

# 3

## CAPÍTULO

# FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta embasamento teórico para justificar as aplicações feitas neste trabalho, abordando os conceitos utilizados para o estudo proposto. São apresentados os conceitos de:

- Estampagem em chapas metálicas;
- Similitude em engenharia;
- O método dos elementos finitos;
- Características de materiais;
- O *Software* Stampack.

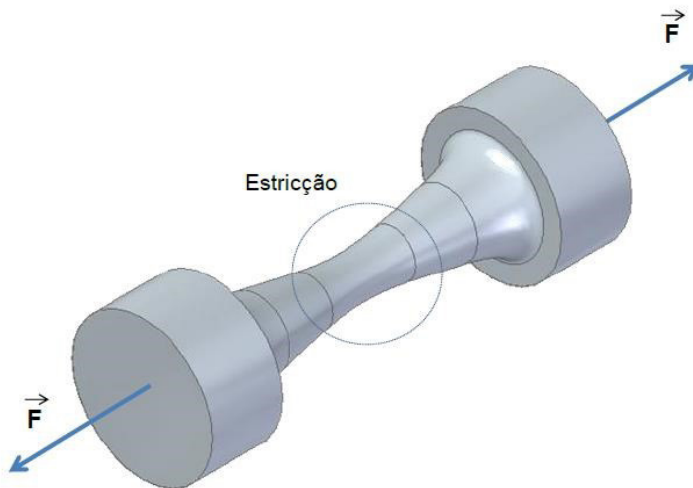
### 3.1 ESTAMPAGEM DE CHAPAS METÁLICAS

Rodrigues e Martins (2005) definem a estampagem como um processo de transformação, sem produção de cavaco, de uma chapa, no qual a chapa metálica é forçada a escoar controladamente pela atuação de um punção para o interior de uma matriz. Tem-se como resultado uma peça definida pela geometria formada entre a matriz e o punção.

Para se evitarem falhas, devem-se considerar os fatores mecânicos e metalúrgicos que controlam a estampagem. Dentre os fatores mecânicos estão as características associadas às ferramentas e ao tipo de conformação (tipo de prensa).

Dentre os fatores metalúrgicos, têm-se a composição química e a estrutura da chapa. Fatores estes que dependem dos processos de fabricação e de laminação associados aos tratamentos térmicos que afetam as propriedades mecânicas da chapa e que são de importância fundamental em sua conformabilidade.

A característica fundamental que as chapas devem apresentar para o processo de estampagem é a boa conformação. Esta é um elemento importante que materiais dúcteis apresentam. Na metalurgia, os materiais dúcteis são aqueles que sob ação de uma força podem se esticar sem se romperem. Quanto mais dúctil o material, maior é a redução de área da secção transversal do corpo ou alongamento antes da ruptura. A ductilidade pode ser medida a partir da deformação ou da estrição. Este comportamento prediz sobre a ocorrência de tensões elevadas em certos pontos de um material. A Figura 6 mostra a estrição em uma peça tracionada.



**Figura 6** – Peça tracionada com detalhe da estrição do material

A máquina responsável pela estampagem de chapas metálicas na indústria é a prensa. A prensa é um dispositivo que faz a transferência de forças e movimentos para uma ferramenta com a finalidade de moldar um material por meio da força mecânica, conformando um determinado material sólido para formar uma peça. Suas características podem ser divididas em três grupos de prensas:

- Prensas Mecânicas: Para prensas de pequena e média potência, a energia é geralmente armazenada num volante e transferida para o cursor móvel no êmbolo da prensa. As prensas mecânicas são quase sempre de ação rápida e aplicam golpes de curta duração;
- Prensas hidráulicas: são de ação mais lenta, mas podem aplicar golpes mais longos. As prensas podem ser de efeito simples ou duplo. A vantagem destas prensas está na facilidade existente para se regular a pressão do óleo, o que permite utilizar somente a força necessária e que esta seja controlada, tendo em vista que o movimento de descida e subida do martelo é executado pela ação de um ou mais cilindros hidráulicos;
- Prensas Pneumáticas: Possuem características similares às prensas hidráulicas, porém são movimentadas com o fluxo de ar comprimido, e são utilizadas em atividades onde não se exige uma carga tão elevada e a velocidade é crucial para a operação.

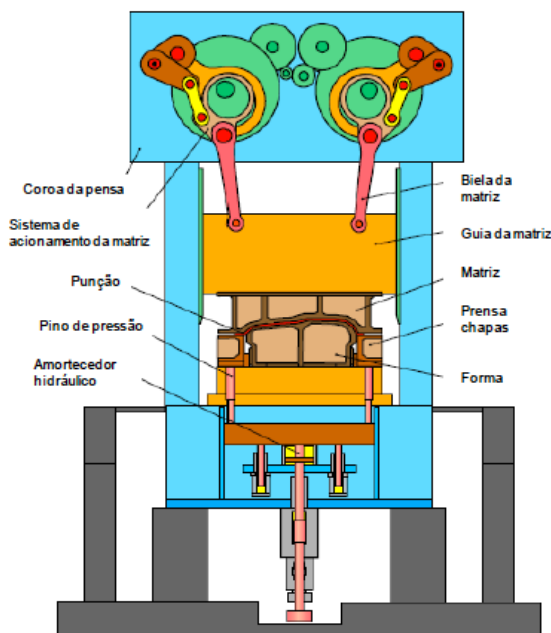
Fisicamente, todas as prensas citadas são bastante similares. A estrutura pode ser confeccionada em ferro fundido, aço fundido ou em chapa de aço soldada, conforme mostra a Figura 7.



**Figura 7** – (A) Prensa Hidráulica com carga nominal máxima de 5000kN; (B) Prensa mecânica com carga nominal máxima de 35000kN [Schuler, Inc.]

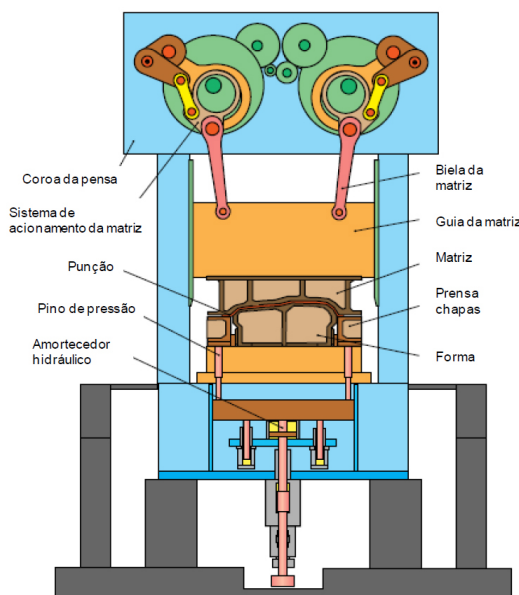
Segundo Schuler (1998), existem dois tipos de sistemas de prensagem diferentes na indústria. O sistema de dupla ação e o de ação simples.

No sistema de ação simples, somente o punção se movimenta junto com o prensa- chapas e ambos se movimentam juntos contra a matriz. Estes são os mais comuns no mercado, têm cilindros de retorno por mola, sendo, portanto, mais lentos. A Figura 8 demonstra esse tipo de equipamento.



**Figura 8** – Prensa mecânica de ação simples [Schuler, Inc.]

No sistema de dupla ação, são identificados dois movimentos: do punção e do prensa- chapas. As prensas com sistema de dupla ação são usadas em aplicação de força em ambos os sentidos dos cursos dos cilindros - no avanço e no retorno. A Figura 9 apresenta esse tipo de equipamento.



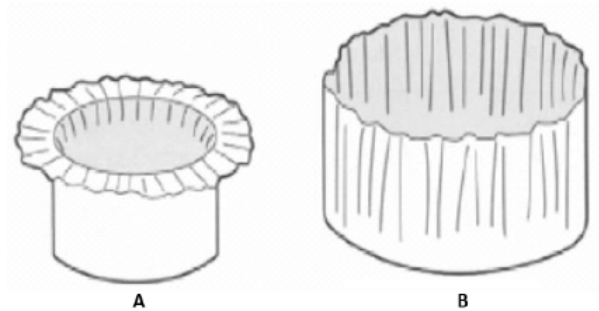
**Figura 9** – Prensa mecânica de dupla ação [Schuler, Inc.]

Um novo tipo de prensa vem sendo desenvolvida e comercializada: são as chamadas “Servo Prensa” ou Prensa Eletrônica. Elas podem ser de simples ação ou dupla ação e possuem uma característica importante, pois, podem ser programada com as características de uma Prensa Mecânica ou Prensa Hidráulica. É provável que em um futuro breve este tipo de prensa substitua grande parte das prensas mecânicas e hidráulicas atuais.

### 3.2 FREIOS DE ESTAMPAGEM

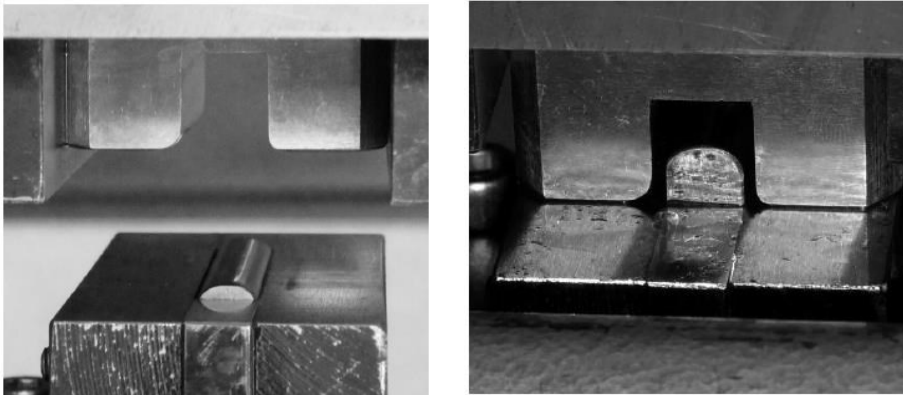
No processo comum de estampagem, sem a utilização de freios, o fluxo de material é influenciado pelo tamanho e espessura da chapa, geometria da peça estampada e força de atrito entre a chapa e o prensa-chapas. Problemas relacionados à qualidade superficial da peça estampada são difíceis de corrigir, pois, neste processo comum de estampagem, qualquer mudança em algum destes parâmetros influenciaram o sistema por completo (MUJIC, 2011).

Segundo Banabic (2009), os Freios de Estampagem são utilizados para controlar o fluxo de material para dentro da cavidade na estampagem, diminuindo a possibilidade de rugas na peça, conforme mostra a Figura 10.



**Figura 10** – (A) Rugas no flange (B) Rugas laterais, (REDDY, 2012)

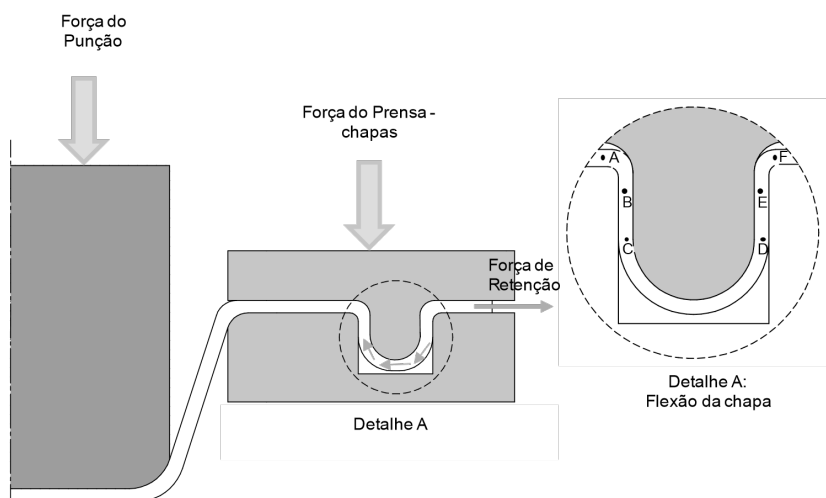
A Figura 11 representa uma foto real deste tipo de freio, onde é observada a configuração do freio semicircular junto da matriz de estampagem.



**Figura 11** – (A) Freio de estampagem e a matriz antes do contato. (B) Freio de estampagem e a matriz em contato, (ALEKSANDROVIC, 2011)

A direção da força de retenção do freio é normal ao seu eixo longitudinal, sendo gerada pelo atrito e pelas deformações de flexão e flexão inversa durante o fluxo de material ao longo do freio. A magnitude desta força de retenção varia em função da geometria do freio, da força do prensa- chapas, do coeficiente de atrito, da posição do freio em relação ao centro da cavidade e também das propriedades mecânicas do material conformado.

A Figura 12 ilustra o desenvolvimento da deformação em um freio de seção circular. A chapa sofre flexão a partir do ponto A, assumindo o raio do ombro da matriz. O deslizamento que se desenvolve em seguida, entre os pontos A e B, é responsável pela origem da força de atrito causada pela força de contato entre a chapa, o freio e a vizinhança. A partir do ponto B, a chapa se endireita e deixa de curvar-se com o raio do ombro da matriz, sofrendo a flexão inversa.


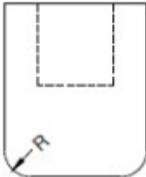

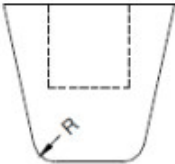
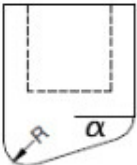


**Figura 12** – Diagrama de flexão e flexão inversa em um freio de estampagem

Esta sequência de flexão, deslizamento e flexão inversa contribui para uma parcela da FR referente ao primeiro ombro de entrada da matriz. Do mesmo modo, este processo se passa nos trechos CD e EF. O valor total da FR é composto pelas contribuições devidas ao trabalho realizado nas três sequencias de flexão, flexão inversa e deslizamento somado à força de atrito entre o freio de estampagem e a chapa estampada.

A Tabela 2 traz as geometrias e características convencionais dos freios de estampagem, as quais podem ser semicircular, retangular, triangular, trapezoidal ou assimétrica.

Tabela 2 – Geometrias das seções de freios mais usuais. a) Semicircular; b) Retangular; c) Triangular d) Trapezoidal; e) Assimétrica – XU *et al.*, 1998 *apud* DUARTE, 2007 (adaptado)

TIPO DO FREIO	CARACTERÍSTICAS
<div></div> <div>Semicircular</div>	<p>São os freios mais comumente apresentados na literatura. A FR possui duas componente uma por conta flexão e flexão inversa da chapa sobre o freio, conforme mostra o diagrama abaixo e outra resultante do trabalho para se superar a força de atrito.</p> <div><div>Deformação na superfície da chapa</div><div><div>+</div><div>Flexão</div><div>Flexão Inversa</div></div><div><div>-</div><div>Flexão</div><div>Flexão Inversa</div></div></div>
<div></div> <div>Retangular</div>	<p>Os freios retangulares são mais adequados àquelas situações em que o atrito varia, enquanto a FR se mantém constante.</p>
<div></div> <div>Triangular</div>	<p>A base mais larga deste freio, permite uma melhor resistência aos esforços cisalhantes oriundos da força que puxa a chapa através do freio. O raio R do freio triangular pode ser tão pequeno quanto maior se queira a FR. Contudo, um raio muito pequeno pode aumentar a possibilidade de danos, tanto na chapa, quanto nas ferramentas.</p>
<div></div> <div>Trapezoidal</div>	<p>O freio de seção trapezoidal pode também ser considerado como uma modificação do freio retangular ou triangular. Quando comparado com o freio triangular o desgaste da superfície inferior do freio é bastante reduzida, em decorrência da baixa pressão da chapa ao deslizar sobre o freio nesta região.</p>
<div></div> <div>Assimétrico</div>	<p>Um freio assimétrico é uma combinação de um retangular, o que possibilita um amplo espectro de valores para a FR.</p>



A geometria do freio pode ser um modo de adicionar mais flexões em um único freio ao invés da adição um único freio na mesma matriz, possibilitando que ranhuras nas peças sejam minimizadas.

### 3.3 CARACTERÍSTICAS DOS MATERIAIS

#### 3.3.1 DEFORMAÇÃO

A deformação é a variação das dimensões de um corpo devido à aplicação de forças externas à estrutura, de modo temporário ou permanente. A deformação depende basicamente da força aplicada e das propriedades físicas do corpo. No processo de prensagem a deformação ocorre, quando a chapa metálica é conformada pelo punção e se molda na matriz.

As deformações por tensão mecânica podem ser classificadas de duas formas: *Deformação Elástica* e *Deformação Plástica* e a *Deformação por Ruptura*. Nesta última o corpo se rompe em duas ou mais partes. A ruptura acontece quando o corpo de teste recebe uma tensão inicialmente maior do que aquela que produz a deformação plástica, caracterizando um processo destrutivo.

#### 3.3.2 DEFORMAÇÃO ELÁSTICA

Na deformação elástica, o corpo retorna ao seu estado original (processo reversível) após cessar o efeito da tensão. Isso acontece quando o corpo é submetido a uma força que não supere a sua tensão de elasticidade.

As tensões são calculadas a partir dos estados de força de tração, compressão, cisalhamento e torção. Estas forças podem atuar paralelamente (tensões cisalhantes) ou perpendicularmente (tensões normais) às faces planares do corpo. CALLISTER (2000)

Um corpo está sob tensão se nele agem forças externas. Tensão é a resistência interna de um corpo à deformação sob a influência de forças. MEYERS e CHAWLA (1999)

A tensão ( $\sigma$ ) é a relação dada pela força instantânea ( $F$ ) aplicada em direção perpendicular à seção reta e a área ( $A$ ) da seção reta original antes de qualquer carga, segundo a Equação 2.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2)$$

Dependendo do material, da forma do corpo e da intensidade da carga aplicada, é possível obter uma maior ou menor percepção desta deformação.

Esta deformação pode ser matematicamente definida, conforme a Equação 3:

$$\varepsilon = \frac{(l_i - l_0)}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3)$$

Em que,  $l_0$  é o comprimento original antes de qualquer força aplicada,  $l_i$  é o comprimento inicial quando se inicia a medida para comparação e  $(l_i - l_0) = \Delta l$ , representa a variação no comprimento a um dado instante inicial.

Este tipo de deformação pode ser observado quando, sobre um sólido deformável, atuam forças externas. Ao se deformar, o trabalho destas forças se armazena no corpo como energia potencial elástica, acarretando um aumento da energia interna. O sólido se comportará elasticamente se este incremento de energia puder ser realizado de forma reversível, neste caso dizemos que o sólido é elástico. As ligações químicas dos átomos do material não sofreram nenhuma reestruturação (cessando a causa cessa o efeito).

Este tipo de comportamento é apresentado até o limite elástico do material. Esse limite é o valor máximo de força que pode ser aplicada sobre um corpo para que a deformação seja elástica, uma vez superado o limite elástico o corpo entra no estado de deformação plástica.

### 3.3.3 DEFORMAÇÃO PLÁSTICA

A deformação é considerada plástica se as cargas atuantes forem retiradas do corpo e ele não voltar ao seu estado original. Neste caso, a deformação é irreversível, ou seja, as ligações químicas dos átomos do material se moveram sofrendo algum tipo de recombinação com outros átomos da vizinhança, assim os planos cristalinos se deslocaram uns em relação aos outros, ficando fora da posição de equilíbrio (cessando a causa, o efeito permanece). No processo de estampagem, esta característica do material é explorada tendo em vista que o interesse é o de se conformar uma chapa de metal sobre uma matriz, para produzir um produto definido, morfologicamente.

A capacidade que alguns materiais têm de serem deformados plasticamente sem sofrer fratura é uma propriedade muito explorada dos materiais em engenharia, pois eles podem sofrer diversas deformações sem se romperem.

### 3.3.4 MÓDULO DE ELASTICIDADE

O módulo de elasticidade de Young ( $E$ ) consiste na relação entre a tensão aplicada e a deformação elástica que ela produz. Em outras palavras, é a tensão necessária para produzir uma quantidade unitária de deformação elástica. O módulo de Young está vinculado à rigidez do material. O módulo de elasticidade é expresso em termos de tensão de tração ou de tensão de compressão e suas unidades são as mesmas para esses dois tipos de tensão. Assim representado pela conhecida lei de Hooke uniaxial, dada pela Equação 4:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (4)$$

Em virtude do elevado valor numérico de  $E$ , ele normalmente é expresso em MPa ou GPa.

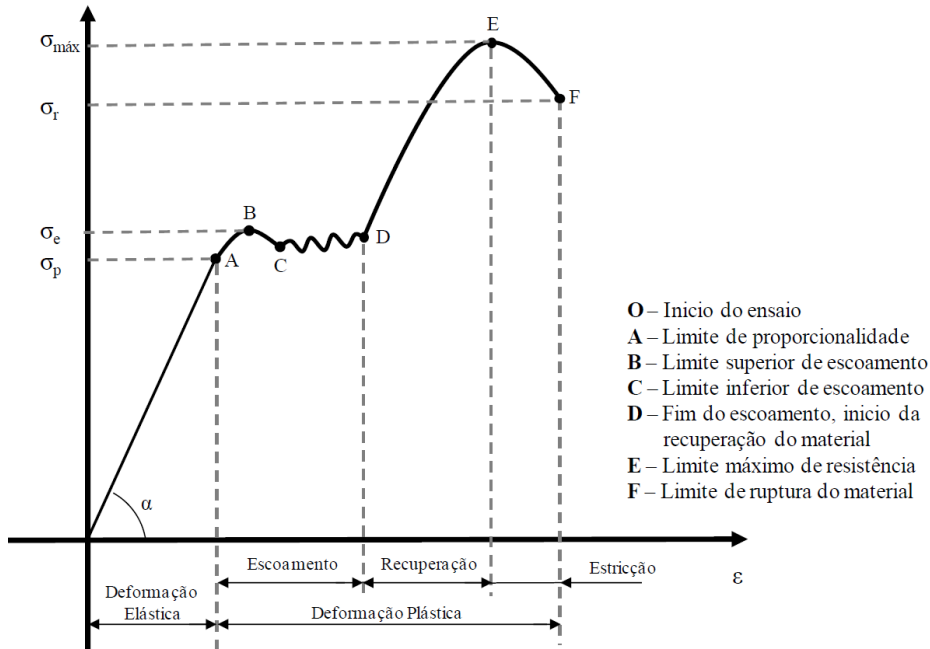
Por meio do diagrama Tensão x Deformação, é possível observar, em um ensaio de tração quais os pontos de deformação elástica, plástica e de ruptura. E para materiais que seguem a lei de Hooke (regime elástico linear). Esta é a lei da física aplicada à elasticidade de corpos, que serve para calcular a deformação causada pela força exercida sobre um corpo e é expressa pela Equação 5:

$$F = k\Delta x \quad (5)$$

Onde cada parâmetro é determinado no SI como:

- $F$  é a força aplicada no corpo [N];
- $k$  é a constante de proporcionalidade do material [N/m];
- $\Delta x$  é a variação de comprimento do corpo [m].

O módulo de Young pode ser obtido pelo coeficiente angular do gráfico Tensão x Deformação. A Figura 13 apresenta estes pontos e o  $\alpha$  que é coeficiente com o qual é possível determinar o modulo de elasticidade de um material.



**Figura 13** – Gráfico Tensão x Deformação, (MELCONIAN, 2008)

No intervalo entre 0 e A, está a reta de Hooke, onde é válida a constante de proporcionalidade e a deformação elástica.

Na conformação de chapas, à medida que o punção avança sobre a chapa conformando-a junto à matriz, os níveis de tensão de deformação avançam ponto a ponto. No ponto A o corpo sai da deformação elástica e em B ele passa a iniciar a transição para a deformação plástica, podendo atingir a ruptura em F.

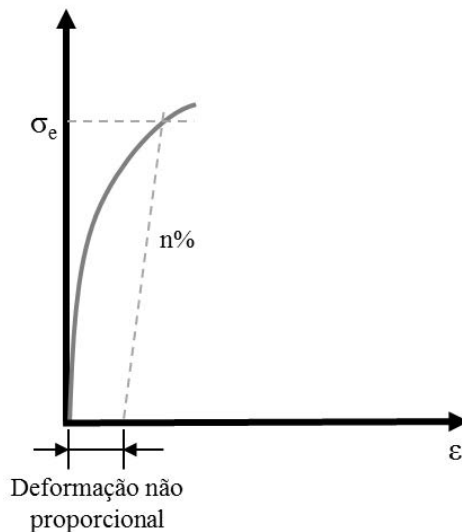
### 3.3.5 LIMITE CONVENCIONAL DE ELASTICIDADE

Em geral, um material submetido a tensões inferiores a seu limite de elasticidade sofre deformações seguindo a lei de Hooke.

A máxima tensão para a qual existe um verdadeiro comportamento elástico chama-se tensão limite de elasticidade ( $\sigma_e$ ).

Para a maioria dos materiais metálicos, além do limite elástico, os aumentos de extensão do corpo não são acompanhados por correspondentes aumentos de tensão.

Define-se tensão limite convencional de elasticidade ( $\sigma_c$ ) como sendo a tensão que corresponde uma extensão residual de n% quando se retira a força, conforme apresentado no diagrama tensão-deformação da Figura 14.



**Figura 14** – Diagrama tensão deformação, para determinação da tensão limite convencional de elasticidade ( $\sigma_e$ )

A tensão limite convencional de elasticidade é definida pela ordenada do ponto de intersecção da curva Tensão x Deformação com a reta paralela ao traço retilíneo da referida curva, partindo do ponto  $n\% = 0$ . Devido à dificuldade para localizá-lo com exatidão, em engenharia se adota um critério convencional e se considera como limite elástico a tensão que o material tem uma deformação plástica de 0,2% (ou também  $\varepsilon = 0.002$ ).

### 3.3.6 LEI DE ENCRUAMENTO ISOTRÓPICO

Sabe-se que a dureza dos metais varia conforme a deformação. Na medida em que o corpo metálico sofre alongamento, sua resistência à tração aumenta devido ao encruamento. O encruamento de um metal pode ser definido como sendo o seu endurecimento por deformação plástica. Isto leva a uma redução na mobilidade do material, que é acompanhada pela necessidade de uma tensão maior para provocar maior deformação plástica.

Por meio da realização de ensaios de tração combinados com a medição da dureza em amostras tracionadas, as grandezas são relacionadas em equações que descrevem o comportamento da superfície de escoamento do material.

Três tipos de leis de encruamento são normalmente utilizadas em testes de plasticidade mecânica: Voce, Ludwik-Nadai e Hollomon.

Voce (1955) formulou um modelo que descreve o encruamento em ligas de alumínio (Boogaard, 2005). A Equação 6 apresenta o modelo de Voce.

$$\sigma^y = \sigma^e - (\sigma^e - K)e^{-n\varepsilon_{ps}} \quad (6)$$

Onde:  $\sigma^y$  é a tensão de escoamento,  $\sigma^e$  é a tensão de escoamento inicial do material,  $K$  é o módulo de encruamento e  $n$ , o expoente de encruamento. Estes são parâmetros do material, obtidos experimentalmente, que dependem da temperatura, pois esta influência diretamente em suas características mecânicas.

Ludwik-Nadai apresentam a seguinte relação, conforme Equação 7.

$$\sigma^y = K(\varepsilon_{ps0} - \varepsilon_{ps})^n \quad (7)$$

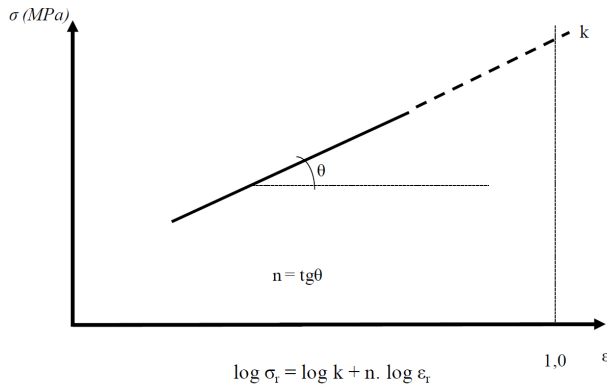
Na lei de Ludwik-Nadai o aumento de tensão é expresso pelo aumento do expoente de encruamento. O termo  $(\varepsilon_{ps0} - \varepsilon_{ps})$  representa a variação de deformação do material.

O expoente de encruamento ( $n$ ) é normalmente definido em função da Equação de Hollomon.

$$\sigma^y = K(\varepsilon_{ps})^n \quad (8)$$

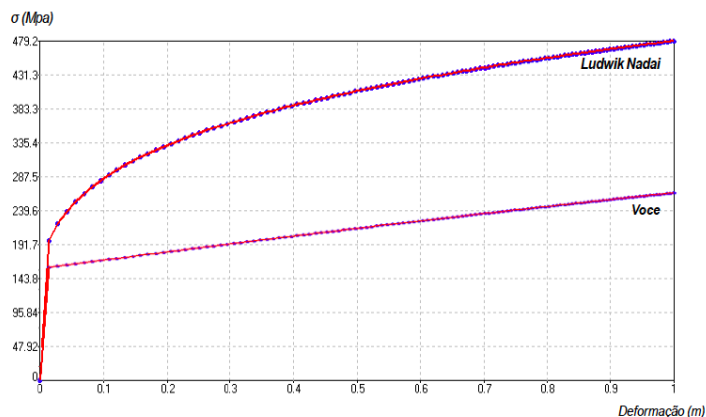
O módulo de encruamento ( $K$ ) e o expoente de encruamento ( $n$ ) podem ser determinados pela disposição dos pontos da Equação 8 em um gráfico log-log, conforme mostra a Figura 15. Ambas são características que dependem do tipo de material, forma de laminação da chapa e temperatura, pois estes parâmetros influenciam diretamente em suas características mecânicas.

Como condição para o cálculo, admite-se um deslocamento real unitário ( $\varepsilon = 1$ ). Extrapolando o gráfico, tem-se  $\sigma_r = k$  (Tensão real = Constante de resistência), e a inclinação da reta no sistema log-log representa o valor do coeficiente de encruamento. Conforme demonstra a Figura 15.



**Figura 15** – Determinação de  $K$  e  $n$

O gráfico da Figura 16 demonstra um exemplo das curvas para a lei de encruamento de Nadai e Voce, ambas plotadas em um gráfico de Tensão x Deformação.



**Figura 16** – Curvas das leis de encruamento de Ludwik- Nadai e Voce em um gráfico de Tensão x Deformação para uma aço - FeP03\_A, (STAMPACK®)

Nota-se que, para as duas leis o material apresentou comportamento similar dentro da região plástica, no entanto, após o limite de proporcionalidade as leis fornecem curvas distintas.

### 3.3.7 ANISOTROPIA

Um material isotrópico é aquele que apresenta as mesmas propriedades ao longo de qualquer direção escolhida. No entanto, devido aos processos de fabricação, os materiais tendem a apresentar propriedades que são dependentes da direção escolhida sendo assim denominados anisotrópicos.

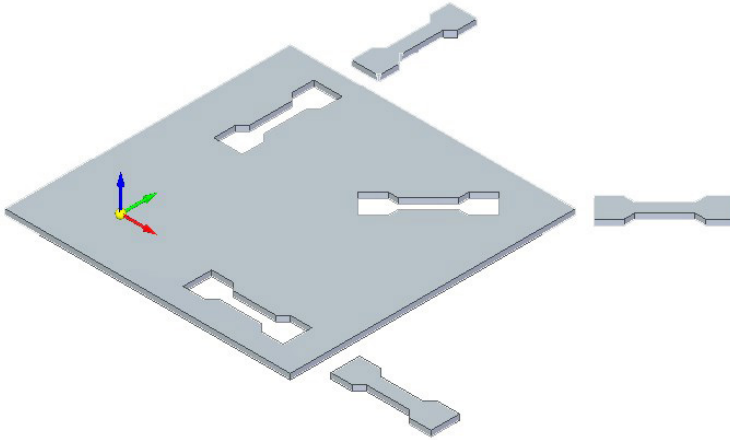
O processo de fabricação de uma chapa faz com que ela tenha propriedades mecânicas dependentes da direção de laminação. Como efeito indesejável destaca-se a formação de orelhas e como aspecto positivo tem-se o aumento da resistência na direção normal da chapa, que reduz o afinamento da espessura (MAEDA, 2009).

Para chapas submetidas à estampagem ocorre o alongamento de grãos na direção de maior deformação de tração, surgindo uma direção preferencial de orientação cristalina, que caracteriza a anisotropia. Do ponto de vista microestrutural, esta não uniformidade está relacionada ao comportamento das discordâncias dos planos cristalinos.

A anisotropia de chapas tem implicações em diversos fenômenos e requisitos na fabricação de componentes conformados, como no uso de ferramentais auxiliares para o controle do fluxo plástico como quebra-rugas (freios de estampagem) e prensa-chapas, a fim de se evitar a formação de trincas e defeitos de afinamento nas peças conformadas (MALAVOLTA, 2008).

A obtenção dos coeficientes de anisotropia normal e planar é realizada por meio do ensaio de tração, segundo a norma ASTM E517-00 ( *Standard Test Method for Plastic Strain Ratio for Sheet Metal* ).

Para determinar o índice de anisotropia de uma determinada chapa, deve-se realizar um ensaio de tração em amostras retiradas na direção de laminação 0°, 45° e 90° em relação a essa direção, conforme ilustra a Figura 17.



**Figura 17** – Corpos de prova para realização de testes para determinar a anisotropia do material

Por definição, o coeficiente de anisotropia ou coeficiente de Lankford (  $r$  ) é a razão entre a deformação verdadeira na largura ( $\varepsilon_w$ ) e na espessura ( $\varepsilon_t$ ) de um corpo de prova em um ensaio de tração, após determinada deformação longitudinal pré-definida.

Um modo de avaliar o grau de anisotropia das chapas quando deformadas plasticamente é utilizando o coeficiente de anisotropia dado pela razão entre a deformação na largura ( $\varepsilon_w$ ) e a deformação na espessura ( $\varepsilon_t$ ), representada pela Equação 9.

$$r = \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_t} = \frac{\ln\left(\frac{w}{w_0}\right)}{\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)} \quad (9)$$



Onde:  $w_0$  e  $w$  são as larguras inicial e final respectivamente e  $t$  e  $t_0$  são os comprimentos inicial e final.

Um material ideal para a estampagem seria aquele que apresentasse um valor de  $r$  igual ao infinito. Ou seja, a deformação ocorreria só na largura e no comprimento. Ligas de titânio comercial apresentam valores de  $r$  que variam de 3 a 7. Já os materiais isotrópicos apresentam  $r$  igual a 1. (CADDELL & HOSFORD, 1993).

A anisotropia pode ser planar  $\Delta r$  ou transversal (normal)  $\bar{r}$ . A anisotropia planar mede a variação de  $r$  entre as direções longitudinal e transversal da laminação ao passo que a anisotropia transversal mede a habilidade da chapa metálica, resistir a diminuição na sua espessura ao ser tracionada. É a anisotropia plástica através da espessura. Os valores de  $\Delta r$  e  $\bar{r}$  podem ser calculados pelas Equações 10 e 11 respectivamente.

$$\bar{r} = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4} \quad (10)$$

$$\Delta r = \frac{R_0 - 2R_{45} + R_{90}}{2} \quad (11)$$

Um coeficiente  $\bar{r} = 1$ , indica que existe igualdade entre a resistência a deformação na largura e na espessura. Quando  $\bar{r} > 1$ , significa que a chapa oferece maior resistência à deformação plástica na espessura. Para aços utilizados em conformações profundas, são preferidos os aços com um elevado valor para  $\bar{r}$  (alta preferência em deformar-se no plano da chapa e pouco na espessura) e um  $\Delta r$  próximo de zero (mínimo de variação planar).

### 3.3.8 CRITÉRIO DE PLASTICIDADE

Quando o estado de tensões for unidimensional, o simples critério de controlar o valor da tensão para que não ultrapasse a tensão de escoamento ou de ruptura do material é imediato. No entanto, um estado complexo de tensões exige teorias próprias para cada tipo de material.

Para outros estados de tensão, critérios de escoamento serão estabelecidos matematicamente. Dentre os modelos matemáticos que buscam representar o comportamento anisotrópico dos materiais destaca-se o critério de escoamento proposto por HILL (1948), utilizado nas simulações efetuadas neste trabalho.

O critério de Hill'48 é um dos mais conhecidos e aplicados na representação da anisotropia do material. Ele estendeu o campo de validade do critério isotrópico de Von Mises para materiais que apresentam tensões de escoamento diferentes de acordo com a direção considerada.

Uma das aplicações do critério de Hill envolve componentes em chapa e, portanto, peças em que uma das dimensões (no caso da chapa esta dimensão é a espessura) é muito inferior, quando comparada as outras duas. Neste tipo de componente é usual assumir que uma das tensões normais (a normal ao plano tangente à superfície média da chapa) é desprezível, simplificando a tensão equivalente correspondente ao critério de Hill dada pela Equação 12, (NATAL e DINIS, 2005).

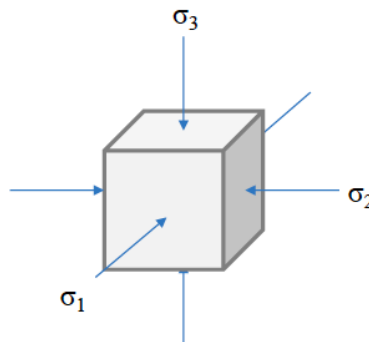
$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{F}{G+H}\sigma_2^2 + \frac{G}{G+H}\sigma_1^2 + \frac{H}{G+H}(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \quad (12)$$

Onde:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  (neste caso adotou-se  $\sigma_3$ , igual a 0 e por isto não está presente na equação) são as tensões principais para um determinado estado de tensão e  $\bar{\sigma}$  é a tensão efetiva. As variáveis F, G, e H são constantes do material que caracterizam a anisotropia, obtidas experimentalmente por meio de ensaios de tração.

Esta lei de escoamento é baseado nas seguintes suposições, Khan *et al* (1995):

– **O material é ortotrópico:** Um material é ortotrópico se suas propriedades mecânicas e térmicas são únicas e independentes nas três direções mutuamente perpendiculares, isto é, existe simetria de propriedades em relação aos três planos perpendiculares aos chamados eixos de ortotropia. A madeira, alguns tipos de cristais e materiais laminados são exemplos de materiais ortotrópicos.

– **Tensões hidrostáticas não afetam o escoamento:** Este critério é baseado nas diferenças entre as tensões principais, de modo que as tensões hidrostáticas se cancelem, não influenciando o início do escoamento. O nome tensão hidrostática é usado para enfatizar a natureza de um estado de tensão similar ao de um cubo sólido submerso por um líquido, conforme demonstra Figura 18.



**Figura 18** – Representação das tensões hidrostáticas em um corpo

A tensão hidrostática assume como condição que as tensões de compressão ou tensões de tração são iguais em todas as direções e que não há tensões de cisalhamento em qualquer plano.

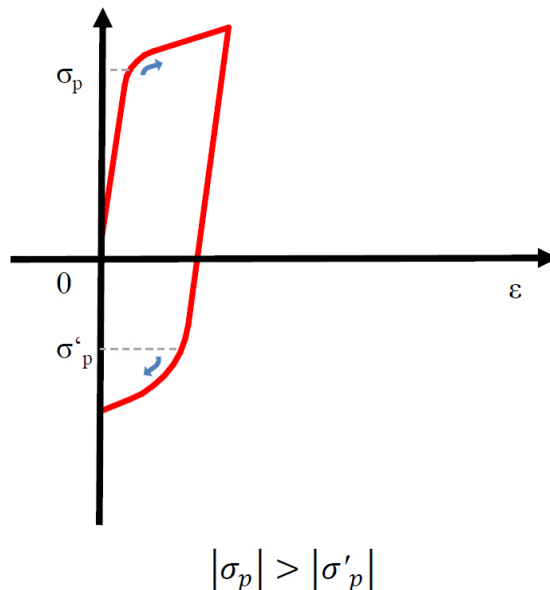
A tensão hidrostática ( $\sigma_h$ ) é uma grandeza escalar que representa a média das componentes normais dos vetores de tensão de um corpo, conforme Equação 13.

$$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (13)$$

O estado de tensão hidrostática é definido matricialmente por:

$$[\sigma_h] = \begin{bmatrix} \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_h \end{bmatrix} \quad (14)$$

– **Não há efeito Bauschinger:** É o fenômeno que caracteriza a mudança de direção do limite de elasticidade de um material, normalmente metais e suas ligas, após uma deformação plástica. Ao deformar um metal em uma direção até que seja ultrapassado o limite de elasticidade e posteriormente deformando-o na direção contrária, seu limite de proporcionalidade nesta última direção é menor devido ao encruamento do material, conforme mostra a Figura 19.



**Figura 19** – Representação gráfica do efeito Bauschinger

Outros critérios como: Hill'79 e Hill'90 (ambos desenvolvidos por Hill), Logan e Hosford, Barlat e Lian entre outros. Cada um deles foi desenvolvido considerando suas aplicações em sistemas de tensões e cristalografias metálicas distintas.

## 3.4 SIMILITUDE EM ENGENHARIA

A metodologia desenvolvida nesta investigação utilizou uma abordagem que associa similitude em engenharia com bases de dados obtidos via simulações em elementos finitos.

### 3.4.1 DESCRIÇÃO DA METODOLOGIA

Segundo Duarte (2007) os principais objetivos da teoria da similitude são estabelecer as relações necessárias para permitir previsões confiáveis do comportamento de um modelo físico e a definir o tipo de relação existente entre os parâmetros envolvidos em qualquer fenômeno real.

Esta teoria é desenvolvida por meio da análise dimensional, que está baseada nos métodos de medições e de observações de um problema físico qualquer. Esta teoria inclui a consideração das condições sob as quais dois sistemas físicos separados se comportariam de modo similar.

Segundo Murphy (1950), a análise dimensional é uma importante ferramenta analítica utilizada para estudar fenômenos físicos. Dois axiomas inerentes ao método são apresentados para a avaliação das grandezas envolvidas.

**Axioma 1.** Absoluta igualdade numérica das quantidades pode existir apenas quando as quantidades são semelhantes qualitativamente.

Isso significa que a relação entre duas variáveis pode ser dada apenas quando tiverem a mesma dimensão. Por exemplo, se uma variável é mensurada em termos de força, ela pode ser igual somente a outra variável que também representa força.

**Axioma 2.** A razão entre a magnitude de duas variáveis independe das unidades usadas, ou seja, se as medidas de ambas foram feitas em polegadas, pés, ou metros.

Quando combinada com procedimentos experimentais, a análise dimensional pode ser utilizada para fornecer resultados quantitativos entre determinadas variáveis e equações preditivas precisas.

Com a finalidade de se estabelecer um limite de validade de aplicação, as equações podem ser classificadas em uma base dimensional como se segue:

1. Não Homogênea;
2. Homogênea: Restrita; Geral.

As primeiras são geralmente equações empíricas com pequena faixa de aplicação, enquanto nas equações homogêneas, todos os termos se reduzem à mesma dimensão.

Segundo Murphy (1950) se uma equação apresenta mais de dois termos e suas dimensões não são idênticas, a equação é dita não homogênea. Como exemplo tem-se a equação 15.

$$s + v = \frac{1}{2}at^2 + at \quad (15)$$

Onde:

- $s$  é a distância que um corpo uniformemente acelerado percorre;
- $v$  é a velocidade final;
- $a$  é a aceleração;
- $t$  é o tempo de aceleração a partir do repouso.

A equação é dita não homogênea quando alguns termos possuem a dimensão L, enquanto outras apresentam a dimensão  $LT^{-1}$ .

$$L + LT^{-1} \doteq (LT^{-2})T^2 + (LT^{-2})T \quad (16)$$

$$L + LT^{-1} \doteq L + LT^{-1} \quad (17)$$

Em geral, as equações não homogêneas são desenvolvidas empiricamente e apresentam resultados confiáveis em um único sistema de unidades e para uma pequena gama de variáveis.

Se todos os termos de uma equação forem reduzidos para a mesma dimensão, a equação é dita homogênea. Como exemplo, tem-se a equação para determinar a distância percorrida por um corpo, partindo do repouso, em queda livre.

$$s = 4,9t^2 \quad (18)$$

Forma reduzida:

$$L \doteq T^2 \quad (19)$$

A Equação 18 é válida sob certas condições, logo o coeficiente deve ter dimensão, neste exemplo,  $LT^{-2}$ . A mesma equação é escrita da seguinte forma.

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (20)$$

Neste caso a dimensão da equação será:

$$L \doteq LT^{-2}T^2 \quad (21)$$

ou

$$L \doteq L \quad (22)$$

tendo em vista que o coeficiente  $\frac{1}{2}$  é adimensional.

Isso mostra que o coeficiente 4,9 é numericamente igual a  $\frac{1}{2}g$ . Desta forma, a Equação 18 é válida somente se forem utilizadas as grandezas no Sistema Internacional de Medidas (SI). No entanto a Equação 20 é válida para qualquer sistema de unidades. Equações que contém uma constante dimensional, como a Equação 18, são geralmente válidas em um único sistema de unidades de medidas e são conhecidas como equações homogêneas restritas.

As equações homogêneas gerais são aquelas válidas para qualquer sistema de unidades, como a Equação 20, e obviamente não devem conter constantes com dimensão.

Pode-se afirmar, em decorrência dos dois axiomas citados, que geralmente qualquer grandeza secundária mensurável ( $\alpha$ ) pode ser expressa dimensionalmente em termos de quantidades primárias ( $a_i$ ) apropriadamente escolhidas. Estas últimas afetam a magnitude das quantidades secundárias. É possível, portanto, estabelecer a relação geral entre as quantidades primárias como se segue:

$$\alpha = f(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n) \quad (23)$$

Onde:

- $\alpha$  é o número que representa a magnitude da grandeza secundária;
- $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$  são os números denotando as magnitudes das quantidades primárias significativamente envolvidas.

O problema passará a ser o estabelecimento da natureza da função.

Segundo Murphy (1950), utilizando procedimento análogo ao apresentado anteriormente é possível demonstrar, que:

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n) = C_\alpha \cdot a_1^{C_1} \cdot a_1^{C_2} \cdot a_1^{C_3} \cdot a_1^{C_4} \dots a_1^{C_n} \quad (24)$$

Onde:

- $C_\alpha$  é um coeficiente adimensional, que pode ser determinado experimentalmente;

- $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  são os expoentes a serem obtidos, podendo ser determinados experimentalmente e/ou via análise dimensional.

A determinação dos expoentes  $c_i$ , utilizando a análise dimensional, pode ser feita desde que o número de quantidades primárias não exceda o número de dimensões envolvidas no problema. Isto, pois não haveria equações auxiliares suficientes para avaliar todos os expoentes  $C_i$ .

### 3.4.2 OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES PREDITIVAS

Segundo Murphy (1950), existem dois métodos gerais que são utilizados no desenvolvimento de equações preditivas. O primeiro método, o experimental, consiste em estabelecer, por meio de observações cuidadosas e de medições, o efeito das variáveis pertinentes sobre a grandeza a ser predita pela equação. O outro método, o analítico, consiste na aplicação das leis naturais que são pertinentes ao problema estudado.

Duarte (2007) complementa e cita o método numérico, empregado em situações de alta complexidade em que uma solução analítica fechada é inviável ou mesmo impossível. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um exemplo de uma técnica de análise numérica que tem por objetivo obter soluções aproximadas de problemas regidos por equações diferenciais. O crescente aumento da capacidade de processamento dos computadores tem possibilitado como alternativa às soluções analíticas, a preservação da complexidade do modelo e a utilização de técnicas aproximadas de resolução, nas quais se insere o MEF.

Conforme citado anteriormente, a forma geral de qualquer equação pode ser determinada por análise dimensional. No entanto, esta técnica não permite uma direta avaliação de  $C_\alpha$  e, em muitos casos, não fornece resultado para os expoentes. Deste modo, é necessário recorrer a experimentos a fim de determinar a equação preditiva.

Para isso qualquer um dos três processos gerais pode ser seguido, considerando como exemplo o problema de um corpo em queda livre.

No primeiro método, a grandeza secundária é expressa como uma função das grandezas primárias.

$$s = f(v, t, g) \quad (25)$$

No segundo procedimento, a relação entre as variáveis pode ser obtida pela análise dimensional, levando a uma expressão, do tipo:

$$s = C_\alpha v_0^{c_1} g^{c_2} t^{c_3} \quad (26)$$

No terceiro procedimento, uma continuação da análise dimensional da Equação 26 para se obter a Equação 27 podem-se eliminar quantidades desconhecidas e reduzir-se o número de experimentos. Como  $s$ ,  $v$  e  $t$ , na Equação 27 são quantidades mensuráveis e  $g$  é conhecida, somente  $C_\alpha$  e  $C_1$  permanecem desconhecidas.

$$\frac{s}{vt} = C_\alpha \left( \frac{gt}{v} \right)^{C_1} \quad (27)$$

Nos casos em que  $C_\alpha$  é constante, somente duas séries de observações serão necessárias. Caso contrário, se  $C_\alpha$  for dependente das variáveis primárias, uma série de medidas deverá ser coletada. Desta série de observações, é possível construir um gráfico em que valores de  $s$  podem ser utilizados como ordenadas e como abscissas. Deste gráfico é possível se obter  $C_\alpha$  e  $C_1$ .

O termo  $C_\alpha$  pode ser expresso como uma função de grupos de variáveis adimensionais que influenciam o fenômeno em estudo que são conhecidos como Pi-terms (ou  $\pi$ -terms) e são usualmente expressos por  $\pi_i$ . Assim, um determinado fenômeno pode ser expresso, em termos gerais, da seguinte maneira:

$$\pi_1 = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \dots, \pi_s) \quad (28)$$

Onde  $s$  representa o número total de grupos adimensionais envolvidos no problema estudado.

O número e grupos adimensionais, ou  $\pi$ -terms, requeridos para expressar um fenômeno podem ser determinados pelo Teorema Pi de Buckingham.

Este Teorema determina que o número de termos adimensionais necessários para expressar a relação entre as variáveis em qualquer fenômeno estudado é igual ao número de variáveis envolvidas, menos o número de dimensões que estas quantidades podem ser medidas.

Isto pode ser resumido pela equação definida pelo teorema:

$$s = n - b \quad (29)$$

Onde:

- $s$  é o número de  $\pi$ -terms;
- $n$  é igual ao número de quantidades envolvidas;
- $b$  é o número de dimensões básicas envolvidas.

As únicas restrições referentes aos  $\pi$ -terms são as de que sejam adimensionais e linearmente independentes (MURPHY, 1950).



Segundo Duarte (2007), é possível afirmar ainda que um novo  $\pi$ -termo pode ser obtido pela combinação de outros  $\pi$ -termos, através de multiplicações ou divisões mútuas, possibilitando assim redução no número de experimentos ou simulações.

O procedimento mais vantajoso na análise da função está na possibilidade de estudar o comportamento dos parâmetros de modo que todos os  $\pi$ -termos envolvidos na função, exceto um, sejam mantidos constantes, enquanto se varia aquele em relação ao qual se estabelecerá a relação com  $\pi_1$ . Recorre-se a este procedimento para cada  $\pi$ -termo da função e a relação resultante entre  $\pi_1$  e os demais  $\pi$ -termos, individualmente, são combinadas para se obter uma relação geral (DUARTE, 2007).

## 3.5 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos (MEF) é um método numérico aproximado para análise de diversos fenômenos físicos que ocorrem em meios contínuos e que são descritos por meio de equações diferenciais parciais, com determinadas condições de contorno que são resolvidas por meio de equações matriciais.

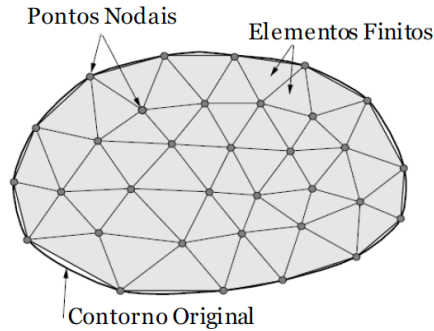
### 3.5.1 DESCRIÇÃO GERAL DO MÉTODO

Segundo Lotti (2006) trabalhando em um projeto de aeronaves para o Boeing, em 1956, Turner, Clough, Martins e Topp, propuseram um método de análise estrutural similar ao MEF. Mais tarde, em 1960, estes autores utilizaram pela primeira vez o nome de Método dos Elementos Finitos. A partir de então, seu desenvolvimento foi exponencial, sendo aplicado em diversas áreas da Engenharia, Medicina, Odontologia e áreas afins.

Para Segerlind (1976) o conceito mais fundamental do MEF é que toda função contínua, seja ela de temperatura, pressão ou deslocamento, pode ser aproximada por um modelo composto de um conjunto de funções contínuas, dentro de certo intervalo, definido sobre um número finito de subdomínios.

Complementarmente, Hubner (1982) afirma que o método de elementos finitos é uma técnica de análise numérica para obter soluções aproximadas para uma ampla variedade de problemas.

Segundo Souza (2003) a ideia principal do Método dos Elementos Finitos consiste em se dividir o domínio, meio contínuo, do problema em sub-regiões de geometria simples (formato triangular, quadrilateral, cúbico, etc.), conforme ilustra esquematicamente a Figura 20. Esta ideia é bastante utilizada na engenharia, onde usualmente tenta-se resolver um problema complexo, subdividindo-o em uma série de problemas mais simples.

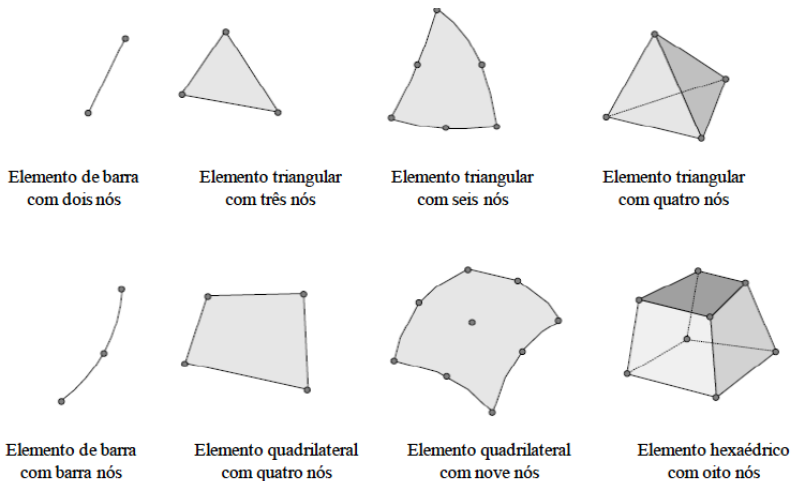


**Figura 20** – Malha triangular plana, (SOUZA, 2003)

Devido ao fato das sub-regiões apresentarem dimensões finitas, elas são chamadas “elementos finitos”, em contraste aos elementos infinitesimais utilizados no cálculo diferencial e integral. Por este motivo o nome “Método dos Elementos Finitos” foi estabelecido por Ray Clough (SOUZA, 2003).

Segundo Zienkiewicz (1989), este conceito ajuda a reconstruir a relação entre a força e o deslocamento de uma estrutura, a partir dos elementos básicos que a compõem.

Diversos tipos de elementos podem ser utilizados, considerando formas geométricas diversas e em o tipo e da dimensão do problema (unidimensional, bidimensional, ou tridimensional). A Figura 21 apresenta a geometria de vários tipos de elementos utilizados no MEF.



**Figura 21** – Diferentes tipos de elementos finitos, (SOUZA, 2003)

Segundo Souza (2003), a quantidade de nós, o tamanho e tipo de elementos são os fatores que definem a precisão do método. Um dos aspectos mais importantes do MEF diz respeito a sua convergência. Embora se trate de um método aproximado, na medida em que o tamanho dos elementos finitos tende a zero e, conseqüentemente, a quantidade de nós tende a infinito, a solução obtida converge para a solução exata do problema. Ou seja, quanto menor for o tamanho e maior for o número de elementos em uma determinada malha, a tendência é que mais precisos sejam os resultados da análise.

Dentro de cada elemento, se distingue uma série de pontos representativos chamados nós. Dois nós são adjacentes se pertencerem ao mesmo elemento finito, e um nó na fronteira de um elemento finito pode pertencer a vários elementos. O conjunto de nós considerando suas relações de adjacência se chama malha.

Os cálculos são realizados sobre uma malha criada a partir da discretização do domínio estudado. Estas malhas são geradas com o auxílio de *softwares* que relacionam o valor de um conjunto de variáveis definidas em cada nó e denominadas graus de liberdade. O conjunto de relações entre o valor de uma determinada variável entre os nós pode ser escrito na forma de sistemas lineares, sendo que a matriz deste sistema de equações é denominada matriz de rigidez do sistema e o número de equações deste sistema é proporcional ao número de nós.

O MEF assume que o comportamento de cada elemento é definido por um número finito de parâmetros -graus de liberdade- associado aos pontos que se unem ao restante dos elementos do seu entorno.

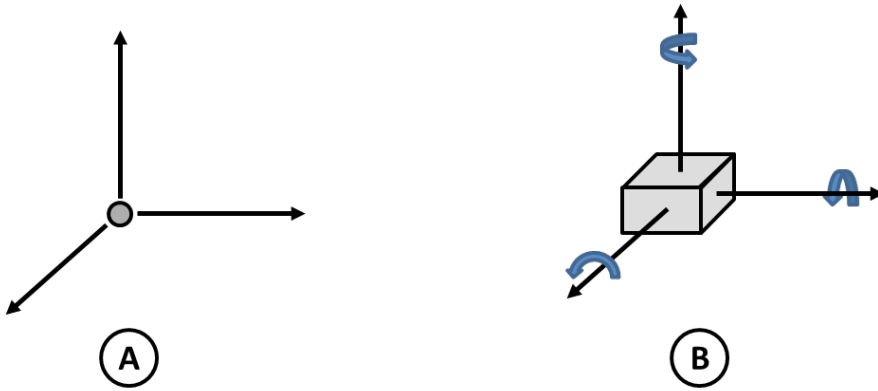
Segundo Souza (2003), em problemas de mecânica dos sólidos (análise de Tensões x Deformação) os graus de liberdade dos nós correspondem aos possíveis movimentos que estes podem sofrer.

O conceito de grau de liberdade tem sua origem na ideia do movimento de partículas em problemas da mecânica, conforme ilustra a Figura 22.

Neste conceito se considera que:

Um ponto apresenta, no espaço tridimensional, três graus de liberdade, quais sejam três possíveis movimentos de translação;

De forma mais abrangente, um corpo rígido apresenta, no espaço tridimensional, seis graus de liberdade, sendo três possíveis movimentos de translação e três possíveis movimentos de rotação.



**Figura 22** – Graus de liberdade. A) graus de liberdade de um ponto; B) graus de liberdade de um corpo rígido

O tipo de elemento a se utilizar é o bloco básico na análise por elementos finitos. Tendo em vista que existem diversos tipos de elementos, o elemento a se utilizar depende do tipo de objeto que será modelado e do tipo de análise a ser feita.

Para Gandhi (1996), a maior vantagem deste método é a capacidade de representar detalhes geométricos, materiais da estrutura, assim como a aplicação de múltiplos conceitos de projetos.

Por meio deste método é possível resolver muitos problemas, de diferentes campos, por exemplo:

3. Torção em barras de seção irregular;
4. Análise de tensões em placas de diferentes formas e sob cargas arbitrárias;
5. Análise dinâmica de treliças;
6. Problemas de vibração;
7. Transferência de calor ;
8. Acústica;
9. Outros.

Nota-se que a grande gama de aplicações torna o MEF uma ferramenta importante para se resolver problemas distintos, descritos por equações diferenciais parciais, com determinadas condições de contorno.

### 3.5.2 PASSOS PARA A ANÁLISE E SOLUÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

A análise em elementos finitos pode ser resumida nos seguintes passos, conforme ilustra Figura 23.



**Figura 23** – Passos para solução em Elementos Finitos

### 3.5.2.1 O PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO DO MÉTODO

O processo de conversão da estrutura em elementos finitos denomina-se discretização. Como apresentado anteriormente, cada elemento é estudado de maneira isolada para se aplicar as teorias clássicas de cálculo.

Não existe uma teoria que defina a escolha do tipo de elemento a ser utilizado na discretização da peça. Neste ponto, a experiência do modelista fica evidente, já que as escolhas da quantidade e da geometria dos elementos estão relacionadas com a sensibilidade da resposta obtida. Lembrando que o MEF é um procedimento matemático para se obter soluções aproximadas, a precisão dos resultados aumenta com o número de elementos atribuídos à malha.

A Figura 24 demonstra diferentes estruturas discretizadas, sendo possível observar a grande variedade de exemplos em que o MEF pode ser aplicado.



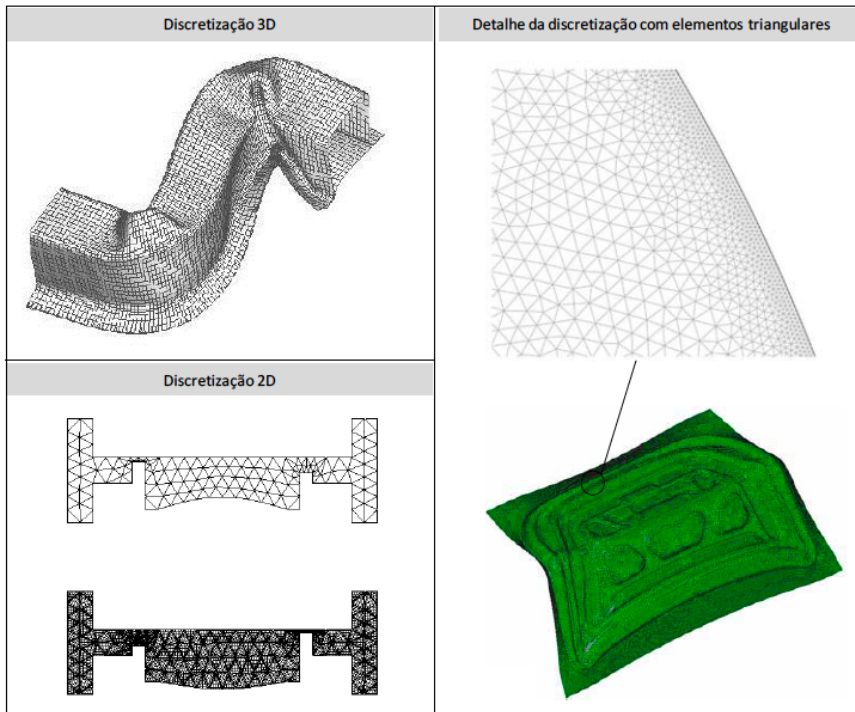
**Figura 24** – Discretização de diferentes sólidos e estruturas com o MEF, (ONÂTE, 2009)

### 3.5.2.2 DEFINIÇÃO DAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

Neste item são definidas as seguintes características dos elementos: formato, tamanho e posicionamento dos nós. Como apresentado anteriormente, estes elementos podem ser bidimensionais ou tridimensionais, conforme a necessidade da aplicação.

Os elementos tridimensionais são compostos por tetraedros e hexaedros, sendo que o campo de deslocamento nodal está definido no espaço.

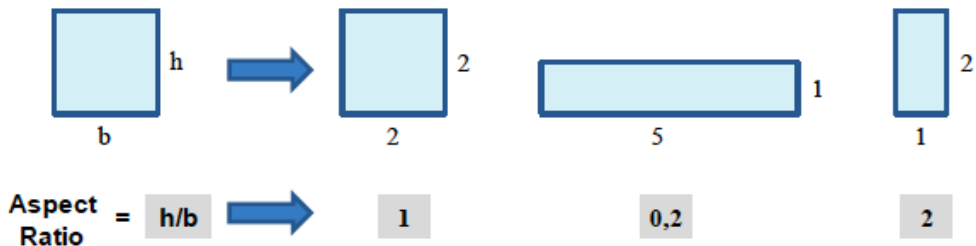
Os elementos bidimensionais são utilizados para deformações planas, o campo de deslocamento nodal está localizado em um plano. Isto significa que cada um dos nós apresentam dois graus de liberdade. A Figura 25 mostra exemplos de peças discretizadas, com elementos bidimensionais e tridimensionais e diferentes tipos de malha.



**Figura 25** – Exemplos de peças discretizadas

No momento da discretização da peça, infinitas podem ser as combinações de tamanhos e tipos de elementos utilizados. Outro fator importante, além da geometria do elemento, é a relação de aspecto, também conhecida como *aspect ratio*. A relação de aspecto mede quanto uma das dimensões do elemento é maior

que a outra. Para simulações 2D, com elementos retangulares como os utilizados neste trabalho, esta medida pode ser resumida pela razão entre a altura e a largura do retângulo, conforme ilustra a Figura 26.



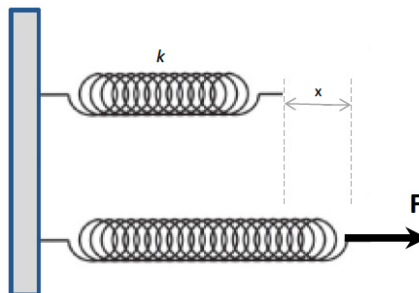
**Figura 26** – Relação de aspecto de elementos retangulares

STAMPACK (2003) recomenda que este valor deve estar entre 0,5 e 1 para que problemas de convergência sejam evitados.

### 3.5.2.3 MONTAGEM DAS MATRIZES DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS

Segundo Filho (2002), a análise matricial de estrutura e, em consequência o MEF, tem como ponto de partida a relação entre forças nodais para cada elemento individual. Esta ideia fundamental está relacionada ao conceito de rigidez, sendo a mesma ideia aplicada a elementos elásticos. A constante elástica da mola é a medida quantitativa da rigidez da mola, expressa pela relação entre força aplicada e deslocamento medido na extremidade da mola.

Pela lei de Hooke, a constante elástica da mola pode ser entendida como um coeficiente de rigidez, pois é o coeficiente que relaciona força e deslocamento na relação, onde:  $F$  é a força aplicada na mola,  $k$  é conhecido como a constante elástica da mola e  $x$  é a variação de comprimento da mola. Conforme ilustra Figura 27.



**Figura 27** – Força externa aplicada na mola

Utilizando o conceito de rigidez da mola, é possível determinar a configuração deformada de um conjunto de molas sob ação de uma força externa.

A rigidez da estrutura pode ser contabilizada a partir da rigidez de cada um de seus elementos (FILHO, 2002).

Analogamente a lei de Hooke, em uma estrutura constituída por apenas um elemento, fixada em um nó, a força externa  $F$  causa na estrutura um deslocamento  $U$ , que é linearmente proporcional a  $F$ . Como a estrutura é idêntica ao elemento, a rigidez da estrutura é igual à rigidez do elemento. Assim:

$$F = K \cdot U \quad (30)$$

Onde  $K = k$ , sendo  $k$  a constante elástica da mola, que contabiliza a rigidez da estrutura.

Nota-se que se conhecida a força aplicada na estrutura e a sua rigidez, a resposta será um componente do deslocamento.

$$U = F / K \quad (31)$$

Nas estruturas reais existem muitos componentes de deslocamento e muitos componentes de rigidez. A relação geral linear entre todas as forças externas e todos os deslocamentos nodais é melhor expressa em notação matricial. Conforme equação 32.

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\} \quad (32)$$

Onde:

$\{F\}$ : Matriz coluna com todas as cargas nodais;

$[K]$ : Matriz de rigidez da estrutura;

$\{U\}$ : Matriz coluna com todos os deslocamentos nodais.

#### 3.5.2.4 APLICAR AS CARGAS

As forças externas concentradas ou uniformes e momentos são especificados neste passo. As forças aplicadas em cada nó serão uma das variáveis de input na matriz de rigidez do sistema.

#### 3.5.2.5 DEFINIR AS CONDIÇÕES DE CONTORNO

É definido o domínio que será estudado e as condições iniciais. Por exemplo, se existe o deslocamento de algum nó provocado por cargas iniciais.



### 3.5.2.6 SOLUCIONAR O SISTEMA DE EQUAÇÕES

A sequência dos passos descritos conduz a um sistema de equações algébricas, em que são calculados os deslocamentos nodais de cada elemento da estrutura estudada. Este cálculo pode ser feito por programas que trabalham com o método implícito ou explícito. As diferenças de cada um destes métodos estão detalhadas na próxima secção.

### 3.5.2.6 CALCULAR OS ESFORÇOS

As equações são calculadas por computador, por meio de um software de elementos finitos, onde o usuário pode visualizar os esforços, reações, deformações ou outras informações que se relacionem com estas grandezas, por meio de gráficos e animações apresentadas como resultado do pós-processo.

## 3.5.3 FASES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Quando agrupadas as atividades, pode-se dizer que o MEF possui três fases de atividades para resolução de um problema, conforme demonstra a Figura 28.



**Figura 28 – Fases do MEF**

### 3.5.3.1 PRÉ-PROCESSAMENTO

Esta fase do processamento inclui todas as atividades de modelagem do problema, usando ferramentas CAD (*Computer Aided Design*) que geram arquivos compatíveis e que podem ser importados para os respectivos programas que utilizam o MEF para resolução do problema estudado.

Nesta fase, é definida a malha que discretiza o domínio em estudo, elegendo o tamanho e forma dos elementos que irão compor a malha e dados complementares, tais como coordenadas dos nós, condições de contorno, carga aplicada, propriedade dos materiais e das ferramentas, tipo de problema, entre outros.

Zienkiewicz (1989) relata que este é o passo onde se consome mais tempo, principalmente para se definir a melhor malha. Não existe uma metodologia definida para a obtenção da melhor malha em uma estrutura contínua.

Segundo Filho (2002), a decisão final do tamanho adequado e do tipo de elemento escolhido para a representação de um problema é a mais fundamental característica do método. Do ponto de vista prático, os *softwares* de EF apresentam uma biblioteca, contendo diversos elementos, cada qual tentando representar um diferente comportamento físico conhecido da Mecânica Estrutural (placas, cascas, membranas, sólidos, vigas, etc). No entanto a definição da malha estruturada é definida pelo usuário que, obviamente, precisa conhecer e validar fisicamente as respostas fornecidas pela simulação.

Aconselha-se que na discretização do modelo, todos os elementos tenham tamanhos similares, a fim de se evitar problemas de convergência nos cálculos matriz de rigidez do elemento.

O resultado final desta fase é um arquivo de dados que deve ser especificado no programa em relação aos próximos passos.

### 3.5.3.2 PROCESSAMENTO

Esta fase consiste na formulação e cálculo para solução do problema, validando o modelo criado no pré-processamento. São geradas as equações necessárias para solução do problema.

A quantidade de equações geradas dependerá do tamanho do problema envolvido e da quantidade de elementos presentes na malha gerada pela discretização. A matriz de rigidez obtida por meio da aferição das variáveis nodais e dos vetores de forças nodais são montadas e resolvidas utilizando o *software* adotado. O tempo de resolução dependerá basicamente da quantidade de equações geradas e do tipo de solução numérica adotada pelo *software* escolhido. Em geral, programas que trabalham por meio da solução explícita exigem *hardwares* com maior capacidade de processamento, enquanto que os programas que trabalham com o método implícito exigem maior capacidade de armazenamento em memória do *hardware* utilizado.

### 3.3.3.3 PÓS- PROCESSAMENTO

Nesta fase, são apresentados os resultados obtidos por meio do cálculo das equações definidas no modelo.

Estes resultados são representados graficamente, muitas vezes em forma de superfície de resposta, em que as cores demonstram o comportamento da estrutura como deformações, distribuição de esforços, temperatura, entre outras grandezas. O comportamento do modelo também pode ser visualizado por meio de animações em que é possível visualizar o comportamento da peça deformada a cada instante de tempo definido.

### 3.6 SOLUÇÃO IMPLÍCITA VERSUS SOLUÇÃO EXPLÍCITA

A formulação matemática, ou abordagem de integração no tempo, é a principal característica de distinção entre os diversos programas utilizados na simulação numérica em um processo de conformação mecânica. A formulação define o modo de resolução do problema utilizando um programa. Os avanços nesse campo estão diretamente relacionados aos progressos dos sistemas computacionais (BELYTSCHKO, 1980).

Segundo Duarte (2007), o momento de escolha da ferramenta para a simulação numérica mais adequada é fundamental. Há de se conhecer, além disto, as limitações das ferramentas de simulação empregadas, já que a mesma equação dinâmica que governa o processo pode ser resolvida de duas maneiras numericamente distintas: implícita e explicitamente. Em um contexto de custo computacional e cargas dinâmicas, a solução implícita, em geral, costuma ser mais rápida. No entanto a solução explícita costuma estar mais próxima da solução real, no que tange a visualização de defeitos na conformação de chapas, como rugas e trincas na peça estampada.

Segundo Rodrigues (2013), o método implícito é o mais indicado para simulações estáticas e o método explícito, para simulações dinâmicas. Existem ainda aplicações onde ambos os métodos podem ser utilizados, em que os testes são classificados como quase estáticos, por exemplo, em simulações de estampagem. A Figura 29 representa a aplicações destes métodos.

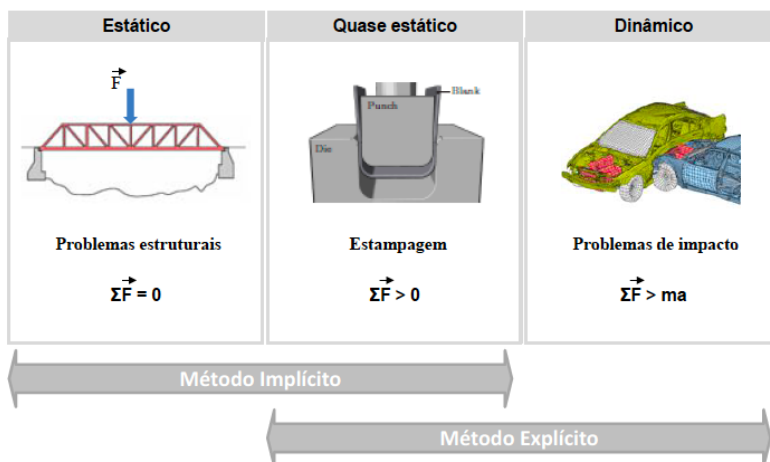


Figura 29 – Aplicações do método explícito e método implícito

Na abordagem implícita, assume-se uma condição de equilíbrio estático ou quase estático para o processo. Devido à não linearidade da condição de atrito entre o ferramental e a chapa, este tipo de abordagem pode apresentar problemas de convergência do cálculo na simulação, já que a matriz de rigidez  $[K]$  pode se tornar não linear, sendo que pequenos passos de tempo  $\Delta t$  podem ser necessários e ainda assim a convergência não é garantida.

No método implícito, o cálculo dos deslocamentos  $\{u\}$  é realizado por meio da inversão da matriz de rigidez  $[K]$  do modelo e multiplicando-a pelas forças  $\{F\}$  atuantes no modelo, como mostrado abaixo.

$$\{u_{t+\Delta t}\} = [K]^{-1}\{F_{t+\Delta t}\} \quad (33)$$

Esse tipo de abordagem tem como principal problema a obtenção de convergência do processo iterativo, tendo em vista que várias partes do sistema são desenvolvidas em paralelo e integradas quando completas. Defeitos que ocorrem na conformação, tais como rugas ou trincas, podem criar problemas de convergência.

Nas simulações dinâmicas, as acelerações precisam ser calculadas a cada instante de tempo. Assim o método explícito obtém a aceleração  $\{a\}$  por meio da inversão da matriz de massa  $[M]$  e multiplicando pela força resultante no elemento, ou seja, subtração das forças internas  $[F_{\text{int}}]$  e das forças externas  $[F_{\text{ext}}]$ .

$$\{a_t\} = [M]^{-1}([F_t^{\text{ext}}] - [F_t^{\text{int}}]) \quad (34)$$

Utilizando conceitos de cinemática vetorial a este resultado é possível obter, através dos cálculos das velocidades  $\{v\}$  e dos deslocamentos  $\{u\}$ , a posição dos nós no instante seguinte, que podem ser obtidos pelas equações 35 e 36 respectivamente.

$$\{v_{t+\Delta t/2}\} = \{v_{t-\Delta t/2}\} + \{a_t\}\Delta t_t \quad (35)$$

$$\{u_{t+\Delta t}\} = \{u_t\} + \{v_{t+\Delta t/2}\}\Delta t_{t+\Delta t/2} \quad (36)$$

Então basta adicionar este deslocamento à posição atual do nó, e se obtém a posição final do nó para o tempo  $t+\Delta t$ .

$$\{x_{t+\Delta t}\} = \{x_0\} + \{u_{t+\Delta t}\} \quad (37)$$

Daí o nome dado ao método, pois uma vez que as matrizes se tornam desacopladas elas podem ser resolvidas diretamente (explicitamente).

Esse método tem como principal vantagem a não necessidade da montagem e da fatoração da matriz rigidez, obtendo-se assim a solução para um determinado passo ou incremento temporal (*time step*).

Na prática, é muito comum utilizar um passo ou incremento temporal, na ordem de  $10^{-6}$  segundos. Este tempo também pode ser dado pela seguinte expressão:

$$\Delta t = \frac{L_{min}}{v_s} \quad (38)$$

Onde  $L_{min}$  é o comprimento característico da menor aresta dos elementos, e  $v_s$  é a velocidade do som no material, que para elementos de casca, por exemplo, é expressa por (HALLQUIST, 1998):

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (39)$$

Onde:  $E$  é o módulo de Young,  $\rho$  é a massa e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Resumindo as características principais para o método implícito, grandes passos de tempo podem ser utilizados para problemas totalmente lineares, para aqueles que possuem não linearidades, pode ser necessário reduzir o passo de tempo para resolver os problemas de convergência. Para o método explícito a solução é sempre estável, desde que seja respeitado o passo de tempo crítico.

Neste trabalho, entretanto, as simulações serão feitas com um programa que adota solução explícita para a equação diferencial inerente ao problema em estudo, tendo em vista que a abordagem explícita apresenta bons resultados com problemas de convergência reduzidos, ou seja, é apropriada para problemas quase estáticos.

### 3.7 O SOFTWARE STAMPACK

O *software* STAMPACK® é uma ferramenta que utiliza o método dos elementos finitos para solucionar problemas de conformação mecânica. O processo de cálculo adota o método de solução explícita, apresentado anteriormente.

A solução obtida pode ser observada por meio da representação numérica de inúmeras variáveis, utilizando gráficos, cores e animações. Após as simulações é possível visualizar o resultado final de uma peça, sem a necessidade de despendar tempo e dinheiro com a elaboração de protótipos e *try-outs*.

O ponto de partida para resolução de um problema usando o método de elementos finitos é a equação de equilíbrio dinâmico, descrita pelo princípio de trabalho virtual. (STAMPACK, 2003)

$$\underbrace{\int_V \delta \varepsilon^t \cdot \sigma dV}_{\text{Forças Internas}} - \underbrace{\int_V \delta \varepsilon u^t [-\rho \ddot{u} - c \dot{u}]}_{\text{Inércia}} - \underbrace{\int_S \delta u^t \cdot b dV}_{\text{Forças Volumétricas}} - \underbrace{\int_S \delta u^t \cdot t dS}_{\text{Forças de Contato}} = 0 \quad (40)$$

Onde  $V$  é o domínio de integração,  $S$  é a superfície de contorno,  $\varepsilon$ , as deformações,  $\sigma$ , os esforços,  $b$ , as forças volumétricas,  $t$ , as forças de contato  $u$ ,  $\dot{u}$  e  $\ddot{u}$  são os campos de deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente.

A solução numérica do problema é reduzida a fim de determinar os deslocamentos de um número finito de pontos em diferentes instantes de tempo.

Uma visão global do procedimento utilizado para a simulação numérica pelo método de elementos finitos, seguida pelo *software* STAMPACK®, pode ser observada no fluxograma da Figura 30.

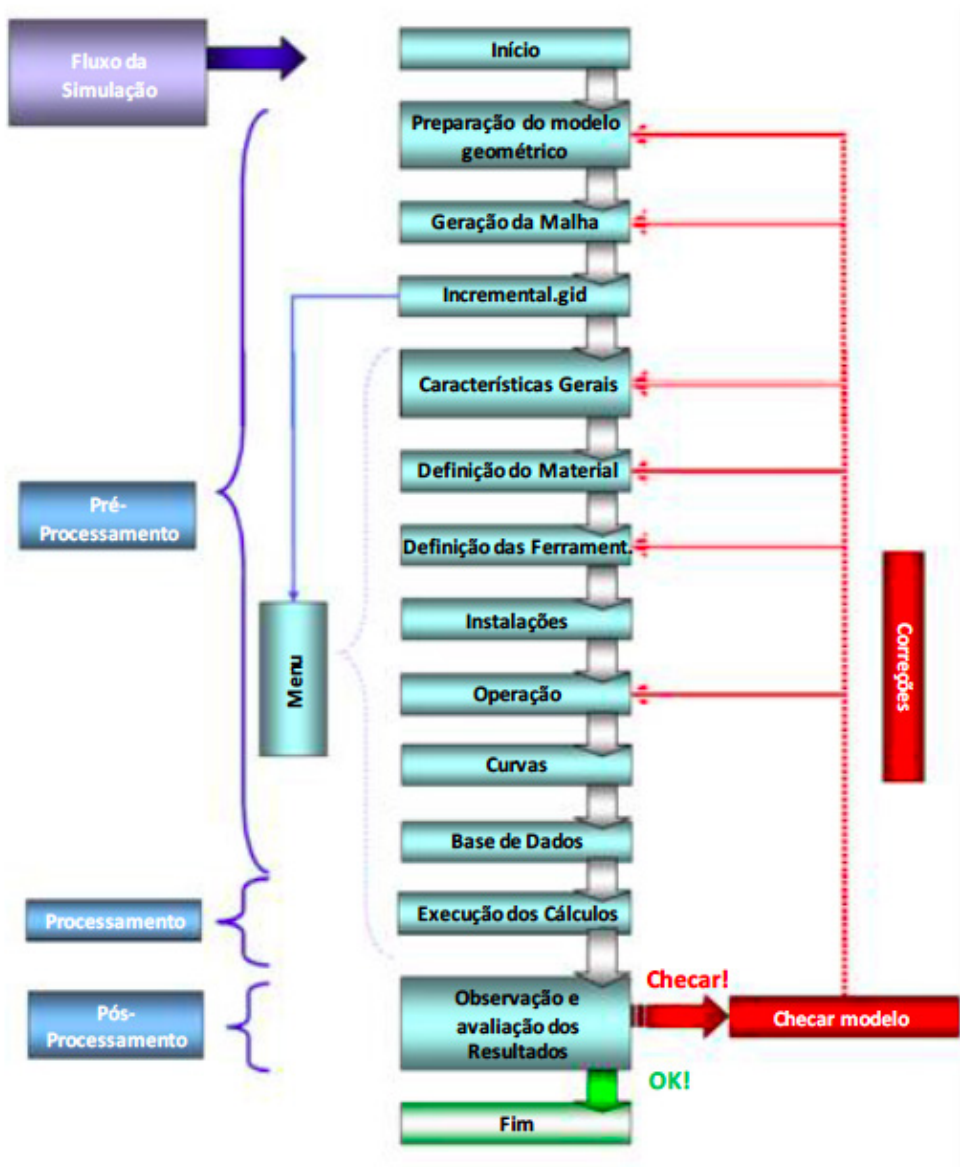


Figura 30 – Visão global da simulação em EF, (STAMPACK®)

Nota-se que o *software* segue as etapas de pré- processamento com a definição do problema e geração da malha, processamento (ou *solver*) e pós- processamento. Todas estas etapas em conjunto, formulam a solução dos problemas simulados, fornecendo rapidamente informações essenciais para elaboração dos mais diversos projetos.

