

## Projeto ótimo robusto de um sistema de dois graus de liberdade utilizando polinômio do caos

Layane Rodrigues de Souza  
Queiroz<sup>1</sup>

Romes Antonio Borges<sup>1</sup>

**Resumo:** Sistemas mecânicos podem estar sujeitos a incertezas oriundas da imprecisão dos seus parâmetros durante o projeto. Este trabalho lida com o projeto de um sistema mecânico de dois graus de liberdade em que as massas são parâmetros incertos e tal que se busca determinar a constante de rigidez das molas para que a primeira frequência natural seja máxima e o desvio da resposta aleatória seja mínimo. Para lidar com as incertezas, aplica-se o método do Polinômio do Caos homogêneo, de forma que o problema de otimização resultante é resolvido por um algoritmo genético básico. As simulações numéricas mostram que o sistema pode ser projetado adequadamente quando se tem um pequeno desvio para os parâmetros incertos.<sup>1</sup>

**Palavras-chave:** Sistemas discretos de 2 g.d.l., quantificação de incertezas, otimização, polinômio do caos.

### Introdução

Em muitas situações, o projeto requer a determinação de parâmetros ótimos a fim de diminuir os custos envolvidos ou melhorar o nível de segurança. Por outro lado, o sistema geralmente sofre com incertezas que podem surgir, por exemplo, a partir da imprecisão dos parâmetros.

De forma similar, é comum que o sistema projetado esteja sujeito a diferentes níveis de vibração, o que pode ocasionar falhas e, assim, impactar no seu nível de

---

1 Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia. Contato: spinellyh@hotmail.com, romes@ufg.br.

segurança. Uma saída é considerar o uso de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações (ADVs), que são afixados na estrutura com o intuito de absorver a sua energia vibratória. Embora os ADVs tenham baixo custo, eles precisam ser projetados para atuar em condições extremas (MÉNDEZ, 2014).

A modelagem de um ADV básico envolve uma estrutura com massa e rigidez, enquanto modelos mais elaborados consideram a inclusão de um elemento de amortecimento no absorvedor, o que permite obter amplitudes em menor escala para grandes faixas de frequência. Vale (2006) considerou o emprego de um ADV constituído de amortecimento viscoelástico para o controle de vibrações em reatores nucleares, enquanto Barros (2009) trabalhou no projeto ótimo de um ADV multimodal envolvendo a associação de vigas com discos circulares, em que foi feito um ensaio em uma carcaça de compressor hermético a fim de validar a proposta.

Outra forma de lidar com os níveis de vibração de um sistema consiste em maximizar a sua primeira frequência natural e/ou distanciar as frequências. Nesta linha, Wang et al. (2006) lidaram com o projeto de uma viga sob diferentes condições de contorno com o objetivo de determinar a posição ótima do suporte e a sua rigidez visando a maximização das frequências de vibração da viga. Rajasekaran et al. (2008) trabalharam com a movimentação de plataformas marinhas (ou *offshores*) por guindastes objetivando determinar a posição dos suportes nos guindastes para que a frequência de vibração seja máxima. Picelli et al. (2015) desenvolveram um algoritmo evolucionário para otimizar a topologia de sistemas com estrutura acústica, em que se buscou maximizar a primeira frequência natural do sistema.

Assim, este trabalho tem por objetivo projetar um sistema mecânico de dois graus de liberdade com incertezas nas massas. Para o projeto, considera-se a resolução de um problema de otimização que busca determinar a rigidez das molas de forma a maximizar a primeira frequência natural, enquanto minimiza o seu desvio padrão. A resolução do problema de otimização é feita por meio de um algoritmo genético básico.

Ao considerar que as massas do sistema de dois graus de liberdade são elementos com características incertas, tem-se que elas são tratadas como variáveis aleatórias e, assim, devem ser propagadas pelo sistema com o intuito de analisar o impacto nas frequências de vibração. O impacto na frequência é mensurado a partir de estatísticas que representam o seu valor esperado (média) e a sua variância (GHANEM; SPANOS, 1991).

Entre os métodos empregados para a quantificação de incertezas, este trabalho considera o método do Polinômio do Caos homogêneo, sendo as incertezas tratadas como processos estocásticos de segunda ordem no espaço de Hilbert (GHANEM; SPANOS, 1991). O Polinômio do Caos homogêneo usa a base de polinômios ortogonais de Hermite cuja função peso reflete a função densidade de probabilidade de variáveis aleatórias gaussianas usadas para representar as incertezas.

O Polinômio do Caos permite separar, na resposta do sistema, a parte estocástica, que fica concentrada apenas na base de polinômios utilizada, da determinística, que contém os coeficientes da expansão e permite determinar as estatísticas mencionadas. Assim, o valor médio da resposta é obtido a partir do primeiro coeficiente da expansão, enquanto a variância é dada pela soma ponderada dos coeficientes ao quadrado dos outros termos da expansão (GHANEM; SPANOS, 1991).

Ghanem e Spanos (1991) apresentaram um desenvolvimento detalhado do Polinômio do Caos homogêneo com aplicação em diferentes problemas da engenharia. Xiu e Karniadakis (2002) propuseram uma generalização do Polinômio do Caos para considerar o uso dos polinômios ortogonais de Askey, pois assim as variáveis podem seguir outras distribuições de probabilidade. Kewlani et al. (2012) aplicaram o Polinômio do Caos para quantificar o impacto na resposta aleatório do movimento de um veículo sujeito a incertezas. Por sua vez, Guerine et al. (2016) aplicaram o Polinômio do Caos homogêneo para simular o comportamento dinâmico não linear de um sistema de engrenagens com incertezas no atrito.

## 1 Polinômio do Caos Homogêneo

O método do Polinômio do Caos (PC) foi proposto inicialmente para resolver equações diferenciais estocásticas. A expansão em PC permite criar uma relação robusta entre a resposta do sistema e as variáveis aleatórias, uma vez que determina o valor médio e a variância da resposta aleatória associada ao sistema com incertezas.

O PC foi definido com base em uma expansão dos polinômios de Hermite para processos estocásticos de segunda ordem (isto é, aqueles com variância finita) em termos de variáveis aleatórias gaussianas ortonormais independentes considerando o espaço de Hilbert  $L^2$ . O desenvolvimento do PC homogêneo é feito adiante com base em Ghanem e Spanos (1991). Para a resposta do sistema representada por um processo estocástico  $X(w)$  de segunda ordem, em que  $w$  representa um evento aleatório, a expansão em PC é dada por:

$$\begin{aligned} X(w) = & a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(w)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(w), \xi_{i_2}(w)) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}(w), \xi_{i_2}(w), \xi_{i_3}(w)) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_4(\xi_{i_1}(w), \xi_{i_2}(w), \xi_{i_3}(w), \xi_{i_4}(w)) + \dots \end{aligned}$$

sendo que os  $a_{ij...}$  representam os coeficientes da expansão;  $\Gamma_p(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n})$  representa o polinômio do caos de ordem  $p$  e de dimensão  $n = \infty$ , que é ortogonal em termos das variáveis aleatórias gaussianas independentes dadas em  $\xi = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n})$ . Por conveniência, omite-se "w" das variáveis em  $\xi$ .

A Eq. (1) pode ser rescrita a partir de uma indexação baseada em termo resultando em:

$$X(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{a}_j \Phi_j(\xi), \quad (2)$$

em que existe uma relação biunívoca entre os termos  $\Gamma_p$  com  $\Phi_j$ , assim como entre os  $a_{i...}$  e os coeficientes  $\hat{a}_j$ .

Os polinômios em  $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots\}$  formam uma base ortogonal completa em termo das variáveis aleatórias independentes em  $\xi$ , de forma que produto interno coincide com o valor esperado  $E$  no espaço de Hilbert, isto é:

$$\langle \Phi_r, \Phi_s \rangle = E[\Phi_r, \Phi_s] = \int_C \Phi_r(\xi) \Phi_s(\xi) \rho(\xi) d\xi, \quad (3)$$

em que  $\rho(\xi)$  representa a função peso e  $C$  é o suporte (intervalo de ortogonalidade). Os polinômios são ortogonais quando o produto interno é nulo, isto é, a integral resulta em zero para  $r \neq s$ .

A função peso assume a forma da função de distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias  $\xi$  sendo consideradas. No caso do PC homogêneo, em que o  $C$  representa o intervalo  $(-\infty, \infty)$ , a função peso dos polinômios ortogonais de Hermite é dada por (XIU et al., 2003):

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi}, \quad (4)$$

que também representa a função densidade de probabilidade de variáveis aleatórias gaussianas n-dimensionais.

Na expansão do PC homogêneo, o polinômio do caos  $\Gamma_p$ , de ordem  $p$  e dimensão  $n$ , é obtido calculando-se o polinômio de Hermite n-dimensional (GHANEM; SPANOS, 1991) como:

$$\Gamma_p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (-1)^n \left( e^{\frac{1}{2}\xi^T \xi} \right) \left( \frac{\partial^n}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_n} e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi} \right). \quad (5)$$

Do ponto de vista aplicado, a Eq. (2), que contém uma expansão infinita, é substituída por uma finita, ao mesmo tempo que se usa um número finito de variáveis aleatórias. Assim, a expansão finita em PC homogêneo passa a ser:

$$X(w) = \sum_{j=0}^N \hat{a}_j \Phi_j(\xi). \quad (6)$$

sendo  $N$  o número de termos da expansão para um polinômio de ordem máxima  $p$  e a dimensão de  $\xi$  sendo  $n < \infty$ . O valor de  $N$  é obtido calculando:

$$N = \frac{(n+p)!}{n!p!} - 1. \quad (7)$$

Segundo Machado (2012), dada a aplicação do PC homogêneo em sistemas com incertezas, cada parâmetro incerto  $\alpha(w)$  pode ser expresso na forma de uma expansão de Karhunen-Loeve da seguinte forma:

$$\alpha(w) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(w) g_i, \quad (8)$$

sendo  $g_i$  funções determinísticas associadas a covariância do processo  $\alpha(w)$ .

Os coeficientes  $\hat{a}_j$  da Eq. (6) podem ser obtidos a partir da substituição de  $X(w)$  e dos parâmetros incertos, da Eq. (8), na equação do sistema com incertezas, em seguida multiplicando o resultado por cada  $\Phi_j$  e tomando o produto interno, além de considerar as propriedades de ortogonalidade. Isto resulta em um sistema de  $N + 1$  equações, em que surgem coeficientes do tipo  $\langle \xi_i \Phi_j, \Phi_r \rangle$  calculados a partir da resolução da integral na Eq. (3).

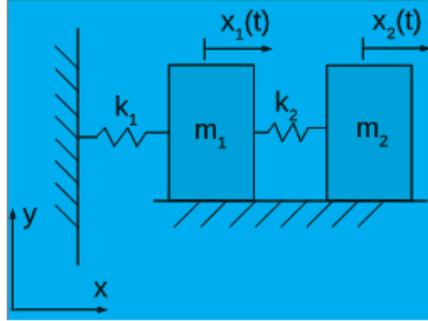
Por fim, as estatísticas da resposta aleatória do sistema com incertezas, isto é, o seu valor médio e a sua variância são obtidas, respectivamente, por (GHANEM; SPANOS, 1991):

$$\mu_X = \hat{a}_0, \quad (9)$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{j=1}^N \hat{a}_j^2 \langle \Phi_j^2 \rangle. \quad (10)$$

## 2 Consideração de Incertezas em um Sistema Mecânico

Seja um sistema mecânico de dois graus de liberdade conforme apresenta a 1.1. Assume-se que  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  representam o deslocamento na direção horizontal para as massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente, em que não há atrito entre a base horizontal fixa e as massas. As molas que conectam a massa  $m_1$  na base vertical fixa, e a massa  $m_2$  na massa  $m_1$  possuem rigidez  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente.



**Figura 3.1** Sistema mecânico de dois graus de liberdade.

Observando a Fig. 1, tem-se um sistema de dois graus de liberdade sem força externa cuja equação de movimento é dada na Eq. (11).

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Considera-se a solução da Eq. (11) na forma  $x_1(t) = X_1 e^{i\omega t}$  e  $x_2(t) = X_2 e^{i\omega t}$ , que representa um movimento harmônico, tal que  $\omega$  é uma constante a ser determinada (INMAN, 2013). Assim, chega-se em:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_1 \neq 0 \text{ e } X_2 \neq 0. \quad (12)$$

Para que a Eq. (12) tenha uma solução diferente de zero, a matriz de coeficientes deve satisfazer:

$$\det \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} = 0, \quad (13)$$

que resulta no seguinte polinômio característico, para  $\omega^2 = \lambda$ , ou seja:

$$m_1 m_2 \lambda^2 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) \lambda + k_1 k_2 = 0. \quad (14)$$

A resolução da Eq. (14) permite obter as frequências em que as massas  $m_1$  e  $m_2$  oscilam, chamadas de frequências naturais (Inman, 2013). Ao assumir que as massas do sistema estão sujeitas a incertezas, sendo representadas em termos de variáveis aleatórias gaussianas independentes, parte-se para a aplicação da expansão em PC homogêneo.

A partir da Eq. (8), os parâmetros incertos podem ser escritos na forma de uma expressão de Karhunen-Loeve finita, em que se assume apenas uma variável aleatória, resultando respectivamente em:

$$\tilde{m}_1 = \bar{m}_1 + \sum_{i=1}^1 \xi_i g_i = m_1 + \xi_1 \sigma_{m_1}, \quad (16)$$

sendo que  $\bar{m}_1$  e  $\bar{m}_2$  representam as médias e correspondem aos respectivos valores reais  $m_1$  e  $m_2$ ;  $g_1 = \sigma_{m_1}$  e  $g_2 = \sigma_{m_2}$  representam os respectivos desvio padrão para as massas; e,  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são as variáveis aleatórias independentes que representam as incertezas das respectivas massas.

O próximo passo consiste em considerar as incertezas no sistema, ou seja, substituir as Eqs. (15) e (16) na Eq. (14) resultando em:

$$(m_1 + \xi_1 \sigma_{m_1})(m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2})\lambda^2 - ((m_1 + \xi_1 \sigma_{m_1})k_2 + (m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2})k_1 + (m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2})k_2)\lambda + k_1 k_2 = 0. \quad (17)$$

Uma vez que há incertezas no sistema da 1.1, a sua resposta aleatória passa a ser representada por uma expansão em PC finita. Assume-se  $n=2$  variáveis aleatórias e um polinômio de ordem máxima  $p=2$ , resultando em  $N=5$  e tal que:

$$\lambda = \sum_{j=0}^5 \lambda_j \Phi_j(\xi_1, \xi_2) = \lambda_0 \Phi_0 + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3 + \lambda_4 \Phi_4 + \lambda_5 \Phi_5. \quad (18)$$

Para obter os polinômios de Hermite em função de  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , aplica-se a Eq. (5), o que resulta em:  $\Phi_0 = 1$ ,  $\Phi_1 = \xi_1$ ,  $\Phi_2 = \xi_2$ ,  $\Phi_3 = \xi_1^2 - 1$ ,  $\Phi_4 = \xi_1 \xi_2$  e  $\Phi_5 = \xi_2^2 - 1$ , com  $\langle \Phi_0 \rangle = 1$ ,  $\langle \Phi_1 \rangle = \langle \Phi_2 \rangle = \langle \Phi_3 \rangle = \langle \Phi_4 \rangle = \langle \Phi_5 \rangle = 0$ ,  $\langle \Phi_0^2 \rangle = \langle \Phi_1^2 \rangle = \langle \Phi_2^2 \rangle = \langle \Phi_4^2 \rangle = 1$  e  $\langle \Phi_3^2 \rangle = \langle \Phi_5^2 \rangle = 2$ .

O próximo passo consiste em fazer a projeção da Eq. (17), após a substituição da resposta dada na Eq. (18), sobre o espaço aleatório com a base de polinômios de Hermite. Em outras palavras, o resultado da substituição da Eq. (18) na Eq. (17) é multiplicado por cada polinômio da base  $\Phi$  e, em seguida, toma-se o produto interno. Segue que um conjunto de  $N + 1$  equações algébricas são obtidas representando um conjunto de polinômios característicos aleatórios, isto é, para cada  $r = 0, 1, \dots, 5$ , tem-se:

$$\left\langle \Phi_r, (m_1 + \xi_1 \sigma_{m_1})(m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2}) \left( \sum_{j=0}^5 \lambda_j \Phi_j \right)^2 - ((m_1 + \xi_1 \sigma_{m_1})k_2 + (m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2})k_1 + (m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2})k_2) \sum_{j=0}^5 \lambda_j \Phi_j + k_1 k_2 \right\rangle = \langle \Phi_r, 0 \rangle. \quad (19)$$

Embora o conjunto de equações obtido a partir da Eq. (19) seja acoplado, ele é determinístico, uma vez que a aleatoriedade do sistema foi deslocada para a base de polinômios em  $\Phi$ . Diante disto, tais equações podem ser resolvidas (neste caso numericamente por envolver termos não lineares) visando obter as estatís-

ticas da resposta aleatória. Em outras palavras, o valor médio e a variância das duas frequências obtidas a partir da Eq. (19) são expressas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \mu_{\lambda_{[1]}} = \lambda_{0,[1]} \\ \mu_{\lambda_{[2]}} = \lambda_{0,[2]} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \sigma_{\lambda_{[1]}}^2 = \lambda_{1,[1]}^2 + \lambda_{2,[1]}^2 + 2\lambda_{3,[1]}^2 + \lambda_{4,[1]}^2 + 2\lambda_{5,[1]}^2 \\ \sigma_{\lambda_{[2]}}^2 = \lambda_{1,[2]}^2 + \lambda_{2,[2]}^2 + 2\lambda_{3,[2]}^2 + \lambda_{4,[2]}^2 + 2\lambda_{5,[2]}^2 \end{cases} \quad (21)$$

O objetivo é maximizar o valor esperado (i.e., a média) da primeira frequência  $\lambda_{[1]}$  na Eq. (20) e, ao mesmo tempo, minimizar o seu desvio padrão, obtido a partir da variância  $\sigma_{\lambda_{[1]}}^2$  na Eq. (21). Logo, busca-se determinar o valor de  $k_1$  e  $k_2$  para a aleatoriedade propagada nas frequências naturais do sistema na 1.1, sendo conhecidas as massas  $m_1$  e  $m_2$  e os seus respectivos desvios padrões  $\sigma_{m_1}$  e  $\sigma_{m_2}$ . Para tanto, considera-se o seguinte problema de otimização multiobjetivo:

$$\begin{cases} \text{Maximizar } f_1 = \mu_{\lambda_{[1]}} \\ \text{Minimizar } f_2 = \sigma_{\lambda_{[1]}} \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 1500 \leq k_1 \leq 2500 \\ 300 \leq k_2 \leq 800 \end{cases} \quad (23)$$

Lobato (2008) apresenta métodos para lidar com problemas de otimização multiobjetivo, de forma que neste trabalho aplica-se o método da Soma Ponderada resultando na função da Eq. (24).

$$\text{Minimizar } F = -\frac{Wf_1}{f_1^o} + \frac{(1-W)f_2}{f_2^o} \quad (24)$$

O fator de ponderação é definido como  $0 \leq W \leq 1$ , tal que cada valor de  $W$  permite fornecer uma solução para  $f_1$  e  $f_2$  e, assim, é possível construir a curva de Pareto das soluções. Como a localização do ponto ótimo não depende apenas de  $W$ , considera-se um coeficiente  $c_i = \frac{1}{f_i^o}$ , para  $i = 1, 2$ , sendo  $f_i^o$  o valor ideal obtido da otimização individual da função objetivo  $f_i$  com as restrições na Eq. (23).

### 3 Algoritmos genéticos

O método de otimização Algoritmos genéticos é uma técnica que utiliza-se de estratégias fundamentadas na teoria da evolução Darwiniana, descrita por Darwin (1859), para resolver, em geral, problemas de otimização. Segundo

Darwin (1859), os melhores indivíduos sobrevivem as gerações e conseguem produzir bons descendentes.

Com base nisso, Holland (1975) estabeleceu os princípios básicos para a construção de um Algoritmo Genético (AG) com aplicação em problemas de otimização. O AG utiliza uma população de indivíduos, representada geralmente por cromossomos, em que cada cromossomo contém uma solução do problema. Os melhores cromossomos, isto é, com as melhores soluções, conforme a função de aptidão, são escolhidos para a fase de reprodução e seguem com alta probabilidade para a nova geração, da próxima iteração. Deste modo, com o decorrer das gerações (iterações do algoritmo), a tendência é que a população passe a ter cada vez mais indivíduos com melhores valores de função objetivo.

Em linhas gerais, o AG realiza uma busca global pela melhor solução do problema, sendo capaz de evitar ótimos locais. Basicamente, para uma dada população gerada inicialmente de modo aleatório, escolhem-se os indivíduos com melhor valor de função de aptidão para aplicar os operadores genéticos de cruzamento e mutação. A partir disso, uma nova população, que combina os melhores indivíduos da população atual com os indivíduos descendentes, é criada. Esses passos são repetidos até que se alcance algum critério de parada.

A operação de cruzamento consiste em gerar indivíduos descendentes a partir da combinação dos melhores indivíduos da população atual selecionados com alta probabilidade. A probabilidade é calculada de acordo com o valor que cada indivíduo recebe da função de aptidão. Deste modo, realiza-se a combinação entre as partes genéticas de dois indivíduos aptos, o que geralmente resulta em indivíduos descendentes de boa qualidade. O número de indivíduos que passam pelo cruzamento é determinado por meio da probabilidade de cruzamento. Por sua vez, o operador de mutação consiste em realizar a mudança de um (ou mais) valor contido no cromossomo. A escolha da posição onde mudar o valor é feita de forma aleatória, tal que a mudança ocorre a partir de uma probabilidade de mutação, que deve ter valor pequeno a fim de que não haja pioras significativas na solução.

## 4 Simulações numéricas

A resolução do problema de otimização definido na Eq. (24) sujeito as restrições na Eq. (23) é feita por um Algoritmo Genético básico<sup>2</sup>, denominado por AG, disponibilizado pelo *Grupo de Control Predictivo y Optimización*, da Universidade Politécnica de Valência, para o *software* Matlab. Detalhes da implementação e funcionamento do AG podem ser obtidos em Ferragud (1999).

---

2 <http://cpoh.upv.es/en/research/software/item/249-basic-ga.html>

A partir de um estudo de sensibilidade dos parâmetros do AG, chegou-se nos seguintes valores:  $N = 50$  (tamanho da população),  $N_{ger} = 100$  (número de gerações),  $P_c = 0,7$  (probabilidade de cruzamento) e  $P_m = 0,05$  (probabilidade de mutação). Os valores adotados para os parâmetros correspondem a  $m_1 = 100$  e  $m_2 = 30$ . Dois cenários são analisados, para o desvio padrão das massas variando no intervalo [5%, 10%] do respectivo valor nominal, ou seja, avaliam-se os cenários  $C_1 = \{\sigma_{m_1} = 5; \sigma_{m_2} = 3\}$  e  $C_2 = \{\sigma_{m_1} = 10; \sigma_{m_2} = 1,5\}$ , que representam os dois extremos permitidos para o desvio padrão das massas.

A resolução do problema de otimização definido anteriormente pelo AG resulta para o cenário  $C_1$  na Tabela 3.1, com os resultados para distintos valores de  $W$ , e na Fig. 3.2, com a curva de Pareto. De forma similar, a Tabela 3.2 e a Fig. 3.3 trazem os resultados para os diferentes  $W$  e a curva de Pareto, respectivamente, para o Cenário  $C_2$ . Vale ressaltar que em  $C_1$ , os valores ideais de cada função objetivo foram  $f_1^o = 14,95$  e  $f_2^o = 0,08$ , enquanto que para  $C_2$  o resultado obtido foi de  $f_1^o = 14,93$  e  $f_2^o = 0,02$ .

Os resultados obtidos na 1.1 mostram que a medida que o valor de  $W$  se aproxima de 1, consegue-se aumentar satisfatoriamente o valor da primeira frequência natural, o que requer que as variáveis de projeto tenham valores iguais ao seus limitantes superiores, porém o desvio padrão associado a aleatoriedade da resposta aumenta consideravelmente. O processo inverso ocorre quando  $W$  se aproxima de 0, o que também pode ser visto na Fig. 3.2.

Para  $W = 0$  é possível comparar o valor esperado da primeira frequência natural, obtida com o emprego do PC homogêneo, com o valor determinístico, obtido a partir da resolução da Eq. (14), obtendo, respectivamente,  $\mu_{\lambda_{[1]}} = 7,26 \pm 0,08$  e  $\lambda_1 = 7,22$ . Este resultado condiz com o tamanho da expansão assumida para o PC, uma vez que expansões com mais termos conseguem representar melhor as incertezas do sistema.

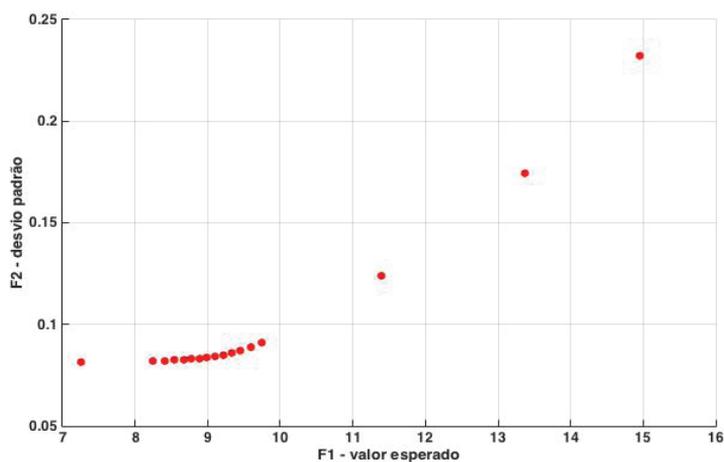
**Tabela 3.1** Soluções da curva de Pareto considerando o cenário  $C_1$ .

$W$	$k_1$	$k_2$	$f_1$	$f_2$	Nº Avaliações
0,00	1500,00	300,00	7,26	0,08	5050
0,05	1500,00	300,00	7,26	0,08	5050
0,10	1500,00	300,00	7,26	0,08	5050
0,15	1500,00	385,82	8,25	0,08	5050
0,20	1500,00	404,61	8,42	0,08	5050
0,25	1500,00	420,62	8,55	0,08	5050

Continua

**Tabela 3.1** Soluções da curva de Pareto considerando o cenário  $C_1$ . (Continuação)

$W$	$k_1$	$k_2$	$f_1$	$f_2$	Nº Avaliações
0,30	1500,00	435,77	8,67	0,08	5050
0,35	1500,00	450,88	8,78	0,08	5050
0,40	1500,00	466,49	8,88	0,08	5050
0,45	1500,00	483,07	8,99	0,08	5050
0,50	1500,00	501,16	9,10	0,08	5050
0,55	1500,00	521,37	9,21	0,08	5050
0,60	1500,00	544,59	9,33	0,09	5050
0,65	1500,00	572,12	9,45	0,09	5050
0,70	1500,00	606,05	9,59	0,09	5050
0,75	1500,00	650,02	9,75	0,09	5050
0,80	1736,26	785,34	11,39	0,12	5050
0,85	2129,72	800,00	13,37	0,17	5050
0,90	2500,00	800,00	14,95	0,23	5050
0,95	2500,00	800,00	14,95	0,23	5050
1,00	2500,00	800,00	14,95	0,23	5050



**Figura 3.2** Curva de Pareto do cenário  $C_1$  para a primeira frequência natural do sistema com incertezas.

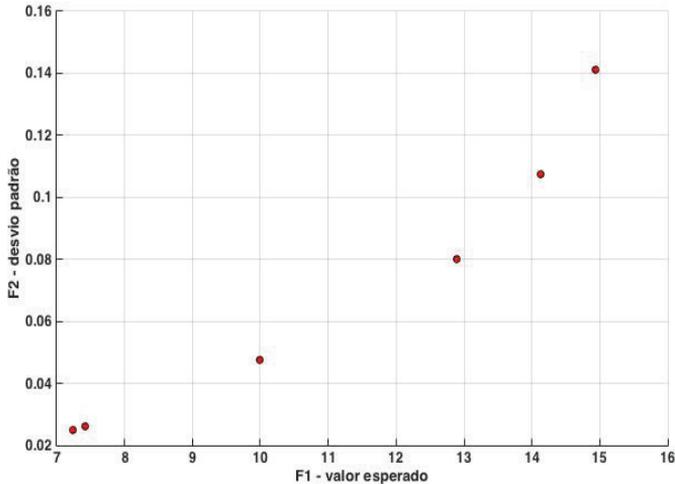
Os resultados para o cenário  $C_2$  estão na Tabela 3.3, com a curva de Pareto na Fig. 3.3. Observa-se que há uma diferença com relação aos resultados do cenário  $C_1$ , em especial no que diz respeito ao número de pontos distintos na curva de Pareto. Note que agora houve pouca variação em  $f_2$ .

**Tabela 3.2** Soluções da curva de Pareto considerando o cenário  $C_2$ .

$W$	$k_1$	$k_2$	$f_1$	$f_2$	Nº Avaliações
0,00	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,05	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,10	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,15	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,20	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,25	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,30	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,35	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,40	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,45	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,50	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,55	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,60	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,65	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,70	1500,00	300,00	7,23	0,03	2550
0,75	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,80	1500,00	313,72	7,42	0,03	5050
0,85	2002,69	425,62	9,99	0,05	5050
0,90	2500,00	566,25	12,90	0,08	5050
0,95	2500,00	689,68	14,12	0,11	5050
1,00	2500,00	800,00	14,93	0,14	5050

Ao analisar o cenário  $C_2$ , percebe-se que o aumento no desvio padrão associado a massa  $m_1$  traz menor impacto na curva de Pareto ao comparar com o

cenário  $C_1$ , em que o desvio padrão de  $m_1$  assume seu menor valor. A Tabela 3.2 mostra que para  $W \leq 0,8$  não houve variação com relação aos objetivos, ao contrário da Tabela 3.1, em que isto ocorreu somente para  $W \leq 0,1$  e  $W \geq 0,9$ .



**Figura 3.3** Curva de Pareto do cenário  $C_2$  para a primeira frequência natural do sistema com incertezas.

É importante mencionar que os cenários analisados consideram que o desvio padrão das massas, isto é,  $\sigma_{m_1}$  da massa  $m_1$ , e  $\sigma_{m_2}$  da massa  $m_2$ , podem variar até 10% do respectivo valor nominal. Acredita-se que a solução do PC deve divergir da solução determinística quando se aumenta o valor do desvio padrão desses parâmetros incertos, ao mesmo tempo que o desempenho do PC pode ser melhorado ao aumentar a ordem máxima assumida para a expansão ou considerando mais variáveis aleatórias independentes para os parâmetros incertos.

## Conclusões

Ao considerar a otimização das frequências naturais de um sistema mecânico, este trabalho lidou com a aplicação do método do Polinômio do Caos para obter as estatísticas das soluções aleatórias associadas a primeira frequência natural do sistema sendo projetado. O projeto assume que as massas estão sujeitas a incertezas e, assim, possuem um desvio padrão máximo conhecido (gerando dois cenários de teste), enquanto se busca determinar os valores das rigidez que permite maximizar a primeira frequência ao mesmo tempo que minimizar o seu desvio padrão.

A partir da aplicação de um AG básico, os parâmetros encontrados para cada cenário de teste permitiram projetar um sistema de dois graus de liberdade com

alto valor para a primeira frequência natural, porém tendo o seu valor reduzido a medida que o projetista busca diminuir o desvio padrão da resposta aleatória.

Assim, os resultados mostram, para ambos os cenários, que o ganho com o aumento da frequência traz prejuízos em relação ao aumento do seu desvio padrão. A vantagem da construção da curva de Pareto é que o projetista pode selecionar o conjunto de valores que melhor representam a realidade do projeto, mesmo com a presença de incertezas.

Como trabalhos futuros pretende-se trabalhar com métodos mais sofisticados para a otimização multiobjetivo e acrescentar outras considerações para o projeto de estruturas reais.

## Referências

- BARROS, M. B. *Proposição, avaliação numérica e experimental de um absorvedor dinâmico de vibrações multimodal*. Dissertação (Mestrado – Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG, 2009.
- DARWIN, C. *On the origin of species by means of natural selection*. London: Murray, v. 247, 1859.
- FERRAGUD, F. X. B. *Control predictivo basado en modelos mediante técnica de optimización heurística. Aplicación a procesos no lineales y multivariáveis*. Tese (Doutorado), Universidade Politécnica de Valência, Valência - Espanha, 1999.
- GHANEM, R. G.; SPANOS, P. D. *Stochastic Finite Elements: a Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991.
- GUERINE, A. et al. A polynomial chaos method for the analysis of the dynamic behavior of uncertain gear friction system. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, v. 59, p. 76-84, 2016.
- HOLLAND, J. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- INMAN, D. J. *Engineering Vibration*, 4<sup>th</sup> Edition. Pearson Education Inc, 2013.
- KEWLANI, G.; CRAWFORD, J.; IAGNEMMA, K. A polynomial chaos approach to the analysis of vehicle dynamics under uncertainty. *Vehicle System Dynamics*, v. 50, n. 5, p. 1-26, 2012.

- LOBATO, F. S. *Otimização Multi-objetivo para o Projeto de Sistemas de Engenharia*. Tese (Doutorado – Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG, 2008.
- MACHADO, M. R. *Quantificação de Incertezas e Análise de Confiabilidade em Problemas Mecânicos*. Dissertação (Mestrado – Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 2012.
- MÉNDEZ, Y. A. D. *Um Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Multimodais*. Dissertação (Mestrado – Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista – Campus de Ilha Solteira, Ilha Solteira-SP, 2014.
- PICELLI, P. et al. Evolutionary topology optimization for natural frequency maximization problems considering acoustic-structure interaction. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 106, n. C, p. 56-64, 2015.
- Rajasekaran, S.; Anneta, D.; Choob, Y. S. Optimal locations for heavy lifts for offshore platforms. *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*, v. 9, n. 6, p. 605-627, 2008.
- VALE, A. R. M. *Controle de vibrações em reatores elétricos através de absorvedores dinâmicos viscoelásticos*. Dissertação (Mestrado – Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Pará, Belém-PA, 2006.
- XIU, D. et al. Performance Evaluation of Generalized Polynomial Chaos. In Sloom, P. M. A., Abramson, D., Bogdanov, A. V., Gorbachev, Y. E., Dongarra, J. J., & Zomaya, A. Y., eds, *International Conference on Computational Science (ICCS 2003)*, p. 346-354, 2003.
- XIU, D.; KARNIADAKIS, G. E. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 24, n. 2, p. 619-644, 2002.
- WANG, D.; FRISWELL, M. I.; LEIC, Y. Maximizing the natural frequency of a beam with an intermediate elastic support. *Journal of Sound and Vibration*, v. 291, p. 1229-1238, 2006.

