

# 2

## CAPÍTULO

# **SIMULAÇÃO NUMÉRICO- -COMPUTACIONAL DE PLACAS FINAS EM GRANDES DESLOCAMENTOS**

*Andressa Fernanda Rosa de Lima*

Universidade Federal de Uberlândia,  
Faculdade de Engenharia Mecânica.  
andressafernanda@hotmail.com.br

*Romes Antonio Borges*

Universidade Federal de Goiás,  
Instituto de Matemática e Tecnologia.  
romes@ufg.br

*Antônio Marcos Gonçalves  
de Lima*

Universidade Federal de Uberlândia,  
Faculdade de Engenharia Mecânica.  
amglima@ufu.br

## **RESUMO**

No meio industrial, buscam-se constantemente a confiabilidade, a durabilidade e a segurança das máquinas e equipamentos utilizados na atividade produtiva. Nesse contexto, nas fases de concepção de projeto e análise, são geralmente empregados procedimentos numérico-computacionais para prever o comportamento de sistemas mecânicos quando estes são submetidos a perturbações está-

ticas ou dinâmicas. Essas perturbações têm se tornado cada vez mais intensas, enquanto os materiais utilizados na realização das estruturas são cada vez mais finos, leves e extensos. Portanto, devido a essas condições, ocorrem nesses sistemas comportamentos não lineares que podem resultar em falhas catastróficas quando esses fenômenos não são devidamente reconhecidos e estudados a fim de serem controlados. Neste trabalho, pretende-se implementar uma modelagem numérico-computacional para o estudo e a previsão do comportamento de uma estrutura do tipo placa fina de interesse industrial, comumente utilizado em projetos da indústria aeronáutica e automobilística, submetidas a grandes deslocamentos, com o objetivo de obter as suas respostas devido a diferentes condições de operação.

**Palavras-chaves:** Sistemas não lineares, elementos finitos, modelagem matemática.

## 1 INTRODUÇÃO

Sistemas físicos são essencialmente não lineares. Abordagens lineares, embora muito úteis e bastante utilizadas em modelagens, são apenas uma abstração dos sistemas físicos reais e sistemas de engenharia. A grande utilização de modelagens lineares se deve ao fato de que estruturas de engenharia geralmente atuam dentro de uma faixa de operação. No entanto, devido à utilização de materiais cada vez mais leves, extensos e a condições de operação cada vez mais críticas, essas abordagens podem não representar adequadamente o comportamento dessas estruturas e componentes estruturais (BORGES, 2008).

Com o advento de computadores cada vez mais potentes, tornou-se possível a resolução de modelos que levam em consideração não linearidades, tornando o estudo de sistemas com comportamento não linear um objeto de interesse para muitos pesquisadores.

Comportamentos não lineares são frequentemente encontrados em sistemas de engenharia, devido a diversos fatores, tais como: folgas no acoplamento entre partes da estrutura, fricção entre componentes estruturais e forças de grande magnitude ou com altas frequências que são aplicadas a esses sistemas. Como exemplos, podem ser citados: sistemas de frenagem de automóveis, que possuem um comportamento inerentemente não linear devido à fricção de seus componentes, e asas e fuselagem de aviões, que são frequentemente submetidas a cargas estáticas e dinâmicas de grande magnitude, e, como esses componentes são constituídos de estruturas finas, são facilmente levados a apresentar respostas não lineares.

As não linearidades podem ser consideradas de diversas maneiras em um sistema dinâmico. Elas podem ter origem geométrica, no comportamento do material, podem estar associadas à presença de forças não lineares, ou ainda, serem devidas a condições de contorno. No que diz respeito às não linearidades geomé-

tricas, elas estão associadas ao movimento, podendo ser causadas por grandes rotações e deslocamentos (SAVI, 2006). Elas estão associadas à energia de deformação e, conseqüentemente, à magnitude do deslocamento imposto ao sistema, podendo ser de natureza local ou global. Nos dois casos, o comportamento não linear pode se manifestar como resultado do deslocamento aplicado.

As não linearidades locais aparecem em pontos particulares da estrutura e a relação entre esforço e deslocamento é normalmente modelada por um polinômio de ordem dois ou três. Um exemplo clássico é o oscilador de Duffing.

As não linearidades geométricas globais são frequentemente encontradas em sistemas dinâmicos estruturais em que a espessura é considerada fina. Nesses sistemas, são feitas as seguintes considerações: a) as deformações são elásticas e infinitesimais; b) as rotações são moderadas. Tal comportamento é observado quando o deslocamento transversal é maior que a espessura da estrutura (GERGES, 2013).

Nesse contexto, podem ser incluídas as placas finas, que são extensamente utilizadas no meio industrial, como na indústria aeronáutica, em que compõem a fuselagem e as asas do avião, e na indústria automobilística, em que podem ser utilizadas na construção da estrutura dos veículos.

Devido à grande utilização desse componente estrutural, é necessária a utilização de modelos que descrevem o comportamento dele, visando a análise das respostas fornecidas em função dos diferentes tipos de excitação impostas a ele e aos diferentes parâmetros operacionais aos quais ele é submetido.

Os modelos para prever os níveis de vibração de placas finas geralmente adotam hipóteses lineares para o cálculo da relação entre deformação e deslocamento. No entanto, essa hipótese é válida considerando que o componente estrutural é submetido a forças que provoquem pequenos deslocamentos.

Para a modelagem de uma placa fina em grandes deslocamentos, assume-se o modelo de Love-Kirchhoff, em que, a partir dos campos de deslocamentos, obtêm-se as deformações da placa através do tensor de Green-Lagrange, que assume uma relação não linear entre deformações e deslocamentos.

O que difere essa modelagem das convencionais é o fato de que, quando as placas finas estão submetidas a grandes deslocamentos na modelagem, não podem ser considerados os efeitos de flexão e deformações no plano da placa independentes. Deve-se também considerar que esses efeitos são acoplados e por isso surgem as não linearidades do sistema (ZIENKIEWICKZ; TAYLOR, 2000).

Neste trabalho, é realizada uma modelagem numérico-computacional de uma estrutura do tipo placa fina, aplicando-se diferentes condições, como amplitude e frequência de excitação, e são realizadas análises das respostas visando ao entendimento da influência desses parâmetros em um sistema não linear.

Devido às características não lineares da estrutura, a resolução da equação do movimento que rege o sistema torna-se mais complexa. Sendo assim, é utilizado o método de integração de Newmark, que permite a resolução de equações diferenciais de segunda ordem. Além desse método, é inserido o Método de Newton-Raphson, para a resolução de sistemas de equações não lineares.

## 2 MODELAGEM DE PLACAS FINAS EM GRANDES DESLOCAMENTOS

As estruturas do tipo placa fina são imensamente utilizadas no meio industrial e, devido à demanda por objetos cada vez mais leves e resistentes para serem operados em condições cada vez mais críticas, muitos pesquisadores têm se dedicado ao estudo do comportamento desses sistemas quando operados em situações que exigem muito da estrutura, como placas finas quando submetidas a grandes deslocamentos.

Considera-se como grandes deslocamentos quando ele ultrapassa a espessura da placa. E, nesse caso, a hipótese de que a relação entre deformação e deslocamentos é linear já não é mais suficiente para descrever o comportamento da estrutura, e, nesse sentido, buscam-se modelagens com o objetivo de se alcançar respostas o mais aproximadas da realidade possíveis (MOUSSAOUI; BENAMAR, 2002).

Neste trabalho, é utilizado o modelo de Love-Kirchhoff, inspirado no modelo de Euler-Bernoulli para placas, em que são adotadas as seguintes hipóteses:

- i) A placa é modelada de acordo com a teoria de placas finas de Kirchhoff;
- ii) A espessura da placa é pequena, de tal forma que as deformações cisalhantes transversais  $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$  são negligenciadas;
- iii) O plano médio da placa é inicialmente plano;
- iv) Todos os materiais envolvidos são considerados homogêneos e isotrópicos.

A Figura 1 ilustra um corte perpendicular ao eixo  $x$ . A partir dessa figura, são extraídas as equações que descrevem o campo de deslocamentos  $u$  da placa, na direção  $x$ . Processo semelhante pode ser aplicado visando ao equacionamento do campo de deslocamentos  $v$  na direção  $y$ .

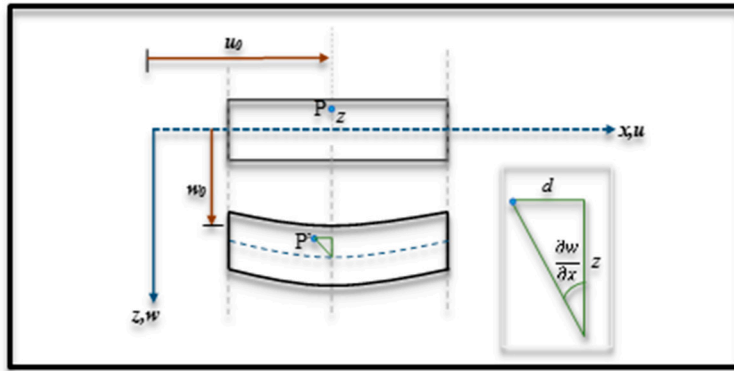
Para isso, considera-se um ponto  $P$  localizado a uma distância  $z$  do plano médio da placa que, após sofrer flexão, desloca-se paralelamente a ele. Ainda segundo a teoria de Kirchhoff, as seções normais ao plano médio indeformado permanecem normais e planas após a flexão e suas rotações são dadas em função do deslocamento transversal (LIU; QUEK, 2003; LOGAN, 2007).

A relação entre a distância  $z$  e o deslocamento devido à flexão  $d$ , extraída do triângulo ilustrado na figura, é dada por:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{d}{z} \quad (1)$$

Considerando que as rotações das seções são pequenas, o deslocamento do ponto P é finalmente expresso pela Equação (2).

$$u_p = u - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2)$$



**Figura 1** Cinemática de deformação da placa retangular fina em grandes deslocamentos.

Após a obtenção das equações de  $u$  e  $v$ , os deslocamentos podem ser escritos na seguinte forma (GERGES, 2013; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000):

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ w(x, y, t) \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} w_x(x, y, t) \\ w_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

onde:  $u(x, y, t)$  e  $v(x, y, t)$  são os campos de deslocamentos relativos ao plano da placa e  $w(x, y, t)$  é o campo de deslocamentos transversal.

As relações entre deformações e deslocamentos são obtidas pelo tensor de segunda ordem de Green-Lagrange, como segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{U} \nabla \mathbf{U}^T \quad (4)$$

Admitindo a hipótese de pequenas deformações e de rotações moderadas, pode-se reescrever o tensor de Green-Lagrange sob a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ u_y + v_x \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^m} - z \underbrace{\begin{Bmatrix} w_{xx} \\ w_{yy} \\ 2w_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}^l} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{Bmatrix} w_x^2 \\ w_y^2 \\ 2w_x w_y \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^c} \quad (5)$$

onde  $\boldsymbol{\mu}^m$  e  $\boldsymbol{\mu}^f = z\mathbf{K}^f$  representam, respectivamente, as deformações de membrana e flexão, e  $\boldsymbol{\varepsilon}^c$  é o vetor das deformações não lineares que traduz o acoplamento entre os efeitos de membrana e flexão no plano médio. Além disso, ele não aparece na modelagem linear de placas finas, de forma tal que os efeitos de flexão e membrana podem ser resolvidos separadamente. Entretanto, para o caso não linear, isso não é mais possível, sendo necessário considerar o acoplamento.

A forma discretizada em elementos finitos é obtida a partir do princípio dos trabalhos virtuais, mostrado pela Equação (6).

$$\delta\Pi = \delta\int_{t_1}^{t_2} (U_0 + T_0) dt = 0 \quad (6)$$

Na equação anterior,  $U_0$  representa a energia potencial que é dada pela soma das energias potenciais das forças externas e a energia potencial de deformação, dada pela Equação (7), onde  $S$  é o segundo tensor de Piolla-Kirchhoff e  $T_0$  representa a energia cinética, dada pela Equação (8).

$$U_0 = U_{pot} + U_{def} = U_{pot} + (1/2)\int_V \boldsymbol{\varepsilon} S dV \quad (7)$$

$$T_0 = (1/2)\int_V \rho \dot{U} \dot{U} dV \quad (8)$$

De posse dessas expressões e da forma variacional do tensor de Green-Lagrange, a Equação (6) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta\Pi = \int_V (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^m + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^c)^T S dV + \int_V (\delta\mathbf{k}^f)^T S z dV - \delta\Pi_{ext} = 0 \quad (9)$$

Os esforços cortantes e os momentos fletores e torsões podem ser obtidos por meio das seguintes integrais:

$$\mathbf{T}^e = -\int_{-b/2}^{+b/2} z S dz \quad \text{e} \quad \mathbf{M}^f = \int_{-b/2}^{+b/2} S dz \quad (10)$$

Substituindo as equações anteriores na Equação (9), esta pode ser reescrita tal que:

$$\delta\Pi = \int_S (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^m + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^c)^T \mathbf{T}^e dS + \int_V (\delta\mathbf{k}^f)^T \mathbf{M}^f dS - \delta\Pi_{ext} = 0 \quad (11)$$

É importante salientar que o material da placa é elástico, isotrópico e homogêneo, caracterizado por um módulo de elasticidade longitudinal,  $E$ , e um coeficiente de Poisson,  $\nu$ . Portanto, a Equação (11) assume a seguinte forma:

$$\delta\Pi = \int_S (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^m + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^c)^T \mathbf{D}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\varepsilon}^c) dS + \int_S (\delta\mathbf{k}^f)^T \mathbf{D}^f \mathbf{k}^f dS - \delta\Pi_{ext} = 0 \quad (12)$$

$$\text{onde } \begin{Bmatrix} \mathbf{T}^e \\ \mathbf{M}^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\varepsilon}^c \\ \mathbf{k}^f \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}^m = \frac{Eb}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^f = \frac{h^2}{12} \mathbf{D}^m.$$

Para realizar a discretização em elementos finitos da placa, optou-se pela utilização de um elemento retangular com cinco graus de liberdade por nó, sendo eles: os graus de liberdade relativos ao plano da placa ( $U$  e  $V$ ), os graus de liberdade relativos à flexão da placa e a rotação em torno dos eixos  $x$  e  $y$  ( $W$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ ).

Considerando os componentes de deformação de membrana, flexão e acoplamento entre elas, podem-se escrever as componentes do tensor de Green-Lagrange, Equação (5), como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{u}}(t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^c = \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{w}}) \tilde{\mathbf{w}}(t), \quad \mathbf{K}^f = \mathbf{B}^f \tilde{\mathbf{w}}(t) \quad (13)$$

onde  $\tilde{\mathbf{U}}(t) = [U \ V]^T$ ,  $\tilde{\mathbf{W}}(t) = [W \ \theta_x \ \theta_y]^T$ , e as matrizes  $\mathbf{B}^m$ ,  $\mathbf{B}^{nl}$  e  $\mathbf{B}^f$  são formadas pelos operados diferenciais das relações deformações-deslocamento. A partir dessas relações, pode-se escrever o princípio dos trabalhos virtuais, em que são levadas em consideração a energia cinética e a potencial de deformação, como descrito na Equação (14):

$$\delta \Pi_{def} = \int_S \left( \mathbf{B}^m \delta \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \delta \tilde{\mathbf{W}} \right)^T \quad (14)$$

$$\mathbf{D}^m \left( \mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}} \right) dS + \int_S \left( \mathbf{B}^f \delta \tilde{\mathbf{W}} \right)^T \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \tilde{\mathbf{W}} dS$$

ou ainda sobre a seguinte forma matricial:

$$\delta \Pi_{def} = \delta \mathbf{X}^T \int_S \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{B}^{fT} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \end{bmatrix}}_{\mathcal{K}^{(e)}(\tilde{\mathbf{W}})} \mathbf{X} dS \quad (15)$$

A rigidez pode ainda ser separada em duas componentes: o primeiro termo corresponde à contribuição linear; e o segundo, à contribuição não linear, que diz respeito ao acoplamento entre os efeitos de flexão e a membrana:

$$\mathcal{K}(\tilde{\mathbf{W}})^{(e)} = \mathcal{K}_l^{(e)} + \Delta \mathcal{K}_{nl}^{(e)}(\tilde{\mathbf{W}}) \quad (16)$$

onde:

$$K_l^{(e)} = \int_s \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{fT} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \end{bmatrix} dS \quad (17)$$

$$\Delta K_{nl}^{(e)}(\tilde{\mathbf{W}}) = \int_s \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \end{bmatrix} dS \quad (18)$$

Após a obtenção das matrizes de massa e rigidez, é possível escrever as equações do movimento global do sistema, no domínio do tempo, da forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{W}} \end{Bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \Delta \mathbf{K}_1 \\ \Delta \mathbf{K}_1^T & \Delta \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{W}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{\tilde{\mathbf{U}}} \\ \mathbf{F}^{\tilde{\mathbf{W}}} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ou ainda:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \underbrace{\mathbf{K}(\mathbf{X})}_{\mathbf{f}_{nl}} \mathbf{X} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (20)$$

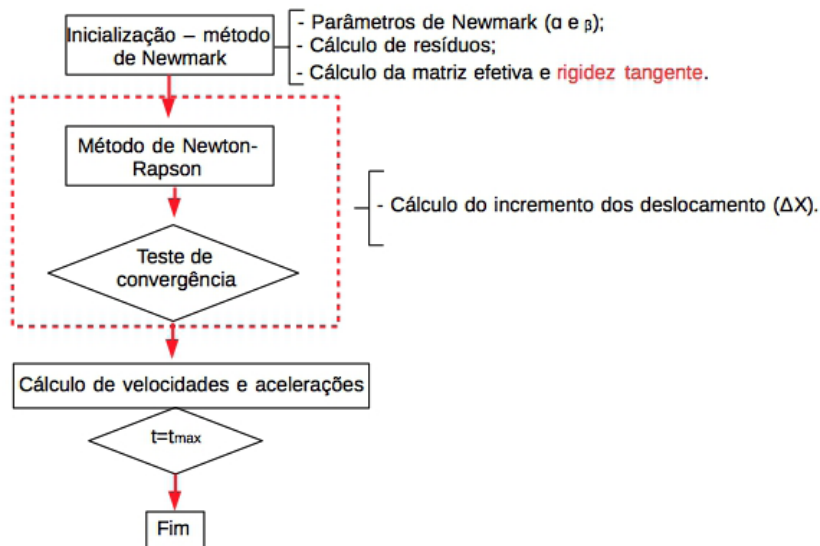
Na Equação (20), nota-se a presença de uma força não linear que pode ser entendida como uma perturbação no comportamento do sistema quando ele é submetido a um grande deslocamento.

## 2.1 Resolução da equação do movimento pelo método de Newmark

A resolução da Equação (20) depende geralmente da natureza da força externa aplicada ao sistema, além da presença da força não linear. Para a resolução de sistemas com essas características, são muito utilizados os chamados métodos de perturbação. Dentre esses métodos, destacam-se: os métodos de expansão (*straightforward*), balanço harmônico e método da média (BORGES, 2008). No entanto, apesar da grande utilidade desses métodos, eles não se adequam a sistemas de grandes dimensões (GERGES, 2013). Nesse sentido, será utilizado neste trabalho o método de integração temporal de Newmark com o método de Newton-Raphson, conforme as etapas descritas na Figura 2, em que se faz necessária a definição da matriz de rigidez tangente ou o gradiente espacial da força não linear (GERGES, 2013).



Em linhas gerais, o procedimento acontece da seguinte forma: inicia-se estabelecendo os parâmetros de Newmark ( $\alpha$  e  $\beta$ ), que, geralmente, assumem o valor de  $1/2$ . São calculados os resíduos, em que são inseridas a força não linear e a força externa aplicada ao sistema. Em seguida, a matriz efetiva é calculada, na qual é incluída a matriz de rigidez tangente (obtida através do procedimento descrito na Seção 2.2). Na etapa seguinte, inicia-se o método de Newton-Raphson, por meio do qual calcula-se o incremento dos deslocamentos em um processo iterativo que finaliza quando o critério de convergência é atingido.



**Figura 2** Fluxograma representativo do processo iterativo utilizado na resolução da equação do movimento não linear.

Após essa etapa, são calculadas as velocidades e acelerações dependentes dos deslocamentos. Esse procedimento se repete até que o tempo total de resolução seja atendido.

## 2.2 Desenvolvimento da matriz tangente

Como já exposto, a matriz de rigidez tangente ( $K^t$ ) é a forma discreta da derivada da força não linear em relação ao deslocamento no tempo  $t_i$ . Essa matriz, ou gradiente espacial da força não linear, é necessária para a integração da equação do movimento da placa pelo método de Newmark.

A força não linear pode ser descrita como sendo composta por componentes da força na superfície da placa e por forças que atuam na flexão. Sendo assim, pode-se escrever:

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\tilde{u}} & \mathbf{f}_{\tilde{w}} \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

E, então, escreve-se o gradiente espacial da força não linear, ou seja:

$$\mathbf{K}^t = \begin{bmatrix} \partial f_{\tilde{U}} / \partial \tilde{U} & \partial f_{\tilde{U}} / \partial \tilde{\mathbf{W}} \\ \partial f_{\tilde{\mathbf{W}}} / \partial \tilde{U} & \partial f_{\tilde{\mathbf{W}}} / \partial \tilde{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

### 2.2.1 Desenvolvimento do termo $df_{nl}(X)$

$$df_{nl}(X) = df_{\tilde{U}}(X) + df_{\tilde{\mathbf{W}}}(X) \quad (23)$$

### 2.2.2 Desenvolvimento do termo $df_{\tilde{U}}(X)$

$$df_{\tilde{U}}(X) = d \left( \int_S \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m \tilde{U} dS + \int_S \frac{1}{2} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}} dS \right) \quad (24)$$

ou,

$$df_{\tilde{U}}(X) = \int_S \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m d\tilde{U} dS + \int_S \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) d\tilde{\mathbf{W}} dS \quad (25)$$

### 2.2.3 Desenvolvimento do termo $df_{\tilde{\mathbf{W}}}(X)$

$$df_{\tilde{\mathbf{W}}}(X) = d \left( \int_S \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m \tilde{U} dS + \int_S \left( \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{B}^{fT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \right) \tilde{\mathbf{W}} dS \right) \quad (26)$$

ou,

$$df_{\tilde{\mathbf{W}}}(X) = \int_S \left( \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m d\tilde{U} + \mathbf{G}^T \mathbf{T}^m \mathbf{G} d\tilde{\mathbf{W}} + \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) d\tilde{\mathbf{W}} \right) dS \quad (27)$$

onde  $\mathbf{T}^m = \begin{bmatrix} T_x^m & T_{xy}^m \\ T_{xy}^m & T_y^m \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} N_x^{w} & N_x^{\theta_x} & N_x^{\theta_y} \\ N_y^{w} & N_y^{\theta_x} & N_y^{\theta_y} \end{bmatrix}$ .

Portanto, a partir das expressões (27), (23) e (25), têm-se a seguinte equação,

$$df_{nl}(X) = \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \mathbf{G}^T \mathbf{T}^m \mathbf{G} + \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{B}^{fT} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tilde{U} \\ d\tilde{\mathbf{W}} \end{Bmatrix} dS \quad (28)$$

onde, finalmente, encontra-se a expressão da matriz de rigidez tangente:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^t = & \int_s \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{fT} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \end{bmatrix} dS + \int_s \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \end{bmatrix} dS \\ & \dots + \int_s \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{G}^T \mathbf{T}^m \mathbf{G} \end{bmatrix} dS \end{aligned} \quad (29)$$

ou,

$$\mathbf{K}^t = \mathbf{K}^l + \Delta \mathbf{K}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) + \Delta \mathbf{K}^t(\tilde{\mathbf{W}}) \quad (30)$$

### 3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Visando a observar se o comportamento da placa, que é submetida a forças que podem provocar grandes deslocamentos, apresenta características não lineares, tais como distorções harmônicas, surgimento de sub-harmônicos e mais de uma posição de equilíbrio, foi imposta uma força harmônica pontual da forma  $F_e = F_0 \text{sen}(\omega t)$ , em que  $F_0$  representa a amplitude da força imposta e a frequência de excitação é igual a aproximadamente a primeira frequência natural da placa. Essa força é aplicada no centro da dimensão oposta ao engaste. A Figura 3 mostra a placa engastada-livre discretizada em 10 elementos ao longo do seu comprimento e 10 ao longo de sua largura, cujas características físicas e geométricas são mostradas na Tabela 1.

Para a resolução das equações do movimento, foi utilizado o procedimento numérico ilustrado pela Figura 2. O intervalo de tempo analisado é de 0 a 4 segundos, com passo de tempo igual a 0.0005s.

A Figura 4a exibe a resposta no domínio do tempo para deslocamento, velocidade e aceleração. Nessa figura, observa-se que, em termos do deslocamento, o sistema não apresenta não linearidades acentuadas, ou seja, não ocorrem grandes distorções harmônicas na resposta.

Tabela 1 Propriedades físicas e geométricas da placa.

Propriedades da placa fina		
<b>Propriedades geométricas</b>	Comprimento [m]	0.2
	Largura [m]	0.05
	Espessura [m]	0.002
	Densidade Volumétrica [ $\text{kg/m}^3$ ]	7800
<b>Propriedades físicas</b>	Módulo de Elasticidade de Young [MPa]	2.1 e 5
	Coefficiente de Poisson	0.3

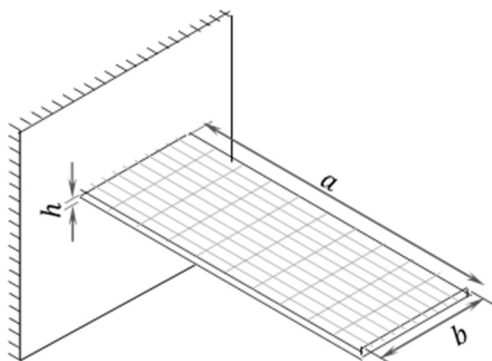
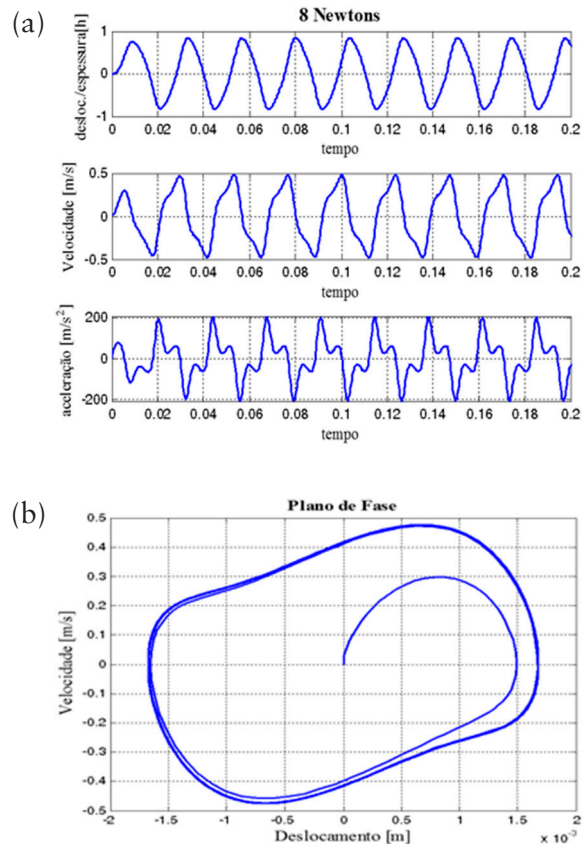


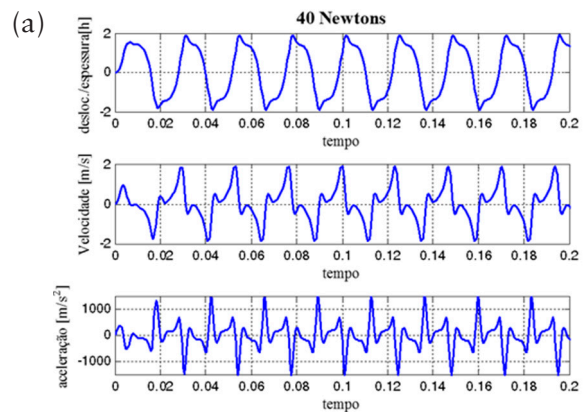
Figura 3 Representação esquemática de uma placa discretizada em elementos finitos.

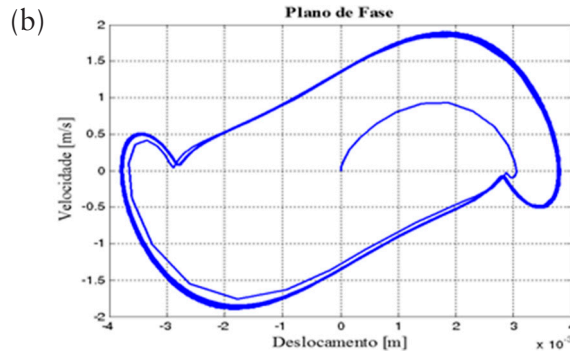
No entanto, como é provado em Worden e Thomlinson (2001), uma consequência da não obediência ao princípio da superposição (característica de sistemas não lineares) é o surgimento de respostas distorcidas no domínio do tempo, tanto no que diz respeito ao deslocamento, quanto à velocidade e à aceleração. Sendo assim, ao observar esses termos, nota-se o surgimento de sub-harmônicos, o que caracteriza esse sistema como não linear. Em razão dessa resposta, o plano de fase, ilustrado na Figura 4b, aparece com distorções, o que não acontece em sistemas que adotam hipóteses lineares.

Aumentando a amplitude da força para 40 N (ver Figura 5) e consequentemente o deslocamento da placa, observa-se uma discreta mudança na forma das ondas dos deslocamentos, o que sugere o surgimento do comportamento não linear mais acentuado no sistema; além disso, nota-se que a velocidade e a aceleração apresentam ainda mais distorções se comparadas com as respostas obtidas para o caso anterior. Comportamento que pode ser confirmado observando o plano de fase em que se observa o surgimento de dois pontos de equilíbrio, característica possível de ser encontrada apenas em sistemas não lineares.



**Figura 4** (a) Respostas relativas ao deslocamento, à velocidade e à aceleração; (b) plano de fase da resposta da placa para uma força de 8 N.



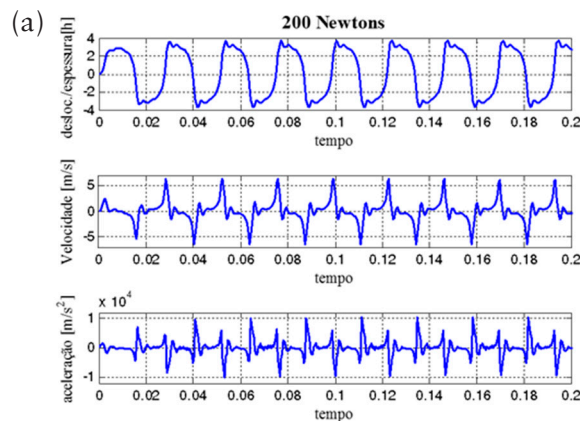


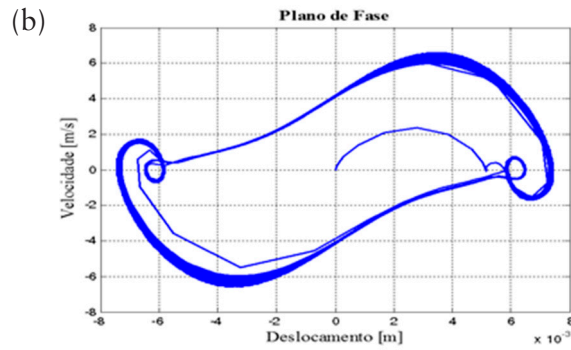
**Figura 5** (a) Respostas relativas ao deslocamento, à velocidade e à aceleração; (b) plano de fase da resposta da placa para uma força de 40 N.

As respostas obtidas 200 N (Figura 6) mostram claramente um comportamento não linear tanto no que diz respeito ao deslocamento quanto à velocidade e à aceleração. Fato confirmado pelo plano de fase da resposta do sistema para a situação considerada, em que se notam dois pontos de equilíbrio.

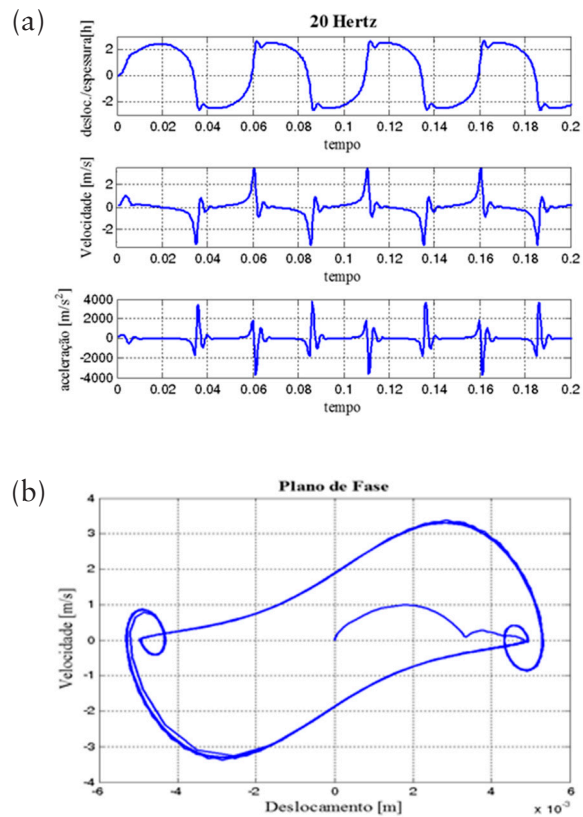
Além das amplitudes da força externa aplicada, outro parâmetro que pode influenciar no comportamento não linear de um sistema é a frequência de excitação imposta. Sendo assim, visando a observar o comportamento desse sistema, foram simulados mais três casos com diferentes frequências: 20 Hz, 50 Hz e 100 Hz.

A Figura 7 mostra a resposta obtida para o caso em que foi aplicada uma força com amplitude de 80 N e frequência de excitação de 20 Hz. A Figura 8 apresenta o caso em que é considerada a mesma amplitude de excitação e uma frequência de 50 Hz. E, na Figura 9, é exibido o caso em que é aplicada uma frequência de 100 Hz. Comparando as respostas, nota-se uma amplitude que leva a não linearidades (80 N) à medida que a frequência sobre as não linearidades se tornam menos acentuadas, ou seja, a presença de distorções harmônicas e sub-harmônicas não são tão perceptíveis.

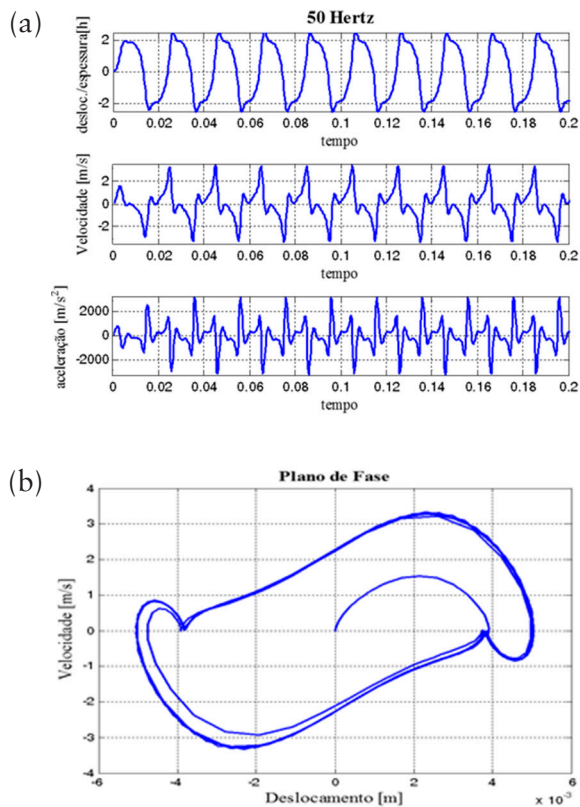




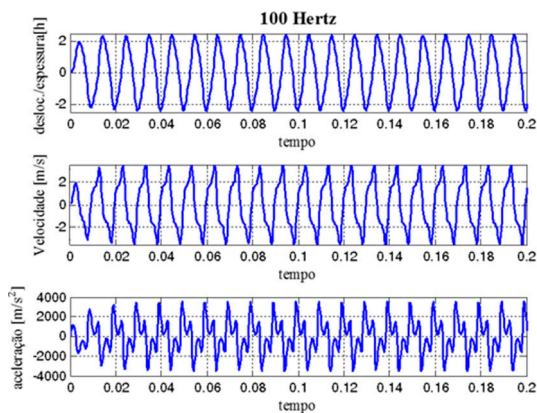
**Figura 6** (a) Respostas relativas ao deslocamento, à velocidade e à aceleração; (b) plano de fase da resposta da placa para uma força de 200 N.



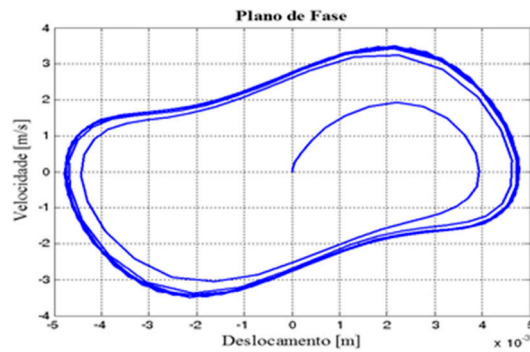
**Figura 7** (a) Respostas relativas ao deslocamento, à velocidade e à aceleração; (b) plano de fase da resposta da placa para uma força de 80 N e frequência de 20 Hz.



**Figura 8** (a) Resposta no domínio do tempo e (b) plano de fase para uma condição com amplitude de excitação de 80 N e frequência de 50 Hz.







**Figura 9** (a) Resposta no domínio do tempo e (b) plano de fase para uma condição com amplitude de excitação de 80 N e frequência de 100 Hz.

## 4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi realizada uma simulação numérico-computacional de placas em grandes deslocamentos, o que torna necessária a utilização de hipóteses que levem em consideração não linearidades. Nesse caso, o problema possui uma não linearidade distribuída que é inserida por intermédio da relação não linear entre deformação e deslocamento, com a utilização do tensor de Green-Lagrange. Essa relação considera que os efeitos de deformação do plano da placa e da flexão são acoplados e não são considerados independentes como nas modelagens lineares.

A matriz de rigidez resultante do processo de discretização em elementos finitos da placa é dependente dos deslocamentos e, por isso, deve ser atualizada a cada passo do processo iterativo. E, como esse processo de resolução torna-se mais complexo, é necessário introduzir outro método para auxiliar na correção dos deslocamentos obtidos pelo método de Newmark, ou seja, o método de Newton-Raphson para a resolução de sistemas não lineares.

Com os resultados obtidos a partir das simulações, nota-se a importância de um estudo em que são levados em consideração o efeito de acoplamento entre os efeitos de membrana e a flexão da placa, que são as fontes de não linearidades levadas em consideração neste estudo, pois, como mostrado pelas respostas, sistemas não lineares apresentam respostas diferentes daquelas obtidas em modelagens que consideram o sistema como sendo linear.

Também se pode concluir que, à medida que a força aplicada ao sistema leva a um deslocamento maior, as não linearidades tornam-se cada vez mais acentuadas e a frequência de excitação é um importante parâmetro que deve ser cuidadosamente estudado a fim de conhecer a fundo o comportamento deste sistema.

Para isso, como proposta de trabalhos futuros, pretendem-se utilizar ferramentas de análise de sistema não lineares, tais como: diagramas de bifurcação e coeficientes de Lyapunov.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem às agências de fomento CNPq, Capes e FAPEMIG.

## REFERÊNCIAS

- BATHE, K.-J. *Finite element procedures*. New York: Prentice Hall, 1996. 1037 p.
- BORGES, R. A. Contribuição aos estudos dos absorvedores de vibração não-lineares. 154 f. 2008. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2008.
- GERGES, Y. Méthodes de réduction de modèles em vibroacoustique non-linéaire. 162 f. Tese (Doutorado) – Université de Franche-Comté, Besançon, 2013.
- LIU, G. R.; QUEK, S. S. *The finite element method: a practical course*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003. 361 p.
- LOGAN, D. L. *A first course in finite element method*. 4. ed. Thomson: Stamford, 2007. 836 p.
- MOUSSAOUI, F.; BENAMAR, R. Non-linear vibrations of shell-type structures: a review with bibliography. *Journal of Sound and Vibration*, v. 255, n. 1, p. 161-184, 2002.
- SAVI, M. A. *Dinâmica não-linear e Caos*. Rio de Janeiro: E-papers, 2006. 305 f.
- WORDEN, K. TOMLINSON, G. R. *Nonlinearity in Structural Dynamics: detection, identification and modeling*. Bristol: IOP Publishing Ltd., 2001. 60 p.
- ZIENKIEWICKZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The finite element method: solid mechanics*. v. 2. 5. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 459 p.