos ativos, processando-se então, pelo MEF unidimensional, modelo linear elástico, cujos resultados estão apresentados, a seguir.

## Resultados do processamento



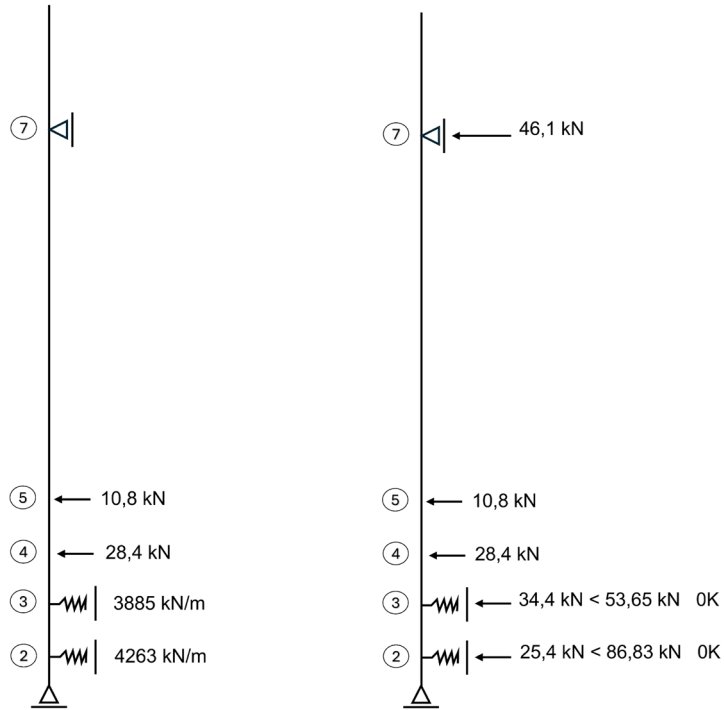
Verifica-se que, para a mola do nó 5, a reação ultrapassou o limite de resistência do solo. Como procedimento de correção, o modelo será adequado a essa situação, manualmente, atribuindo-se rigidez nula à mola correspondente e aplicando-se, no mesmo nó, uma força reativa que simule a reação última mantida na mola após a plastificação do solo. Efetua-se, então, um novo processamento, a partir dessa adaptação, correspondendo a uma primeira iteração.

## Resultados do processamento para a primeira iteração



A partir da nova configuração do modelo estrutural, para uma primeira iteração, não houve o equilíbrio dos esforços. Efetua-se, a seguir, uma segunda iteração, atribuindo-se rigidez nula à mola do nó 4 e aplicação, no mesmo nó, da força reativa correspondente.

## PROCESSAMENTO 2ª ITERAÇÃO



a – Modelo estrutural de processamento

b – Resultado para as reações

A partir da nova configuração do modelo estrutural, na segunda iteração, houve o equilíbrio dos esforços, assumindo-se as forças finais que atuam nos nós 2, 3, 4 e 5. Para a verificação da estabilidade da ficha, impõe-se um fator de segurança FS para a relação:  $\Sigma R_{ult,mola} / \Sigma R_i$  (resistência limite das molas) /  $\Sigma R_i$  (reações dos carregamentos) > 1,5.

$$\frac{\Sigma R_{ult,mola}}{\Sigma R_i} = \frac{10,8 + 28,4 + 53,65 + 86,83}{10,8 + 28,4 + 34,4 + 25,4} = 1,82$$

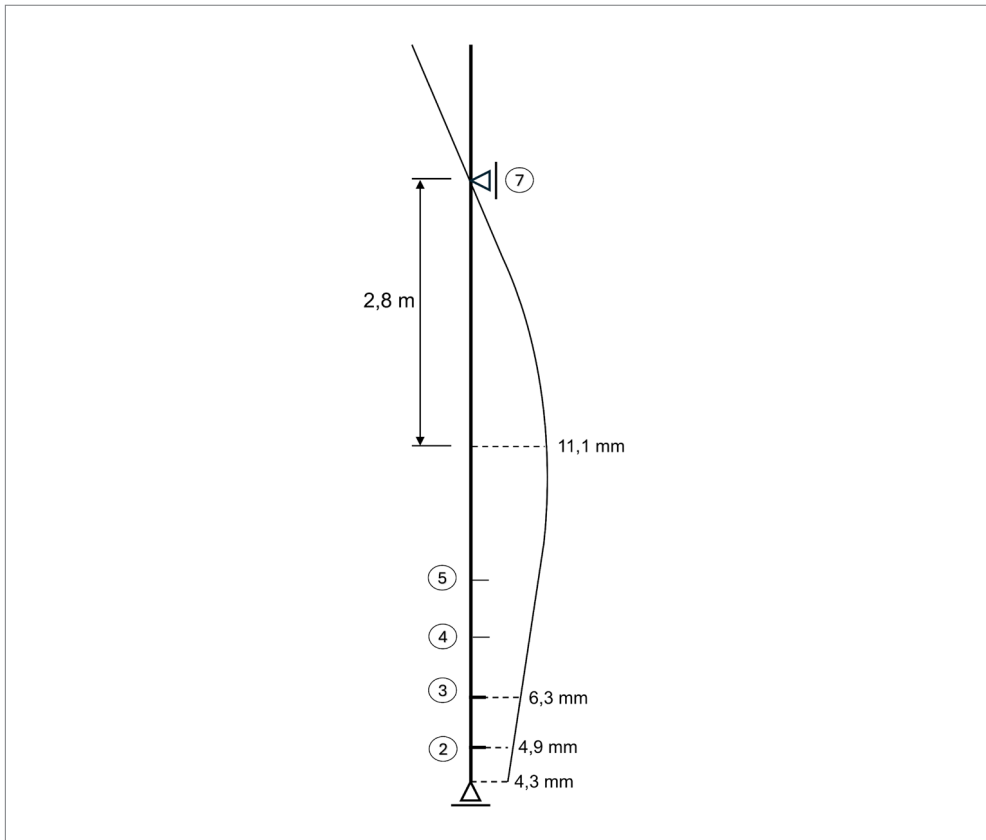
$$\frac{\Sigma R_{ult,mola}}{\Sigma R_i} = 1,82 > 1,5 \text{ OK}$$

O modelo estrutural satisfaz às condições de estabilidade do solo da ficha.

## Análise estrutural

Inicialmente, cabe avaliar a conformação da deformação da linha elástica com o modelo de processamento e verificar o limite da máxima deformação da estaca.

## Deformação da linha elástica



Será utilizada na verificação a relação:  $\ell$  (vão teórico) /  $m$  (proporção da deformação de 300).

$$\frac{\ell}{m} \geq f_{\max}; \frac{2 \cdot 2,8}{300} = 0,0187 > 0,0111 \text{ OK}$$

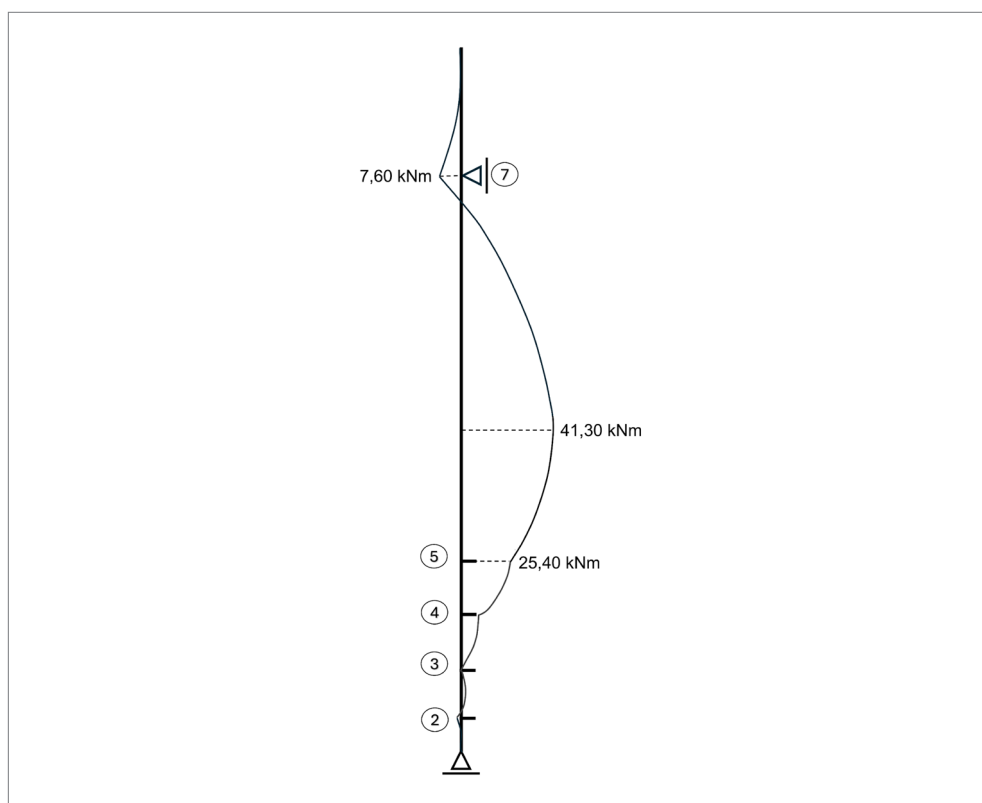
Verificação das *tensões normais* do perfil metálico que compõe a estaca.  
Será considerado o aço ASTM A-36,  $f_y = 250$  Mpa.

Tendo em conta tratar-se unicamente de uma verificação sucinta e direta, será considerada, como limite para a tensões, a relação:

$$\frac{M_k}{W_s} \leq \frac{f_y}{1,65}$$

sendo:  $W_s$  – momento resistente do perfil metálico

Diagrama de momentos fletores



$$\frac{M_k}{W_s} = \frac{41,3}{0,4366^{-3}} \leq \frac{250000}{1,65}; 94,59 \text{ Mpa} < 151,51 \text{ Mpa OK}$$

O perfil metálico: Welded I-shapes (BR) - CVS 250 – 37,5 satisfaz às necessidades estruturais.

**EXEMPLO 6.9**

Estacas engastadas em bloco rígido

Para o bloco rígido a seguir esquematizado, constituído por quatro estacas verticais igualmente espaçadas, submetido a esforços aplicados nas duas direções, determinar as máximas e mínimas reações verticais nas estacas e os momentos de engastamento delas no bloco. Adotar para a resolução o MEF unidimensional, segundo o modelo de Winkler.

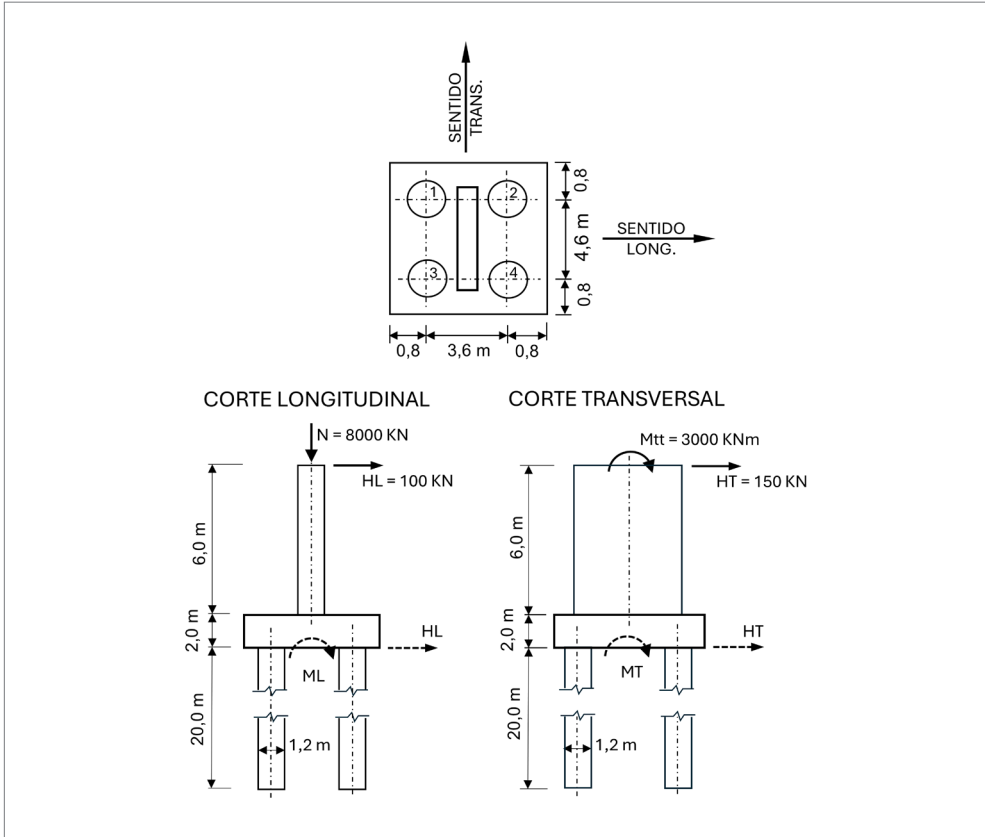
Dados

- Estacas de concreto
  - $E_c = 21.10^6 \text{ kN/m}^2$
  - diâmetro: 1,2 m
  - profundidade das estacas: 15,0 m
- Solo argiloso
  - $k_{h,\lambda} = 10000 \text{ kN/m}^3$

Cargas aplicadas

- Direção longitudinal
  - $L = 100,0 \text{ kN}$
  - $ML = 100,0 \cdot 8,0 \text{ m} = 800,0 \text{ kNm}$  (ver esquema a seguir)
- Direção transversal
  - $T = 150,0 \text{ kN}$
  - $Mt = 3000,0 \text{ kNm}$
  - $MT = 3000,0 + 150,0 \cdot 8,0 = 4200,0 \text{ kNm}$  (ver esquema a seguir)
- Normal
  - $N = 8000,0 \text{ kN}$

## Esquema geométrico e de carregamentos



As principais considerações sobre o funcionamento estrutural das estacas, são:

- As estacas estão engastadas no bloco.
- As forças horizontais aplicadas ao bloco são resistidas pela capacidade de flexão das estacas, gerando momentos de engaste no bloco.
- Os momentos de engastamento das estacas no bloco devem ser somados aos momentos solicitantes atuantes, participando na decomposição dos momentos para a composição das cargas axiais das estacas.
- As estacas devem ser dimensionadas às solicitações de flexo-compressão, para as máximas e mínimas reações, prevalecendo o caso mais desfavorável.

## Resolução

- Determinação dos momentos de engaste das estacas nos blocos

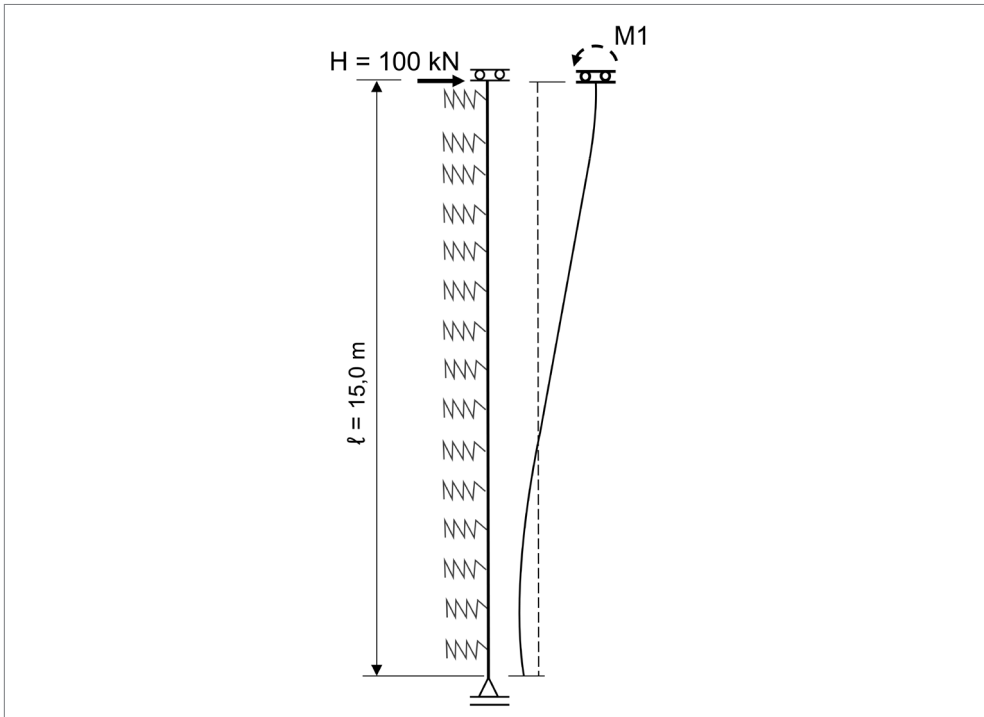
Para verificação do comportamento estrutural das estacas e determinação dos momentos de engaste em cada direção, adota-se como critérios:

Efetuar um modelo para processamento por elementos finitos unidimensionais, constituído por barras e nós, para uma estaca paramétrica, aplicando-se uma força horizontal de 100 kN no topo, obtendo-se os momentos paramétricos M1, como incógnita hiperestática, a partir dos quais se determinarão os momentos decorrentes das forças horizontais aplicadas em cada direção.

A estaca é subdividida em 16 barras, com comprimentos de 0,5 m, para as extremas e 1,0 m, para as intermediárias, gerando 17 nós. Desses, 15 corresponderão a vínculos elásticos, cujo coeficiente de rigidez, será:

$$K_{mola} = 10000 \cdot B \cdot l,0 = 10000 \cdot 1,2 \cdot 1,0 = 12000 \text{ kN/m.}$$

- Modelo de processamento



A partir do processamento, tem-se:

$$M1 = - 373,3 \text{ kNm.}$$

- Momentos no topo das estacas

- Direção longitudinal

$$M_{\text{eng,L}} = \frac{M1}{100} \cdot \frac{HL}{4}$$

$$M_{\text{eng,L}} = \frac{-373,3}{100,0} \cdot \frac{100,0}{4} = -93,32 \text{ kNm}$$

- Direção transversal

$$M_{\text{eng,T}} = \frac{M1}{100} \cdot \frac{HT}{4}$$

$$M_{\text{eng,T}} = \frac{-373,3}{100,0} \cdot \frac{150,0}{4} = -139,95 \text{ kNm}$$

- Determinação dos momentos totais nos blocos

- Direção longitudinal

$$ML = 100,0 \cdot 8,0 - 4 \cdot 93,32 = 426,72 \text{ kNm}$$

- Direção transversal

$$MT = 3000 + 150,0 \cdot 8,0 - 4 \cdot 139,95 = 3640,20 \text{ kNm}$$

- Cálculo das reações nas estacas

$$R_{\text{est,i}} = \frac{N}{4} \pm \frac{ML}{2 \cdot 3,6} \pm \frac{MT}{2 \cdot 4,6}$$

$$R_{\text{est,i}} = \frac{8000,0}{4} \pm \frac{426,72}{2 \cdot 3,6} \pm \frac{3640,20}{2 \cdot 4,6}$$

$$R_{\text{est } 1} = 2336,40(+ - +)$$

$$R_{\text{est } 2} = 2454,94(+ + +)$$

$$R_{\text{est } 1} = 1545,06(+ - -)$$

$$R_{\text{est } 4} = 1663,60(+ + -)$$

- Momento máximo nas estacas

$$M_{\text{eng,max}} = \sqrt{M_{\text{eng,L}}^2 + M_{\text{eng,T}}^2} = 168,21 \text{ kNm}$$

As estacas devem ser dimensionadas para flexo-compressão, para os casos de combinações de reação máxima ou mínima, considerando-se o caso mais desfavorável.

- Caso 1:  $R = 2454,94 \text{ kN}$  e  $M = 168,21 \text{ kN.m}$ ;
- Caso 2:  $R = 1545,60 \text{ kN}$  e  $M = 168,21 \text{ kN.m}$ .

