

Otimização por colônia de formigas aplicada ao sistema dinâmico com absorvedor linear

Daniela de Oliveira Albanez¹
Sémebber Silva Lino²

Sérgio F. da Silva²

Resumo: Absorvedores dinâmicos de vibrações são constituídos por massa, mola e elementos de amortecimento, que são acoplados a um sistema mecânico para proporcionar a atenuação da vibração. Neste artigo estuda-se o modelo de absorvedor dinâmico de vibração (ADV) eficaz na redução de vibração estrutural sob excitações sísmicas e usa-se um método de otimização evolutiva com base no comportamento social de uma colônia de formigas. Com base nesta metodologia, um modelo na construção predial com duas lajes é utilizado para a simulação numérica e o problema de otimização é definida como a minimização da função objetivo que descreve a amplitude de vibração da estrutura primária. Serão apresentados alguns resultados da análise de sua eficiência e robustez que ilustram o sucesso deste processo.

Palavras-chave: Absorvedor dinâmico de vibração, Otimização por colônia de formigas, Algoritmo de colônia de formigas.

Introdução

As vibrações são movimentos oscilatórios observados em diversas situações no cotidiano, até mesmo em atividades humanas. O simples ato de falar fornece

-
- 1 Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Programa de Pós-graduação em Modelagem e Otimização. Contato: doalbanez@hotmail.com. Bolsista da Capes.
 - 2 Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Programa de Pós-graduação em Modelagem e Otimização. Contato: semebber@hotmail.com.³Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Programa de Pós-graduação em Modelagem e Otimização. Contato: sergio.f.silva@gmail.com.

vibrações nas cordas vocais e na língua. A respiração é o ato de vibração dos pulmões e o andar está relacionado com o movimento oscilatório de braços e pernas (RAO, 2009) dentre muitos outros exemplos a considerar.

Estão também presentes em estruturas prediais na construção civil ou no manuseio de máquinas industriais, tais como rolos de compactação do solo ou máquina de lavar roupa. Igualmente, podem trazer danos ao equipamento ou causar algum desconforto e insegurança. Devido a este problema de vibrações no equipamento, há então uma necessidade de controlar os níveis de vibração estrutural, a fim de assegurar condições de operação satisfatória, quanto a segurança e conforto na utilização destes.

Quando este processo de vibração ocorre com certa frequência, uma ótima maneira para reduzi-lo é o uso de absorvedores dinâmicos de vibrações (ADV's). De acordo com Steffen Jr. e Rade (2001), os ADV's são sistemas mecânicos que compreendem inércia, rigidez e amortecedor, que, uma vez ligados a uma determinada estrutura (estrutura primária), são capazes de absorver a energia vibratória no ponto de conexão para atenuar sua resposta vibratória forçada indesejável.

A primeira análise do absorvedor foi apresentada em Ormondroyd e Den Hartog (HARTOG; ORMONDROYD, 1928) e esta análise foi feita completa por Brock quando encontrou parâmetros ótimos de absorção de amortecedor viscoso para dar resposta de frequência maximamente plana (BROCK, 1946).

Warburton (1981) estendeu o procedimento de otimização e determinados parâmetros ótimos para absorvedores com dois graus de liberdade e minimizou a resposta máxima. Thompson (1981) considerou uma força excitada e amortecida com um grau de liberdade a um sistema primário que anexa o absorvedor de vibração. Kitis *et al.* (1983) demonstraram um algoritmo eficiente para minimizar a resposta vibratória para uma gama de frequências de excitação para o problema de dois absorvedores de vibrações dinâmicas. Mais recentemente, amortecedores de vibração inteligentes à base de materiais têm sido utilizados para a atenuação da vibração. Este é o caso para viscoelástico (CHRISTENSEN, 1982) e desvio piezoelétrico (HAGOOD; FLOTOW, 1991).

Este artigo propõe uma técnica de otimização dos parâmetros de um sistema não amortecido submetido a uma força externa harmônica, de modo a reduzir a massa requerida acoplando o ADV a uma massa principal, para atenuar a vibração dos mesmos, denominada de Otimização por Colônia de Formigas, que no inglês é dada por *Ant Colony Optimization* (ACO). Marco Dorigo (1992) a introduziu na sua tese de doutorado para resolver problemas computacionais. Este método é uma técnica inspirada no comportamento das formigas reais e seu esquema de comunicação usando o rastro de feromônio. A formulação do ADV é apresentada e o algoritmo ACO é discutido. Os resultados numéricos são apre-

sentados, ilustrando o sucesso da utilização da metodologia e aplicada à configurações de absorvedores de vibrações dinâmicos.

1 Absorvedor dinâmico de vibração (ADV)

De acordo com Ormondoyd e Den Hartog (1928), Warburton (1981) e Den Hartog (1956) os ADV's são sistemas constituídos por massa, de mola e os elementos de amortecimento (estrutura secundária), que estão acoplados com um sistema mecânico (estrutura primária), a fim de atenuar as vibrações da estrutura primária em uma dada banda de frequência.

A ideia do ADV é a geração de uma força, a qual tem a mesma intensidade da força de excitação, mas na fase oposta. Este fenômeno é conhecido como antirressonância. A afinação do ADV é o procedimento que define a frequência antirressonância a um determinado valor, alterando os parâmetros do ADV (massa, mola e amortecedor).

Considere o sistema vibratório de dois graus de liberdade, sem amortecimento, em que o subsistema (m_1, k_1) associado à estrutura primária cujas vibrações desejam ser atenuadas pelo subsistema de acoplamento (m_2, k_2) constituindo o absorvedor dinâmico de vibração, tal como ilustrado na Fig. 22.1.

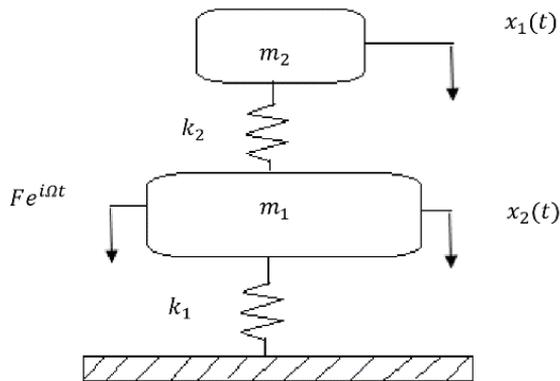


Figura 22.1 Estrutura primária e ADV.

Fonte: Realizado pelo autor.

Assume-se o sistema primário excitado por uma força harmônica de amplitude F e frequência de excitação Ω , valor fixado, não coincidem necessariamente com a frequência natural do sistema expressa por:

$$F(t) = F e^{i\Omega t} \quad (1)$$

A operação do absorvedor, parte do princípio de que os valores dos parâmetros selecionados (m_2, k_2) , de modo que $\Omega^2 = k_2/m_2$, pegue a massa primária (m_1) para responder harmonicamente a esta frequência de excitação com amplitude zero. A frequência natural do sistema de absorção, quando ligados diretamente à base fixa, é definido por: $\omega_a = \sqrt{k_2/m_2}$.

Para demonstrar esta afirmação, as equações são escritas do movimento sistema acoplado:

$$\begin{cases} m_1 \dot{x}_2(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = F(t) \\ m_2 \dot{x}_2(t) + k_2[x_2(t) - x_1(t)] = 0 \end{cases} \quad (2)$$

As respostas harmônicas são expressadas por:

$$x_1(t) = X_1 e^{i\Omega t} \quad (3)$$

$$x_2(t) = X_2 e^{i\Omega t} \quad (4)$$

Fazendo-se a derivação das respostas harmônicas:

$$\dot{x}_1(t) = (i\Omega)X_1 e^{i\Omega t}; \ddot{x}_1(t) = (i\Omega)^2 X_1 e^{i\Omega t} \quad (5)$$

$$\dot{x}_2(t) = (i\Omega)X_2 e^{i\Omega t}; \ddot{x}_2(t) = (i\Omega)^2 X_2 e^{i\Omega t} \quad (6)$$

Substituindo as segundas derivadas nas equações do movimento sistema acoplado:

$$\begin{cases} m_1((i\Omega)^2 X_1 e^{i\Omega t} + (k_1 + k_2)X_1 e^{i\Omega t} - k_2 X_2 e^{i\Omega t}) = F(t) \\ m_2((i\Omega)^2 X_2 e^{i\Omega t}) + k_2[X_2 e^{i\Omega t} - X_1 e^{i\Omega t}] = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} X_1(-m_1\Omega^2 + k_1 + k_2) - k_2 X_2 = F \\ -k_2 X_1 + X_2(m_2\Omega^2 + k_2) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$X_1(-m_1\Omega^2 + k_1 + k_2) - k_2 X_2 = F \quad (9)$$

$$-k_2 X_1 + (-m_2\Omega^2 + k_2)X_2 = 0 \quad (10)$$

Isolando X_2 em (10):

$$X_2 = \frac{X_1 k_2}{-m_2\Omega^2 + k_2} \quad (11)$$

Substituindo (11) em (9):

$$X_1(-m_1\Omega^2 + k_1 + k_2) - k_2 \frac{X_1 k_2}{-m_2\Omega^2 + k_2} = F \tag{12}$$

$$\frac{X_1(-m_1\Omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\Omega^2 + k_2) - X_1 k_2^2}{-m_2\Omega^2 + k_2} = F \tag{13}$$

$$\frac{X_1(m_1 m_2 \Omega^4 - m_2 \Omega^2 k_1 - m_2 \Omega^2 k_2 - m_1 \Omega^2 k_2 + k_1 k_1)}{-m_2 \Omega^2 + k_2} = F \tag{14}$$

$$X_1 = \frac{(-m_2 \Omega^2 + k_2) F}{m_1 m_2 \Omega^4 + ((-k_1 - k_2) m_2 - m_1 k_2) \Omega^2 + k_1 k_2} \tag{15}$$

Substituindo (15) em (11):

$$X_2 = \frac{k_2(-m_2 \Omega^2 + k_2) F}{m_1 m_2 \Omega^4 + ((-k_1 - k_2) m_2 - m_1 k_2) \Omega^2 + k_1 k_2 (m_2 \Omega^2 + k_2)} \tag{16}$$

$$X_2 = \frac{k_2 F}{m_1 m_2 \Omega^4 + ((-k_1 - k_2) m_2 - m_1 k_2) \Omega^2 + k_1 k_2} \tag{17}$$

Pela equação (7), observa-se que a amplitude da resposta X_1 o sistema principal é cancelada quando $m_2 \Omega^2 = k_2$, o que comprova a afirmação feita anteriormente sobre o funcionamento do DVA é um grau de liberdade.

A equação de amplitude X_1 é ilustrado na Fig. 22.2, onde se pode ver a função de resposta em frequência típica de um sistema de dois graus de liberdade, com a existência de duas frequências naturais. A introdução do ADV permite a geração de um ponto de massa m_1 e frequência $\Omega = \sqrt{k_2/m_2}$.

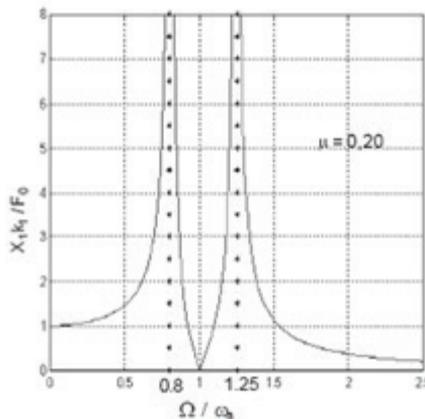


Figura 22.2 Função Resposta de Frequência

Introduzindo $X_1 = 0$ em (9), temos que $\Omega = \sqrt{k_2/m_2}$, a amplitude de vibração de massa m_2 é dada por:

$$X_2 = \frac{-F}{k_2} \quad (18)$$

Assim, a força exercitada pelo sistema de absorção no sistema primário é:

$$F = -k_2 X_2 \quad (19)$$

Portanto, o sistema secundário tem no sistema primário, uma força igual e oposta à força de excitação, resultando em o equilíbrio do sistema. Os ADV's são na maioria das vezes usados para trabalhar, a fim de reduzir os níveis do sistema primário de vibração quando estiver operando em sua frequência natural, ou próximo a ela. Assim, o ADV deve ser projetado de modo a que a sua frequência natural coincide com o sistema primário de modo a satisfazer:

$$\frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1} \Rightarrow |\omega_n| |\omega_a| \quad (20)$$

Assim, a partir da equação de amplitude X_1 , quando o numerador é zero, a resposta de amplitude X_1 do sistema primário também será zero, e isto ocorre quando a frequência de excitação, que é igual à frequência natural do sistema primário coincidir com a frequência natural do ADV, ω_n .

2 Otimização por colônia de formigas

Otimização por colônia de formigas (ACO) foi introduzido na década de 90 como um método inspirado na natureza para resolver problemas de otimização combinatória (DORIGO,1992; MANIEZZO; COLORNI,1996; DORIGO *et.al*, 1999; DORIGO; STUTZE, 2004; DORIGO; SOCHA, 2008; BLUM, 2005).

Os modelos inspirados na natureza têm atraído a comunidade científica, estes métodos têm várias vantagens, como a facilidade de código, a eficiência na utilização da computação paralela, a capacidade de superar as dificuldades de convergência numérica e a capacidade de lidar com variáveis discretas e contínuas simultaneamente.

Como já foi mencionado o ACO é inspirado no comportamento das formigas reais e seu esquema de comunicação usando rastro de feromônio (DORIGO,1992;MANIEZZO; COLORNI,1996; DORIGO *et. al*, 1999; DORIGO; STUTZE, 2004; DORIGO; SOCHA, 2008; BLUM, 2005).

Uma formiga movendo-se estabelece feromônio no chão, marcando o caminho. O comportamento coletivo que emerge dos agentes participantes é uma

forma de *retorno* positivo, onde as formigas seguem a trilha mais atraente, que possui mais depósito de feromônio.

Ao procurar por comida, as formigas reais começam a se mover aleatoriamente, a fim de encontrar alimento e voltar para sua colônia, enquanto se estabelece as trilhas de feromônio. Isto significa que, se outras formigas encontrarem em um excelente caminho, eles retornam reforçando a trilha.

Mas, ao longo do tempo a trilha de feromônio começa a evaporar, reduzindo a força atrativa. Quando um curto e um longo caminho são comparados, é fácil de ver que um caminho curto fica marcado mais rápido e a densidade de feromônio permanece alta.

Assim, se uma formiga encontra um caminho curto (do ponto de vista da otimização), quando marcha da colônia a uma fonte de alimento, outras formigas são mais propensas a seguir esse caminho, e o *retorno* positivo incentiva todas as formigas em seguir este caminho.

O algoritmo ACO, conforme apresentado abaixo na Fig. 22.3:

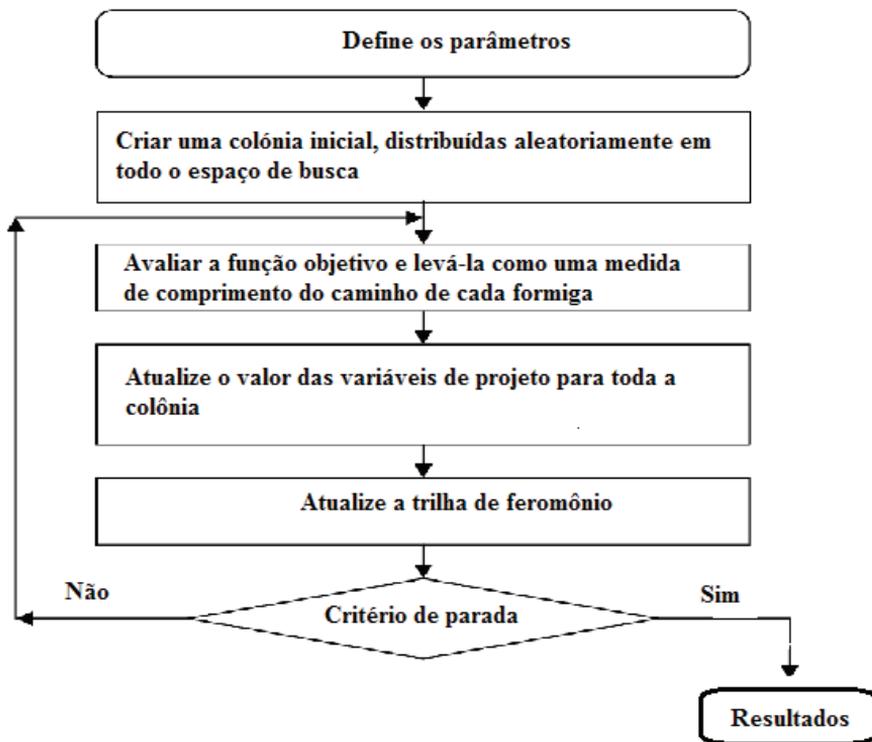


Figura 22.3 Algoritmo ACO

Uma colônia de formigas m pode ser expressado como uma matriz $m \times n$ $X_i = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$, onde $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$ é um vetor com n variáveis de projeto que corresponde a uma formiga simples.

Para o modelo do esquema de comunicação feromônio, como sugerido por Dorigo e Socha (2008) e Pourtakdoust e Nobahari (2004) para a implementação do modelo, usamos uma função densidade de probabilidade normal (PDF) pode ser qualquer função $P(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (DORIGO; SOCHA, 2008):

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1 \quad (21)$$

A variável de decisão X_i a semente Gaussiana G_i é dada da seguinte forma (DORIGO; SOCHA, 2008; Blum, 2005):

$$G_i(x) = \sum_{j=1}^k \tau_j \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}} \quad (22)$$

Onde a função Gaussiana j th é derivada a partir do elemento j th da e assumindo o alcance de solução j th da população será r , o peso τ_j da função Gaussiana j th é calculada como se segue (DORIGO; SOCHA, 2008; BLUM, 2005):

$$\tau_j = \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-1)^2}{2q^2k^2}} \quad (23)$$

onde r é definido como peso a ser um valor da função de Gaussiana, com um valor médio de 1,0 e um desvio padrão q . Para as pequenas q , as soluções melhores classificadas está fortemente preferido, e por q grande, a probabilidade se torna mais uniforme.

A probabilidade p_j de escolher a função Gaussiana j th, é denotado por j^* (DORIGO; SOCHA, 2008; Blum, 2005):

$$p_j = \frac{\tau_j}{\sum_{i=1}^k \tau_i} \quad (24)$$

A escolha da amostra da função de Gaussiana j^* a ser feito usando um gerador de números aleatórios que gera números aleatórios de acordo com a distribuição dos parâmetros. No entanto, antes de efetuar a amostra, a média do desvio padrão da função Gaussiana j^* th deve ser especificado.

Para fechar a definição de feromônio, τ , o índice de agregação, σ_{j^*} , deve ser definido. Assim, tomando como y a coluna j da matriz colônia X_i , o índice de agregação para a dimensão j , σ_{j^*} , é dada por (BLUM, 2005):

$$\sigma_{j^*} = \frac{1}{k} \rho \sum_{i=1}^k \sqrt{(x_i^l - x_i^{j^*})^2} \quad (25)$$

onde $\rho \in (0,1)$, quanto menor for a velocidade de convergência do algoritmo.

3 Discussões e resultados

O objetivo deste trabalho é reduzir a amplitude da vibração do sistema primário, ajustando parâmetros da massa e rigidez do ADV, destinado os valores mais baixos possível para eles.

De acordo com Ferreira e Oliveira (2006) como o sistema estrutural, os principais elementos de um edifício são os elementos de suporte de cargas verticais e horizontais. As cargas verticais são transmitidas por lajes dos pisos para os elementos de suporte verticais, incluindo colunas, varandas e paredes cheias. As cargas horizontais são transmitidas por lajes dos pisos para os mesmos elementos de suporte que transmitem para a fundação.

Entre esses elementos para um edifício duas lajes maciças m_1 e m_2 , os pórticos são os principais responsáveis para a transmissão de cargas verticais para a fundação; núcleos fornecem rigidez equivalente (lateral e torsional) k_1 e k_2 apropriados para o edifício e as paredes de cisalhamento. Os pórticos são mais flexível, de modo que eles são muitas vezes negligenciadas na análise global dos elementos de construção, quando se torna importante para a rigidez em geral da mesma.

As paredes de cisalhamento são paredes de concreto armado dimensionados para trabalhar a partir do solo para o console superior em forma. Eles podem ser dispostos em várias paredes de cisalhamento num edifício, por si só ou em conjunto acoplado. Ainda de acordo com Ferreira e Oliveira (2006), a rigidez k_2 pode variar de 65,87kN.m a 690,32kN.m.

Na Fig. 22.4 representa o sistema estrutural da edificação utilizado para a otimização por colônia de formigas.

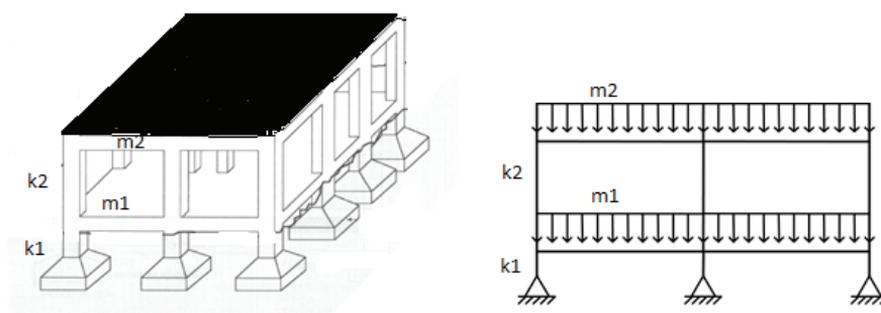


Figura 22.4 O Modelo

Fonte: Concreto Armado Eu te amo p.17

A amplitude do sistema da função objetivo usada é X_1 , descrita na equação 15. Como se deseja que $k_2/m_2 = k_1/m_1$, a mesma torna-se uma restrição de

igualdade relacionada com o projeto. Também deve-se atribuir limites inferiores e superiores para as variáveis de projeto (quanto sua massa e rigidez).

Assim, o projeto é formulado da seguinte forma:

Minimizar:

$$|X_1| = \left| \frac{(k_2 - m_2 \Omega^2) F}{m_1 m_2 \Omega^4 + ((-k_1 - k_2) m_2 - k_2 m_1) \Omega^2 + k_2 k_1} \right| \quad (26)$$

Sujeito a:

$$m_2 = \frac{m_1}{k_1} k_2 \quad (27)$$

$$65.87 \leq k_2 \leq 690.32 \quad (28)$$

$$0.07 \leq m_2 \leq 0.83 \quad (29)$$

Como resultado, é desejável que a frequência natural do sistema primário esteja em equilíbrio com a frequência do absorvente, isto é, $k_2/m_2 = k_1/m_1$ minimizando a amplitude do sistema primário X_1 , em seguida, tomado como uma restrição de igualdade relacionada com o projeto.

A Fig. 22.5 enumera as restrições do ADV, considerando a sua restrição de igualdade, a sua rigidez k_2 e massa m_2 , respectivamente variando de 65,87kN.m para 690,32kN.m e 0,07Ton para 0,83Ton. Com base no trabalho de Ferreira e Oliveira (2006) também propôs que a rigidez e massa do sistema primário foram avaliados em 1000KN/m e 1,2Ton.

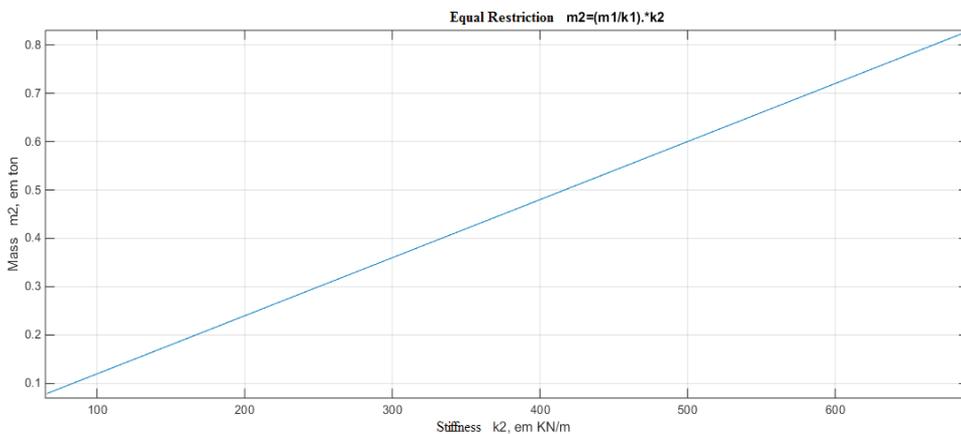


Figura 22.5 Restrição de Igualdade

Fonte: Realizado pelo autor.

Na Fig. 22.6 e na Fig. 22.7, é observado a resposta de amplitude do sistema primário X_1 tende a zero quando atribui valores maiores para rigidez k_2 e massa m_2 do absorvedor, respectivamente.

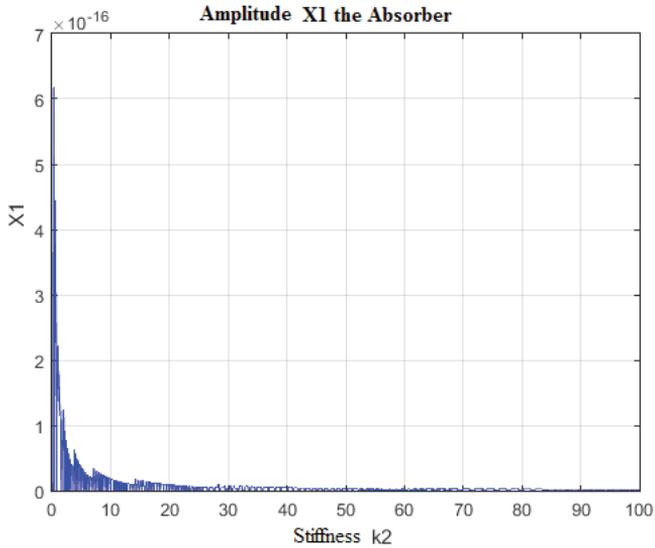


Figura 22.6 Amplitude X_1 do absorvedor em relação a rigidez

Fonte: Realizado pelo autor.

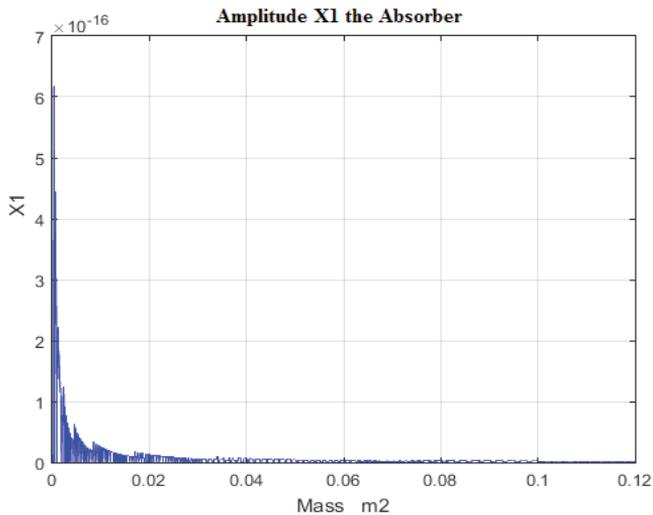


Figura 22.7 Amplitude X_1 do absorvedor em relação a massa.

Fonte: Realizado pelo autor.

Como o algoritmo de otimização colônia de formigas (ACO), formam uma classe de algoritmos enxame de inteligência, cuja representação bem-sucedida é dado pela interação de formigas artificiais para o ambiente e para ser isso, um método robusto, pois geralmente convergem com poucas interações se a função objetivo avaliar não é muito complexo, como o número de variáveis de projeto ou linearidade.

Após a implementação deste método para minimizar a amplitude do sistema primário, os valores ideais para k_2 , m_2 e X_1 já foram obtidas na primeira iteração, devido à linearidade da restrição de igualdade e das restrições laterais e por sua função objetivo ser também uma função de variável modular racional, uma vez que, usando a restrição de igualdade 27. Os resultados $k_2 = 668.9321$, $m_2 = 0.80272$ e $X_1 = 0$ são obtidos na primeira iteração com a aplicação do ACO nesse problema.

De acordo com a Fig. 22.8, observou-se que os resultados obtidos usando o método mostrou uma grande redução na amplitude da vibração do sistema primário, permitindo a redução dos parâmetros.

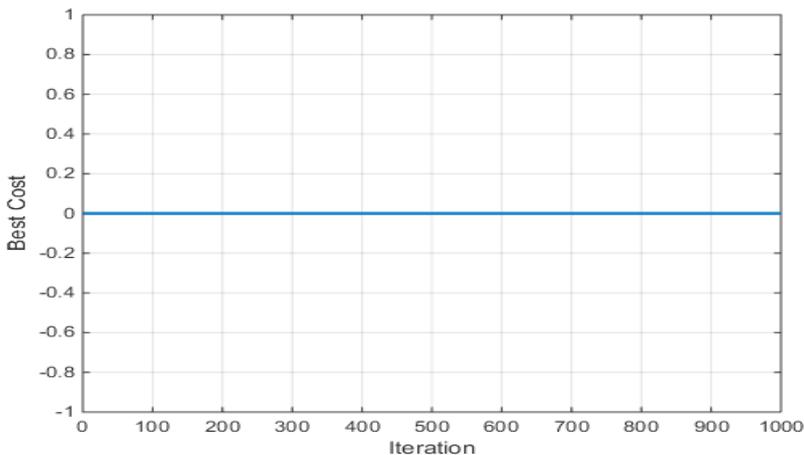


Figura 22.8 Melhor custo x Iteração

Fonte: Realizado pelo autor.

Portanto, o problema de implementação numérica do método de otimização evolutiva colônia de formigas demonstrou praticabilidade de reduzir os parâmetros de massa e a rigidez do amortecedor, sem perda de eficácia, isto é, sem aumentar a amplitude de vibração e obter a eficiência.

A análise do absorvedor com amortecimento, o que contribui para atenuar vibrações numa banda de frequência mais ampla, ao custo de uma eficiência mais

baixa na massa principal do ponto de ressonância é proposta viável de uma publicação futura, utilizando ACO como método de otimização para se obter sua solução ótima.

Conclusão

O objetivo do presente trabalho de pesquisa foi investigar o potencial uso de técnicas heurísticas na concepção ideal de sistemas mecânicos, com foco no método de otimização da colônia de formigas. Um estudo teórico de absorvedor dinâmico de vibração foi apresentado sendo considerada somente as rigidezes e as massas do sistema primário e do absorvedor, que consiste de um grau de liberdade e sem amortecimento.

Portanto, foi proposto o algoritmo de colônia de formigas como um método de otimização, contribuindo significativamente na pesquisa. O desenvolvimento do ACO começou com a formulação das características do algoritmo de colônia de formigas, quanto a sua origem, sua formulação matemática e de como aplicá-la nos absorvedores dinâmicos de vibração. Partindo desses princípios, uma rotina ACO foi desenvolvida e implementada considerando variáveis contínuas, apresentando e discutindo todos os resultados aqui obtidos. Esse algoritmo foi executado com os parâmetros sugeridos por Ferreira e Oliveira (2006) e mostrou eficiente na resolução do modelo proposto.

Referências

- BORNABEU, E.; DORIGO, M.; THERAULAZ, G., **Swarm Intelligence from Natural to Artificial Systems**, 1st ed., Oxford University Press, New York, 1999.
- BLUM, C., **Ant Colony Optimization: Introduction and Recent Trends**, *Physics of Life Reviews*, v.2, 2003.
- BROCK, J.E., **A Note on the Damped Vibration Absorber**, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal applied Mechanics*, v.68, p.248, 1946.
- CARO, G. D.; Dorigo, M.; Gambardella, L., **Ant Algorithm of Discrete Optimization**, *Artificial Life*, v. 5, n. 2, p. 137-172, 1999.
- CHRISTENSES, R. M., **Theory of Viscoelasticity: an Introduction**, 2nd. Ed., New York, Academic Press Inc., 1982.

- COLORNI, A.; MANIEZZO, M. D. V., *Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1st ed., 19996.
- DORIGO, M., *Optimization, Learning and Natural Algorithms*, PhDthesis, Politecnico in Milano, Dipartimento di Elettronica, Italy, 1992.
- DORIGO, M.; SOCHA, K., *Ant Colony Optimization for Continuous Domains*, European Journal of Operational Research, v.185, 2008.
- DORIGO, M.; STUTZLE, T., *Ant Colony Optimization*, ISBN 0-262-04219-3, Cambridge Press, Massachusetts, 2004.
- FERREIRA, M. P.; OLIVEIRA, D. R. C., *Viabilidade Técnica e Econômica de Sistemas Estruturais em Concreto Armado para Edifício de Múltiplos Pavimentos com Layout Flexível*, p.2114-2128, 2006. In: *Anais de VI Simósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto*, Trabalho SIMP0225.
- HAGOOD, N. W.; VON FLOTOW, A., *Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks*, Journal of Sound and Vibration, v.146, n. 2, p. 243-268, 1991.
- HARTOG, J. P. D., *Mechanical Vibrations*, New York: McGraw-Hill, 1956.
- HARTOG, J. P. D.; ORMONDOYD, J., *Theory of the Dynamics Vibration Absorver*, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, v. 50, p. 9-22, 1928.
- KITIS, L.; PILKEY, W. D.; WANG, B. P., *Vibrations Reduction Over a Frequency Range*, Journal of Sound and Vibrations, v. 89, p. 559, 1981.
- NOBAHARI, H.; POURTAKDOUST, S., *An Extension os Ant Colony to Continuous Optimization Problems*, Brussels, Belgium, 2004. In: Dorigo, M. editors. *Proceedings in ANTS 2004 – fourth international workshop on ant colony optimization and swarm intelligence*.
- RAO, S., *Vibrações Mecânicas*, Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2009.
- RADE, D.; STEFFEN, V., *Dynamics Vibration Absorver Encyclopedia of Vibration*, Academic Press, ISBN 0-12-227085-1, Springer, 2001.

THOMPSON, A. G., Optimum Tuning and Damping of a Dynamics Vibration Absorber Applied to a Force Excited and Damped Primary System, **Journal of Sound and Vibration**, v. 77, p.403, 1981.

WABURTON, G. B., Optimum Absorber Parameters for Structural Dynamics, **Earth-quake Engineering and Structural Dynamics**, v. 9, p. 251, 1981

