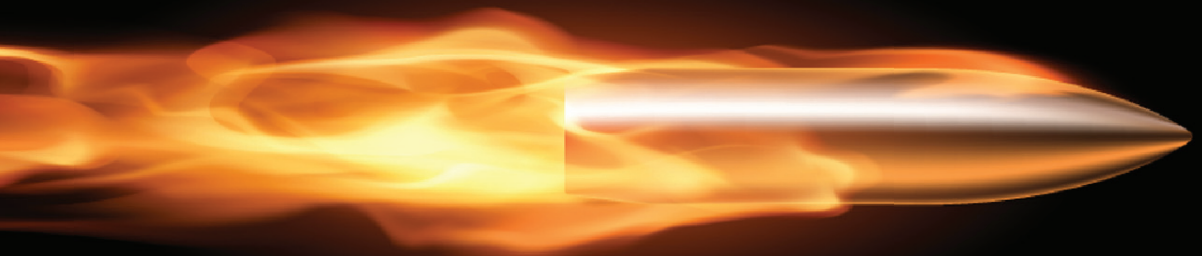


Otaviano de Almeida Júnior

**UM ESTUDO SOBRE O MOVIMENTO  
DOS PROJÉTEIS BALÍSTICOS  
E SUA TRAJETÓRIA**



Otaviano de Almeida Júnior

Especialista em Educação Matemática pela Universidade Nove de Julho

# Um estudo sobre o movimento dos projéteis balísticos e sua trajetória

(dissertação)

São Paulo  
2017

**Blucher**

*Um estudo sobre o movimento dos projéteis balísticos e sua trajetória*

© 2017 Otaviano de Almeida Júnior

Editora Edgard Blücher Ltda.

---

# Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

04531-934 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

**contato@blucher.com.br**

**www.blucher.com.br**

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed.  
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,  
Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer  
meios sem autorização escrita da editora.

---

Todos os direitos reservados pela Editora  
Edgard Blücher Ltda.

---

## FICHA CATALOGRÁFICA

---

Almeida Júnior, Otaviano de

Um estudo sobre o movimento dos projéteis  
balísticos e sua trajetória [livro eletrônico] / Otaviano  
de Almeida Júnior. – São Paulo : Blucher, 2017.  
70 p.; PDF; il. color

### Bibliografia

ISBN 978-85-8039-257-9 (e-book)

ISBN 978-85-8039-256-2 (impresso)

1. Balística 2. Balística externa 3. Física 4. Projéteis I.

Título

17-0798

CDD 623.5

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Balística

# Dedicatória

À memória dos grandes filósofos da Antiguidade: Pitágoras e Aristóteles.

À memória dos grandes matemáticos: Galileu, Descartes, Huygens, Newton, Gauss e Riemann.



# Agradecimentos

A Jonatas Eliakim, Bonie Santos e Marilia Koepl, da Editora Blucher, profissionais competentes, atenciosos e dedicados ao seu labor, os quais contribuíram de forma profícua para que se concretizasse a nossa pretensão de publicar esta dissertação, resultado de anos de estudo e pesquisa.



# Apresentação

Iniciamos o estudo sobre o movimento dos projéteis balísticos através de notas de aula do Curso de Matemática I, II e III da Faculdade de Administração da Universidade Cidade São Paulo (1988). Já naquela época pretendíamos equacionar os elementos que determinam a trajetória dos projéteis balísticos, por entender que o tema é importante, como bibliografia complementar, para estudantes universitários dos diversos cursos de Matemática, Física, Engenharia e outras ciências exatas afins, atiradores esportivos, peritos balísticos e pesquisadores que queiram se aprofundar no assunto.

O contexto está inserido na Matemática Aplicada e na Física, quer sob o ponto de vista da Mecânica Clássica (Leis do Movimento), quer no estudo da Balística Externa, ou mesmo nas aplicações práticas da Perícia Técnica.

No capítulo 1, apresentamos a fundamentação teórica do estudo da Balística Externa: conceituação; arma de fogo e sua munição; energia cinética; a evolução histórico-científica do cálculo da trajetória; a aceleração da gravidade e a atmosfera terrestre; Leis da Dinâmica; e os elementos da trajetória.

Trataremos separadamente a influência da resistência do ar no movimento do projétil na atmosfera e consideraremos, no capítulo 2, o movimento como se ocorresse no vácuo.

As fórmulas do movimento no vácuo não são aplicáveis ao movimento real na atmosfera, visto que a resistência do ar tem influência relevante; porém, podem dar aproximações para velocidades não muito grandes e ainda servem para determinar algumas características fundamentais da trajetória. Assim, o estudo do movimento teórico no vácuo é o ponto de partida para a determinação da trajetória dos projéteis na atmosfera.

No capítulo 3, tratamos da balística experimental que estuda os métodos de mensuração das quantidades e das constantes numéricas que entram nos cálculos



balísticos teóricos; e nos ocupamos da determinação experimental das velocidades iniciais e dos alcances dos projéteis balísticos lançados na atmosfera terrestre padrão.

No capítulo 4, apresentamos, através de uma modelagem matemática, uma fórmula geral que equaciona os principais elementos da trajetória dos projéteis balísticos, lançados nas imediações da superfície da Terra (atmosfera padrão), levando-se em consideração as forças que determinam o seu movimento; quais sejam: o impulso que imprime a velocidade inicial, a força da gravidade terrestre e a força da resistência do ar.

O traçado da trajetória na atmosfera se reveste de complexidade devido à influência de fatores relevantes a se considerar. Como nosso estudo é teórico, iniciamos a pesquisa reunindo conhecimentos consolidados ao longo da História e buscamos, através de simplificações, a construção de um modelo matemático, cuja resolução do problema envolve o processo de cálculo numérico computacional, o qual, contudo, nos conduzirá a resultados aproximativos decorrentes de sucessivas operações aritméticas elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) e ainda pelo fato de utilizarmos algoritmos também aproximados. Entretanto, no presente estudo, fazemos abordagens de tópicos não só de Aritmética, mas também de Álgebra, Trigonometria, Geometria Analítica, Funções Exponenciais e Logarítmicas, além de Cálculo Diferencial e Integral.

O objeto de demonstração de nosso estudo é o projétil ogival encamisado, calibre .45 ACP (11,43 milímetros de diâmetro e massa de 14,9 gramas), fabricado pela Companhia Brasileira de Cartuchos (Informativo Técnico CBC, 2005), coeficiente balístico  $BC = 0,138$  (Chuck Hawks, 2014) e disparado pela pistola Colt M1911, comprimento do cano 5” (Mathias, 1997), cujo alcance máximo é de 1521 metros (obtido numericamente), para uma velocidade inicial de  $253 \frac{m}{seg}$  e ângulo de lançamento de  $30^\circ$ .

São Paulo, 02 de junho de 2017.

O autor

# Conteúdo

Capítulo 1 – Fundamentação teórica .....	11
Capítulo 2 – Análise do movimento dos projéteis no vácuo.....	23
Capítulo 3 – Balística experimental .....	33
Capítulo 4 – Cálculo dos elementos da trajetória na atmosfera .....	41
Referências .....	65
Sobre o autor.....	67
Apêndice A: planilhas de cálculo do Microsoft Office Excel .....	69



## Fundamentação teórica

### 1.1 Balística

A Balística é a ciência que estuda o movimento dos projéteis e os fenômenos conexos. Essa ciência se divide em: a) Balística Interna que estuda os fenômenos físicos e químicos e os elementos que caracterizam o movimento do projétil desde a iniciação da carga de lançamento até a saída do cano da arma; b) Balística Externa que estuda a trajetória do projétil fora do cano da arma até o alvo; e c) Balística Terminal que estuda os efeitos sobre o projétil e sobre o alvo após o impacto.

Podemos ainda acrescentar que a Balística Externa é a parte da Mecânica que estuda o movimento dos projéteis que se deslocam livres no espaço em virtude de um impulso<sup>1</sup> inicial recebido.

Como corolário do conceito de Balística Externa, projéteis balísticos são corpos pesados<sup>2</sup> que se deslocam livres no espaço em virtude de um impulso inicial recebido. A diferença básica entre um projétil balístico e outro não balístico é que no projétil balístico a força de propulsão cessa assim que é lançado na atmosfera; ao passo que nos não balísticos a força de propulsão continua agindo através de foguetes instalados na cauda.

### 1.2 Arma de fogo e sua munição

Arma de fogo é aquele engenho mecânico que cumpre a função de lançar à distância com grande velocidade corpos pesados chamados projéteis, utilizando a energia explosiva da pólvora (carga de lançamento ou projeção).

---

1 O impulso é igual à força multiplicada pelo tempo de aplicação ( $I = Ft$ ).

2 Corpos que possuem massa e, portanto, sujeitos à ação da gravidade:  $P = mg$ .

Em uma definição mais precisa, *arma de fogo* é uma máquina termodinâmica apta a lançar à distância, com grande velocidade, corpos pesados, chamados projéteis, utilizando o impulso resultante da força expansiva dos gases gerados pela queima do propelente, com energia suficiente para provocar graves ferimentos a pessoas ou danos a material.

Cada arma possui suas qualidades balísticas, quais sejam: a) distância máxima que é capaz de lançar o projétil; b) força viva, representada pela energia restante que possui o projétil no momento do impacto com o alvo; c) precisão da arma de realizar pequenas rosas de tiro<sup>3</sup>; d) justeza pela qual um tiro é tanto justo quanto mais o centro da rosa de tiro se aproxima do ponto visado; e) penetração e potencial lesivo ou ofensivo.

O cartucho é o conjunto dos elementos que constituem a munição das armas de percussão e retrocarga e compreende: a) estojo de latão, que condiciona os demais elementos; b) projétil, totalmente de chumbo ou encamisado; c) espoleta, com mistura iniciadora; e d) pólvora, que é a carga de lançamento.

### 1.3 A energia cinética e a Termodinâmica

A Termodinâmica estuda os processos de transformação da energia calorífica em energia cinética. No caso das armas de fogo, a carga de lançamento é constituída de uma quantidade de explosivo sob a forma de pólvora contida no cartucho, que inflamada pela ação da mistura iniciadora queima rapidamente, emitindo gases que se expandem devido ao calor gerado; surge então uma elevada pressão; o trabalho mecânico produzido empurra o projétil em direção à boca do cano, o qual adquire rapidamente velocidade.

### 1.4 Evolução histórico-científica do cálculo da trajetória

Um projétil que sai do cano de uma arma com a velocidade inicial  $v_0$ , desacelera na subida por causa da gravidade e acelera enquanto cai, até atingir o solo; a velocidade final é menor do que a inicial por causa da perda de energia pela resistência do ar (durante a subida essa perda de energia diminui a altura final atingida pelo projétil). Há muitas perguntas que podemos fazer, por exemplo: Qual o alcance máximo do projétil? Qual sua velocidade? A que altura atinge? Por quanto tempo permanece no ar? Qual a forma geométrica de sua trajetória?

---

3 Rosa de tiro é o conjunto de pontos formados pela intercepção transversal de um fecho de trajetórias de uma série de tiros que impactam sobre o alvo.

A sua trajetória é determinada completamente por forças externas; uma vez conhecida a natureza dessas forças e o modo como influenciam o seu movimento, podemos calcular o seu percurso com uma dada velocidade inicial. A trajetória determinada contém então todas as informações que se possa querer sobre a altura atingida pelo projétil, distância máxima, a duração do voo e sua velocidade. (Kakalios, 2009).

Galileu (1564-1642) foi quem primeiro apresentou respostas a essas indagações, quando formulou a teoria do lançamento inclinado, segundo a qual a trajetória de um projétil, lançado nas imediações da superfície da Terra e através de um meio não resistente (vácuo), poderia ser definida como uma parábola,<sup>4</sup> simétrica em relação à sua ordenada máxima, e ser traçada com exatidão. Nesse caso, despreza-se a resistência do ar, de modo que o movimento se daria apenas sob o efeito do impulso inicial recebido e da força gravitacional (Rabello, 1995). O movimento no vácuo ocorreria como se não existisse a atmosfera, cuja equação é obtida facilmente:<sup>5</sup>

$$y = \tan \alpha x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{(v_0 \cos \alpha)^2}$$

No entanto, a atmosfera influencia consideravelmente o movimento do projétil, de modo que a parábola teoricamente formulada é modificada em razão de a resistência do ar agir, retardando-o desde o instante inicial de lançamento, e em consequência a velocidade restante vai diminuindo ao longo do tempo até atingir o ponto de queda. Por isso, a trajetória real não é simétrica em relação ao vértice (ordenada máxima), seu comprimento no ramo descendente é menor do que no ramo ascendente.

Newton (1642-1727) formulou a lei quadrática da velocidade, segundo a qual a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade do projétil considerado. Posteriormente constatou-se que, para velocidades subsônicas, a resistência do ar se comporta aparentemente como proporcional à quadratura da velocidade, mas para velocidades superiores essa proporção não se verifica. (Florentiis, 1987).

---

4 Galileu tinha mostrado que uma pedra, ao cair, percorria distâncias proporcionais ao quadrado do tempo; e que uma bala de canhão seguia uma trajetória parabólica. Galileu, no entanto, desconhecia as leis físicas por trás desse tipo de movimento. (Guardaño, 2015).

5 Essa equação, que corresponde a uma parábola de eixo vertical, é devida a Galileu que formulou a primeira teoria do movimento dos projéteis, em 1638, desprezando, por julgá-la pouco importante, a resistência do ar.

É comum lermos em livros didáticos expressões semelhantes a “despreza-se a resistência do ar”; essa tendência simplesmente ignora a existência das Leis da Dinâmica estabelecidas por Isaac Newton,<sup>6</sup> mormente a Lei da Ação e Reação.

Já na Antiga Grécia, Aristóteles (384-322 a.C.), familiarizado com o movimento na presença da resistência, como na queda livre dos corpos, defendia que todo movimento tem uma causa. Aristóteles ensinava que a velocidade de um corpo em queda é proporcional a seu peso. Embora ele não soubesse a razão, a resistência do ar ou de qualquer outro meio cercado um corpo em queda tem como efeito que a velocidade acabe se aproximando de um valor constante, a velocidade terminal, que de fato aumenta com o peso do corpo em queda. (Weinberg, 2015).

Huygens (1629-1695), por sua vez, entendia que os princípios científicos servem apenas de hipóteses que deveriam ser testadas, comparando suas consequências com a observação. (Weinberg, 2015).

## 1.5 Aceleração da gravidade nas imediações da superfície da Terra

*Um projétil, lançado nas imediações da superfície da Terra, é submetido à força da gravidade  $P$  que atua na vertical, para baixo, com intensidade  $mg$ , isto é  $P = mg$ ; sendo  $m$  a massa do projétil e  $g$  a aceleração da gravidade,<sup>7</sup> que pode ser considerada constante em qualquer ponto da trajetória, não importando a direção do projétil.*

A tabela seguinte mostra exemplos de valores da aceleração da gravidade referidos a algumas altitudes acima da superfície da Terra. Nota-se que a aceleração da gravidade no cume do Monte Everest, a 8,8 quilômetros de altitude, pouco se alterou em relação à superfície.

6 Em *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural) de 1687. In Flood, Raymond. Os grandes matemáticos. São Paulo: M.Books, 2013.

7 A aceleração da gravidade  $g$  foi mensurada pela primeira vez por Huygens, cujo resultado obtido foi de  $32,2 \text{ ft/seg}^2 \approx 9,82 \text{ m/seg}^2$ . (Weinberg. *Opus cit.*, pág. 249).

**Tabela 1.1** Variação da aceleração da gravidade com a altitude.

<b>Variação da aceleração da gravidade</b>	<b>Altitude</b>	<b>Aceleração</b>
Exemplos	km	m/seg <sup>2</sup>
Superfície média da Terra	0,0	9,83
Monte Everest	8,8	9,80
Recorde para um balão tripulado	36,6	9,71
Órbita do ônibus espacial	400,0	8,70

Fonte: Halliday & Resnick (2013)

De acordo com a Lei da Gravitação Universal,<sup>8</sup> estabelecida por Isaac Newton, o módulo da força gravitacional ( $F_g$ ) que a Terra exerce sobre um projétil que se move nas imediações de sua superfície é dado pela equação:

$$F_g = G \frac{Mm}{R^2}$$

Em que  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é a massa da Terra,  $m$  é a massa do projétil e  $R$  é o raio da Terra.

O projétil cai em direção ao centro da Terra sob a ação da força gravitacional, com aceleração  $a_g$ . De acordo com a segunda lei da Dinâmica, os módulos de  $F_g$  e  $a_g$  estão relacionados pela equação:

$$F_g = ma_g$$

A aceleração da gravidade se obtém através de manipulação algébrica, substituição de  $F_g$  e simplificando:

$$a_g = \frac{F_g}{m} = \left( G \frac{Mm}{R^2} \right) \left( \frac{1}{m} \right) = G \frac{M}{R^2} \approx 9,83 \text{ m/seg}^2$$

Sendo:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ;  $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ; e  $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

Experimentalmente, verifica-se que o valor da aceleração da gravidade  $g$  medido em um ponto específico da superfície terrestre é diferente do valor calculado pela equação  $a_g = \frac{GM}{R^2}$ , para o mesmo ponto.

Se colocássemos o projétil em uma balança, no ponto considerado, obteríamos a força normal  $F_N$  exercida pela balança sobre o projétil dirigida para fora da Terra no sentido positivo do eixo  $Y$  e a força gravitacional  $mg$  dirigida para o centro da Terra. Ocorre que o projétil, mesmo em repouso em relação ao referen-

8 Assim enunciada: “Matéria atrai matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distância”.



cial inercial terrestre, descreve um arco de circunferência em torno do eixo de rotação da Terra e, portanto, possui uma aceleração centrípeta que atua no mesmo sentido em direção ao centro da Terra,  $a_c = \omega^2 R$ ; onde  $\omega$  (ômega) é a velocidade angular da Terra e  $R$  é o respectivo raio. Assim, podemos escrever para a segunda lei da Dinâmica, ao longo do eixo  $Y$ , a seguinte equação:

$$F_N = m(a_g - \omega^2 R)$$

Como o módulo da força normal  $F_N$  é igual ao peso  $mg$  indicado pela balança, substituindo, temos:

$$mg = m(a_g - \omega^2 R)$$

E cancelando  $m$ , obtemos a expressão que relaciona  $g$  e  $a_g$ , ou seja:

$$g = a_g - \omega^2 R$$

Assim, a rotação da Terra faz com que a aceleração do projétil  $a_g$  seja maior que a aceleração gravitacional  $g$ , no ponto considerado.

A diferença entre as acelerações  $a_g$  e  $g$  é igual a  $\omega^2 R$  e é máxima no equador, já que o raio  $R$  da circunferência da Terra é maior. Supondo que o projétil está na posição  $\theta_1$  no instante  $t_1$  e na posição  $\theta_2$  no instante  $t_2$ , definimos a velocidade angular média do projétil como o deslocamento angular  $\Delta\theta$ , no intervalo de tempo  $\Delta t$ :

$$\omega_{méd} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Para uma rotação completa da Terra, temos o ângulo  $\theta = 2\pi rad$  e o período  $t = 24$  horas. Usando esses valores, convertendo horas para segundos, estimamos a diferença entre  $a_g$  e  $g$ , usando a equação da velocidade angular e o raio médio da Terra:

$$a_c = \omega_{méd}^2 R = \left( \frac{2\pi}{86400} \right)^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \approx 0,034 \text{ m/seg}^2$$

$$g = a_g - a_c = 9,83 - 0,034 \approx 9,8 \text{ m/seg}^2$$

Como essa diferença é pequena, normalmente se usa nos cálculos o valor de  $g = 9,81 \text{ m/seg}^2$ .

## 1.6 A atmosfera terrestre padrão

A atmosfera terrestre não é um meio homogêneo, está também submetida à ação da gravidade, cujo valor é inversamente proporcional ao quadrado da dis-

tância ao centro da Terra e, como decorrência, bem como em virtude da grande compressibilidade do ar atmosférico, as camadas inferiores são mais densas que as superiores. A troposfera, onde acontece a maior parte dos fenômenos atmosféricos, se estende desde o nível do mar até cerca de 5 km nos polos e até 18 km no equador; mais de 80% do ar está dentro dessa camada e a temperatura diminui de acordo com a altitude. A camada seguinte é a estratosfera, uma camada de ar onde o perfil de temperatura é invertido; se estende até 48 km acima do nível do mar. Há mais duas camadas superiores, a mesosfera e a termosfera, que contém apenas 0,1% do ar atmosférico.

### 1.6.1 A resistência do ar

A trajetória na atmosfera difere da parabólica no vácuo por causa da resistência do ar. Para calcular os elementos da trajetória real, precisamos conhecer os efeitos da resistência do ar, cuja teoria desta foi enunciada por Isaac Newton, partindo da hipótese de que as moléculas de ar, colididas pelo projétil, assumem um movimento em direção perpendicular àquela da superfície do projétil, com velocidade igual à componente da velocidade do projétil na mesma direção. As moléculas do ar adquirem então uma força viva, a qual é subtraída da energia cinética do projétil em movimento. O deslocamento das moléculas resulta do efeito da aplicação de uma força de resistência que se opõe ao movimento do projétil. Além disso, cada molécula de ar, a temperatura ambiente, atinge uma velocidade de cerca 335 *m/seg*, ou seja, a velocidade do som no ar (Kakalios, 2009); quando o projétil assume velocidades supersônicas, se forma a sua frente uma camada de ar de alta densidade, provocando ondas de choque.

Segundo a teoria de Isaac Newton, a força da resistência do ar é diretamente proporcional ao quadrado da intensidade da velocidade instantânea e expressa pela fórmula (válida para velocidades subsônicas):

$$F_R = \rho \frac{(d \cos \delta)^2 v_i^2}{2}$$

Sendo:  $\rho$  ( $\rho$ ) a massa específica do ar atmosférico;  $d$  o diâmetro do projétil;  $\delta$  (delta) o ângulo que o eixo do projétil faz com a reta tangente à trajetória em um ponto genérico ( $\delta_i = \alpha - \theta_i$ );  $(d \cos \delta)^2$  a área da seção do projétil, transversal à direção de seu movimento;  $v_i$  a velocidade instantânea no ponto considerado.

### 1.6.2 Densidade do ar

A densidade do ar depende da temperatura e da pressão atmosférica. Em locais de menor altitude, a pressão atmosférica é maior e o ar é mais denso e, por-

tanto, oferece maior resistência ao movimento dos projéteis; o mesmo vale para locais onde a temperatura é menor, o ar se torna mais denso dificultando mais ainda o deslocamento através dele. Devido à resistência do ar ser diretamente proporcional à sua densidade, o deslocamento do projétil será tanto mais fácil quanto mais afastado estiver da superfície da Terra.

**Massa específica.** A densidade do ar, ou massa específica  $\rho$ , é obtida isolando uma quantidade de volume do ar  $\Delta V$  e medimos a massa  $\Delta m$  contida nesse volume; a massa específica é uma grandeza escalar, sua unidade no SI é o quilograma por metro cúbico, ou seja, a massa de ar contida em  $1 \text{ m}^3$ .

Devido à grande compressibilidade do ar atmosférico, sua massa específica varia consideravelmente com a pressão, bem como com a temperatura e umidade relativa do ar. Assim:

- A massa específica do ar seco, a  $0^\circ\text{C}$  e pressão  $760 \text{ mmHg}$  é de:

$$\rho = \frac{m}{V} = 1,293 \text{ kg/m}^3$$

- Como o ar atmosférico contém uma quantidade de vapor d'água, que possui densidade menor do que o ar seco, a densidade resultante também é menor; em um metro cúbico de ar, à temperatura de  $15^\circ\text{C}$ , pressão  $750 \text{ mmHg}$  e  $66\%$  de umidade, a massa específica é de  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$  (Florentiis, 1987).
- A massa específica do ar, a  $20^\circ\text{C}$  e  $1 \text{ atm}$  de pressão, é  $\rho = 1,21 \text{ kg/m}^3$ ; a  $20^\circ\text{C}$  e  $50 \text{ atm}$ , é  $\rho = 60,5 \text{ kg/m}^3$  (Halliday & Resnick, 2013).

### 1.6.3 Pressão atmosférica

Toricelli demonstrou, em 1640, que a pressão atmosférica é igual ao peso de uma coluna vertical de ar, subindo até o alto da atmosfera, dividida pela área transversal dessa coluna, isso é  $p = \frac{P}{A}$ , e equivale a uma coluna de mercúrio ( $Hg$ ) contido em um tubo de vidro fechado vertido, que possa ser sustentada pelo ar atmosférico. Ao nível do mar essa coluna de mercúrio é de  $760 \text{ mm}$  e indicada por:

$$p = 760 \text{ mmHg} = 760 \text{ torr} = 1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 14,7 \text{ lb/in}^2$$

Um Pascal ( $Pa$ ) é a pressão que produz uma força de um Newton, quando aplicada sobre uma área de um metro quadrado. A pressão atmosférica é exercida com a mesma intensidade em todas as direções no ponto considerado.

### 1.6.4 Vento

O ar atmosférico não sendo um meio homogêneo, não atua uniformemente sobre o projétil. Sensível às variações de pressão e temperatura e não sendo essa

uniforme em todos os pontos de um mesmo lugar, isso determina agitações constantes da massa de ar; continuamente se processam deslocamentos verticais das porções mais aquecidas (menos densas), as quais são substituídas por porções mais frias adjacentes; estabelecem-se, então, correntes de ar em direções e sentidos diversos, verticais, horizontais e transversais.

Uma corrente de vento, na mesma direção e em sentido contrário ao deslocamento do projétil, aumentará a resistência do ar; enquanto que uma corrente de vento favorável diminuirá a resistência do ar. Se a corrente de vento vier pela direita, o projétil se deslocará para a esquerda; se a corrente de vento vier pela esquerda, o projétil se deslocará para a direita. Se a corrente de vento for ascendente, aumentará os valores das componentes verticais das velocidades restantes; isto é, aumentará os valores das ordenadas da trajetória. Se o vento for descendente, a trajetória será achatada; isto é, os valores das componentes verticais das velocidades restantes serão diminuídos. Se a corrente de vento for transversal ao movimento do projétil, em qualquer direção e sentido, as velocidades restantes serão a somatória das velocidades vetoriais envolvidas.

## 1.7 Forças que determinam o movimento dos projéteis e as Leis da Dinâmica

Ao ser disparado, o projétil é submetido à força produzida pela expansão dos gases provenientes da queima do propelente contido no cartucho (munição), iniciando seu percurso no interior do cano da arma; como seu diâmetro é maior que o calibre real, o projétil é forçado contra as raiais do cano, adquirindo a rotação determinada pelos sulcos e a estabilidade necessária à sua trajetória.

O movimento do projétil é determinado por forças externas regidas pelas leis da Dinâmica estabelecidas por Isaac Newton. No instante de lançamento do projétil na atmosfera, isto é, quando deixa a boca do cano da arma, sua velocidade inicial é  $v_0$ , com direção definida pelo ângulo  $\alpha$  que o vetor velocidade faz com a horizontal. Devido ao princípio de inércia,<sup>9</sup> o projétil tende a conservar o impulso recebido, em grandeza e direção, e a deslocar-se com movimento retilíneo e uniforme (MRU), à velocidade inicial adquirida e ao longo da reta determinada idealmente pelo prolongamento do eixo do cano (linha de tiro). Mas esse projétil é solicitado pela força da gravidade<sup>10</sup> e sofre os efeitos da força de resistência do

---

9 Primeira lei da Dinâmica – também conhecida como princípio de inércia: “Todo ponto material em repouso, não atuando sobre ele qualquer força exterior, tende a permanecer em repouso; e nas mesmas condições, todo ponto material em movimento tende a conservar este movimento, que será retilíneo e uniforme”.

10 Segunda lei da Dinâmica – Lei da proporcionalidade entre as forças e as acelerações: “As forças são proporcionais às acelerações que imprimem a um mesmo ponto material”. O

ar<sup>11</sup> e, em virtude disso, sua velocidade se modifica e a sua direção se altera, encurvando-se progressivamente, atraído que é para o centro da Terra. Essa curva, denominada trajetória, constitui um dos exemplos mais típicos da validade da Lei da independência das forças simultâneas.<sup>12</sup>

## 1.8 A trajetória e seus elementos

No estudo da balística, trajetória é considerada a curva descrita pelo projétil em seu deslocamento no espaço, desde a origem  $P_0(0,0)$  até o ponto de queda  $P_f(x_f,0)$ .

Referidos ao plano vertical, determinado pelos eixos ortogonais<sup>13</sup>  $OX$  e  $OY$ , os elementos da trajetória, considerados em nosso estudo, são os seguintes:

- a) Origem  $P_0(x_0, y_0) = (0, 0)$ : é o ponto em que o projétil deixa o cano da arma e inicia seu deslocamento no espaço.
- b) Velocidade inicial ( $v_0$ ): é a velocidade do projétil no início de sua trajetória.
- c) Plano horizontal: é o plano que passa pela origem.
- d) Linha de tiro: é a linha determinada pelo prolongamento do eixo do cano da arma.
- e) Linha de projeção ( $xtana$ ): é a reta tangente à trajetória na origem; coincide com a linha de tiro, no momento do disparo.
- f) Alcance máximo ( $Xmáx$ ): é a distância horizontal compreendida entre a origem e o ponto de queda.
- g) Altura máxima ( $Ymáx$ ): é o ponto mais alto ou vértice da trajetória (ordenada máxima); divide a trajetória em dois ramos, ascendente e descendente.
- h) Ponto de queda  $P_f(Xmáx,0)$ : é o ponto em que o projétil retorna ao plano horizontal do qual foi lançado.
- i) Ângulo de projeção ou de tiro ( $\alpha = \theta_0$ ): é o ângulo agudo que a reta tangente à trajetória, na origem, faz com o plano horizontal.

---

quociente do valor da força pelo da aceleração que a determina é constante para o ponto material considerado, ao qual se dá o nome de massa do ponto, podendo, assim, estabelecer a fórmula fundamental da Dinâmica: Força = massa x aceleração.

11 Terceira lei da Dinâmica – Lei da igualdade entre a ação e reação: “A ação, do ponto material A sobre o ponto material B, é igual e contrária à reação, do ponto material B sobre o ponto material A”.

12 Quarta lei da Dinâmica – Lei da independência das forças simultâneas: “A ação de uma força sobre um ponto material é independente das ações das demais forças que possam atuar simultaneamente sobre este mesmo ponto”.

13 Plano Cartesiano.

- j) Inclinação da trajetória em um ponto genérico  $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ : é o ângulo agudo ( $\theta_i$ ) formado pela reta tangente à trajetória, no ponto considerado, e o plano horizontal que contém esse ponto.
- k) Ângulo de queda ( $\beta = \theta_f$ ): é o ângulo agudo que a reta tangente à trajetória, no ponto de queda, faz com o plano horizontal.
- l) Duração da trajetória ( $\Delta t = t_f - t_0$ ): é o tempo empregado pelo projétil no seu deslocamento da origem ao ponto de queda.



## Análise do movimento dos projéteis no vácuo

### 2.1 Movimento unidimensional

O estudo do movimento dos projéteis envolve seu deslocamento no espaço e a velocidade com que se deslocam em um intervalo de tempo.<sup>1</sup>

#### 2.1.1 O deslocamento no espaço

A uma mudança de posição do projétil em sua trajetória, de  $s_{i-1}$  para  $s_i$ , é associado um deslocamento no espaço  $\Delta s = s_i - s_{i-1}$ .

O deslocamento no espaço unidimensional é dado pela equação

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

As constantes  $s_0$ ,  $v_0$  e  $a_0$ , respectivamente espaço, velocidade e aceleração iniciais, são aferidas no instante de tempo  $t_0 = 0$ .

#### 2.1.2 Velocidade média e velocidade instantânea

A velocidade média ( $v_m$ ) é a razão entre o deslocamento  $\Delta s$  e o intervalo de tempo  $\Delta t$  durante o qual esse deslocamento ocorre:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_i - s_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

---

1 O deslocamento e a velocidade são grandezas vetoriais e, portanto, possuem módulo, direção e sentido.



A velocidade instantânea  $v_i = v(t)$  é definida como o limite da velocidade média, reduzindo o intervalo de tempo  $\Delta t$  até torná-lo próximo à zero:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Derivando a equação do deslocamento no espaço  $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$  obtemos a velocidade instantânea pela equação diferencial:

$$v(t) = \frac{d}{dt} \left[ s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \right] = v_0 + a_0 t$$

A velocidade instantânea  $v_i$  é a taxa com a qual a posição  $s_i$  está variando com o tempo em um dado instante, ou seja, a velocidade instantânea é a derivada do espaço  $s$  em relação ao tempo  $t$ .

## 2.2 Movimento em duas dimensões

Durante seu deslocamento livre no vácuo, o projétil fica animado por dois movimentos: um retilíneo e uniforme, ao longo da linha de projeção, com velocidade constante, igual à velocidade inicial ( $v_0$ ); e outro, uniformemente acelerado, ao longo da vertical.

Vamos considerar uma arma cujo prolongamento do eixo do cano forma com o plano horizontal um ângulo  $\alpha$ , da qual é disparado um projétil com uma velocidade inicial  $v_0$ . Referindo essa velocidade a um sistema de eixos coordenados  $OX$  e  $OY$ , analisaremos o movimento do projétil no vácuo; para tanto, vamos decompor o movimento do lançamento inclinado em suas componentes horizontal e vertical e tratar cada uma delas como movimento linear unidimensional.

### 2.2.1 Componente horizontal e componente vertical

O deslocamento no eixo horizontal fica associado à mudança de posição do projétil em sua trajetória; isto é, quando a posição do projétil muda de  $s_{i-1}$  para  $s_i$ , ocorre um deslocamento  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ , no eixo  $X$ .

Na componente horizontal, o movimento é retilíneo uniforme (MRU), onde a posição inicial é igual à zero ( $x_0 = 0$ ), a velocidade é constante ( $v_x = v_0 \cos \alpha$ ) e a aceleração é igual à zero ( $a = \frac{dv_x}{dt} = 0$ ); então, o alcance do projétil fica reduzido à equação paramétrica:

$$x = x(t) = (v_0 \cos \alpha)t$$

E a velocidade horizontal fica expressa pela equação diferencial:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[v_{0x}t] = v_{0x}$$

Na componente vertical, o movimento é retilíneo uniformemente variado (MRUV), onde a posição inicial é igual à zero ( $y_0 = 0$ ); a velocidade é uniformemente variada ( $v_y(t) = v_0 \text{sen} \alpha - gt$ ) devido ao projétil estar sujeito à aceleração constante da gravidade ( $a = -g$ ); então a altura atingida pelo projétil fica reduzida à equação paramétrica:

$$y = y(t) = (v_0 \text{sen} \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

E a velocidade vertical é obtida pela equação diferencial:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right] = v_{0y} - gt$$

### 2.2.2 Dedução da equação da trajetória do projétil no vácuo

A aceleração da gravidade ( $a = -g$ ) não afeta a componente horizontal da velocidade, mas tão somente a componente vertical; portanto, a gravidade não muda a relação trigonométrica entre a velocidade  $v_0$  do projétil e sua projeção  $v_x$  no eixo horizontal, isto é ( $v_x = v_0 \text{cos} \alpha$ ); então, tudo se passa como se o projétil seguisse seu movimento inclinado (o que na verdade ocorre). Isso decorrente da Quarta Lei da Dinâmica: Independência das forças simultâneas que agem sobre o projétil. Já o espaço percorrido é função do tempo. É o tempo (parâmetro) que equaciona os movimentos horizontal e vertical.

Como  $x = x(t) = (v_0 \text{cos} \alpha)t$ , então o tempo é dado pela equação:

$$t = \frac{x}{v_0 \text{cos} \alpha}$$

Assim, substituindo  $t$  na equação  $y = y(t) = (v_0 \text{sen} \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ , obtemos a altura atingida  $y$  em função da distância percorrida  $x$ :

$$y(x) = v_0 \text{sen} \alpha \left( \frac{x}{v_0 \text{cos} \alpha} \right) - \frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_0 \text{cos} \alpha} \right)^2$$

E simplificando, temos a equação da trajetória no vácuo:

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2(v_0 \text{cos} \alpha)^2}$$

O alcance máximo ocorre quando  $y = (v_0 \text{sen} \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$  e cujas raízes são:  $t_0 = 0$  e  $t_f = \frac{2v_0 \text{sen} \alpha}{g}$ .

Substituindo  $t_f$  em  $x = (v_0 \text{cos} \alpha)t$ , temos:

$$x_{\text{máx}} = (v_0 \text{cos} \alpha) \left( \frac{2v_0 \text{sen} \alpha}{g} \right) = \frac{v_0^2 (2 \text{cos} \alpha \cdot \text{sen} \alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \text{sen} 2\alpha}{g}$$

Portanto, o alcance máximo se obtém quando  $\text{sen} 2\alpha = 1$ , ou seja, quando  $\alpha = \frac{\pi}{4} \text{radianos} = 45^\circ$ .

A altura máxima ( $y_{\text{máx}}$ ) se obtém com ângulo  $\alpha = 90^\circ$ . Como  $\text{sen} 90^\circ = 1$ , isso implica que  $x = (v_0 \text{cos} 90^\circ)t = 0$ ; portanto, temos somente o movimento vertical, cuja equação reduzida exprime a altura máxima:

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

A divisão por 2 é devida ao fato de que o projétil percorre duas vezes o mesmo espaço durante seu deslocamento no eixo Y, uma na subida outra na descida. E verificamos que a altura máxima é igual à metade do alcance máximo:

$$y_{\text{máx}} = \frac{x_{\text{máx}}}{2}$$

No tiro horizontal,  $\alpha = 0$ , o que implica que  $\text{cos} \alpha = 1$ ; portanto, a altura que o projétil atinge é obtida pela equação reduzida:

$$y(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Como  $y(x) < 0$ , o projétil estará abaixo do plano horizontal do qual foi lançado.

### 2.2.3 Comprimento da trajetória do projétil no vácuo

Um projétil que se move ao longo da trajetória com velocidade resultante<sup>2</sup> ( $v_R$ ):

$$v_R = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

possui coordenadas  $x$  e  $y$ , que por sua vez são funções de uma terceira variável  $t$  (denominada parâmetro) pelas equações  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ , chamadas equações

---

2 Teorema de Pitágoras (c. 570-490 a.C.).

paramétricas. Cada valor de  $t$  determina um ponto  $P_i(x_i, y_i)$ ; quando  $t$  varia, o ponto  $(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i))$  varia e traça a trajetória  $S$ .

Se dividirmos o parâmetro  $t = [t_0, t_f]$  em  $n$  subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$  de igual tamanho, então os pontos correspondentes  $P_i(x_i, y_i)$  dividem a trajetória  $S$  em  $n$  segmentos de comprimentos  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ .

O comprimento da trajetória  $S$  é obtido através da somatória dos  $n$  segmentos  $\Delta s_i = (s_i - s_{i-1})$ , quando  $\Delta s_i$  tende à zero, no intervalo de tempo  $t = (t_f - t_0)$ .

$$S(t) = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{t_0}^{t_f} (s_i - s_{i-1})$$

Como a trajetória é definida em função de duas variáveis  $S = s(x, y)$ , calculamos  $S(x, y)$  no ponto genérico  $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ , multiplicamos pelo comprimento  $\Delta s_i$  do segmento e somamos:

$$\sum_{i=1}^n s(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

Em seguida tomamos o limite dessa soma, que é igual à integral de linha de  $s(x, y)$  sobre a trajetória  $S$ :

$$S(x, y) = \int_0^x s(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n s(x_i, y_i) \Delta s_i$$

Então verificamos que o comprimento da trajetória  $S$  pode ser obtido pela fórmula do cálculo da integral de linha:

$$S(t) = \int_{t_0}^{t_f} v_R(v_x(t), v_y(t)) dt = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Como a velocidade é a derivada do espaço percorrido, no tempo; então o espaço é a integral da velocidade. Assim, o comprimento da trajetória é igual à integral da velocidade resultante ( $v_R$ ) e expresso pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$S(t) = \int_{t_0}^{t_f} v_R(v_x(t), v_y(t)) dt = S(t_f) - S(t_0)$$

**Tabela 2.1** Dados numéricos da trajetória do projétil 45ACP, no vácuo<sup>3</sup>, com ângulo de tiro  $\alpha = 45^\circ$ .

X	Y( $\alpha, x$ )	Y(t)	Y(x)	Vx	Vy	(Vx) <sup>2</sup>	(Vy) <sup>2</sup>	$\sqrt{((Vx)^2 + (Vy)^2)}$	t=X/(Vo)cos $\alpha$	Y'	$\theta_i$	$\theta_i$	Adj	Op
m	m	m	m	m/s	m/s		m/s		seg	tan $\theta_i$	graus	radianos	cos $\theta_i$	sen $\theta_i$
0	0	0	0	179	179	32005	32005	253,0	0,0	1,00000	45	0,78540	0,70711	0,70711
100	100	98	98	179	173	32005	30073	249,2	0,6	0,96935	44	0,76984	0,71803	0,69602
200	200	194	194	179	168	32005	28201	245,4	1,1	0,93870	43	0,75379	0,72910	0,68441
300	300	286	286	179	162	32005	26389	241,6	1,7	0,90805	42	0,73724	0,74033	0,67225
400	400	375	375	179	157	32005	24638	238,0	2,2	0,87739	41	0,72018	0,75168	0,65952
500	500	462	462	179	151	32005	22947	234,4	2,8	0,84674	40	0,70260	0,76317	0,64620
600	600	545	545	179	146	32005	21315	230,9	3,4	0,81609	39	0,68448	0,77475	0,63227
700	700	625	625	179	141	32005	19744	227,5	3,9	0,78544	38	0,66580	0,78642	0,61769
800	800	702	702	179	135	32005	18233	224,1	4,5	0,75479	37	0,64656	0,79816	0,60244
900	900	776	776	179	130	32005	16782	220,9	5,0	0,72414	36	0,62674	0,80994	0,58651
1000	1000	847	847	179	124	32005	15392	217,7	5,6	0,69348	35	0,60634	0,82174	0,56986
1100	1100	915	915	179	119	32005	14061	214,6	6,1	0,66283	34	0,58534	0,83352	0,55249
1200	1200	979	979	179	113	32005	12791	211,6	6,7	0,63218	32	0,56375	0,84526	0,53436
1300	1300	1041	1041	179	108	32005	11580	208,8	7,3	0,60153	31	0,54154	0,85691	0,51546
1400	1400	1100	1100	179	102	32005	10430	206,0	7,8	0,57088	30	0,51873	0,86845	0,49578

(continua)

---

3 Os dados numéricos da trajetória do projétil no vácuo foram obtidos a partir da planilha de cálculo 2.1.1.

**Tabela 2.1** Dados numéricos da trajetória do projétil .45ACP, no vácuo, com ângulo de tiro  $\alpha = 45^\circ$ . (continuação)

X	Y( $\alpha, x$ )	Y(t)	Y(x)	Vx	Vy	(Vx) <sup>2</sup>	(Vy) <sup>2</sup>	$\sqrt{((Vx)^2+(Vy)^2)}$	t=X/(Vo)cos $\alpha$	Y'	$\theta_i$	$\theta_i$	Adj	Op
1500	1500	1155	1155	179	97	32005	9340	203,3	8,4	0,54023	28	0,49531	0,87982	0,47530
1600	1600	1208	1208	179	91	32005	8311	200,8	8,9	0,50957	27	0,47128	0,89099	0,45402
1700	1700	1257	1257	179	86	32005	7341	198,4	9,5	0,47892	26	0,44664	0,90190	0,43194
1800	1800	1303	1303	179	80	32005	6431	196,1	10,1	0,44827	24	0,42141	0,91251	0,40905
1900	1900	1347	1347	179	75	32005	5582	193,9	10,6	0,41762	23	0,39560	0,92276	0,38536
2000	2000	1387	1387	179	69	32005	4793	191,8	11,2	0,38697	21	0,36922	0,93261	0,36089
2100	2100	1424	1424	179	64	32005	4063	189,9	11,7	0,35632	20	0,34229	0,94199	0,33564
2200	2200	1458	1458	179	58	32005	3394	188,1	12,3	0,32566	18	0,31483	0,95085	0,30966
2300	2300	1489	1489	179	53	32005	2785	186,5	12,9	0,29501	16	0,28687	0,95913	0,28296
2400	2400	1517	1517	179	47	32005	2237	185,0	13,4	0,26436	15	0,25845	0,96679	0,25558
2500	2500	1542	1542	179	42	32005	1748	183,7	14,0	0,23371	13	0,22959	0,97376	0,22758
2600	2600	1564	1564	179	36	32005	1320	182,5	14,5	0,20306	11	0,20033	0,98000	0,19900
2700	2700	1583	1583	179	31	32005	951	181,5	15,1	0,17241	10	0,17073	0,98546	0,16990
2800	2800	1598	1598	179	25	32005	643	180,7	15,7	0,14175	8	0,14082	0,99010	0,14035
2900	2900	1611	1611	179	20	32005	395	180,0	16,2	0,11110	6	0,11065	0,99388	0,11042
3000	3000	1621	1621	179	14	32005	207	179,5	16,8	0,08045	5	0,08028	0,99678	0,08019
3100	3100	1627	1627	179	9	32005	79	179,1	17,3	0,04980	3	0,04976	0,99876	0,04974

(continua)

**Tabela 2.1** Dados numéricos da trajetória do projétil .45ACP, no vácuo, com ângulo de tiro  $\alpha = 45^\circ$ . (continuação)

X	Y( $\alpha, x$ )	Y(t)	Y(x)	Vx	Vy	(Vx) <sup>2</sup>	(Vy) <sup>2</sup>	$\sqrt{((Vx)^2+(Vy)^2)}$	t=X/(V)cos $\alpha$	Y'	$\theta_i$	$\theta_f$	Adj	Op
3200	3200	1631	1631	179	3	32005	12	178,9	17,9	0,01915	0,01914	1	0,99982	0,01914
3300	3300	1631	1631	179	-2	32005	4	178,9	18,4	-0,01150	-0,01150	-1	0,99993	-0,01150
3400	3400	1628	1628	179	-8	32005	57	179,1	19,0	-0,04216	-0,04213	-2	0,99911	-0,04212
3500	3500	1623	1623	179	-13	32005	170	179,4	19,6	-0,07281	-0,07268	-4	0,99736	-0,07262
3600	3600	1614	1614	179	-19	32005	343	179,9	20,1	-0,10346	-0,10309	-6	0,99469	-0,10291
3700	3700	1602	1602	179	-24	32005	576	180,5	20,7	-0,13411	-0,13332	-8	0,99113	-0,13292
3800	3800	1587	1587	179	-29	32005	869	181,3	21,2	-0,16476	-0,16330	-9	0,98670	-0,16257
3900	3900	1569	1569	179	-35	32005	1222	182,3	21,8	-0,19541	-0,19298	-11	0,98144	-0,19179
4000	4000	1548	1548	179	-40	32005	1636	183,4	22,4	-0,22607	-0,22233	-13	0,97539	-0,22050
4100	4100	1524	1524	179	-46	32005	2109	184,7	22,9	-0,25672	-0,25129	-14	0,96859	-0,24866
4200	4200	1497	1497	179	-51	32005	2643	186,1	23,5	-0,28737	-0,27983	-16	0,96110	-0,27619
4300	4300	1466	1466	179	-57	32005	3237	187,7	24,0	-0,31802	-0,30791	-18	0,95297	-0,30306
4400	4400	1433	1433	179	-62	32005	3891	189,5	24,6	-0,34867	-0,33549	-19	0,94425	-0,32923
4500	4500	1397	1397	179	-68	32005	4605	191,3	25,2	-0,37932	-0,36256	-21	0,93499	-0,35467
4600	4600	1357	1357	179	-73	32005	5379	193,3	25,7	-0,40998	-0,38908	-22	0,92526	-0,37933
4700	4700	1315	1315	179	-79	32005	6214	195,5	26,3	-0,44063	-0,41503	-24	0,91510	-0,40322
4800	4800	1269	1269	179	-84	32005	7108	197,8	26,8	-0,47128	-0,44041	-25	0,90458	-0,42631

(continua)

**Tabela 2.1** Dados numéricos da trajetória do projétil .45ACP, no vácuo, com ângulo de tiro  $\alpha = 45^\circ$ . (continuação)

X	Y( $\alpha, x$ )	Y(t)	Y(x)	Vx	Vy	(Vx) <sup>2</sup>	(Vy) <sup>2</sup>	$\sqrt{((Vx)^2+(Vy)^2)}$	t=X/(Vo)cos $\alpha$	Y'	$\theta_i$	$\theta_f$	Adj	Op
4900	4900	1220	1220	179	-90	32005	8063	200,2	27,4	-0,50193	-0,46519	-27	0,89374	-0,44859
5000	5000	1169	1169	179	-95	32005	9078	202,7	27,9	-0,53258	-0,48937	-28	0,88263	-0,47007
5100	5100	1114	1114	179	-101	32005	10153	205,3	28,5	-0,56323	-0,51295	-29	0,87130	-0,49075
5200	5200	1056	1056	179	-106	32005	11288	208,1	29,1	-0,59389	-0,53591	-31	0,85980	-0,51063
5300	5300	995	995	179	-112	32005	12483	210,9	29,6	-0,62454	-0,55827	-32	0,84817	-0,52972
5400	5400	931	931	179	-117	32005	13739	213,9	30,2	-0,65519	-0,58001	-33	0,83645	-0,54804
5500	5500	864	864	179	-123	32005	15054	216,9	30,7	-0,68584	-0,60116	-34	0,82468	-0,56560
5600	5600	794	794	179	-128	32005	16430	220,1	31,3	-0,71649	-0,62171	-36	0,81288	-0,58243
5700	5700	721	721	179	-134	32005	17866	223,3	31,9	-0,74714	-0,64167	-37	0,80110	-0,59853
5800	5800	644	644	179	-139	32005	19362	226,6	32,4	-0,77780	-0,66105	-38	0,78935	-0,61395
5900	5900	565	565	179	-145	32005	20918	230,0	33,0	-0,80845	-0,67987	-39	0,77765	-0,62869
6000	6000	483	483	179	-150	32005	22534	233,5	33,5	-0,83910	-0,69813	-40	0,76604	-0,64279
6100	6100	397	397	179	-156	32005	24211	237,1	34,1	-0,86975	-0,71585	-41	0,75454	-0,65626
6200	6200	309	309	179	-161	32005	25947	240,7	34,7	-0,90040	-0,73304	-42	0,74315	-0,66913
6300	6300	217	217	179	-167	32005	27744	244,4	35,2	-0,93105	-0,74971	-43	0,73189	-0,68143
6400	6400	123	123	179	-172	32005	29601	248,2	35,8	-0,96171	-0,76588	-44	0,72077	-0,69317
6525	6525	0	0	179	-179	32005	32006	253,0	36,5	-1,00002	-0,78541	-45	0,70710	-0,70711





## Balística experimental

A balística experimental estuda os métodos de mensuração das quantidades e das constantes numéricas que entram nos cálculos balísticos teóricos e, ainda, se ocupa da avaliação dos erros que se comete nas experiências.

Os dados obtidos experimentalmente não podem ser aplicados imediatamente, sem a cautela necessária para eliminar incertezas e erros não previsíveis. Entre um disparo e outro de uma série de tiros, executados nas mesmas condições, existem diferenças devidas a variações mínimas de massa e composição química das cargas de lançamento, dimensões do estojo e do projétil, temperatura, umidade do ar e vibrações da arma; essas diferenças acontecem de modo indeterminado, por isso as experiências devem ser repetidas inúmeras vezes, registrando-se os dados obtidos e aplicando à série de tiros os critérios de cálculo probabilístico, permitindo, assim, deduzir resultados confiáveis.

Neste capítulo nos ocuparemos da determinação das velocidades iniciais e dos alcances dos projéteis balísticos lançados na atmosfera. Antes, porém, vamos verificar o que acontece no interior do cano da arma.

### 3.1 O movimento do projétil no interior do cano da arma

Vamos considerar a deflagração da carga de lançamento contida em um cartucho inserido na câmara de combustão de uma pistola calibre .45; durante um breve instante, a pressão dos gases atinge seu valor máximo,<sup>1</sup> na ordem de  $1200 \text{ kgf/cm}^2$ . Essa pressão se exerce simultaneamente em todas as direções,

---

1 Rabelo, 1995. *Opus cit.*

sobre a base do projétil e sobre o fundo do estojo do cartucho, que se acha apoiado na culatra.<sup>2</sup> O projétil reage à força aplicada, no sentido da culatra, e esta também reage em relação ao projétil; vencida a inércia, o projétil se desloca no sentido da boca do cano da arma, acelerando-se esse deslocamento enquanto a pressão dos gases se exercer.

Dados disponíveis:

- Massa do projétil:  $m = 0,0149 \text{ kg}$
- Aceleração da gravidade:  $g = 9,81 \text{ m/seg}^2$
- Velocidade inicial do projétil:  $v_0 = 253 \text{ m/seg}$
- Espaço percorrido pelo projétil no interior do cano da arma:  $s = 0,127 \text{ m}$

O projétil, partindo da posição de repouso, teria percorrido  $0,127 \text{ m}$ , atingindo, ao final do percurso, a velocidade de  $253 \text{ m/seg}$ . Tendo em vista que não dispomos da equação diferencial que nos dá a velocidade instantânea, vamos adotar, para efeito de cálculo, a velocidade média, perfeitamente aceitável, uma vez que o pequeno deslocamento ( $0,127 \text{ m}$ ) se dá em um brevíssimo intervalo de tempo:

$$v_m = \frac{253}{2} = 126,5 \text{ m/seg}$$

O tempo é obtido pela equação:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_m} = \frac{0,127}{126,5} \approx 0,001 \text{ seg}$$

A aceleração corresponde ao quociente da variação da velocidade em relação ao tempo, expressa pela equação:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{253}{0,001} = 253000 \text{ m/seg}^2$$

A força exercida corresponde ao produto da aceleração pela massa do projétil:

$$F = ma = (0,0149)(253000) = 3769,7 \text{ N} = \frac{3769,7}{9,81} \text{ kgf} \approx 384,271 \text{ kgf}$$

O impulso<sup>3</sup> é igual à força multiplicada pelo tempo de aplicação:

$$I = Ft = (384,271)(0,001) \approx 0,384271 \text{ kgf} \cdot \text{seg}$$

2 Bloco de aço destinado a vedar a abertura posterior do cano das armas de fogo. Larousse escolar da Língua Portuguesa. São Paulo: Larousse, 2004.

3 Como  $I = (Ft) = m(at) = mv$ , então, o impulso é igual à quantidade de movimento.

E a quantidade de movimento é igual a massa multiplicada pela velocidade:

$$mv = (0,0149)253 = 3,7697 \text{ kg}(m/seg)$$

O cálculo da energia cinética ( $E_c$ ) é obtido pela integral da quantidade de movimento ( $mv$ ):

$$E_c = \int_0^v (mv)dv = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0,0149)253^2 \approx 477 \text{ J} = \frac{477}{9,81} \text{ kgm} \approx 49 \text{ kgm}$$

### 3.2 Determinação da velocidade inicial

Quando sai da boca do cano da arma o projétil é animado de certa velocidade inicial, que por simplificação corresponde à origem, se bem que isso não seja exato por causa do impulso dos gases que ainda agem nos primeiros instantes da trajetória. (Florentiis, 1987).

A mensuração da velocidade inicial<sup>4</sup> do projétil é feita por aparelhos chamados cronógrafos; esses aparelhos são concebidos para atuar com precisão na determinação das velocidades em intervalos pequeníssimos de tempo, na ordem de grandeza de milésimos de segundo.

Para fins didáticos e compreensão do fenômeno físico envolvido, vamos utilizar, como exemplo, o pêndulo balístico, uma solução prática ao tempo em que os cronômetros ainda ofereciam dificuldades técnicas.

O pêndulo balístico é um aparelho mecânico de construção robusta; compreende um bloco como alvo que, ao ser atingido pelo projétil, desliza sobre um limbo em forma de arco de círculo e graduado em unidades de quilogrâmetro<sup>5</sup> ( $kgm$ ). Sua aplicação na medição indireta da velocidade do projétil se baseia na fórmula da energia cinética, cujo resultado é expresso em quilogrâmetros:

$$E_c = \frac{1}{2g}mv_i^2$$

Seja por exemplo, uma pistola Colt .45, apontada contra o alvo do pêndulo balístico com ângulo de projeção de pequena amplitude em relação ao plano horizontal

4 A CBC afere a velocidade inicial a 4,6 metros da boca do cano da arma. *Opus cit.*

5 O quilogrâmetro ( $kgm$ ) é uma unidade de medida de energia cinética ( $E_c$ ), equivalente ao trabalho ( $W$ ) efetuado por um quilograma-força ( $kgf$ ) quando desloca seu ponto de aplicação na sua própria direção de 1 metro; o quilogrâmetro é igual a 9,81 joules ( $1kgm = 9,81J$ ).

(trajetória tensa).<sup>6</sup> O pêndulo é colocado à distância de 4,6 metros da boca do cano da arma e efetuamos vários disparos, registrando-se as amplitudes dos deslocamentos angulares respectivos. Após a conclusão do teste experimental em um *stand* de prova de tiro, chegou-se ao valor de 48,6103 *kgm*, que é a média dos deslocamentos angulares dos disparos efetuados. Substituindo os dados disponíveis na fórmula abaixo, chegamos ao valor de 253 *m/seg*, que é a velocidade inicial  $v_0$ , ou seja:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gE_c}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(9,81)(48,6103)}{0,0149}} = 253 \text{ m/seg}$$

Onde:  $g = 9,81 \text{ m/seg}^2$ ;  $E_c = 48,6103 \text{ kgm}$ ;  $m = 14,9 \text{ gr} = 0,0149 \text{ kg}$

### 3.3 Obtenção experimental do alcance máximo do projétil .45ACP

O alcance máximo dos projéteis é obtido em testes de tiro em campos de prova e registrado em tabelas; o alcance máximo depende da arma,<sup>7</sup> munição utilizada (identificada por calibre, massa, coeficiente balístico e velocidade inicial) e ângulo de tiro.

Experimentalmente se observa que, mesmo disparando uma série de tiros com a mesma arma, os projéteis descrevem trajetórias diversas, atingindo o alvo com impactos distribuídos sobre uma determinada área; tal fenômeno é dito dispersão do tiro e é determinado por vários fatores, entre os quais: estado de conservação da arma; munição (diferença de massa, densidade e estado de conservação das cargas de lançamento); e ambiente (variações de temperatura, umidade, vento e chuva). O conjunto das trajetórias de uma série de tiros, disparados com a mesma arma sobre o mesmo alvo, constitui um fecho de trajetórias chamado “cone de dispersão”. Se esse cone impacta sobre um plano (alvo), o conjunto dos pontos interceptados forma a “rosa de tiro”.<sup>8</sup>

Vamos supor que coletamos aleatoriamente, como amostras, 7 cartuchos calibre .45ACP,<sup>9</sup> de lotes e fabricantes diversos e velocidades iniciais  $v_0$  disponíveis nas fontes anotadas (tabela 3.1), com os quais efetuamos testes de tiro em campo de prova, com a mesma arma (Colt M1911) e ângulo de elevação  $\alpha = 30^\circ$ , cujos respectivos alcances obtidos foram anotados na tabela 3.2:

6 Trajetória tensa é a dos projéteis que, em virtude de estarem animados de velocidades iniciais elevadas, podem ser lançados a considerável distância, com pequenos ângulos de elevação.

7 No caso em estudo, Pistola Colt M1911.

8 Puopolo, 1991.

9 *Automatic Colt Pistol*.

**Tabela 3.1** Velocidades iniciais das amostras.

Dados disponíveis		
Cartucho .45ACP	Vo	Fontes:
Amostra	m/seg	
A	245	Notas de aula (1970)
B	249	Franco Atirador (2014)
C	249	Franco Atirador (2014)
D	253	CBC (2005)
E	255	Revista Magnum (1990)
F	259	Florentiis (1987)
G	262	Rabelo (1995)

**Tabela 3.2** Alcances.

Teste de tiro	
Cartucho	Alcance
Amostra	metros
A	1450
B	1496
C	1501
D	1521
E	1534
F	1559
G	1577

Dividimos os alcances obtidos nos testes em cinco classes para ulteriores cálculos:

**Tabela 3.3** Distribuição dos alcances dos tiros.

Classe	$x_i^*$	Frequência	Produto	Desvios	Fdp
metros	metros	$f_i$	$x_i^* f_i$	$d^2 = (x_i^* - \mu)^2$	$f(x)$
1450 - 1480	1465	1	1465	3136	0,4
1480 - 1510	1495	2	2990	676	0,8
1510 - 1540	1525	2	3050	16	1,0
1540 - 1570	1555	1	1555	1156	0,7
1570 - 1600	1585	1	1585	4096	0,3
		$\sum f_i = 7$	$\sum (x_i^* f_i) = 10645$	$\sum (x_i^* - \mu)^2 = 9080$	$\int_a^b f(x) dx \approx 89\%$

$x_i^*$  é o valor central de cada classe de alcance dos tiros  
 $f_i$  é a frequência de disparos em cada classe

### 3.3.1 Medidas de tendência central

As medidas de tendência central dão a ideia do centro em torno do qual os dados se distribuem.<sup>10</sup> A **média** é uma medida de tendência central que consiste na soma do produto dos alcances pela frequência, dividida pela soma dos disparos efetuados, cuja fórmula é a seguinte:

$$\mu = \frac{\sum(x_i^* f_i)}{\sum f_i} = \frac{10645}{7} \approx 1521m$$

### 3.3.2 Variância

A variância da amostra é a soma dos quadrados dos desvios do alcance de cada disparo em relação à média, dividida por  $(n - 1)$ , sendo  $n$  o número de disparos:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i^* - \mu)^2}{n - 1} = \frac{9080}{6} \approx 1513$$

### 3.3.3 Desvio padrão

O desvio padrão é igual à raiz quadrada da variância, com sinal positivo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i^* - \mu)^2}{n - 1}} = \sqrt{1513} \approx 39$$

### 3.3.4 Função Densidade de Probabilidade

Os resultados aleatórios dos alcances obtidos em testes de tiro podem ser modelados por uma distribuição normal obtida pela Função Densidade de Probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

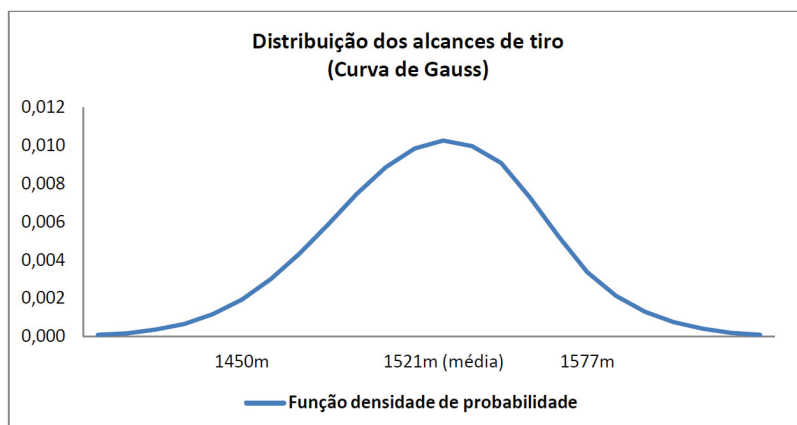
Sua aplicação em balística dá a probabilidade de ocorrência dos alcances máximos dos projéteis. A variável  $x$  pode assumir valores menores, iguais ou maiores que  $\mu$ , dentro de certos limites de precisão da arma e munição utilizada.

---

10 Vieira, 2014.

A curva de Gauss (1777-1855) é um gráfico de distribuição normal gerado pela função densidade de probabilidade;<sup>11</sup> essa curva é definida por dois parâmetros, sua média e seu desvio-padrão; a média dá a localização do alcance máximo.

**Gráfico 3.1** Função Densidade de Probabilidade: Curva de Gauss.



Fonte: este gráfico foi gerado a partir de dados numéricos obtidos através da planilha de cálculo 3.1, com base nos testes de alcances dos tiros explicitados na Tabela 3.2, cujas fontes das velocidades iniciais das amostras foram citadas na Tabela 3.1.

Por se tratar de distribuição contínua, a área entre a curva e o eixo das abscissas representa a probabilidade dos alcances de tiro e pode ser calculada pela integral definida da função no intervalo  $[a, b]$ :

$$P = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

No exemplo em estudo,  $a = 1450m$  e  $b = 1577m$ . Se  $x$  representa o alcance de cada projétil da amostra, indicamos a probabilidade de o alcance estar nesse intervalo da seguinte maneira:

$$P(1450 \leq x \leq 1577)$$

De acordo com a interpretação da frequência de probabilidade, esse número  $P$  é a proporção de todos os cartuchos dos lotes considerados com alcances entre 1450 e 1577 metros, que representa uma proporção entre 0 e 1. Cada variável

11 A distribuição normal dos alcances dos tiros foi obtida a partir da planilha de cálculo 3.1, a partir da qual foi gerado o gráfico da Função Densidade de Probabilidade.



aleatória  $x$  tem uma função densidade de probabilidade  $f$ ; isso significa que a probabilidade de  $x$  estar entre  $a$  e  $b$  é encontrada pela integração de  $f$  de  $a$  até  $b$ .

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Como os resultados dos testes dos alcances  $x$  têm distribuição normal, pergunta-se: qual a porcentagem dos cartuchos, cujos alcances dos projéteis estão entre 1450 e 1577 metros? Para calcular essa porcentagem, utilizamos a função densidade de probabilidade, com  $\mu = 1521m$  e  $\sigma = 39$ , e integramos:

$$P(1450 \leq x \leq 1577) = \int_{1450}^{1577} \frac{1}{39\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1521)^2/2(39^2)} dx$$

Efetuamos o cálculo dessa probabilidade através de integração numérica,<sup>12</sup> utilizando a Regra do Ponto Médio, que basicamente é uma soma de Riemann (1826-1866), cuja fórmula é a seguinte:

$$P = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \Delta x [f(x_1^*) + \dots + f(x_n^*)] \approx 89\%$$

Sendo:

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  extremos dos subintervalos

$x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$  = ponto médio de cada subintervalo

$b - a$  = intervalo de integração

$n$  = número de subintervalos

No exemplo, optamos por  $n = 1577 - 1450 = 127$ ; assim:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{127}{127} = 1m$$

12 A integração numérica da Função Densidade de Probabilidade foi obtida a partir da planilha de cálculo 3.1.

## Cálculo dos elementos da trajetória na atmosfera

Passaremos a calcular os elementos que determinam a trajetória dos projéteis balísticos na atmosfera, quais sejam: a) o alcance máximo e a altura que o projétil atinge; b) a velocidade instantânea em qualquer ponto da trajetória; c) o tempo que o projétil permanece no ar; e d) a forma geométrica da trajetória e seu comprimento.

### 4.1 Alcance máximo e altura que o projétil atinge – fórmula geral

#### 4.1.1 Alcance máximo

O alcance máximo é definido como a distância ao longo da horizontal, compreendida entre a boca do cano da arma e o ponto de queda, quando o projétil cruza o plano horizontal do qual foi lançado. O valor do alcance máximo ( $x_{máx}$ ) é obtido experimentalmente em testes de tiro em campos de prova e registrado em tabelas; o alcance máximo depende da arma, comprimento do cano, munição utilizada (velocidade inicial e coeficiente balístico<sup>1</sup> do projétil) e ângulo de tiro,<sup>2</sup> sendo que a maior distância atingida é obtida com ângulos que se aproximam de 30°. (Franco Atirador, 2014).

- 
- 1 O cálculo do coeficiente balístico envolve a forma, massa, densidade do projétil e o diâmetro da seção transversal oposta à resistência do ar. Quanto maior for o coeficiente balístico, melhor será sua aerodinâmica, isto é, cortará com mais facilidade as capas de ar.
  - 2 Ângulo de tiro é o ângulo que o vetor velocidade faz com a horizontal, no instante que o projétil abandona a boca do cano da arma, é medido a partir da reta tangente ao ponto  $P_0(x_0, y_0)$ .

Para o cálculo do alcance máximo do projétil, no vácuo, inserimos os dados na equação formulada por Galileu e fazemos  $y = 0$ . A solução da equação possui duas raízes,  $x_0 = 0$  e  $x_f = x_{máx}$ , como segue:

- Velocidade inicial:  $v_0 = 253 \text{ m/s}$
- Aceleração da gravidade:  $g = 9,81 \text{ m/seg}^2$
- Ângulo que o vetor velocidade faz com a horizontal:  $\alpha = 30^\circ$
- Tangente:  $\tan\alpha = 0,57735$
- Cosseno:  $\cos\alpha = 0,86603$

E obtemos um alcance máximo teórico no vácuo<sup>3</sup> de 5651 metros. Ocorre que, devido à resistência do ar, a velocidade do projétil não é constante, se altera, instantaneamente, em função da distância percorrida pelo projétil, no tempo. Então, temos que substituir  $v_0$  por  $v_i = v_0 - rx$  na equação original e obtemos:

$$y = \tan \alpha x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{((v_0 - rx) \cos \alpha)^2}$$

que é a equação da trajetória na atmosfera. O fator  $r$ , para efeito de cálculo, é considerado uma constante que multiplicada por  $x$  representa a retardação, levando-se em consideração os fatores envolvidos.

Para se encontrar o valor do fator de retardação  $r$ , algebricamente, substituímos  $x$  por 1521 metros (obtido numericamente) na equação da trajetória na atmosfera e igualamos  $y = 0$ . O valor de  $r$  também pode ser calculado numericamente, com auxílio do computador, através de aproximações sucessivas, obtendo-se  $r = 0,08002003$ .

#### 4.1.2 Altura que o projétil atinge

Substituindo os valores de  $x$  e  $v_i$  na equação da trajetória na atmosfera, obtêm-se os valores de  $y$  em função de  $x$ , isso é  $y(x)$ .

## 4.2 Demonstração do cálculo numérico do alcance máximo do projétil .45ACP

Demonstração do cálculo numérico do alcance máximo do projétil .45ACP, calibre 11,43mm e massa 14,9g, BC = 0,138 (Chuck Hawks, 2014), fabricado pela Companhia Brasileira de Cartuchos, com velocidade inicial de 253m/seg.

3 Observação: no vácuo, a distância teórica máxima atingida seria obtida com ângulo de tiro de  $45^\circ$ , para a mesma arma e projétil; ou seja, 6525 metros.

Conforme já exposto, o alcance máximo dos projéteis é obtido em testes de tiro em campos de prova e registrado em tabelas; na fonte pesquisada (Informativo Técnico CBC, 2005) não consta o valor do alcance máximo do projétil em estudo; então, tivemos que calcular numericamente.

Consideremos a equação da trajetória dos projéteis balísticos na atmosfera:<sup>4</sup>

$$f(x) = \tan \alpha x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{((v_0 - rx) \cos \alpha)^2}$$

Desejamos determinar a solução  $x_{m\acute{a}x}$ , tal que:

$$f(x_{m\acute{a}x}) = \tan \alpha x_{m\acute{a}x} - \frac{g}{2} \frac{x_{m\acute{a}x}^2}{((v_0 - rx_{m\acute{a}x}) \cos \alpha)^2} = 0$$

Métodos numéricos são desenvolvidos para a solução da equação na forma  $f(x) = 0$ , onde  $f(x)$  é uma função de uma variável; para tanto, necessitamos de um valor inicial aproximado  $x_0$ . A partir desse valor inicial, geramos uma sequência de aproximações cada vez menores que convergem para a solução desejada, raiz da equação. (Arenales, 2012).

Para obter a aproximação inicial, nas imediações da raiz, recorremos a outra fonte (Franco Atirador, 2014), onde encontramos o valor de 1501m como alcance máximo para o projétil genérico .45ACP, com velocidade inicial de 249m/seg.

#### 4.2.1 Cálculo de $r$ para $v_0 = 249m/seg$ e $x_{m\acute{a}x} = 1501m \pm 0,4m$

1) Valores adotados:

$$v_0 = 249m/seg$$

$$x_{m\acute{a}x} = 1501,4m$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\tan \alpha = 0,57735$$

$$\cos \alpha = 0,86603$$

$$g = 9,81 m/seg^2$$

---

4 Fórmula geral, deduzida a partir de modelagem matemática, que equaciona os principais elementos da trajetória dos projéteis balísticos lançados nas imediações da superfície da Terra (atmosfera padrão).

2) O cálculo de  $r$  é feito através da equação deduzida:

$$r = \frac{v_0 - \frac{\sqrt{\frac{(x_{m\acute{a}x})g}{2\tan\alpha}}}{\cos\alpha}}{x_{m\acute{a}x}}$$

3) Calculamos o fator de retardação  $r$  para a munição genérica<sup>5</sup> que contém o projétil .45ACP (calibre 11,43mm, massa 14,9g e BC = 0,138), com velocidade inicial  $v_0 = 249m/seg$  e  $x_{m\acute{a}x} = 1501m \pm 0,4m$  e obtivemos o valor de  $r = 0,07898887$ , com aproximação de  $\varepsilon < |0,5| m$ .

#### 4.2.2 Cálculo do alcance máximo para $v_0 = 253m/seg$

- 1) Temos que o alcance máximo é diretamente proporcional à velocidade inicial; e também, pela Lei da ação e reação, a retardação é diretamente proporcional à velocidade inicial.
- 2) Então, adotamos 1501,4m, com  $\varepsilon < 0,5m$ , como valor inicial ( $x_0$ ) e 0,07898887 como fator de retardação inicial ( $r_0$ ), mas agora para a velocidade inicial de  $v_0 = 253m/seg$ .

Algoritmo<sup>6</sup> com aproximação na ordem crescente de unidades (metros) a partir de  $x_0$ , até o limite de  $f(x_i, r_i) = f(x_i) = 0$ ; sendo

$$f(x_i, r_i) = \tan\alpha x_i - \frac{g}{2} \frac{x_i^2}{((v_0 - r_i x_i) \cos\alpha)^2}$$

Como segue:

$$v_0 = 253m/seg$$

$$x_0 = 1501,4m \quad \wedge \quad r_0 = 0,07898887$$

$$x_1 = 1502m \quad \wedge \quad r_1 = r_0 \left( \frac{x_1}{x_0} \right) = 0,07902044$$

$$x_2 = 1503m \quad \wedge \quad r_2 = r_1 \left( \frac{x_2}{x_1} \right) = 0,07907305$$

...

$$x_{20} = 1521m = x_{m\acute{a}x} \wedge r_{20} = r_{19} \left( \frac{x_{20}}{x_{19}} \right) = 0,08002003 = r \Rightarrow f(x_{20}) = f(x_{m\acute{a}x})$$

5 Sem especificação de fabricante.

6 A palavra algoritmo deriva do nome do matemático *Al-Karismi* (c. 783-c. 850 d.C) e significa um procedimento passo a passo para resolver problemas. (Flood, 2013).

3) Assim, a partir de uma aproximação inicial ( $x_0$ ), nas imediações da raiz<sup>7</sup> ( $x_{máx}$ ), calculamos os diversos valores de  $r_i$ , por aproximações sucessivas, através de um método simplificado, a duas variáveis ( $x_i$  e  $r_i$ ); sendo que  $x_i$  segue a ordem crescente de unidades (metros) a partir de  $x_0$ ; e  $r_i$ , também na ordem crescente, se obtém por interpolação a partir de valores sequenciais de  $x_i$ , até o limite de  $f(x_i, r_i) = f(x_i) = 0$ , ponto de queda  $P_f(x_{máx}, 0)$ , cuja fórmula geral para se obter o fator de retardação é  $r_i = r_{i-1} \left( \frac{x_i}{x_{i-1}} \right)$ .

### 4.2.3 Construção da tabela com os dados numéricos do alcance máximo

Construção da tabela com os dados numéricos do alcance máximo do projétil .45ACP, por aproximações sucessivas nas imediações da raiz, na seguinte conformidade:<sup>8</sup>

- 1) Na primeira coluna colocamos os valores de  $x_i$ , na ordem crescente de unidades (metros), a partir do valor inicial ( $x_0 = 1501$ ) nas imediações da raiz;
- 2) A segunda coluna é somente auxiliar para construção do gráfico;
- 3) Na terceira coluna colocamos os valores de  $f(x_i)$ , nas imediações da raiz;
- 4) Na quarta coluna constam os valores de  $f(x_i, r_i)$  que se aproximam da raiz;
- 5) Na quinta coluna constam os valores de  $r_i$ , obtidos por interpolação;
- 6) Na sexta coluna anotamos os valores das velocidades instantâneas ( $v_i$ );
- 7) Na sétima coluna, os valores das tangentes ( $\tan\theta_i$ );
- 8) Na oitava, os ângulos em radianos  $\theta(\tan) = \text{atan}\theta$ ;
- 9) Na nona, os ângulos convertidos em graus;
- 10) Na décima coluna, o tempo decorrido em cada instante ( $t$ ).

7 Parâmetros:  $\Delta x = x_{20} - x_0 \approx 20\text{m}$ ;  $\Delta\theta = \theta_{20} - \theta_0 \approx |2^\circ|$ ; e  $\Delta t = t_{20} - t_0 \approx 0,15\text{seg}$ .

8 O alcance máximo, por aproximações sucessivas, foi obtido a partir da planilha de cálculo 4.1, através da qual foi gerado o gráfico de localização do alcance máximo nas proximidades da raiz.

Tabela 4.1 Dados numéricos do cálculo do alcance máximo do projétil.

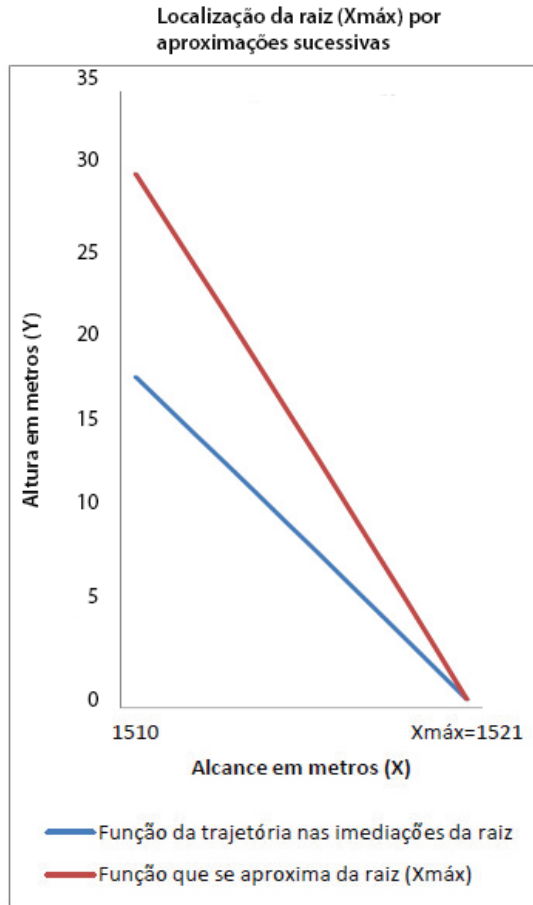
$x_i$	$f(x_i)$	$f(x_i, r_i)$	$r_i$	$v(x_i) = v_i - r x_i$	$y'(x_i)$	$\theta_i$	$\theta_i$	$t = \ln(v_0/v(x_i))/r$
m	m	m		m/s	$\tan\theta_i$	radianos	graus	seg
0	0			253,00	0,57735	0,52360	30	0,0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1501	32	51	0,07898887	132,86	-1,54131	-0,99527	-57	8,0
1502	31	49	0,07902044	132,81	-1,54446	-0,99620	-57	8,1
1503	29	47	0,07907305	132,73	-1,54972	-0,99775	-57	8,1
1504	28	44	0,07912566	132,65	-1,55499	-0,99929	-57	8,1
1505	26	42	0,07917827	132,57	-1,56027	-1,00083	-57	8,1
1506	24	39	0,07923088	132,49	-1,56557	-1,00237	-57	8,1
1507	23	37	0,07928349	132,41	-1,57088	-1,00391	-58	8,1
1508	21	34	0,07933610	132,33	-1,57621	-1,00544	-58	8,1
1509	20	32	0,07938871	132,25	-1,58155	-1,00697	-58	8,1
1510	18	29	0,07944132	132,17	-1,58691	-1,00850	-58	8,1
1511	17	27	0,07949393	132,09	-1,59228	-1,01002	-58	8,1
1512	15	24	0,07954654	132,01	-1,59767	-1,01154	-58	8,1
1513	13	22	0,07959915	131,93	-1,60307	-1,01306	-58	8,1
1514	12	19	0,07965176	131,85	-1,60848	-1,01457	-58	8,1

(continua)

**Tabela 4.1** Dados numéricos do cálculo do alcance máximo do projétil. (continuação)

$x_i$	$f(x_i)$	$f(x_i, r_i)$	$r_i$	$v(x_i) = v - r x_i$	$y'(x_i)$	$\theta_i$	$\theta_i$	$t = \ln(v_0/v(x_i))/r$
1515	10	16	0,07970437	131,77	-1,61391	-1,01608	-58	8,2
1516	9	14	0,07975698	131,69	-1,61936	-1,01759	-58	8,2
1517	7	11	0,07980959	131,61	-1,62482	-1,01909	-58	8,2
1518	5	8	0,07986220	131,53	-1,63030	-1,02059	-58	8,2
1519	4	6	0,07991481	131,45	-1,63579	-1,02209	-59	8,2
1520	2	3	0,07996742	131,37	-1,64129	-1,02358	-59	8,2
1521	0	0	0,08002003	131,29	-1,64682	-1,02508	-59	8,2



**Gráfico 4.1** Localização do alcance máximo nas proximidades da raiz.<sup>9</sup>

### 4.3 Cálculo do alcance máximo do projétil .45ACP com uso de tabela balística

Cálculo do alcance máximo, com uso de tabela balística,<sup>10</sup> do projétil .45ACP (calibre 11,43mm e massa 14,9g) fabricado pela CBC. Dados disponíveis:

Velocidade inicial:  $v_0 = 253\text{m/seg}$ ;

Coefficiente Balístico:  $c = 0,138$ ;

Ângulo de lançamento:  $\alpha = 30^\circ$ ;

<sup>9</sup> Gráfico gerado pela planilha de cálculo 4.1.

<sup>10</sup> Florentiis, 1987.

Tangente:  $\tan\alpha = 0,57735$ ;

Cosseno:  $\cos\alpha = 0,86603$ ;

Aceleração da gravidade:  $g = 9,81\text{m/seg}^2$

O método consiste em calcular numericamente, com auxílio do computador, os valores de  $x_f = x_{m\acute{a}x}$  e  $v_i = v_f$  que, substituídos na função da trajetória na atmosfera, satisfaçam a condição para  $y = 0$ , ou seja:

$$y = \tan\alpha x_f - \frac{g x_f^2}{2(\cos\alpha)^2 v_f^2} = 0$$

Dividimos o eixo  $X$  em intervalos de 100 em 100 metros e calculamos as velocidades correspondentes, a partir da fórmula dos espaços:

$$f(v_i) = f(v_0) - \frac{x}{c}$$

$f(v_0)$  e  $f(v_i)$  são funções, a partir das quais se pode calcular as velocidades instantâneas  $v_i$  correspondentes às distâncias  $x_i$ , conhecida a velocidade inicial  $v_0$  e o coeficiente balístico  $c$ , usando a tabela dos espaços,<sup>11</sup> na seguinte conformidade:

- 1) Inicialmente temos que calcular  $f(v_0)$  já que não consta da tabela; para tanto, recorreremos a uma interpolação entre os valores correspondentes às duas velocidades assinaladas antes e após  $v_0 = 253$ :

$$v_{-1} = 260 \Leftrightarrow f(v_{-1}) = 30579,5$$

$$v_0 = 253 \Leftrightarrow f(v_0) = \text{calcular}$$

$$v_1 = 240 \Leftrightarrow f(v_1) = 29060,6$$

$$260 - 240 = 20 \Leftrightarrow 30579,5 - 29060,6 = 1518,9$$

$$260 - 253 = 7 \Leftrightarrow f(v_0) = 30579,5 - \frac{7(1518,9)}{20} = 30047,9$$

Portanto  $f(v_0) = 30047,9$

- 2) Cálculo de  $f(v_{100})$ , isto é a função da velocidade  $v_i$  quando a abscissa da posição do projétil é de  $x = 100\text{m}$ :

$$f(v_{100}) = f(v_0) - \frac{x}{c} = 30047,9 - \frac{100}{0,138} = 29323,3$$

<sup>11</sup> Tabela 4.2: Tábua dos espaços.

- 3) Como 29323,3 não está na tabela, temos também que fazer uma interpolação entre os valores correspondentes às duas funções assinaladas antes e após  $f(v_{100}) = 29323,3$ :

$$f(v_{100-1}) = 30579,5 \Leftrightarrow v_{100-1} = 260$$

$$f(v_{100}) = 29323,3 \Leftrightarrow v_{100} = \text{calcular}$$

$$f(v_{100+1}) = 29060,6 \Leftrightarrow v_{100+1} = 240$$

$$30579,5 - 29060,6 = 1518,9 \Leftrightarrow 260 - 240 = 20$$

$$30579,5 - 29323,3 = 1256,2 \Leftrightarrow v_{100} = 260 - \frac{20(1256,2)}{1518,9} = 243,46$$

Assim,  $v_{100} = 243,46 \text{ m/seg}$  é a velocidade correspondente a  $x = 100 \text{ m}$ .

E continuamos calculando as velocidades correspondentes às demais distâncias (200, 300, ...1500, 1510, ...1520, ...  $x_f = x_{\text{máx}}$ ).

Observação: (100 - 1) e (100 + 1) são índices, indicando que as velocidades foram tomadas uma posição antes (-1) e uma posição após (+1) constantes da tabela (tábua dos espaços).

Em seguida substituímos os valores de  $x_i$  e  $v_i$  na equação abaixo e calculamos os valores de  $y_i$ :

$$y_i = \tan \alpha x_i - \frac{g x_i^2}{2(\cos \alpha)^2 v_i^2}$$

Assim, com auxílio da planilha de cálculo, obtemos os respectivos pontos da trajetória  $P_i(x_i, y_i)$  até atingir, por tentativas sucessivas, o ponto  $P_f(x_f, 0)$ ; quando obtivermos o ponto  $P_i(x_i, y_i) = P_f(x_f, 0)$ , teremos encontrado a velocidade final  $v_f$  e o alcance máximo  $x_{\text{máx}} = 1521 \text{ m}$ .

Fazendo  $v_f = v_0 - r x_{\text{máx}}$ , podemos calcular o valor de  $r_f$ :

$$r_f = \frac{v_0 - v_f}{x_{\text{máx}}} = r = 0,08002003$$

Uma vez calculado  $r_i$ , o substituímos na equação  $v(x) = v_0 - r_i x$  e recalculamos os valores de  $v(x_i)$  e  $y(x_i)$ . E encontramos valores aproximados de  $v(x)$  e  $y(x)$ ; isso devido ao fato de que na verdade  $r_i$  não é constante, é diretamente

proporcional à velocidade, mas para velocidades subsônicas essa diferença não é significativa.<sup>12</sup>

**Tabela 4.2** Tábua dos espaços.

Velocidades ( $v_i$ )	Função: $f(v_i) = f(v_0) - x/c$				
	0	20	40	60	80
m/seg					
100	15268,0	17756,4	20006,6	22071,2	23986,1
200	25777,2	27463,8	29060,6	30579,5	32029,8
300	33353,9	34512,4	35534,8	36406,6	37058,3
400	37548,3	37964,2	38342,4	38687,6	39004,1
500	39298,3	39582,5	39858,1	40125,7	40385,7
600	40638,6	40884,9	41124,9	41359,0	41587,9
700	41813,3	42035,6	42254,8	42471,0	42684,4
800	42895,1	43103,2	43308,8	43511,9	43712,5
900	43910,1				

Fonte: Florentiis (1987).

#### 4.3.1 Construção da tabela com os dados numéricos da trajetória a partir da planilha de cálculo

Construção da tabela com dados numéricos comparativos das trajetórias traçadas com fator de retardação variável e constante:<sup>13</sup>

- 1) Na primeira coluna constam os valores de  $x$ ;
- 2) Na segunda coluna, os valores de  $y = x \tan \alpha$ ;
- 3) Na terceira coluna, os valores de  $y_i$  em função de  $v_i$ , com fator  $r_i$  variável;
- 4) Na quarta coluna, os valores de  $y(x)$ , com fator  $r$  constante;

<sup>12</sup> Essa conclusão está de acordo com a Lei quadrática da velocidade, formulada por Newton.

<sup>13</sup> O alcance máximo com uso de tabela balística foi obtido a partir da planilha 4.2, onde também constam dados comparativos entre as velocidades e os alcances atingidos pelo projétil, considerando o fator de retardação variável e constante. Os dados numéricos da trajetória na atmosfera foram obtidos a partir da planilha de cálculo 4.3.

- 5) Na quinta coluna, os valores de  $v_i$  calculados com auxílio de tabela balística ( $c = 0,138$ );
- 6) Na sexta coluna, os valores de  $f(v_i)$
- 7) Na sétima coluna, os valores do fator variável  $r_i$ ;
- 8) Na oitava coluna, os valores da velocidade instantânea  $v(x)$ ;
- 9) Na nona coluna, os valores de  $\tan\theta_i$ ;
- 10) Na décima coluna, os ângulos  $\theta_i$  em radianos; e
- 11) Na décima primeira coluna, os ângulos  $\theta_i$  em graus.

**Tabela 4.3** Dados numéricos das trajetórias traçadas com fator de retardação variável e constante.

X	$y(\alpha, x)$	$y(v_i)$	$y(x)$	$V_i$	Função	Fator	$v(x) = v_o - rx$	$y'$	$\theta_i$	$\theta_i$
				$c = 0,138$	$f(v_i) = f(v_o) - x/c$	$r_i = (v_o - v_i)/x$	$r = 0,08002003$			
m	m	m	m	m/s	$c = 0,138$		m/s	$\tan\theta_i$	radianos	graus
0	0	0	0	253,00	30047,9	0,10000000	253,00	0,57735	0,52360	30
100	58	57	57	243,46	29323,3	0,09540000	245,00	0,55485	0,50656	29
200	115	111	111	234,21	28598,6	0,09395000	237,00	0,52763	0,48551	28
300	173	162	162	225,14	27874,0	0,09286667	228,99	0,49467	0,45938	26
400	231	209	210	216,27	27149,3	0,09182500	220,99	0,45470	0,42676	24
500	289	251	253	207,68	26424,7	0,09064000	212,99	0,40610	0,38576	22
600	346	287	290	199,14	25700,1	0,08976667	204,99	0,34684	0,33385	19
700	404	316	322	191,05	24975,4	0,08850000	196,99	0,27430	0,26771	15
800	462	337	345	182,96	24250,8	0,08755000	188,98	0,18512	0,18305	10
900	520	347	358	175,20	23526,2	0,08644444	180,98	0,07493	0,07479	4
1000	577	345	359	167,63	22801,5	0,08537000	172,98	-0,06200	-0,06192	-4
1100	635	326	344	160,06	22076,9	0,08449091	164,98	-0,23332	-0,22922	-13
1200	693	291	311	153,04	21352,2	0,08330000	156,98	-0,44927	-0,42225	-24
1300	751	232	253	146,02	20627,6	0,08229231	148,97	-0,72384	-0,62655	-36
1400	808	146	163	139,08	19903,0	0,08137143	140,97	-1,07636	-0,82216	-47
1500	866	30	34	132,64	19178,3	0,08024000	132,97	-1,53399	-0,99309	-57
1521	878	0	0	131,27	19024,4	0,08002003	131,27	-1,64815	-1,02544	-59

## 4.4 Velocidade restante, duração da trajetória e integral da velocidade

### 4.4.1 Velocidade restante em função de $x$

A dedução da velocidade final é imediata,  $v_f = v_0 - rx_f$ . Numericamente, por tentativas sucessivas, obtemos os pontos da trajetória  $P_i(x_i, y_i)$ , até atingir o ponto  $P_f(x_f, 0)$ ; quando tivermos o ponto  $P_i(x_i, y_i) = P_f(x_f, 0)$ , teremos encontrado a velocidade final  $v_f$ . A velocidade instantânea se obtém substituindo o valor de  $r$  em  $v(x) = v_0 - rx$ , isto é,  $v_i$  em função de  $x$ , em qualquer ponto da trajetória.

Componentes da velocidade: sendo  $v_i$  a velocidade instantânea resultante em qualquer ponto da trajetória, temos  $v_x = v_i \cos \theta$  e  $v_y = v_i \sin \theta$ .

### 4.4.2 Velocidade instantânea em função do tempo

Devido à resistência do ar, a velocidade do projétil muda no decorrer do tempo.  $\Delta t$  é um curto período de tempo durante o qual a velocidade é constante.  $\Delta x$  representa o deslocamento no tempo  $\Delta t$ , isto é:  $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Quanto  $\Delta t$  for infinitesimal, a velocidade é instantânea:

$$v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Assim, podemos definir a velocidade como a derivada da distância, no tempo.

Se a velocidade inicial  $v_0$  de um projétil, lançado na atmosfera, sofrer uma retardação (aceleração negativa)  $r$  por segundo, em 1 segundo a velocidade instantânea  $v_1$  será:

$$v_1 = v_0 - v_0 r = v_0(1 - r)^1$$

Seguindo esse raciocínio para uma sequência de segundos, temos:

$$v_1 = v_0(1 - r)^1$$

$$v_2 = v_0(1 - r)^2$$

...

$$v_t = v_0(1 - r)^t$$

Então, depois de  $t$  segundos a velocidade instantânea será  $v(t) = v_0(1 - r)^t$ . Em cada período  $\Delta t$ , a retardação será  $\frac{r}{n}$  e existem  $nt$  períodos de retardação em  $t$  segundos, de modo que o valor da velocidade será  $v(t) = v_0 \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{nt}$ . Se  $n \rightarrow \infty$ , a retardação será contínua e a velocidade instantânea:

$$v_i = v(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_0 \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Manipulação algébrica e mudança para a base  $e$ :

$$\left(1 - \frac{r}{n}\right)^{nt} = \left(1 + \frac{-r}{n}\right)^{nt} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{-r}}\right)^{\frac{n}{-r}}\right]^{-rt} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{-r}}\right)^{\frac{n}{-r}} = e$$

E temos a fórmula da velocidade em função do tempo:

$$v(t) = v_0(e^{-rt}) = v_0\left(\frac{1}{e^{rt}}\right)$$

#### 4.4.3 Retardação instantânea

A retardação em um determinado instante ( $-a_i$ ) é igual ao limite da variação da velocidade  $\Delta v$ , no intervalo de tempo  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ , quando  $\Delta t \rightarrow 0$ ; isto é, a retardação instantânea é a derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$-a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Assim, como a equação  $v(t) = v_0 e^{-rt}$  é uma função exponencial que exprime a velocidade instantânea  $v_i$  em função do tempo, a retardação (aceleração negativa) é obtida pela equação diferencial:

$$v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[v_0 e^{-rt}] = v_0(-r e^{-rt}) = -r(v_0 e^{-rt}) = -rv(t)$$

que é a retardação instantânea em função do tempo ( $v'(t) = -a(t) = -a_i$ ). Como  $v_0 = 253 \text{m/seg}$  e  $r = 0,08002003$ , temos que:  $-a_0 \approx -20,25 \text{m/seg}^2$ .

Nota: Para derivar  $e^{-rt}$ , multiplicamos por  $-r$ :

$$\frac{d}{dt}[e^{-rt}] = (-r)(e^{-rt})$$

#### 4.4.4. Duração da trajetória

Como  $v(t_i) = v(x_i)$ , podemos obter a fórmula para o cálculo do tempo que o projétil permanece no ar, desde a origem  $P_0(x_0, y_0)$  e  $t_0 = 0$ , substituindo  $v(t)$  por  $v(x)$  e, através de manipulação algébrica, deduzimos a fórmula do tempo, isto é, função de função:

$$t(v(x)) = \frac{\ln\left(\frac{v_0}{v(x)}\right)}{r}$$

Uma vez calculado o tempo, podemos recalcular a velocidade instantânea em função do tempo  $v_i = v(t)$ .

#### 4.4.5 Cálculo do alcance do tiro pela integral da velocidade

Também, deduzida a fórmula para o cálculo da velocidade em função do tempo  $v(t) = v_0 \left(\frac{1}{e^{rt}}\right)$ , podemos obter a função primitiva  $X(t) = v_0 \left(-\frac{1}{re^{rt}}\right)$ .

Temos que a velocidade é a derivada da distância percorrida e que como corolário a distância percorrida é a integral da velocidade; então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos recalcular o alcance do tiro:

$$X = \int_0^t v(t) dt = X(t) - X(0) = 253 \left( \left(-\frac{1}{re^{rt}}\right) - \left(-\frac{1}{r}\right) \right)$$

Nota: Para integrar  $e^{-rt}$  (integral indefinida), dividimos por  $-r$  e somamos C:

$$\int (e^{-rt}) dt = \left(\frac{1}{-r}\right) (e^{-rt}) + C$$

### 4.5 Inclinação da trajetória

Ao sair da boca do cano da arma, o projétil conserva sempre a mesma inclinação do seu eixo, enquanto a inclinação da trajetória  $\theta_i$  varia continuamente. Assim, o eixo do projétil não coincide com a trajetória nem com a reta tangente, mas forma com essa um ângulo continuamente variável ( $\delta_i = \alpha - \theta_i$ ) (Florentiis, 1987).

Vamos considerar o deslocamento de um projétil ao longo da trajetória, desde a posição inicial de lançamento  $P_0(x_0, y_0)$  até o ponto de queda  $P_f(x_f, 0)$ . Como o projétil está submetido aos efeitos da força da resistência do ar e da



força da gravidade, a intensidade da velocidade vai diminuindo exponencialmente em função do espaço percorrido, no tempo, e a direção e sentido do deslocamento vai se alterando progressivamente. Isto é, a inclinação da reta tangente à trajetória, ou derivada nos pontos  $P_i(x_i, y_i)$ , vai variando, na seguinte conformidade: à medida que o projétil vai subindo, sua função  $y(x) > 0$  vai crescendo e sua inclinação e derivada são positivas  $\theta > 0$  e  $y'(x) = \tan\theta > 0$ ; ao atingir o vértice da trajetória  $y_{máx}$ , a inclinação é igual à zero  $\theta = 0$ , assim como a tangente também é igual à zero  $\tan\theta = 0$ ; quando começa a descer, a função  $y(x) > 0$  vai decrescendo e a inclinação e derivada são negativas  $\theta < 0$  e  $y'(x) = \tan\theta < 0$ .

#### 4.5.1 Equação da reta tangente à trajetória

Para a obtenção da equação da reta tangente à trajetória em um ponto genérico, derivamos a função  $y(x)$ , cuja equação diferencial é:

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \tan \alpha x - \frac{g}{2\cos^2 \alpha} \cdot \frac{x^2}{(v_0 - rx)^2} \right]$$

Desenvolvendo, utilizando a regra da soma (subtração), a regra do quociente e a regra da cadeia, temos:

$$y'(x) = \tan \alpha - \frac{g}{2\cos^2 \alpha} \left( \frac{2x(v_0 - rx)^2 - 2x^2(v_0 - rx)(-r)}{(v_0 - rx)^4} \right)$$

E simplificando, chegamos à função derivada, que é a equação da reta tangente à trajetória em um ponto genérico  $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ :

$$y'(x) = \tan \alpha - \frac{g}{2\cos^2 \alpha} \left( \frac{v_0 x}{(v_0 - rx)^3} \right) = \tan \theta$$

#### 4.5.2 Cálculo da inclinação da trajetória

A inclinação é dada pelo ângulo  $\theta$  em qualquer ponto da trajetória: com a função  $\theta(\tan) = \tan\theta$ , se obtém os ângulos em radianos, que são convertidos em graus; veremos que para um ângulo de lançamento  $\alpha = 30^\circ$ , temos um ângulo de queda que se aproxima de  $\beta = -60^\circ$ .

## 4.6 Comprimento da trajetória

O comprimento da trajetória  $S$  foi obtido inicialmente através de medição geométrica<sup>14</sup> e, após, calculado dividindo o alcance máximo ( $x_{m\acute{a}x}$ ) pelo cosseno do ângulo de lançamento ( $\cos\alpha$ ), chegando-se ao seguinte resultado:

$$S = \frac{x_{m\acute{a}x}}{\cos \alpha} = \frac{1521}{0,86603} = 1757m$$

Essa constatação mostrou-se válida para o ângulo  $\alpha = 30^\circ$ .

Para efeito de comprovação e conferência do resultado, efetuamos o cálculo através de integração numérica; para tanto, utilizamos a Regra do Ponto Médio, soma de Riemann, chegando-se ao resultado aproximado de  $S \approx 1736m$ , para  $n = 200$ , e concluímos que quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $S \rightarrow 1757m$ , cuja fórmula é a seguinte:<sup>15</sup>

$$S(x, y) = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \Delta x [f(x_1^*) + \dots + f(x_n^*)]$$

Sendo:

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  extremos dos subintervalos

$x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$  = ponto médio de cada subintervalo

$b - a$  = intervalo de integração

$n = 200$  (número de subintervalos)

Assim:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{x_{m\acute{a}x} - x_0}{n} = \frac{1521}{200}$$

14 René Descartes (1596-1650) em seu *Discours de La Méthode* (Discurso sobre o Método), publicado em 1637, afirmou ser capaz de resolver problemas geométricos com a álgebra e que as soluções de equações algébricas também poderiam ser obtidas com construções geométricas. (Flood, 2013).

15 Os dados da integração numérica do comprimento da trajetória foram obtidos a partir da planilha de cálculo 4.4.

## 4.7 Planilha de cálculo com os dados numéricos da trajetória

Deduzidas as fórmulas que permitem o cálculo dos elementos que determinam a trajetória do projétil .45 ACP, passamos a elaborar a tabela com os dados numéricos obtidos a partir da planilha de cálculo,<sup>16</sup> na seguinte conformidade:

- 1) Estabelecemos os valores de  $x$ , de 100 em 100 metros, e inserimos na primeira coluna, acrescentando também os valores de  $x$  para o vértice da trajetória (957 m) e de  $x$  máximo (1521 m);
- 2) Nas células da segunda coluna, inserimos a fórmula que permite o cálculo de  $y$  em função de  $x$ , para o movimento retilíneo uniforme (MRU), ou seja:  $y = x \tan \alpha$ ;
- 3) Nas células da terceira coluna, inserimos a fórmula que permite o cálculo da velocidade em função de  $x$ ;
- 4) Nas células da quarta coluna, inserimos a fórmula do cálculo da trajetória para atmosfera e obtemos os diversos valores de  $y$ , em função de  $x$ ;
- 5) Nas células da quinta coluna, inserimos a função derivada que permite calcular a tangente em qualquer ponto da trajetória;
- 6) De posse dos valores das tangentes, calculamos os ângulos respectivos em radianos, que são convertidos em graus e inseridos na sexta coluna;
- 7) Na sétima coluna, constam os valores das componentes horizontais das velocidades instantâneas;
- 8) Na oitava coluna, constam os valores das componentes verticais das velocidades instantâneas;
- 9) Na nona coluna, calculamos o tempo decorrido desde a origem, em função de  $v(x)$ ;
- 10) Uma vez calculado o tempo, podemos recalcular a velocidade instantânea em função do tempo, isto é  $v(t)$ , e inserimos os valores na décima coluna;
- 11) Na décima primeira coluna, calculamos os valores da função primitiva da velocidade, que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, permitirá calcular as distâncias  $x$  em cada instante;
- 12) Na décima segunda coluna, calculamos os valores de  $S$  (comprimento da trajetória), dividindo os valores  $X$  pelo cosseno do ângulo de lançamento.

---

16 Os dados numéricos da trajetória na atmosfera foram obtidos a partir da planilha de cálculo 4.3.

**Tabela 4.4** Dados numéricos da trajetória na atmosfera.

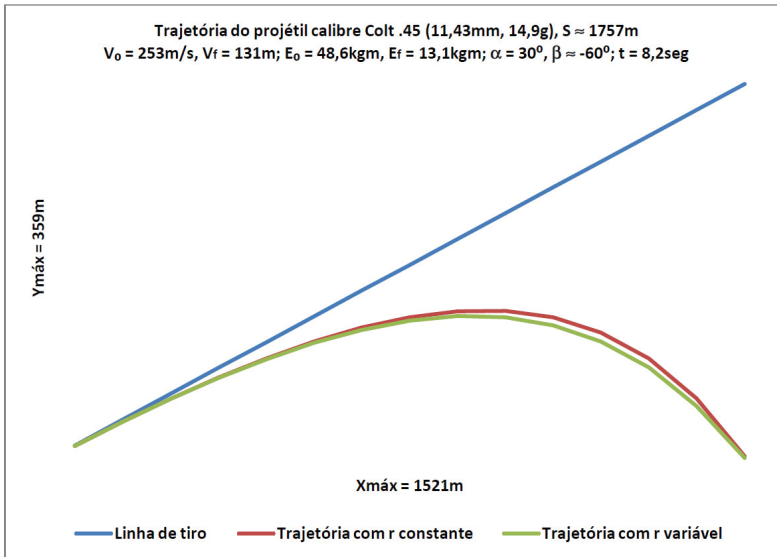
<b>X</b>	<b>Y(<math>\alpha, x</math>)</b>	<b>V(x)</b>	<b>Y(x)</b>	<b>Y'</b>	$\theta_i$	<b>Vx</b>	<b>Vy</b>	<b>t(v(x))</b>	<b>V(t)</b>	<b>X(t)</b>	<b>S = X/cos<math>\alpha</math></b>
<b>m</b>	<b>m</b>	<b>m/s</b>	<b>m</b>	<b>tan<math>\theta_i</math></b>	<b>graus</b>	<b>m/s</b>	<b>m/s</b>	<b>seg</b>	<b>m/seg</b>	<b>primitiva</b>	<b>m</b>
0	0	253	0	0,57735	30	219	126	0,0	253	-12,49687	0
100	58	245	57	0,55485	29	214	119	0,4	245	-12,10161	115
200	115	237	111	0,52763	28	210	111	0,8	237	-11,70636	231
300	173	229	162	0,49467	26	205	102	1,2	229	-11,31110	346
400	231	221	210	0,45470	24	201	91	1,7	221	-10,91584	462
500	289	213	253	0,40610	22	197	80	2,2	213	-10,52059	577
600	346	205	290	0,34684	19	194	67	2,6	205	-10,12533	693
700	404	197	322	0,27430	15	190	52	3,1	197	-9,73007	808
800	462	189	345	0,18512	10	186	34	3,6	189	-9,33482	924
900	520	181	358	0,07493	4	180	14	4,2	181	-8,93956	1039
957	553	176	360	0,00000	0	176	0	4,5	176	-8,71256	1106
1000	577	173	359	-0,06200	-4	173	-11	4,8	173	-8,54430	1155
1100	635	165	344	-0,23332	-13	161	-37	5,3	165	-8,14905	1270
1200	693	157	311	-0,44927	-24	143	-64	6,0	157	-7,75379	1386
1300	751	149	253	-0,72384	-36	121	-87	6,6	149	-7,35853	1501
1400	808	141	163	-1,07636	-47	96	-103	7,3	141	-6,96327	1617
1500	866	133	34	-1,53399	-57	73	-111	8,0	133	-6,56802	1732
1521	878	131	0	-1,73205	-60	66	-114	8,2	131	-6,48406	1757

## 4.8 Traçado da trajetória e forma geométrica

O sistema de coordenadas tem sua origem posicionada no local do lançamento, com o eixo  $X$  na horizontal, e seu sentido positivo está de acordo com o sentido da componente horizontal da velocidade inicial, e o eixo  $Y$  é vertical com seu sentido positivo para cima, tal que  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$ . As componentes da velocidade inicial são:  $v_{ox} = v_o \cos \alpha$  e  $v_{oy} = v_o \sin \alpha$ .

Estabelecemos os valores de  $x$ , graduando arbitrariamente o eixo  $X$  de 100 em 100 metros, a partir de  $P_0(x_0, y_0) = (0,0)$ . O traçado da trajetória é obtido unindo-se os pontos  $P_i(x_i, y_i)$ , que representam graficamente a posição do projétil em cada instante. A forma geométrica da trajetória é um arco de parábola modificada, com o ramo descendente menor do que o ramo ascendente. É a inclinação (ângulo  $\theta$ ) que determina a forma geométrica da trajetória.

**Gráfico 4.2** Trajetórias comparativas, com fator de retardação variável e constante.<sup>17</sup>



## 4.9 Cálculo da energia cinética no momento de impacto com o alvo

Um projétil de massa  $m$  lançado na vertical com velocidade inicial  $v_0$  possui uma energia cinética<sup>18</sup>  $E_c$  proporcional ao quadrado de sua velocidade instantânea

<sup>17</sup> Gráfico gerado a partir da planilha de cálculo 4.2.

<sup>18</sup> A Energia Cinética ( $E_c$ ) é calculada em função da velocidade instantânea ( $v_i$ ) e massa ( $m$ ) do projétil; a unidade de medida de energia cinética no SI é o joule ( $1\text{J} = 1\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}^2}$ ).

nea, expressa pela fórmula  $E_c = \frac{1}{2}mv_i^2$ . Na subida, a velocidade do projétil é desacelerada pela força gravitacional, ou seja, a energia cinética do projétil diminui.

Podemos usar a equação  $W = Fd\cos\theta$  para expressar o trabalho realizado durante um deslocamento  $d$ . No lugar de  $F$ , usamos  $mg$ , o módulo de  $F_g$ ; assim, o trabalho  $W_g$  realizado pela força gravitacional  $F_g$  é  $W_g = mgd\cos\theta$ .

Durante a subida, a força  $F_g$  tem o sentido contrário ao do deslocamento  $d$ ; então  $\theta = 180^\circ$  e a fórmula fica assim:

$$W_g = mgd \cos 180^\circ = mgd(-1) = -mgd$$

O sinal negativo indica que durante a subida a força gravitacional absorve energia cinética  $mgd$  do projétil; por isso o projétil perde velocidade na subida.

Depois que o projétil atinge a altura máxima e começa a descer, o ângulo  $\theta$  entre a força  $F_g$  e o deslocamento  $d$  é zero; como  $\theta = 0^\circ$ , a fórmula fica assim:

$$W_g = mgd \cos 0^\circ = mgd(+1) = mgd$$

Vamos considerar que  $F_y$  representa a força resultante agindo sobre o projétil na dimensão  $y$ ; o trabalho resultante é  $W = \int F_y dy$ . Uma vez que a velocidade varia com a posição e a posição varia com o tempo, pode-se usar a regra da cadeia para descrever  $\frac{dv_y}{dt} = \left(\frac{dv_y}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$  e a força resultante escrita assim:

$$F_y = ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{dv_y}{dy} \frac{dy}{dt} = m \frac{dv_y}{dy} v_y = mv_y \frac{dv_y}{dy}$$

Assim, o trabalho resultante na dimensão  $y$  pode ser escrito pela fórmula:

$$W_y = \int F_y dy = \int mv_y \frac{dv_y}{dy} dy = \int mv_y dv_y$$

E a energia cinética total é a integral da quantidade de movimento ( $mv_i$ ):

$$E_c = \int_0^{v_i} (mv_i) dv_i = \frac{1}{2}mv_i^2$$

#### 4.9.1 Construção da tabela com os dados numéricos da energia cinética do projétil

Construção da tabela com os dados numéricos da energia cinética do projétil .45ACP (11,43mm; 14,9g;  $BC = 0,138$ ;  $v_0 = 253m/seg$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ) em cada ponto da trajetória, na seguinte conformidade:<sup>19</sup>

- 1) Na primeira coluna inserimos os valores de  $x$ ;
- 2) Na segunda, os valores de  $y$ ;
- 3) Na terceira, os valores da velocidade instantânea em função de  $x$ ;
- 4) Na quarta, os valores da função derivada ( $\tan\theta_i$ );
- 5) Na quinta, os ângulos  $\theta_i$  em radianos;
- 6) Na sexta, os ângulos  $\theta_i$  em graus;
- 7) Na sétima, os senos de  $\theta_i$ ;
- 8) Na oitava, os cossenos de  $\theta_i$ ;
- 9) Na nona, os valores das componentes horizontais da velocidade ( $v_x$ );
- 10) Na décima, os valores das componentes verticais da velocidade ( $v_y$ );
- 11) Na décima primeira, os valores da energia cinética, em joules ( $J$ );
- 12) Na décima segunda, os valores da energia cinética, em quilogramas ( $kgm$ ).

---

<sup>19</sup> Na planilha 4.5, foram calculados os dados numéricos da energia cinética, no momento de impacto com o alvo, nas distâncias consideradas.

**Tabela 4.5** Dados numéricos da energia cinética do projétil .45ACP.

X	Y(x)	V <sub>i</sub> = V <sub>o</sub> - rX	Y'	θ <sub>i</sub>	θ <sub>i</sub>		Adj	Op	Vx = Vcosθ <sub>i</sub>		Vy = Vsenθ <sub>i</sub>	Ec = mv <sup>2</sup> /2	Ec = (mv <sup>2</sup> /2)/g
					inclinação	rad			grau	horizontal			
m	m	m/s	tan θ				cos θ	sen θ	m/s	m/s	m/s	J	kgm
0	0	253	0,57735	0,52360	30	0,86603	0,50000	0,50000	219	126	126	477	49
100	57	245	0,55485	0,50656	29	0,87442	0,48517	0,48517	214	119	119	447	46
200	111	237	0,52763	0,48551	28	0,88444	0,46666	0,46666	210	111	111	418	43
300	162	229	0,49467	0,45938	26	0,89633	0,44339	0,44339	205	102	102	391	40
400	210	221	0,45470	0,42676	24	0,91031	0,41392	0,41392	201	91	91	364	37
500	253	213	0,40610	0,38576	22	0,92651	0,37626	0,37626	197	80	80	338	34
600	290	205	0,34684	0,33385	19	0,94479	0,32769	0,32769	194	67	67	313	32
700	322	197	0,27430	0,26771	15	0,96438	0,26453	0,26453	190	52	52	289	29
800	345	189	0,18512	0,18305	10	0,98329	0,18203	0,18203	186	34	34	266	27
900	358	181	0,07493	0,07479	4	0,99720	0,07472	0,07472	180	14	14	244	25
1000	359	173	-0,06200	-0,06192	-4	0,99808	-0,06188	-0,06188	173	-11	-11	223	23
1100	344	165	-0,23332	-0,22922	-13	0,97384	-0,22722	-0,22722	161	-37	-37	203	21
1200	311	157	-0,44927	-0,42225	-24	0,91217	-0,40981	-0,40981	143	-64	-64	184	19
1300	253	149	-0,72384	-0,62655	-36	0,81006	-0,58635	-0,58635	121	-87	-87	165	17
1400	163	141	-1,07636	-0,82216	-47	0,68064	-0,73261	-0,73261	96	-103	-103	148	15
1500	34	133	-1,53399	-0,99309	-57	0,54610	-0,83772	-0,83772	73	-111	-111	132	13
1521	0	131	-1,64815	-1,02544	-59	0,51873	-0,85494	-0,85494	68	-112	-112	128	13





# Referências

Arenales, Selma. *Cálculo numérico*. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

Carneiro, Carlos E. I. *Introdução às técnicas do cálculo diferencial e integral*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

Chuck Hawks. *Handgun Trajectory Table*. Disponível em: <[http://www.chuckhawks.com/handgun\\_trajectory\\_table.html](http://www.chuckhawks.com/handgun_trajectory_table.html)>. Acesso em: 16 de outubro de 2014.

Companhia Brasileira de Cartuchos. *Munições para armas curtas*. Informativo Técnico nº 43. Ribeirão Pires: CBC, 2005. Disponível em: <<http://www.cbc.com.br/upload/informativos/6.pdf>>. Acesso em 10 de novembro de 2014.

Flood, Raymond. *As descobertas e a propagação do conhecimento através da vida dos Grandes Matemáticos*. São Paulo: M.Books, 2013.

Florentiis, Giuseppe. *Tecnologia delle armi da fuoco portatili, ottava edizione*. Milano: Hoelpi, 1987.

*Franco Atirador*. Disponível em: <<http://www.geocities.ws/francoatiradorwp/calibres.html>>. Acesso em: 19 de outubro de 2014.

Guardaño, Antonio J. Durán. National Geographic, edição especial *Newton e a Lei da gravidade, a força mais atrativa do Universo*. Lisboa: RBA Revistas, 2015.

- Halliday & Resnick. *Fundamentos da Física*, volume I (mecânica), volume II (gravitação, ondas e termodinâmica). Traduzido do original *Fundamentals of physics, 9th Ed.* por Ronaldo Sérgio de Biasi (reimpressão). Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- Kakalios, James. *The Physics of Superheroes, spectacular second edition*. New York: Gotham Books, 2009.
- Mathias, José Joaquim e Barros, Saulo Rêgo. *Manual Básico de Armas de Defesa*, 1ª edição. São Paulo: Magnum, 1997.
- Miller, Jr., G. Tyler. *Ciência ambiental*. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- Murolo, Afrânio Carlos. *Matemática aplicada à administração, economia e contabilidade*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- Nitta, Hideo. *Guia Manga de Física*. São Paulo: Novatec, 2010.
- Puopolo, Gerardo. *Armi da fuoco e tiro per difesa personale*. Avellino (Italia): Edizioni La Fiaccola, 1991.
- Rabello, Eraldo. *Balística Forense*, 3ª edição. Porto Alegre: Sagra Luzzatto, 1995.
- Resnick, Robert e outros. *Física 1*, 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
- Stewart, James. *Cálculo, volumes I e II*; traduzido do título original *Calculus*, 6ª edição norte americana. São Paulo: Cengage Learning, 2012.
- Vesilind, P. Arne. *Introdução à engenharia ambiental*. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- Vieira, Sonia. *Estatística básica*. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- Weinberg, Steven. *Para explicar o mundo: a descoberta da ciência moderna*. São Paulo: Companhia das Letras, 2015.

# Sobre o autor

## Otaviano de Almeida Júnior

Iniciou os estudos de cálculo da trajetória dos projéteis balísticos em 1988, através de notas de aula do Curso de Matemática I, II e II da Faculdade de Administração da Universidade Cidade São Paulo.

Estudou no Istituto Italiano di Cultura San Paolo e obteve a certificação de italiano como língua estrangeira em 2009, pela Università per Stranieri di Siena, Itália.

Possui pós-graduação em Educação Matemática (2014) pela Universidade Nove de Julho; apresentou, ao término do curso, um artigo científico intitulado “Cálculo da Trajetória dos Projéteis Balísticos na Atmosfera”.

Possui prática em campos de tiro, visita ao *stand* de provas e à fábrica de munições da Companhia Brasileira de Cartuchos (CBC).





# Apêndice A: planilhas de cálculo do Microsoft Office Excel

Para a elaboração das planilhas de cálculo foi utilizado o aplicativo Microsoft Office Excel 2007. Ink (2,55kb), conforme descrição no texto do livro, como segue:

- 1) Os dados numéricos da trajetória do projétil no vácuo foram obtidos a partir da planilha de cálculo 2.1.
- 2) A distribuição normal dos alcances dos tiros foi obtida a partir da planilha de cálculo 3.1.
- 3) A integração numérica da Função Densidade de Probabilidade obtida a partir da planilha de cálculo 3.2.
- 4) O alcance máximo do projétil, por aproximações sucessivas, foi obtido a partir da planilha de cálculo 4.1.
- 5) O alcance máximo com uso de tabela balística foi obtido a partir da planilha 4.2, onde constam também dados comparativos entre as velocidades e os alcances atingidos pelo projétil, considerando o fator  $r$  variável e constante.
- 6) Os dados numéricos da trajetória na atmosfera foram obtidos a partir da planilha 4.3.
- 7) Os dados da integração numérica do comprimento da trajetória foram obtidos a partir da planilha de cálculo 4.4.
- 8) E, finalmente, constam na planilha 4.5, os dados numéricos da energia cinética, no momento de impacto sobre o alvo, nas distâncias consideradas.

