Capítulo 2

Análise do movimento dos projéteis no vácuo

2.1 Movimento unidimensional

O estudo do movimento dos projéteis envolve seu deslocamento no espaço e a velocidade com que se deslocam em um intervalo de tempo.[1]

2.1.1 O deslocamento no espaço

A uma mudança de posição do projétil em sua trajetória, de s_{i-1} para s_i, é associado um deslocamento no espaço $\Delta s = s_i - s_{i-1}$.

O deslocamento no espaço unidimensional é dado pela equação

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

As constantes s_0, v_0 e a_0, respectivamente espaço, velocidade e aceleração iniciais, são aferidas no instante de tempo $t_0 = 0$.

2.1.2 Velocidade média e velocidade instantânea

A velocidade média (v_m) é a razão entre o deslocamento Δs e o intervalo de tempo Δt durante o qual esse deslocamento ocorre:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_i - s_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

1 O deslocamento e a velocidade são grandezas vetoriais e, portanto, possuem módulo, direção e sentido.

A velocidade instantânea $v_i = v(t)$ é definida como o limite da velocidade média, reduzindo o intervalo de tempo Δt até torná-lo próximo à zero:

$$v(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Derivando a equação do deslocamento no espaço $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$ obtemos a velocidade instantânea pela equação diferencial:

$$v(t) = \frac{d}{dt}\left[s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2\right] = v_0 + a_0 t$$

A velocidade instantânea v_i é a taxa com a qual a posição s_i está variando com o tempo em um dado instante, ou seja, a velocidade instantânea é a derivada do espaço s em relação ao tempo t.

2.2 Movimento em duas dimensões

Durante seu deslocamento livre no vácuo, o projétil fica animado por dois movimentos: um retilíneo e uniforme, ao longo da linha de projeção, com velocidade constante, igual à velocidade inicial (v_0); e outro, uniformemente acelerado, ao longo da vertical.

Vamos considerar uma arma cujo prolongamento do eixo do cano forma com o plano horizontal um ângulo α, da qual é disparado um projétil com uma velocidade inicial v_0. Referindo essa velocidade a um sistema de eixos coordenados $0X$ e $0Y$, analisaremos o movimento do projétil no vácuo; para tanto, vamos decompor o movimento do lançamento inclinado em suas componentes horizontal e vertical e tratar cada uma delas como movimento linear unidimensional.

2.2.1 Componente horizontal e componente vertical

O deslocamento no eixo horizontal fica associado à mudança de posição do projétil em sua trajetória; isto é, quando a posição do projétil muda de s_{i-1} para s_i, ocorre um deslocamento $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, no eixo X.

Na componente horizontal, o movimento é retilíneo uniforme (MRU), onde a posição inicial é igual à zero ($x_0 = 0$), a velocidade é constante ($v_x = v_0 cos\alpha$) e a aceleração é igual à zero $\left(a = \frac{dv_x}{dt} = 0\right)$; então, o alcance do projétil fica reduzido à equação paramétrica:

$$x = x(t) = (v_0 cos\alpha)t$$

E a velocidade horizontal fica expressa pela equação diferencial:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[v_{0x}t] = v_{0x}$$

Na componente vertical, o movimento é retilíneo uniformemente variado (MRUV), onde a posição inicial é igual à zero ($y_0 = 0$); a velocidade é uniformemente variada ($v_y(t) = v_0 sen\alpha - gt$) devido ao projétil estar sujeito à aceleração constante da gravidade ($a = -g$); então a altura atingida pelo projétil fica reduzida à equação paramétrica:

$$y = y(t) = (v_0 sen\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

E a velocidade vertical é obtida pela equação diferencial:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right] = v_{0y} - gt$$

2.2.2 Dedução da equação da trajetória do projétil no vácuo

A aceleração da gravidade ($a = -g$) não afeta a componente horizontal da velocidade, mas tão somente a componente vertical; portanto, a gravidade não muda a relação trigonométrica entre a velocidade v_0 do projétil e sua projeção v_x no eixo horizontal, isto é ($v_x = v_0 cos\alpha$); então, tudo se passa como se o projétil seguisse seu movimento inclinado (o que na verdade ocorre). Isso decorrente da Quarta Lei da Dinâmica: Independência das forças simultâneas que agem sobre o projétil. Já o espaço percorrido é função do tempo. É o tempo (parâmetro) que equaciona os movimentos horizontal e vertical.

Como $x = x(t) = (v_0 cos\alpha)t$, então o tempo é dado pela equação:

$$t = \frac{x}{v_0 cos\alpha}$$

Assim, substituindo t na equação $y = y(t) = (v_0 sen\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$, obtemos a altura atingida y em função da distância percorrida x:

$$y(x) = v_0 sen\alpha\left(\frac{x}{v_0 cos\alpha}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 cos\alpha}\right)^2$$

E simplificando, temos a equação da trajetória no vácuo:

$$y(x) = x tan\alpha - \frac{gx^2}{2(v_0 cos\alpha)^2}$$

O alcance máximo ocorre quando $y = (v_0 sen\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ e cujas raízes são: $t_0 = 0$ e $t_f = \frac{2v_0 sen\alpha}{g}$.

Substituindo t_f em $x = (v_0 cos\alpha)t$, temos:

$$x_{máx} = (v_0 cos\alpha)\left(\frac{2v_0 sen\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2(2cos\alpha . sen\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 sen2\alpha}{g}$$

Portanto, o alcance máximo se obtém quando $sen2\alpha = 1$, ou seja, quando $\alpha = \frac{\pi}{4} radianos$ = 45º.

A altura máxima ($y_{máx}$) se obtém com ângulo α = 90º. Como $sen90° = 1$, isso implica que $x = (v_0 cos90°)t = 0$; portanto, temos somente o movimento vertical, cuja equação reduzida exprime a altura máxima:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$$

A divisão por 2 é devida ao fato de que o projétil percorre duas vezes o mesmo espaço durante seu deslocamento no eixo Y, uma na subida outra na descida. E verificamos que a altura máxima é igual à metade do alcance máximo:

$$y_{máx} = \frac{x_{máx}}{2}$$

No tiro horizontal, α = 0, o que implica que $cos\alpha$ = 1; portanto, a altura que o projétil atinge é obtida pela equação reduzida:

$$y(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Como $y(x)<0$, o projétil estará abaixo do plano horizontal do qual foi lançado.

2.2.3 Comprimento da trajetória do projétil no vácuo

Um projétil que se move ao longo da trajetória com velocidade resultante[2] (v_R):

$$v_R = \sqrt{(v_x)^2 + \left(v_y\right)^2}$$

possui coordenadas x e y, que por sua vez são funções de uma terceira variável t (denominada parâmetro) pelas equações $x = x(t)$ e $y = y(t)$, chamadas equações

2 Teorema de Pitágoras (c. 570-490 a.C.).

paramétricas. Cada valor de t determina um ponto $P_i(x_i, y_i)$; quando t varia, o ponto $(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i))$ varia e traça a trajetória S.

Se dividirmos o parâmetro $t = [t_0, t_f]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual tamanho, então os pontos correspondentes $P_i(x_i, y_i)$ dividem a trajetória S em n segmentos de comprimentos $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots , \Delta s_n$.

O comprimento da trajetória S é obtido através da somatória dos n segmentos $\Delta s_i = (s_i - s_{i-1})$, quando Δs_i tende à zero, no intervalo de tempo $t = (t_f - t_0)$.

$$S(t) = lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{t_0}^{t_f} (s_i - s_{i-1})$$

Como a trajetória é definida em função de duas variáveis $S = s(x, y)$, calculamos $S(x, y)$ no ponto genérico $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$, multiplicamos pelo comprimento Δs_i do segmento e somamos:

$$\sum_{i=1}^{n} s(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

Em seguida tomamos o limite dessa soma, que é igual à integral de linha de $s(x, y)$ sobre a trajetória S:

$$S(x, y) = \int_0^x s(x, y)ds = lim_{\,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} s(x_i, y_i)\Delta s_i$$

Então verificamos que o comprimento da trajetória S pode ser obtido pela fórmula do cálculo da integral de linha:

$$S(t) = \int_{t_0}^{t_f} v_R\left(v_x(t), v_y(t)\right) dt = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Como a velocidade é a derivada do espaço percorrido, no tempo; então o espaço é a integral da velocidade. Assim, o comprimento da trajetória é igual à integral da velocidade resultante (v_R) e expresso pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$S(t) = \int_{t_0}^{t_f} v_R\left(v_x(t), v_y(t)\right) dt = S(t_f) - S(t_0)$$

Tabela 2.1 Dados numéricos da trajetória do projétil .45ACP, no vácuo[3], com ângulo de tiro $\alpha = 45^o$.

X	$Y(\alpha,x)$	Y(t)	Y(x)	Vx	Vy	$(Vx)^2$	$(Vy)^2$	$\sqrt{((Vx)^2+(Vy)^2)}$	$t=X/(Vo)\cos\alpha$	Y'	θ_i	θ_i	Adj	Op
m	m	m	m	m/s	m/s			m/s	seg	$\tan\theta_i$	radianos	graus	$\cos\theta_i$	$\text{sen}\theta_i$
0	0	0	0	179	179	32005	32005	253,0	0,0	1,00000	0,78540	45	0,70711	0,70711
100	100	98	98	179	173	32005	30073	249,2	0,6	0,96935	0,76984	44	0,71803	0,69602
200	200	194	194	179	168	32005	28201	245,4	1,1	0,93870	0,75379	43	0,72910	0,68441
300	300	286	286	179	162	32005	26389	241,6	1,7	0,90805	0,73724	42	0,74033	0,67225
400	400	375	375	179	157	32005	24638	238,0	2,2	0,87739	0,72018	41	0,75168	0,65952
500	500	462	462	179	151	32005	22947	234,4	2,8	0,84674	0,70260	40	0,76317	0,64620
600	600	545	545	179	146	32005	21315	230,9	3,4	0,81609	0,68448	39	0,77475	0,63227
700	700	625	625	179	141	32005	19744	227,5	3,9	0,78544	0,66580	38	0,78642	0,61769
800	800	702	702	179	135	32005	18233	224,1	4,5	0,75479	0,64656	37	0,79816	0,60244
900	900	776	776	179	130	32005	16782	220,9	5,0	0,72414	0,62674	36	0,80994	0,58651
1000	1000	847	847	179	124	32005	15392	217,7	5,6	0,69348	0,60634	35	0,82174	0,56986
1100	1100	915	915	179	119	32005	14061	214,6	6,1	0,66283	0,58534	34	0,83352	0,55249
1200	1200	979	979	179	113	32005	12791	211,6	6,7	0,63218	0,56375	32	0,84526	0,53436
1300	1300	1041	1041	179	108	32005	11580	208,8	7,3	0,60153	0,54154	31	0,85691	0,51546
1400	1400	1100	1100	179	102	32005	10430	206,0	7,8	0,57088	0,51873	30	0,86845	0,49578

(continua)

3 Os dados numéricos da trajetória do projétil no vácuo foram obtidos a partir da planilha de cálculo 2.1.

Tabela 2.1 Dados numéricos da trajetória do projétil .45ACP, no vácuo, com ângulo de tiro $\alpha = 45°$. *(continuação)*

X	Y(α,x)	Y(t)	Y(x)	Vx	Vy	(Vx)²	(Vy)²	√((Vx)²+(Vy)²)	t=X/(Vo)cosα	Y′	θi	θi	Adj	Op
1500	1500	1155	1155	179	97	32005	9340	203,3	8,4	0,54023	0,49531	28	0,87982	0,47530
1600	1600	1208	1208	179	91	32005	8311	200,8	8,9	0,50957	0,47128	27	0,89099	0,45402
1700	1700	1257	1257	179	86	32005	7341	198,4	9,5	0,47892	0,44664	26	0,90190	0,43194
1800	1800	1303	1303	179	80	32005	6431	196,1	10,1	0,44827	0,42141	24	0,91251	0,40905
1900	1900	1347	1347	179	75	32005	5582	193,9	10,6	0,41762	0,39560	23	0,92276	0,38536
2000	2000	1387	1387	179	69	32005	4793	191,8	11,2	0,38697	0,36922	21	0,93261	0,36089
2100	2100	1424	1424	179	64	32005	4063	189,9	11,7	0,35632	0,34229	20	0,94199	0,33564
2200	2200	1458	1458	179	58	32005	3394	188,1	12,3	0,32566	0,31483	18	0,95085	0,30966
2300	2300	1489	1489	179	53	32005	2785	186,5	12,9	0,29501	0,28687	16	0,95913	0,28296
2400	2400	1517	1517	179	47	32005	2237	185,0	13,4	0,26436	0,25845	15	0,96679	0,25558
2500	2500	1542	1542	179	42	32005	1748	183,7	14,0	0,23371	0,22959	13	0,97376	0,22758
2600	2600	1564	1564	179	36	32005	1320	182,5	14,5	0,20306	0,20033	11	0,98000	0,19900
2700	2700	1583	1583	179	31	32005	951	181,5	15,1	0,17241	0,17073	10	0,98546	0,16990
2800	2800	1598	1598	179	25	32005	643	180,7	15,7	0,14175	0,14082	8	0,99010	0,14035
2900	2900	1611	1611	179	20	32005	395	180,0	16,2	0,11110	0,11065	6	0,99388	0,11042
3000	3000	1621	1621	179	14	32005	207	179,5	16,8	0,08045	0,08028	5	0,99678	0,08019
3100	3100	1627	1627	179	9	32005	79	179,1	17,3	0,04980	0,04976	3	0,99876	0,04974

(continua)

Tabela 2.1 Dados numéricos da trajetória do projétil .45ACP, no vácuo, com ângulo de tiro $\alpha = 45°$. *(continuação)*

X	$Y(\alpha,x)$	Y(t)	Y(x)	Vx	Vy	$(Vx)^2$	$(Vy)^2$	$\sqrt{(Vx)^2+(Vy)^2}$	$t=X/(Vo)\cos\alpha$	Y'	θ_i	θ_i	Adj	Op
3200	3200	1631	1631	179	3	32005	12	178,9	17,9	0,01915	0,01914	1	0,99982	0,01914
3300	3300	1631	1631	179	-2	32005	4	178,9	18,4	-0,01150	-0,01150	-1	0,99993	-0,01150
3400	3400	1628	1628	179	-8	32005	57	179,1	19,0	-0,04216	-0,04213	-2	0,99911	-0,04212
3500	3500	1623	1623	179	-13	32005	170	179,4	19,6	-0,07281	-0,07268	-4	0,99736	-0,07262
3600	3600	1614	1614	179	-19	32005	343	179,9	20,1	-0,10346	-0,10309	-6	0,99469	-0,10291
3700	3700	1602	1602	179	-24	32005	576	180,5	20,7	-0,13411	-0,13332	-8	0,99113	-0,13292
3800	3800	1587	1587	179	-29	32005	869	181,3	21,2	-0,16476	-0,16330	-9	0,98670	-0,16257
3900	3900	1569	1569	179	-35	32005	1222	182,3	21,8	-0,19541	-0,19298	-11	0,98144	-0,19179
4000	4000	1548	1548	179	-40	32005	1636	183,4	22,4	-0,22607	-0,22233	-13	0,97539	-0,22050
4100	4100	1524	1524	179	-46	32005	2109	184,7	22,9	-0,25672	-0,25129	-14	0,96859	-0,24866
4200	4200	1497	1497	179	-51	32005	2643	186,1	23,5	-0,28737	-0,27983	-16	0,96110	-0,27619
4300	4300	1466	1466	179	-57	32005	3237	187,7	24,0	-0,31802	-0,30791	-18	0,95297	-0,30306
4400	4400	1433	1433	179	-62	32005	3891	189,5	24,6	-0,34867	-0,33549	-19	0,94425	-0,32923
4500	4500	1397	1397	179	-68	32005	4605	191,3	25,2	-0,37932	-0,36256	-21	0,93499	-0,35467
4600	4600	1357	1357	179	-73	32005	5379	193,3	25,7	-0,40998	-0,38908	-22	0,92526	-0,37933
4700	4700	1315	1315	179	-79	32005	6214	195,5	26,3	-0,44063	-0,41503	-24	0,91510	-0,40322
4800	4800	1269	1269	179	-84	32005	7108	197,8	26,8	-0,47128	-0,44041	-25	0,90458	-0,42631

(continua)

Tabela 2.1 Dados numéricos da trajetória do projétil .45ACP, no vácuo, com ângulo de tiro $\alpha = 45°$. *(continuação)*

X	Y(α,x)	Y(t)	Y(x)	Vx	Vy	(Vx)²	(Vy)²	√((Vx)²+(Vy)²)	t=X/(Vo)cosα	Y′	θ_i	θ_i	Adj	Op
4900	4900	1220	1220	179	-90	32005	8063	200,2	27,4	-0,50193	-0,46519	-27	0,89374	-0,44859
5000	5000	1169	1169	179	-95	32005	9078	202,7	27,9	-0,53258	-0,48937	-28	0,88263	-0,47007
5100	5100	1114	1114	179	-101	32005	10153	205,3	28,5	-0,56323	-0,51295	-29	0,87130	-0,49075
5200	5200	1056	1056	179	-106	32005	11288	208,1	29,1	-0,59389	-0,53591	-31	0,85980	-0,51063
5300	5300	995	995	179	-112	32005	12483	210,9	29,6	-0,62454	-0,55827	-32	0,84817	-0,52972
5400	5400	931	931	179	-117	32005	13739	213,9	30,2	-0,65519	-0,58001	-33	0,83645	-0,54804
5500	5500	864	864	179	-123	32005	15054	216,9	30,7	-0,68584	-0,60116	-34	0,82468	-0,56560
5600	5600	794	794	179	-128	32005	16430	220,1	31,3	-0,71649	-0,62171	-36	0,81288	-0,58243
5700	5700	721	721	179	-134	32005	17866	223,3	31,9	-0,74714	-0,64167	-37	0,80110	-0,59853
5800	5800	644	644	179	-139	32005	19362	226,6	32,4	-0,77780	-0,66105	-38	0,78935	-0,61395
5900	5900	565	565	179	-145	32005	20918	230,0	33,0	-0,80845	-0,67987	-39	0,77765	-0,62869
6000	6000	483	483	179	-150	32005	22534	233,5	33,5	-0,83910	-0,69813	-40	0,76604	-0,64279
6100	6100	397	397	179	-156	32005	24211	237,1	34,1	-0,86975	-0,71585	-41	0,75454	-0,65626
6200	6200	309	309	179	-161	32005	25947	240,7	34,7	-0,90040	-0,73304	-42	0,74315	-0,66913
6300	6300	217	217	179	-167	32005	27744	244,4	35,2	-0,93105	-0,74971	-43	0,73189	-0,68143
6400	6400	123	123	179	-172	32005	29601	248,2	35,8	-0,96171	-0,76588	-44	0,72077	-0,69317
6525	6525	0	0	179	-179	32005	32006	253,0	36,5	-1,00002	-0,78541	-45	0,70710	-0,70711