Capítulo 3

Balística experimental

A balística experimental estuda os métodos de mensuração das quantidades e das constantes numéricas que entram nos cálculos balísticos teóricos e, ainda, se ocupa da avaliação dos erros que se comete nas experiências.

Os dados obtidos experimentalmente não podem ser aplicados imediatamente, sem a cautela necessária para eliminar incertezas e erros não previsíveis. Entre um disparo e outro de uma série de tiros, executados nas mesmas condições, existem diferenças devidas a variações mínimas de massa e composição química das cargas de lançamento, dimensões do estojo e do projétil, temperatura, umidade do ar e vibrações da arma; essas diferenças acontecem de modo indeterminado, por isso as experiências devem ser repetidas inúmeras vezes, registrando-se os dados obtidos e aplicando à série de tiros os critérios de cálculo probabilístico, permitindo, assim, deduzir resultados confiáveis.

Neste capítulo nos ocuparemos da determinação das velocidades iniciais e dos alcances dos projéteis balísticos lançados na atmosfera. Antes, porém, vamos verificar o que acontece no interior do cano da arma.

3.1 O movimento do projétil no interior do cano da arma

Vamos considerar a deflagração da carga de lançamento contida em um cartucho inserido na câmara de combustão de uma pistola calibre .45; durante um breve instante, a pressão dos gases atinge seu valor máximo,[1] na ordem de 1200 kgf/cm^2. Essa pressão se exerce simultaneamente em todas as direções,

1 Rabelo, 1995. *Opus cit.*

sobre a base do projétil e sobre o fundo do estojo do cartucho, que se acha apoiado na culatra.[2] O projétil reage à força aplicada, no sentido da culatra, e esta também reage em relação ao projétil; vencida a inércia, o projétil se desloca no sentido da boca do cano da arma, acelerando-se esse deslocamento enquanto a pressão dos gases se exercer.

Dados disponíveis:

- Massa do projétil: $m = 0{,}0149\ kg$
- Aceleração da gravidade: $g = 9{,}81\ m/seg^2$
- Velocidade inicial do projétil: $v_0 = 253\ m/seg$
- Espaço percorrido pelo projétil no interior do cano da arma: $s = 0{,}127\ m$

O projétil, partindo da posição de repouso, teria percorrido $0{,}127\ m$, atingindo, ao final do percurso, a velocidade de $253\ m/seg$. Tendo em vista que não dispomos da equação diferencial que nos dá a velocidade instantânea, vamos adotar, para efeito de cálculo, a velocidade média, perfeitamente aceitável, uma vez que o pequeno deslocamento $(0{,}127\ m)$ se dá em um brevíssimo intervalo de tempo:

$$v_m = \frac{253}{2} = 126{,}5\ m/seg$$

O tempo é obtido pela equação:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_m} = \frac{0{,}127}{126{,}5} \approx 0{,}001\ seg$$

A aceleração corresponde ao quociente da variação da velocidade em relação ao tempo, expressa pela equação:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{253}{0{,}001} = 253000\ m/seg^2$$

A força exercida corresponde ao produto da aceleração pela massa do projétil:

$$F = ma = (0{,}0149)(253000) = 3769{,}7\ N = \frac{3769{,}7}{9{,}81}\ kgf \approx 384{,}271\ kgf$$

O impulso[3] é igual à força multiplicada pelo tempo de aplicação:

$$I = Ft = (384{,}271)(0{,}001\ ) \approx 0{,}384271\ kgf.seg$$

2 Bloco de aço destinado a vedar a abertura posterior do cano das armas de fogo. Larousse escolar da Língua Portuguesa. São Paulo: Larousse, 2004.

3 Como $I = (Ft) = m(at) = mv$, então, o impulso é igual à quantidade de movimento.

E a quantidade de movimento é igual a massa multiplicada pela velocidade:

$$mv = (0{,}0149)253 = 3{,}7697\ kg(m/seg)$$

O cálculo da energia cinética (E_c) é obtido pela integral da quantidade de movimento (mv):

$$E_c = \int_0^v (mv)dv = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0{,}0149)253^2 \approx 477\ J = \frac{477}{9{,}81}kgm \approx 49\ kgm$$

3.2 Determinação da velocidade inicial

Quando sai da boca do cano da arma o projétil é animado de certa velocidade inicial, que por simplificação corresponde à origem, se bem que isso não seja exato por causa do impulso dos gases que ainda agem nos primeiros instantes da trajetória. (Florentiis, 1987).

A mensuração da velocidade inicial[4] do projétil é feita por aparelhos chamados cronógrafos; esses aparelhos são concebidos para atuar com precisão na determinação das velocidades em intervalos pequeníssimos de tempo, na ordem de grandeza de milésimos de segundo.

Para fins didáticos e compreensão do fenômeno físico envolvido, vamos utilizar, como exemplo, o pêndulo balístico, uma solução prática ao tempo em que os cronômetros ainda ofereciam dificuldades técnicas.

O pêndulo balístico é um aparelho mecânico de construção robusta; compreende um bloco como alvo que, ao ser atingido pelo projétil, desliza sobre um limbo em forma de arco de círculo e graduado em unidades de quilogrâmetro[5] (kgm). Sua aplicação na medição indireta da velocidade do projétil se baseia na fórmula da energia cinética, cujo resultado é expresso em quilogrâmetros:

$$E_c = \frac{1}{2g}mv_i^2$$

Seja por exemplo, uma pistola Colt .45, apontada contra o alvo do pêndulo balístico com ângulo de projeção de pequena amplitude em relação ao plano horizontal

4 A CBC afere a velocidade inicial a 4,6 metros da boca do cano da arma. *Opus cit*.

5 O quilogrâmetro (*kgm*) é uma unidade de medida de energia cinética (E_c), equivalente ao trabalho (W) efetuado por um quilograma-força (*kgf*) quando desloca seu ponto de aplicação na sua própria direção de 1 metro; o quilogrâmetro é igual a 9,81 joules ($1kgm = 9{,}81J$).

(trajetória tensa).[6] O pêndulo é colocado à distância de 4,6 metros da boca do cano da arma e efetuamos vários disparos, registrando-se as amplitudes dos deslocamentos angulares respectivos. Após a conclusão do teste experimental em um *stand* de prova de tiro, chegou-se ao valor de $48{,}6103\ kgm$, que é a média dos deslocamentos angulares dos disparos efetuados. Substituindo os dados disponíveis na fórmula abaixo, chegamos ao valor de $253 m/seg$, que é a velocidade inicial v_0, ou seja:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gE_c}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(9{,}81)(48{,}6103)}{0{,}0149}} = 253\ m/seg$$

Onde: $g = 9{,}81\ m/seg^2$; $E_c = 48{,}6103\ kgm$; $m = 14{,}9gr = 0{,}0149kg$

3.3 Obtenção experimental do alcance máximo do projétil .45ACP

O alcance máximo dos projéteis é obtido em testes de tiro em campos de prova e registrado em tabelas; o alcance máximo depende da arma,[7] munição utilizada (identificada por calibre, massa, coeficiente balístico e velocidade inicial) e ângulo de tiro.

Experimentalmente se observa que, mesmo disparando uma série de tiros com a mesma arma, os projéteis descrevem trajetórias diversas, atingindo o alvo com impactos distribuídos sobre uma determinada área; tal fenômeno é dito dispersão do tiro e é determinado por vários fatores, entre os quais: estado de conservação da arma; munição (diferença de massa, densidade e estado de conservação das cargas de lançamento); e ambiente (variações de temperatura, umidade, vento e chuva). O conjunto das trajetórias de uma série de tiros, disparados com a mesma arma sobre o mesmo alvo, constitui um facho de trajetórias chamado "cone de dispersão". Se esse cone impacta sobre um plano (alvo), o conjunto dos pontos interceptados forma a "rosa de tiro".[8]

Vamos supor que coletamos aleatoriamente, como amostras, 7 cartuchos calibre .45ACP,[9] de lotes e fabricantes diversos e velocidades iniciais v_0 disponíveis nas fontes anotadas (tabela 3.1), com os quais efetuamos testes de tiro em campo de prova, com a mesma arma (Colt M1911) e ângulo de elevação $\alpha = 30°$, cujos respectivos alcances obtidos foram anotados na tabela 3.2:

6 Trajetória tensa é a dos projéteis que, em virtude de estarem animados de velocidades iniciais elevadas, podem ser lançados a considerável distância, com pequenos ângulos de elevação.

7 No caso em estudo, Pistola Colt M1911.

8 Puopolo, 1991.

9 *Automatic Colt Pistol.*

Tabela 3.1 Velocidades iniciais das amostras.

Dados disponíveis		
Cartucho .45ACP	Vo	Fontes:
Amostra	m/seg	
A	245	Notas de aula (1970)
B	249	Franco Atirador (2014)
C	249	Franco Atirador (2014)
D	253	CBC (2005)
E	255	Revista Magnum (1990)
F	259	Florentiis (1987)
G	262	Rabelo (1995)

Tabela 3.2 Alcances.

Teste de tiro	
Cartucho	Alcance
Amostra	metros
A	1450
B	1496
C	1501
D	1521
E	1534
F	1559
G	1577

Dividimos os alcances obtidos nos testes em cinco classes para ulteriores cálculos:

Tabela 3.3 Distribuição dos alcances dos tiros.

Classe	x_i^*	Frequência	Produto	Desvios	Fdp
metros	metros	f_i	$x_i^* f_i$	$d^2 = (x_i^* - \mu)^2$	$f(x)$
1450 - 1480	1465	1	1465	3136	0,4
1480 - 1510	1495	2	2990	676	0,8
1510 - 1540	1525	2	3050	16	1,0
1540 - 1570	1555	1	1555	1156	0,7
1570 - 1600	1585	1	1585	4096	0,3
		$\sum f_i = 7$	$\sum (x_i^* f_i) = 10645$	$\sum (x_i^* - \mu)^2 = 9080$	$\int_a^b f(x)\,dx \approx 89\%$

x_i^* é o valor central de cada classe de alcance dos tiros
f_i é a frequência de disparos em cada classe

3.3.1 Medidas de tendência central

As medidas de tendência central dão a ideia do centro em torno do qual os dados se distribuem.[10] A **média** é uma medida de tendência central que consiste na soma do produto dos alcances pela frequência, dividida pela soma dos disparos efetuados, cuja fórmula é a seguinte:

$$\mu = \frac{\sum\left(x_i^* f_i\right)}{\sum f_i} = \frac{10645}{7} \approx 1521m$$

3.3.2 Variância

A variância da amostra é a soma dos quadrados dos desvios do alcance de cada disparo em relação à média, dividida por $(n-1)$, sendo n o número de disparos:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i^* - \mu)^2}{n-1} = \frac{9080}{6} \approx 1513$$

3.3.3 Desvio padrão

O desvio padrão é igual à raiz quadrada da variância, com sinal positivo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i^* - \mu)^2}{n-1}} = \sqrt{1513} \approx 39$$

3.3.4 Função Densidade de Probabilidade

Os resultados aleatórios dos alcances obtidos em testes de tiro podem ser modelados por uma distribuição normal obtida pela Função Densidade de Probabilidade:

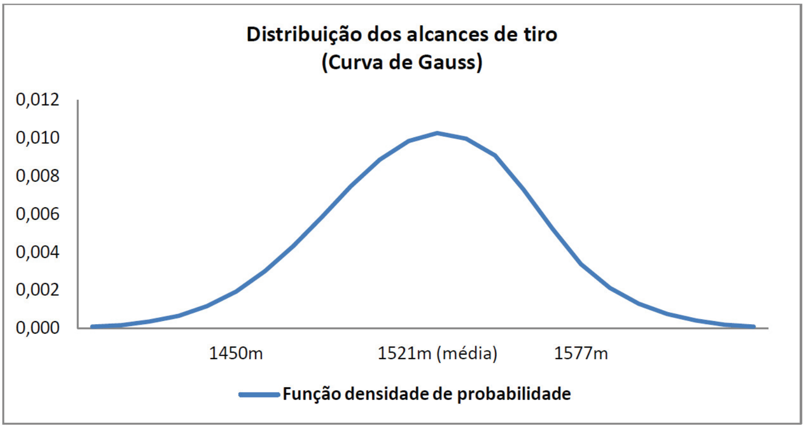
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

Sua aplicação em balística dá a probabilidade de ocorrência dos alcances máximos dos projéteis. A variável x pode assumir valores menores, iguais ou maiores que μ, dentro de certos limites de precisão da arma e munição utilizada.

10 Vieira, 2014.

A curva de Gauss (1777-1855) é um gráfico de distribuição normal gerado pela função densidade de probabilidade;[11] essa curva é definida por dois parâmetros, sua média e seu desvio-padrão; a média dá a localização do alcance máximo.

Gráfico 3.1 Função Densidade de Probabilidade: Curva de Gauss.



Fonte: este gráfico foi gerado a partir de dados numéricos obtidos através da planilha de cálculo 3.1, com base nos testes de alcances dos tiros explicitados na Tabela 3.2, cujas fontes das velocidades iniciais das amostras foram citadas na Tabela 3.1.

Por se tratar de distribuição contínua, a área entre a curva e o eixo das abscissas representa a probabilidade dos alcances de tiro e pode ser calculada pela integral definida da função no intervalo $[a, b]$:

$$P = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

No exemplo em estudo, $a = 1450m$ e $b = 1577m$. Se x representa o alcance de cada projétil da amostra, indicamos a probabilidade de o alcance estar nesse intervalo da seguinte maneira:

$$P(1450 \leq x \leq 1577)$$

De acordo com a interpretação da frequência de probabilidade, esse número P é a proporção de todos os cartuchos dos lotes considerados com alcances entre 1450 e 1577 metros, que representa uma proporção entre 0 e 1. Cada variável

11 A distribuição normal dos alcances dos tiros foi obtida a partir da planilha de cálculo 3.1, a partir da qual foi gerado o gráfico da Função Densidade de Probabilidade.

aleatória x tem uma função densidade de probabilidade f; isso significa que a probabilidade de x estar entre a e b é encontrada pela integração de f de a até b.

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Como os resultados dos testes dos alcances x têm distribuição normal, pergunta-se: qual a porcentagem dos cartuchos, cujos alcances dos projéteis estão entre 1450 e 1577 metros? Para calcular essa porcentagem, utilizamos a função densidade de probabilidade, com $\mu = 1521m$ e $\sigma = 39$, e integramos:

$$P(1450 \leq x \leq 1577) = \int_{1450}^{1577} \frac{1}{39\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1521)^2/2(39^2)} dx$$

Efetuamos o cálculo dessa probabilidade através de integração numérica,[12] utilizando a Regra do Ponto Médio, que basicamente é uma soma de Riemann (1826-1866), cuja fórmula é a seguinte:

$$P = \int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x = \Delta x[f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)] \approx 89\%$$

Sendo:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \; extremos \; dos \; subintervalos$$

$$x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = ponto \; médio \; de \; cada \; subintervalo$$

$$b - a = intervalo \; de \; integração$$

$$n = número \; de \; subintervalos$$

No exemplo, optamos por $n = 1577 - 1450 = 127$; assim:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{127}{127} = 1m$$

12 A integração numérica da Função Densidade de Probabilidade foi obtida a partir da planilha de cálculo 3.1.