

Parte 3
Comportamento mecânico de
materiais e estruturas

Proposta de superfícies de plastificação para materiais dúcteis porosos dentro de uma abordagem multi-escala

Wanderson Ferreira dos Santos¹

José Julio de Cerqueira Pituba²

Resumo: O presente trabalho trata da simulação numérica do comportamento de microestruturas de materiais porosos utilizando uma abordagem multi-escala. O objetivo principal consiste em propor superfícies de plastificação de metais dúcteis porosos considerando frações diferentes de vazios, bem como estudar a influência da distribuição destes vazios em sua microestrutura. As análises são realizadas a partir do conceito de Elemento de Volume Representativo (EVR), no qual podem ser considerados aspectos relacionados à heterogeneidade do material com o emprego de modelos constitutivos simples, como o modelo de von Mises, o qual é empregado na simulação do comportamento da matriz. Este estudo é relevante, uma vez que as superfícies de plastificação foram pouco exploradas para meios heterogêneos, sendo, portanto, necessários os estudos para obtenção de resultados mais consistentes. Os resultados apresentados atestam a qualidade da modelagem proposta com o emprego de modelos constitutivos simples.

Palavras-chave: Modelagem Multi-escala. Metais Porosos. Plasticidade.

Introdução

O conhecimento das propriedades mecânicas dos materiais é um aspecto de suma importância para o meio acadêmico, especialmente na área de Ciência dos Materiais.

- 1 Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Unidade Acadêmica Especial de Engenharias, Laboratório de Mecânica Computacional. Contato: wanderson.ufgeng-civil@gmail.com.
- 2 Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Unidade Acadêmica Especial de Engenharias, Laboratório de Mecânica Computacional. Contato: julio.pituba@pq.cnpq.br.

Nesse contexto, a modelagem computacional consiste em uma alternativa atraente, pois permite, através de simulações numéricas, uma maior praticidade na obtenção de resultados, inclusive substituindo diversos ensaios onerosos de laboratório. Outra vantagem está atrelada ao aumento no poder de cálculo dos computadores, o que possibilita encontrar respostas cada vez mais realísticas e com rapidez.

No âmbito da mecânica computacional, inicialmente o comportamento dos materiais era obtido basicamente por meio de modelos constitutivos macroscópicos baseados em hipóteses fenomenológicas. No entanto, conforme apresentam Lopes (2011) e Giusti (2009), os avanços tecnológicos levam a necessidade de respostas constitutivas mais realísticas, tornando limitada a utilização das teorias constitutivas fenomenológicas em determinadas situações. Isso fica evidente, por exemplo, na modelagem de materiais com uma estrutura complexa, cuja aplicação de abordagens puramente macroscópicas resulta em formulações complicadas e com um número muito elevado de variáveis a serem encontradas. Além disso, Reis (2014) também acrescenta como limitação a dificuldade em contemplar fenômenos observados no nível microestrutural, tais como: transformação de fase, condutividade térmica entre as diferentes fases, deterioração interna, início da fratura, entre outros mecanismos.

A necessidade de respostas mais precisas impulsionou os estudos voltados para as escalas inferiores e, então, surgiram as teorias multi-escala. Nesta abordagem, informações provenientes de diferentes escalas são empregadas na obtenção da resposta do material. Segundo Azizi (2011), o foco inicial é voltado para o entendimento sobre os mecanismos físicos que se desenvolvem na microestrutura do material e, posteriormente, as informações adquiridas são utilizadas para a obtenção de respostas sobre o seu comportamento macroscópico. A utilização da modelagem multi-escala em materiais com uma maior complexidade é justificada, pois permite uma definição mais detalhada de sua microestrutura e, conseqüentemente, uma análise mais minuciosa de seu comportamento. Neste caso estão incluídos os meios heterogêneos como o caso de metais dúcteis porosos, em que a presença de vazios influencia significativamente no comportamento do material formado.

Em relação aos materiais heterogêneos, pesquisas constantemente são desenvolvidas visando promover análises mais consistentes de seu comportamento. Uma área que ainda requer estudos compreende a proposta e estudo de critérios de início e evolução do processo de plastificação em meios heterogêneos com comportamento dúctil. Cabe destacar que o estabelecimento do limite superior do estado de tensão responsável por acarretar a falha do material é um aspecto de suma importância na análise do comportamento de estruturas. Nessa conjuntura, estão inseridas as superfícies de plastificação, as quais estão relacionadas à falha por escoamento, típica de materiais com um comportamento dúctil.

Um trabalho bastante conhecido na literatura sobre superfícies de plastificação de metais porosos foi o desenvolvido por Gurson (1977), que realizou seu estudo dentro de uma modelagem analítica. Outro trabalho sobre metais porosos foi o estudo realizado por Giusti et al. (2009), o qual utilizou uma abordagem multi-escala para a obtenção de resultados considerando diferentes proporções de vazios e, inclusive, realizou comparações com os resultados de Gurson (1977). Dentro desse contexto, este trabalho visa utilizar modelos constitutivos simples, dentro de uma abordagem multi-escala, para análise de materiais heterogêneos através da simulação de diferentes EVRs. Mais especificamente são realizadas simulações com a finalidade de obter superfícies de plastificação de microestruturas com diferentes proporções de vazios, além de simulações quanto à influência da forma de sua distribuição na microestrutura de materiais metálicos.

1 Modelagem do material

No que segue está uma descrição dos conceitos envolvendo a modelagem multi-escala e a modelagem constitutiva do material.

1.1 Modelagem multi-escala

Na abordagem multi-escala, cada ponto x da macroescala, representada por Ω , é tomado como sendo um EVR, o qual representa a microescala do material, denotada por Ω_μ . O EVR é caracterizado pela coordenada y no seu volume e sua fronteira definida por $\partial\Omega_\mu$, cujo símbolo de derivada parcial ∂ indica o contorno do domínio analisado. Em relação às escalas, o a microescala deve apresentar um comprimento muito inferior em comparação com a macroescala: $l \gg l_\mu$. Entretanto, é importante que EVR tenha uma dimensão suficiente para representar em termos médios a microestrutura do material. Uma representação do processo envolvendo a modelagem multi-escala é mostrada na Figura 20.1.

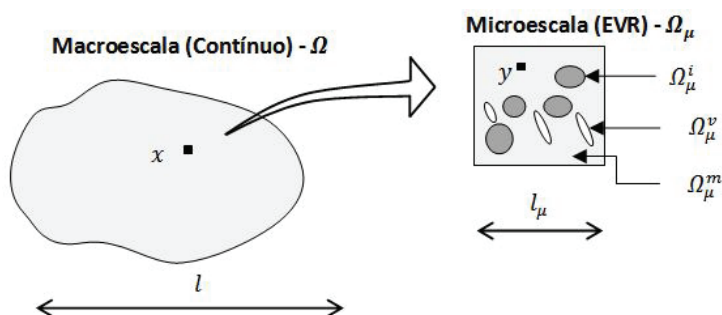


Figura 20.1 Análise multi-escala considerando duas escalas: macroescala e microescala.

Conforme a Figura 20.1, o EVR pode considerar aspectos relacionados à heterogeneidade do material como inclusões (Ω_μ^i) e/ou vazios (Ω_μ^v). Deste modo, o domínio do EVR pode ser composto pela união entre a parcela sólida Ω_μ^s e a parcela de vazios Ω_μ^v :

$$\Omega_\mu = \Omega_\mu^s \cup \Omega_\mu^v \quad (1)$$

Já o domínio da parte sólida Ω_μ^s engloba tanto a matriz Ω_μ^m quanto as inclusões Ω_μ^i :

$$\Omega_\mu^s = \Omega_\mu^m \cup \Omega_\mu^i \quad (2)$$

No que segue é explanado sobre alguns dos principais aspectos da modelagem multi-escala. Um estudo mais detalhado é apresentado em Fernandes et al. (2015) e em Santos (2016), que apresenta como princípios: (1) Equilíbrio do EVR; (2) Princípio da Macro-Homogeneidade de Hill Mandel; (3) Média volumétrica dos tensores de deformação e tensão; e (4) Pressuposto de que o espaço das flutuações de deslocamento cinematicamente admissíveis do EVR é um subespaço do espaço da mínima restrição cinemática sobre as flutuações de deslocamento compatíveis com a proposição da média volumétrica da deformação.

1.1.1 Processo de homogeneização

O processo de homogeneização consiste em uma regra da mistura ao longo do domínio do EVR. Dessa forma, os campos macroscópicos associados a macroescala são obtidos a partir da média volumétrica dos campos relacionados ao EVR. A modelagem multi-escala aqui empregada parte do pressuposto que a tensão σ em um ponto da macro-escala num determinado instante t está relacionada com a deformação acumulada ε até este instante:

$$\sigma(t) = D \varepsilon(t) \quad (3)$$

onde: $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ representam a tensão e a deformação no instante t , respectivamente; e D é o tensor constitutivo.

Dentro do conceito de média volumétrica, a deformação na macroescala $\varepsilon(x, t)$ é dada pela média das deformações na microescala $\varepsilon_\mu(y, t)$ em seu volume V_μ :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \varepsilon_\mu(y, t) dV \quad (4)$$

De forma análoga, as tensões macroscópicas são obtidas por:

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y, t) dV \quad (5)$$

Logo, $\sigma(x, t)$ representa a tensão macroscópica homogeneizada e $\varepsilon(x, t)$ compreende a deformação macroscópica homogeneizada. Por fim, o tensor constitutivo tangente homogeneizado $D(x, t)$ também passa pelo processo de homogeneização:

$$D(x, t) = \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial \varepsilon(x, t)} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} D_\mu(y, t) dV \quad (6)$$

1.1.2 Princípio de Hill Mandel

A utilização do princípio de Hill Mandel procura estabelecer a associação entre dois domínios. Por exemplo, pode-se se dizer que a potência dos tensores no macrocontínuo é igual à potência dos tensores homogeneizados microscópicos no EVR:

$$\sigma(x, t) : \varepsilon(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y, t) : \varepsilon_\mu(y, t) dV \quad (7)$$

A Equação (7) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma(x, t) : \varepsilon(x, t) = \bar{\sigma}_\mu(y, t) : \bar{\varepsilon}_\mu(y, t) \quad (8)$$

em que, $\bar{\sigma}_\mu(y, t)$ e $\bar{\varepsilon}_\mu(y, t)$ representam os tensores de tensão e deformação homogeneizados na micro-escala, respectivamente. Deste modo, o processo envolvido engloba considerações energéticas e parte do pressuposto que existe de um fluxo com a mesma quantidade de energia em ambas as escalas.

1.1.3 Campo de deslocamento e flutuação dos deslocamentos

O campo de deslocamento microscópico u_μ , em função de y , pode ser decomposto de forma aditiva pelas seguintes parcelas: deslocamento de corpo rígido $u(x, t)$; deformação homogênea $\varepsilon(x, t)y$ que varia conforme a coordenada y ; e um campo de flutuação de deslocamento $\tilde{u}_\mu(y, t)$. Logo, a equação será:

$$u_\mu(y, t) = u(x, t) + \varepsilon(x, t)y + \tilde{u}_\mu(y, t) \quad (9)$$

Um melhor entendimento sobre tal decomposição pode ser verificado a partir da análise de sua representação geométrica, apresentada na Figura 20.2.

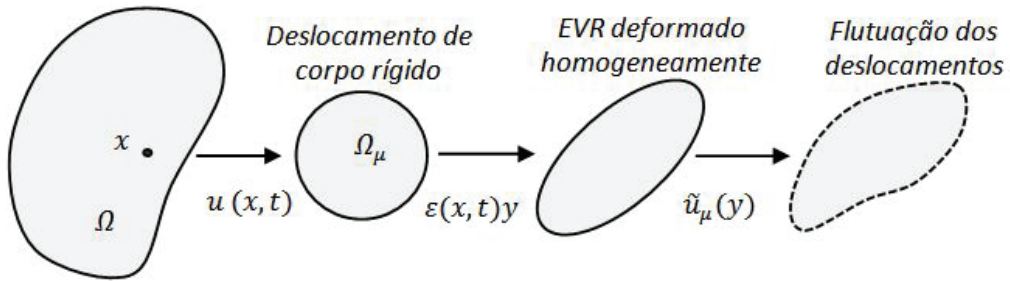


Figura 20.2 Decomposição dos campos de deslocamento microscópico (SANTOS, 2016).

Referente à Equação (9), a parcela \tilde{u}_μ é nula quando a deformação do EVR for homogênea. Caso contrário, isto é, a deformação não for constante, o termo $\tilde{u}_\mu \neq 0$. Portanto, a decomposição aditiva dos campos microscópicos estabelece como ocorre o deslocamento no contorno do EVR.

1.1.4 Modelos multi-escala

As restrições sobre os possíveis campos de deslocamentos admissíveis do EVR definem o tipo de modelo multi-escala. No que segue o modelo de Taylor ou de Deformações Homogêneas no EVR e o modelo de Flutuação Periódica no contorno do EVR são descritos.

1.1.4.1 Modelo de Taylor

No modelo de Taylor ou regra da mistura, o campo de flutuação dos deslocamentos $\tilde{u}_\mu(\mathbf{y})$ para todo \mathbf{y} do EVR é desprezado, ou seja,

$$\tilde{u}_\mu(\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu \quad (10)$$

Nesta análise, a deformação microscópica é considerada homogênea, sendo que os fenômenos dissipativos, em termos de energia, são desconsiderados e o modelo é fornece apenas uma resposta elástica. Este modelo é tomado como o modelo de resposta mais rígido. Contudo, a formulação de Taylor está presente em outros modelos, como no modelo de Flutuação Periódica, o que justifica sua importância para as análises.

1.1.4.2 Modelo de flutuação periódica

Neste caso, o contorno do EVR pode ser analisado como apresentando uma parte positiva Γ^+ e uma parte negativa Γ^- . Dessa forma, cada ponto y^+ no contorno do EVR apresenta um ponto correspondente y^- , com a associação de um vetor normal $N^+ = -N^-$. Um esquema ilustrativo está apresentado na Figura 20.3.

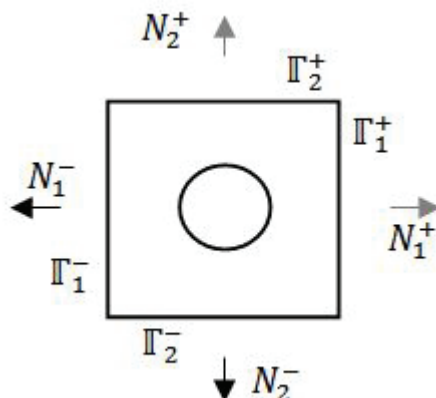


Figura 20.3 Modelo de Flutuação Periódica no contorno do EVR (REIS, 2014).

Assim, existem deslocamentos e deformações para cada ponto do EVR, sendo que a flutuação de um ponto y no contorno do EVR ocorre de maneira periódica, isto é:

$$\tilde{u}_\mu(y^+) = \tilde{u}_\mu(y^-) \quad \forall y \in \partial\Omega_\mu \quad (11)$$

Os cantos do EVR apresentam como característica flutuações nulas. Além disso, este modelo apresenta resposta mais flexível perante o modelo de Taylor.

1.2 Modelagem constitutiva do material

Na análise da microestrutura de metais dúcteis porosos são utilizados conceitos da Teoria da Plasticidade, a qual visa descrever como ocorre o processo de deformações irreversíveis na microestrutura do material. O procedimento utilizado na modelagem dos EVRs consiste numa discretização baseada no Método dos Elementos Finitos, sendo a matriz formada por elementos finitos triangulares, cujo comportamento é condicionado pelo modelo de von Mises. O processo é similar ao apresentado na Figura 20.4.

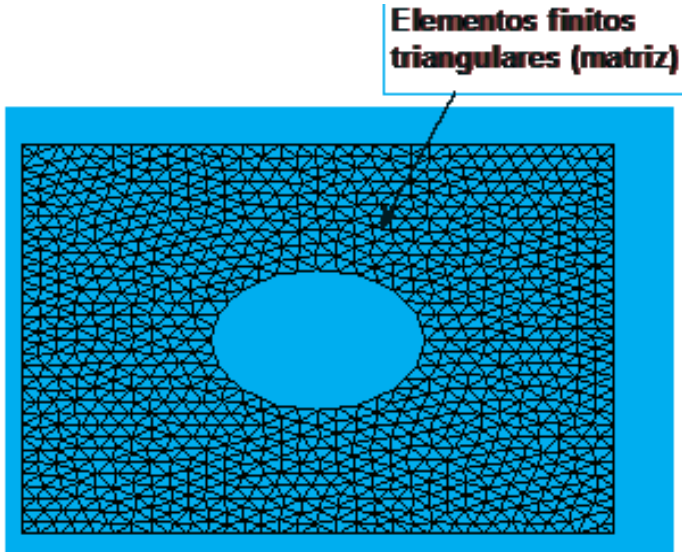


Figura 20.4 Modelagem constitutiva de microestrutura com vazio.

Em se tratando de materiais metálicos, o modelo de von Mises consiste em um critério de plasticidade amplamente empregado para descrever o processo de deformações plásticas. Como este modelo é bastante conhecido na literatura, apresenta-se aqui o equacionamento de forma bastante resumida. Maiores detalhes podem ser encontrados em Souza Neto *et al.* (2008).

O armazenamento da energia de deformação elástica em seu estado genérico pode ser decomposto de forma aditiva em uma contribuição volumétrica U_v e outra contribuição distorcional U_d . Nesse cenário, o modelo de von Mises está associado à parcela de energia distorcional ou desviadora, a qual pode ser obtida pela seguinte relação:

$$U_d = \frac{1}{G} J_2 \quad (12)$$

em que, G e J_2 compreendem, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal do material e o segundo invariante de tensão desviadora.

No critério de von Mises, a produção plástica ocorre quando a invariante de tensão J_2 alcança um valor crítico, o qual pode ser representado matematicamente na forma:

$$J_2 = R(\alpha) \quad (13)$$

onde, R consiste no valor crítico e é definido como função de uma variável interna de endurecimento α .

Com base nestes conceitos, o critério de plastificação de von Mises pode ser escrito na forma:

$$\phi(\sigma) = q(\sigma) - \sigma_y \quad (14)$$

em que, σ_y é a tensão de escoamento uniaxial e $q(\sigma)$ é denotada tensão efetiva ou equivalente de von Mises.

2 Procedimentos Utilizados

Na obtenção dos resultados, foi empregado o modelo constitutivo de von Mises, dentro de uma abordagem multi-escala, para a análise do comportamento de diferentes EVRs. Cabe destacar que as simulações foram realizadas através do modelo multi-escala de Flutuação Periódica no contorno EVR. Por sua vez, as análises contemplaram o estudo de EVRs com proporções diferentes de vazios e, inclusive, com distribuição variada na matriz metálica. Em todo o processo, foram utilizados códigos computacionais para a obtenção das superfícies de plastificação.

Inicialmente, procurou-se estudar o comportamento em separado da pressão p relacionada à parte hidrostática do tensor de tensões e da tensão equivalente de von Mises q . Considerando o espaço $p' - q'$, normalizado em relação à tensão de escoamento σ_y , foram utilizadas as seguintes relações para a obtenção dos resultados:

$$p' = \frac{1}{\sigma_y} \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) \quad (15)$$

$$q' = \frac{1}{\sigma_y} \sqrt{\frac{3}{2} \left[\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2} \right)^2 + 2\sigma_{xy}^2 \right]} \quad (16)$$

em que: σ_{xx} representa a tensão na direção x ; σ_{yy} representa a tensão normal na direção y ; e σ_{xy} consiste na tensão de cisalhamento. Para tanto, plotou-se gráficos com q' e p' versus a relação entre o número do incremento e o somatório dos incrementos para cada EVR. Posteriormente, foi obtida uma superfície de plastificação considerando os máximos valores de p' e q' .

Nesse contexto, o estudo envolveu EVRs nas seguintes configurações: *i*) EVR com um vazio centrado correspondente a 10% de seu volume (1800 elementos triangulares e 980 nós); *ii*) EVR com 10% de vazios distribuídos em seu volume de forma aleatória (1922 elementos triangulares 1057 nós); *iii*) EVR com um vazio centrado correspondente a 20% de seu volume (1622 elementos triangulares e 907 nós); *iv*) EVR com 20% de vazios distribuídos em seu volume de forma aleatória

(1606 elementos e 914 nós). Em todos os casos, para a modelagem da matriz utilizou-se o modelo de von Mises com comportamento elasto-plástico perfeito com a tensão de escoamento de $\sigma_y = 240 \text{ MPa}$. Os valores adotados para o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson corresponderam a $E = 200 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.3$, respectivamente. Neste caso, as análises também foram realizadas utilizando o estado plano de deformação.

Na deformação aplicada ao EVR, considerou-se a seguinte relação:

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{750} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ & \sqrt{2} \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{750} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

em que, α corresponde a um fator de carga.

Deste modo, existem as componentes de deformação normais (ε_x e ε_y) e a componente distorcional γ_{xy} , as quais variam conforme o fator de carga. Para o fator de carga α , foram utilizados valores positivos ($\alpha = 1.0$, $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.3$), valores negativos ($\alpha = -1.0$, $\alpha = -0.7$ e $\alpha = -0.3$) e a situação com $\alpha = 0.0$.

3 Discussão e Resultados

No que segue estão os resultados das análises de p' e q' em separado considerando fatores de carga expansivos (Figuras 20.5, 20.6 e 20.7) e a situação com o fator de carga nulo (Figura 20.8).

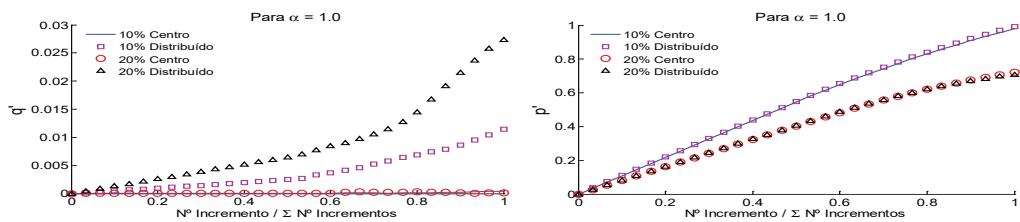


Figura 20.5 Gráficos referentes às componentes q' e p' considerando $\alpha = 1.0$.

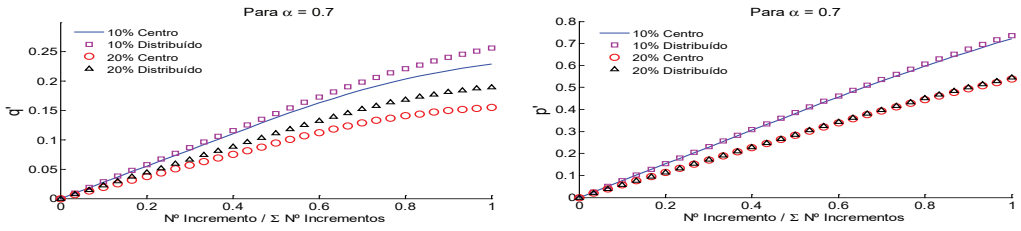


Figura 20.6 Gráficos referentes às componentes q' e p' considerando $\alpha = 0.7$.

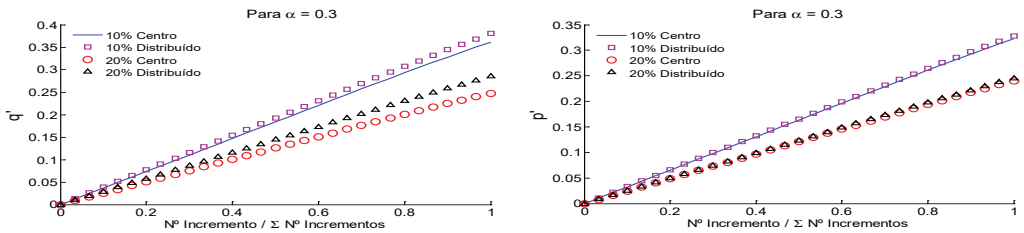


Figura 20.7 Gráficos referentes às componentes q' e p' considerando $\alpha = 0.3$.

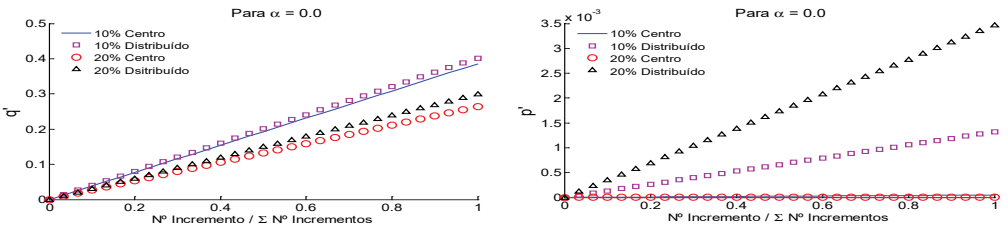


Figura 20.8 Gráficos referentes às componentes q' e p' considerando $\alpha = 0.0$.

A Figura 20.9 apresenta a distribuição de tensões (em MPa) nos EVRs na direção x para cada valor de α positivo e também para α nulo.

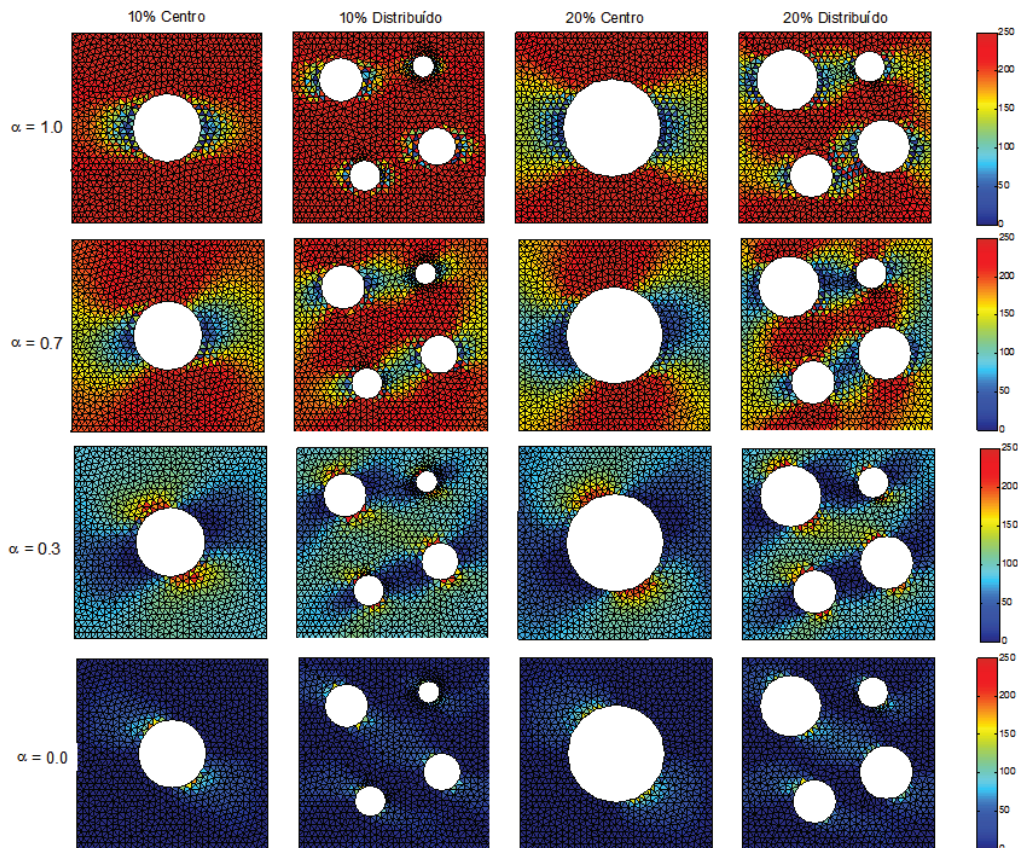


Figura 20.9 Distribuição de tensões (em MPa) nos EVRs na direção x .

Já as análises considerando fatores de carga negativos são mostradas a seguir (Figuras 20.10, 20.11 e 20.12).

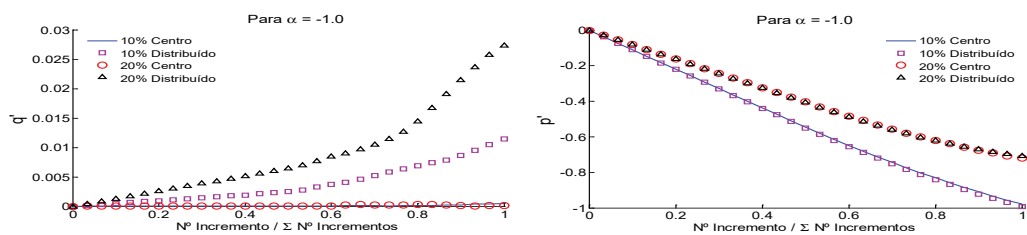


Figura 20.10 Gráficos referentes às componentes q' e p' considerando $\alpha = -1.0$.

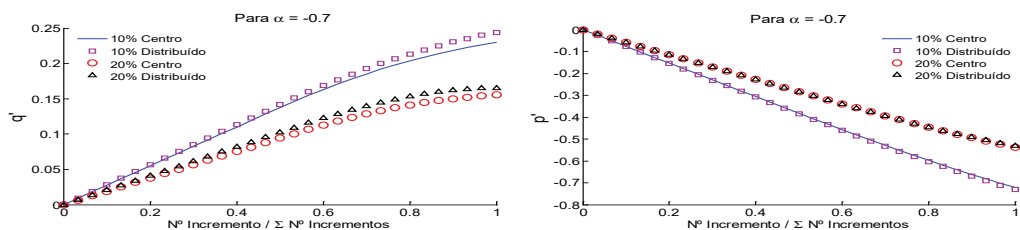


FIGURA 20.11 Gráficos referentes às componentes q' e p' considerando $\alpha = -0.7$.

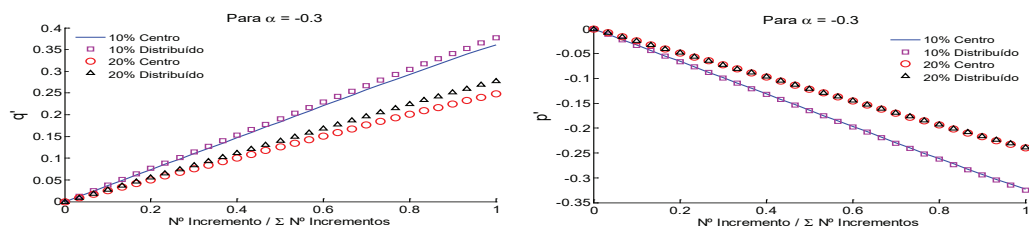


Figura 20.12 Gráficos referentes às componentes q' e p' considerando $\alpha = -0.3$.

A Figura 20.13 apresenta a distribuição de tensões (em MPa) nos EVRs na direção x para cada valor de α negativo.

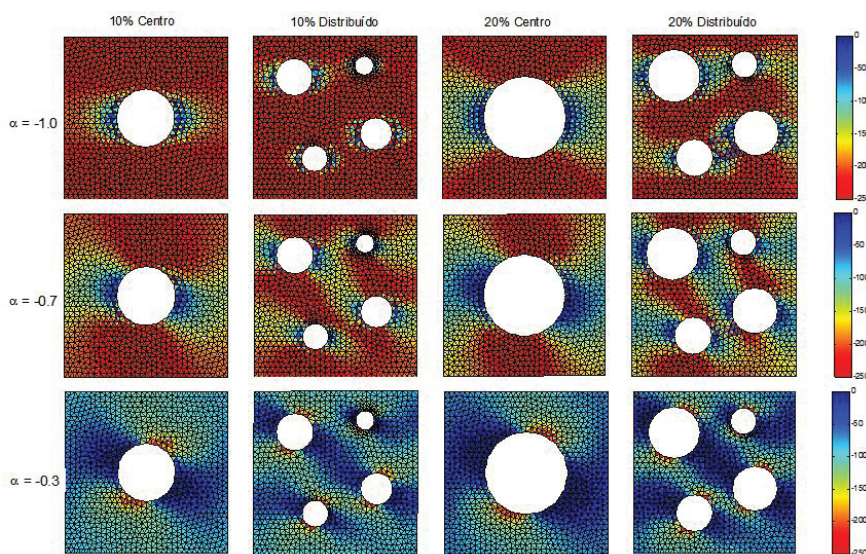


Figura 20.13 Distribuição de tensões (em MPa) nos EVRs na direção x .

Também foram analisados outros valores de α . O gráfico com as componentes máximas q' e p' para todos os fatores de carga α aplicados é apresentado na Figura 14.

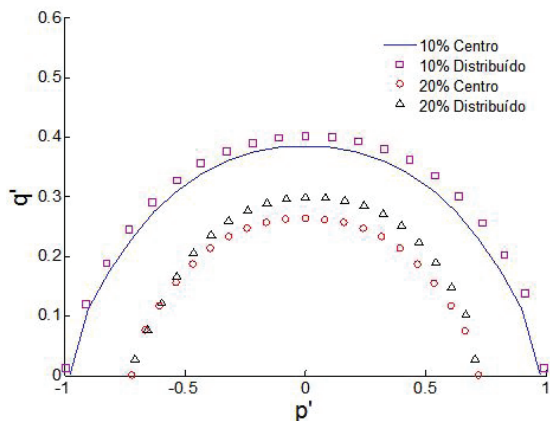


Figura 20.14 Superfície de plastificação considerando as componentes q' e p' .

De modo geral, em relação à componente p' , o comportamento do EVR com um vazio centrado de 10% foi próximo ao comportamento do EVR com 10% de vazios distribuídos aleatoriamente. Da mesma forma, o comportamento do EVR com um vazio centrado de 20% foi próximo ao comportamento do EVR com 20% de vazios distribuídos aleatoriamente. Além disso, os EVRs com menor proporção de vazios apresentaram resultados superiores em termos de resistência aos EVRs com maior proporção de vazios. As respostas são coerentes, pois o aumento da quantidade de vazios promove a perda de resistência da microestrutura e, conseqüentemente, resulta em valores de p' reduzidos, ou seja, o colapso da microestrutura ocorre de forma precoce. Na situação com $\alpha = 0.0$ os resultados foram diferentes e com valores muito inferiores aos demais casos. Essa diferença pode ser explicada pelo fato de $\alpha = 0.0$ resultar apenas na componente de deformação distorcional (γ_{xy}), sendo as deformações normais nulas ($\epsilon_x = 0$ e $\epsilon_y = 0$). Como p' está diretamente relacionado com a parte hidrostática, tal aspecto influenciou nos resultados e implicou em valores bastante reduzidos, principalmente para os EVRs com simetria em sua estrutura.

Nos gráficos referentes à componente q' , a distribuição dos vazios influenciou nos resultados. De modo geral, para a mesma proporção de vazios a microestrutura com distribuição aleatória apresentou curvas com valores mais elevados de q' em comparação com as microestruturas com vazio no centro. Assim, a concentração de vazios no centro influenciou na parte distorcional do tensor de tensões e promoveu uma redução dos valores da componente q' . Já em relação à proporção de vazios, as microestruturas com 10% de vazios apresentaram curvas com

q' superiores perante as microestruturas com 30% de vazios em todos os casos, exceto nas situações com $\alpha = 1.0$ e $\alpha = -1.0$. Nestes últimos casos, possivelmente ocorreu uma perturbação nos resultados, o que está associado com o fato destes fatores de carga ($\alpha = 1.0$ e $\alpha = -1.0$) resultarem apenas em deformações normais (ε_x e ε_y) aplicadas ao EVR.

Conclusões

De modo geral, no estudo específico sobre a presença de vazios na microestrutura de materiais metálicos, os resultados mostram que o aumento da proporção de vazios promove superfícies com valores menores. Por sua vez, o modo como ocorre a distribuição dos vazios influencia de forma sensível na tensão efetiva de von Mises. Neste caso, mantendo a proporção de vazios, os EVRs com distribuição aleatória de vazios apresentam valores maiores da tensão efetiva de von Mises em comparação com os casos com vazios centrados. Assim, a concentração de vazios implica em uma maior plastificação do material.

Com base nestes resultados, em linhas gerais conclui-se que a modelagem multi-escala configura-se como uma ferramenta atraente para o estudo do comportamento de materiais caracterizados por uma estrutura heterogênea. Por fim, como principal vantagem, pode-se destacar a utilização de modelos constitutivos simples para a obtenção de respostas complexas sobre o comportamento mecânico de materiais.

Referências

- AZIZI, R. **Multi-scale modeling of composites**. Lyngby, DK, 2011. 65 f. Thesis (Mechanical Engineering). Department of Mechanical Engineering, Technical University of Denmark.
- FERNANDES, G. R.; PITUBA J. J. C. e SOUZA NETO, E. A. Multi-scale modelling for bending analysis of heterogenous plates by coupling BEM and FEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 51, p. 1-13, 2015.
- GIUSTI, S. M. **Análise de sensibilidade topológica em modelos constitutivos multi-escalas**. Petrópolis, RJ, 2009. 175 p. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional). Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica.
- GIUSTI S. M.; BLANCO P. J.; SOUZA NETO E. A. e FEIJÓO R. A. An assessment of the Gurson yield criterion by a computational multi-scale approach. **Engineering Computations**, v. 26, n. 3, p. 281-301, 2009.

- GURSON, A. L. **Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – yield criteria and flow rules for porous ductile media**. Providence, RI, 1977. 55 p. Technical Report. Division of Engineering, Brown University.
- LOPES, I. A. R. **Análise do dano dúctil baseada em modelos multi-escala**. 2013. 113 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- REIS, F. J. P. **Multi-Scale modelling and analysis of heterogeneous solids at finite strains**. 2014. 205 p. Thesis (Doctor Philosophy in Mechanical Engineering). Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering University of Porto.
- SANTOS, W. F.; FERNANDES, G. R. e PITUBA, J. J. C. **Análise da influência dos processos de plasticidade e fratura no comportamento mecânico de microestruturas de Compósitos de Matriz Metálica**. *Matéria*, v. 21, n. 3, p. 577-598, 2016.
- SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity – Theory and Applications**. Chichester: Wiley, 2008.