

# 3

## CAPÍTULO

# DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE MÁQUINAS MÓVEIS DO TIPO JANSEN

*José Salviano Borges<sup>1</sup>*  
*Marcelo Henrique Stoppa<sup>1</sup>*  
*Marcos Napoleão Rabelo<sup>1</sup>*

**Agradecimentos:** Os autores agradecem ao apoio financeiro do CNPq, IMTec-UFG/RC, CAPES, e à FAPEG pela concessão de bolsa de mestrado, viabilizando o andamento desta pesquisa.

---

<sup>1</sup> Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão, Brasil.  
E-mail de contato: jsborges@live.com; mhstoppa@pq.cnpq.br; rabelo@dmат.ufpe.br

**Resumo:** Este trabalho apresenta um método para a modelagem de mecanismo cinético de locomoção criado pelo físico holandês Theo Jansen. Esse mecanismo é formado por onze barras, com seis pontos móveis e dois pontos fixos, em que o movimento é realizado por meio de uma manivela com centro em um dos pontos fixos. A determinação das equações do movimento, por meio da obtenção recursiva dos pontos de interconexão das barras, é possível por meio de conceitos trigonométricos. Por sua vez, a equação geral do modelo, sendo uma função de complexidade reduzida, permite a utilização de métodos de otimização para vários fins, como a maximização do passo.

**Palavras-chave:** Máquinas móveis. Mecanismos Jansen. Modelagem matemática.

**Abstract:** This work presents a modelling method to a kinetic move mechanism created by Theo Jansen. This mechanism is composed by eleven bars, six moving points and two fixed points, commonly named nodes, in which the movement is performed by a crank centered in one of the fixed nodes. The determination of movement equations is performed in a recursive way in each of bars intersection points, using trigonometric concepts. In turn, the general equation of the model, with reduced complexity function, allows the use of optimization methods for various purposes, for example, the maximization step.

**Keywords:** Walking machines, Jansen mechanisms, Mathematical modelling.

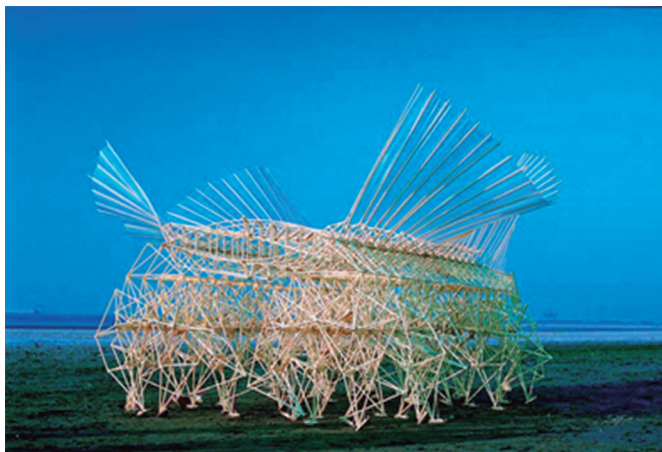
## 1 INTRODUÇÃO

Desde as eras mais primitivas, os movimentos, como correr, andar, nadar ou voar, sempre instigaram a curiosidade humana. Essa inquietude levou à criação da roda, que é considerada uma das maiores invenções humanas. Porém, esta apresenta certas limitações de uso, por exemplo, pelas dificuldades de locomoção em terrenos irregulares e macios, além de exigirem um contato contínuo com o solo, carecendo da presença de estradas (INGRAM, 2004).

A roda contribui enormemente para a evolução da humanidade, porém, tomando suas limitações, é necessário desenvolver um mecanismo que se adapte a situações que são desfavoráveis às rodas. Esses mecanismos, geralmente denominados máquinas móveis, se locomovem com movimentos que imitam o movimento de pernas (INGRAM, 2006).

Em 1990, o físico holandês Theo Jansen criou um mecanismo, resultado de um estudo de cerca de dez anos, que resultou na construção de estruturas complexas, batizadas por ele de Strandbeest (animais de praia) (HOFLAND; JANSEN, 2001). Essas estruturas foram construídas inicialmente apenas com tubos amarelos e fita adesiva (Figura 1). As Strandbeest de Jansen são exemplos de máquinas móveis baseadas em uma estrutura de locomoção similar a uma perna.

As Strandbeest são compostas por inúmeros conjuntos de pernas, movidas apenas pela força do vento, por um intrincado mecanismo de transmissão de movimento.



**Figura 1.** Strandbeest de Theo Jansen. Fonte: ARTFUTURA, 2005.

Suas criações partiram de algoritmos computacionais, e o maior desejo de Jansen é que tais estruturas, um dia, sejam capazes de evoluir naturalmente, podendo continuar suas vidas como qualquer outro organismo, sujeito aos ciclos da vida (ARTFUTURA, 2005).

Nesse contexto, este trabalho apresenta a modelagem dos mecanismos de locomoção propostos por Jansen, por meio de uma abordagem recursiva e trigonométrica.

## 2 MÁQUINAS MÓVEIS

A evolução equipou a maioria dos animais terrestres com pernas, sendo que as mesmas possuem uma grande adaptabilidade em seus movimentos devido a juntas rotativas (DAWKINS, 1977). Pernas possibilitam escalar, saltar, rastejar, nadar, dentre outros movimentos.

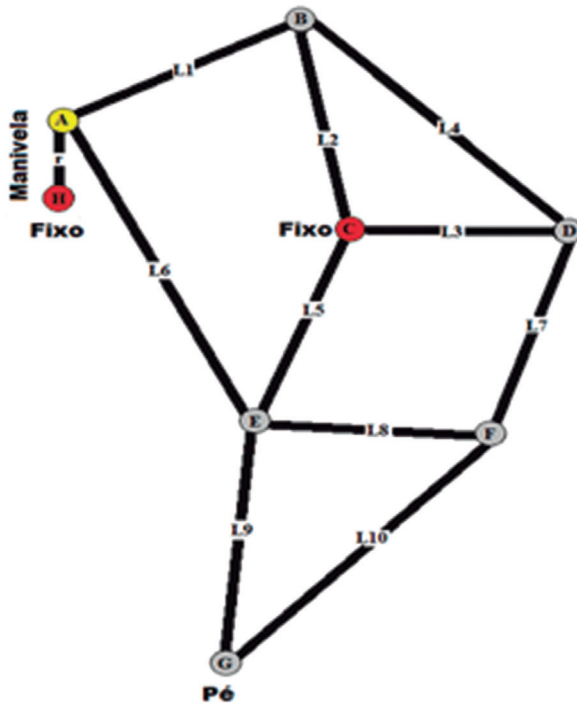
Com base na praticidade apresentada pelas pernas, com o intuito, principalmente, de reduzir as limitações oriundas da locomoção por rodas – que não fizeram parte da evolução locomotiva de qualquer animal (DAWKINS, 1977) –, têm sido propostos protótipos, comumente denominados de máquinas móveis, inspirados no sistema de locomoção dos insetos. Esses animais apresentam uma evolução mais rápida que os mamíferos, apresentando juntas esféricas que permitem um movimento tridimensional relativo, uma vez que as pernas são compostas por quatro ou mais segmentos, interligados por articulações e uma complexa

musculatura, permitindo uma enorme flexibilidade no movimento (ALEXANDER; GOLDSPIK, 1977).

Contudo, protótipos com essas características apresentam limitações práticas na construção, dado que possuem um grande número de graus de liberdade, considerando as pernas como uma cadeia de segmentos interconectados (KNOX, 1997).

## 2.1 Mecanismos de Theo Jansen

O mecanismo de locomoção das pernas nas máquinas móveis, proposto por Jansen, é composto por onze barras interligadas numa disposição específica (no plano) e seis nós móveis (A, B, D, E, F e G), e dois nós fixos (C e H). O movimento é efetuado por meio de uma manivela, com centro em H, e os demais componentes da estrutura são apoiados no ponto fixo C, conforme exibido na Figura 2.



**Figura 2.** Disposição geométrica de uma perna em mecanismo Jansen.

Essa disposição geométrica das barras e interconexão pelos nós (juntas rotacionais) faz com que o conjunto se movimente, de modo satisfatório, como uma perna (HOFLAND; JANSEN, 2001). Deve-se ressaltar que a estrutura completa é composta por conjuntos de pares de pernas, dispostos simetricamente e movidos pela mesma manivela (Figura 3).

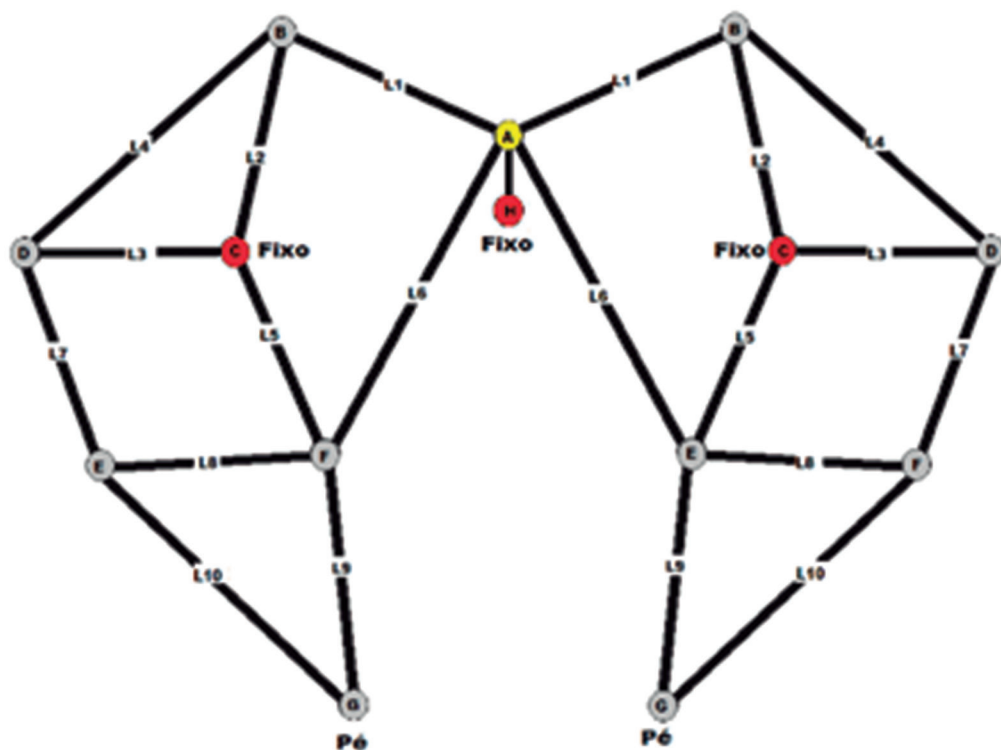


Figura 3. Disposição simétrica de pernas Jansen.

## 2.2 Modelo matemático proposto

Os processos de modelagem de mecanismos utilizados em máquinas móveis, em geral, utilizam métodos geométricos para a determinação das equações do movimento. Esse trabalho, em particular, utiliza unicamente relações trigonométricas para a determinação das trajetórias, recursivamente, para cada um dos componentes do mecanismo. Outro procedimento, também recursivo, porém puramente geométrico, tomando por base a determinação dos pontos de interseção de dois círculos e posterior uso da fórmula de Heron para calcular a área de um triângulo, foi proposto por Geus e Stoppa (2012).

Para realizar a modelagem do mecanismo de locomoção, torna-se necessário determinar as coordenadas de cada um dos nós de interligação das barras, em função dos pontos fixos e comprimentos das barras, tomados como parâmetros de entrada do sistema, para cada ângulo da manivela.

O sistema de coordenadas cartesianas é posicionado sobre o mecanismo, de forma que o ponto fixo da manivela (H) esteja sobre o eixo y e o ponto fixo da estrutura (C) esteja sobre o eixo x, como mostra a Figura 4.

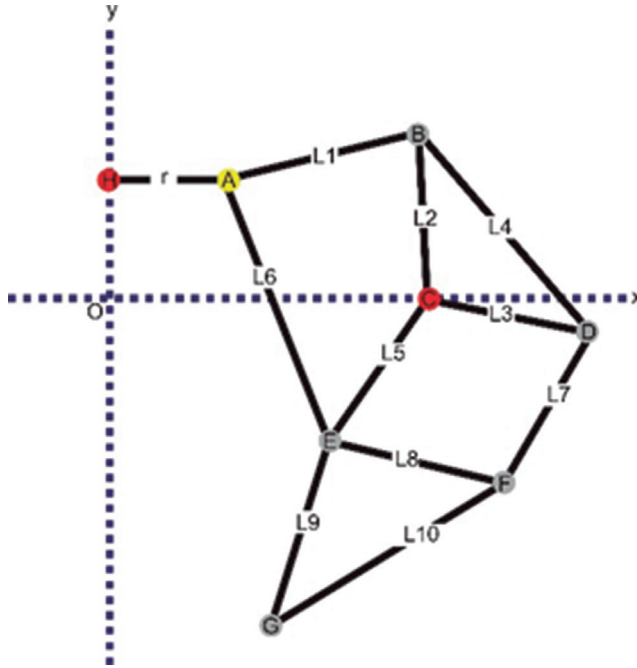


Figura 4. Posicionamento do sistema de referência no mecanismo Jansen.

Conhecidas as variáveis de projeto – comprimento das barras  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) e coordenadas dos pontos  $H(x_h, y_h)$  e  $C(x_c, y_c)$  – e consideradas as características geométricas do modelo, determina-se de formação recursiva as equações para as coordenadas de cada um dos nós móveis, conforme descrito a seguir. O nó A descreve uma trajetória circular, e sua posição varia segundo um ângulo  $\theta$  (Figura 5).

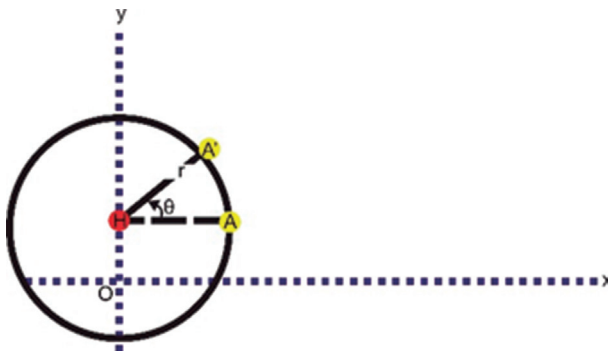


Figura 5. Trajetória do nó A.

De modo que o ponto A pode ser escrito segundo suas coordenadas polares, obtendo assim:

$$A: \begin{cases} x_A = x_H + r \cos(\theta) \\ y_A = y_H + r \sin(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

A Figura 6 exibe a configuração geométrica considerada para a determinação do nó B:

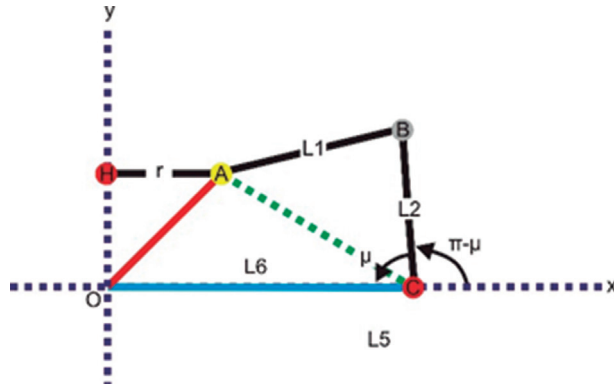


Figura 6. Trajetória do nó B.

Seja o quadrilátero OABC, de forma que o segmento de reta OA corresponde à distância cartesiana do ponto O (origem do sistema de coordenadas) ao ponto A – uma distância que varia de acordo com o ângulo  $\theta$  –, enquanto o segmento de reta azul representa a distância da origem ao ponto C – uma distância invariável e de comprimento  $x_c$ .

Para determinar as coordenadas do nó B, é necessário determinar o ângulo  $\mu$ . Em posse desse ângulo, considerando  $L_2$  como raio de uma circunferência centrada no ponto C, as coordenadas de B são dadas por:

$$B: \begin{cases} x_B = x_C + L_2 \cos(\pi - \mu) \\ y_B = y_C + L_2 \sin(\pi - \mu) \end{cases} \quad (2)$$

Na sequência, a determinação das coordenadas do nó D é realizada considerando a disposição exibida na Figura 7.

Observa-se que o ângulo entre  $L_2$  e o eixo x é dado por  $\pi - \mu$ , e BCD é um triângulo, sobre o qual é possível determinar o ângulo  $\hat{C}$ .

Nessas condições, o ângulo  $\zeta$  é dado por  $\zeta = \hat{C} + \mu - \varpi$ .

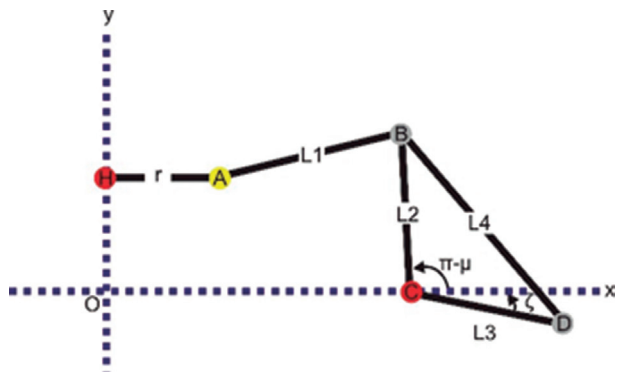


Figura 7. Trajetória do nó D.

Agora, considerando  $L_3$  como sendo o raio de uma circunferência centrada em C, as coordenadas de D são dadas por:

$$D: \begin{cases} x_D = x_C + L_3 \cos(\xi) \\ y_D = y_C + L_3 \sin(\xi) \end{cases} \quad (3)$$

A Figura 8 exibe a configuração geométrica utilizada para a determinação das coordenadas do nó E.

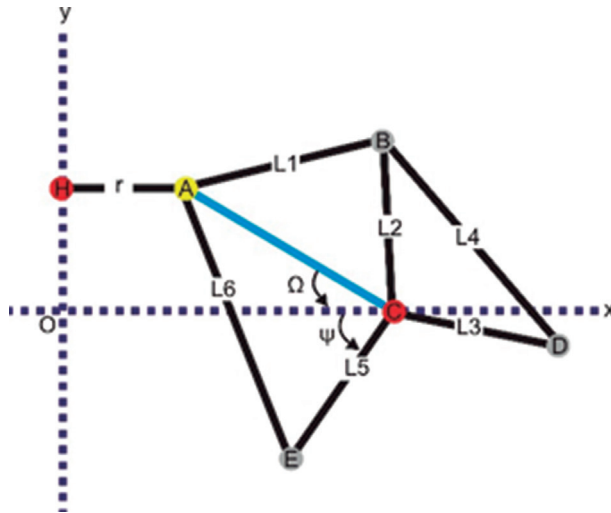


Figura 8. Trajetória do nó E.

O segmento AC possui uma distância variável, dependente do ângulo  $\Omega$ , conhecido da construção das coordenadas do nó B. O ângulo  $\hat{C}$  do triângulo ACE é dado por:

$$\psi = \begin{cases} \hat{C} - \odot y_a \geq 0 \\ \hat{C} + \odot y_a < 0 \end{cases}$$

Portanto, considerando  $L_5$  como sendo o raio de uma circunferência centrada em C, as coordenadas do nó E escrevem-se como:

$$E: \begin{cases} x_E = x_C + L_5 \cos(\pi + \psi) \\ y_E = y_C + L_5 \sin(\pi + \psi) \end{cases} \quad (4)$$

Para determinar as coordenadas do nó E, foi utilizada a configuração geométrica exibida na Figura 9.



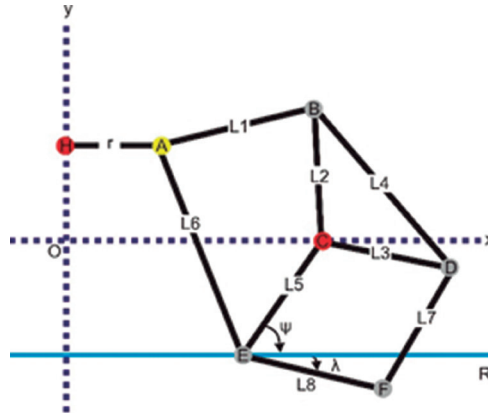


Figura 9. Trajetória do nó F.

Seja uma reta  $r$  paralela ao eixo  $x$ . Pelo lema dos ângulos alternos internos, o ângulo entre  $L_5$  e  $r$  é dado por  $\psi$ .

O ângulo  $\hat{E}$  no quadrilátero  $CDEF$  pode ser obtido a partir da expressão  $\lambda = \psi - \hat{E}$ .

Assim, as coordenadas do nó  $F$  são dadas pelas Equações (5), considerando  $L_8$  como raio das circunferências para cada posição assumida pelo nó  $E$ :

$$F: \begin{cases} x_F = x_E + L_8 \cos(\lambda) \\ y_F = y_E + L_8 \text{sen}(\lambda) \end{cases} \quad (5)$$

Finalmente, as coordenadas do nó  $G$  são determinadas considerando-se a disposição exibida na Figura 10.

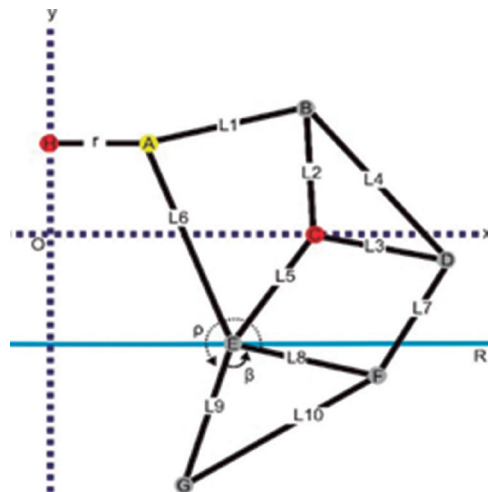


Figura 10. Trajetória do ponto G.

Nesse caso, observa-se que as barras  $L_8$  e  $L_9$  têm mesma variação angular e  $-\beta + \rho = 2\varpi$ , ou seja,  $\rho = 2\varpi - \beta$ .

Então, considerando  $L_8$  como raio das circunferências para cada posição assumida pelo nó E, as coordenadas de G são obtidas por:

$$G: \begin{cases} x_G = x_E + L_9 \cos(\lambda + \rho) \\ y_G = y_E + L_9 \sin(\lambda + \rho) \end{cases} \quad (6)$$

Uma vez conhecida as equações do movimento de cada nó móvel, pode-se determinar a equação que descreva a trajetória do pé (ponto G). Substituindo as Equações (1), (2), (3), (4) e (5) na Equação (6), e realizando algumas operações trigonométricas e algébricas, chega-se nas seguintes equações do movimento para o pé:

$$x_G = x_c + L_9 \cos \left( -\cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{L_8^2 + L_9^2 - L_{10}^2}{L_8 L_9} \right) + \ddot{\cdot} \right) - L_5 \cos \ddot{\cdot} \quad (7)$$

$$y_G = y_c + L_9 \sin \left( -\cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{L_8^2 + L_9^2 - L_{10}^2}{L_8 L_9} \right) + \ddot{\cdot} - \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} A \right) - \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} B \right) \right) - L_5 \sin \ddot{\cdot} \quad (8)$$

Com:

$$A = \frac{\left[ L_3 \cos \left( \mu + \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{L_2^2 + L_3^2 - L_4^2}{L_2 L_3} \right) \right) - L_5 \cos \ddot{\cdot} \right]^2 - L_3^2 + L_5^2 + \left[ L_3 \sin \left( \mu + \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{L_2^2 + L_3^2 - L_4^2}{L_2 L_3} \right) \right) + L_5 \sin \ddot{\cdot} \right]^2}{L_5 \sqrt{\left[ L_3 \cos \left( \mu + \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{L_2^2 + L_3^2 - L_4^2}{L_2 L_3} \right) \right) - L_5 \cos \ddot{\cdot} \right]^2 + \left[ L_3 \sin \left( \mu + \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{L_2^2 + L_3^2 - L_4^2}{L_2 L_3} \right) \right) + L_5 \sin \ddot{\cdot} \right]^2}}$$

$$B = \frac{\left[ L_3 \cos \left( \mu + \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{L_2^2 + L_3^2 - L_4^2}{L_2 L_3} \right) \right) - L_5 \cos \right]^2 - L_7^2 + L_8^2 + \left[ L_3 \sin \left( \mu + \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{L_2^2 + L_3^2 - L_4^2}{L_2 L_3} \right) \right) + L_5 \sin \right]^2}{L_8 \sqrt{\left[ L_3 \cos \left( \mu + \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{L_2^2 + L_3^2 - L_4^2}{L_2 L_3} \right) \right) - L_5 \cos \right]^2 + \left[ L_3 \sin \left( \mu + \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{L_2^2 + L_3^2 - L_4^2}{L_2 L_3} \right) \right) + L_5 \sin \right]^2}}$$

Sendo:

Para  $y_a \geq 0$ :

$$\mu = \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 - r^2 \cos^2 \theta + x_c^2 + (x_c - r \cos \theta)^2 - (y_H + r \sin \theta)^2}{x_c \sqrt{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 + (x_c - r \cos \theta)^2}} \right) + \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 - L_1^2 + L_2^2 + (x_c - r \cos \theta)^2}{L_2 \sqrt{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 + (x_c - r \cos \theta)^2}} \right) \quad (9)$$

$$\Psi = \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 + L_2^2 \theta - L_6^2 + (x_c - r \cos \theta)^2}{L_5 \sqrt{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 + (x_c - r \cos \theta)^2}} \right) - \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 - r^2 \cos^2 \theta + x_c^2 + (x_c - r \cos \theta)^2 - (y_H + r \sin \theta)^2}{x_c \sqrt{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 + (x_c - r \cos \theta)^2}} \right) \quad (10)$$

Para  $y_a < 0$ :

$$\mu = \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 - r^2 \cos^2 \theta + x_c^2 + (x_c - r \cos \theta)^2 - (y_H + r \sin \theta)^2}{x_c \sqrt{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 + (x_c - r \cos \theta)^2}} \right) - \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 - L_1^2 + L_2^2 + (x_c - r \cos \theta)^2}{L_2 \sqrt{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 + (x_c - r \cos \theta)^2}} \right) \quad (11)$$

$$\Psi = \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 + L_2^2 \theta - L_6^2 + (x_c - r \cos \theta)^2}{L_5 \sqrt{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 + (x_c - r \cos \theta)^2}} \right) + \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 - r^2 \cos^2 \theta + x_c^2 + (x_c - r \cos \theta)^2 - (y_H + r \sin \theta)^2}{x_c \sqrt{(y_H - y_c + r \sin \theta)^2 + (x_c - r \cos \theta)^2}} \right) \quad (12)$$

Sendo as Equações (7) e (8), sujeitas às Equações (9), (10), (11) e (12), as equações que descrevem o movimento final do modelo.

### 3 RESULTADOS

Uma vez obtidas as equações para o modelo, de forma recursiva, utilizando do comprimento das barras propostos por Theo Jansen, que são valores obtidos via métodos de otimização (GEUS; STOPPA, 2012), é possível descrever as trajetórias de todos os nós móveis do mecanismo, sob a variação do ângulo da manivela (segmento HA). A Figura 11 descreve estas trajetórias para uma volta completa da manivela:

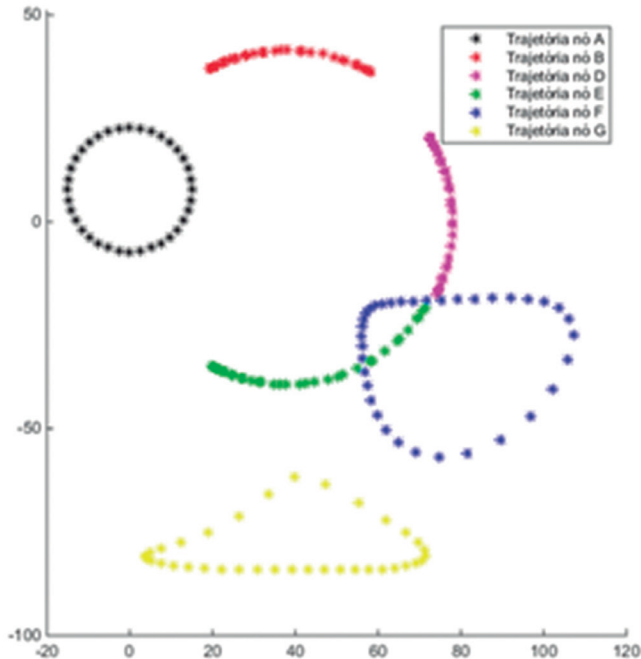


Figura 11. Trajetória de cada nó.

Utilizando ainda o comprimento das barras proposto por Theo Jansen para o modelo determinado pelas Equações (7) e (8), em função do movimento da manivela, obtém-se o seguinte movimento:

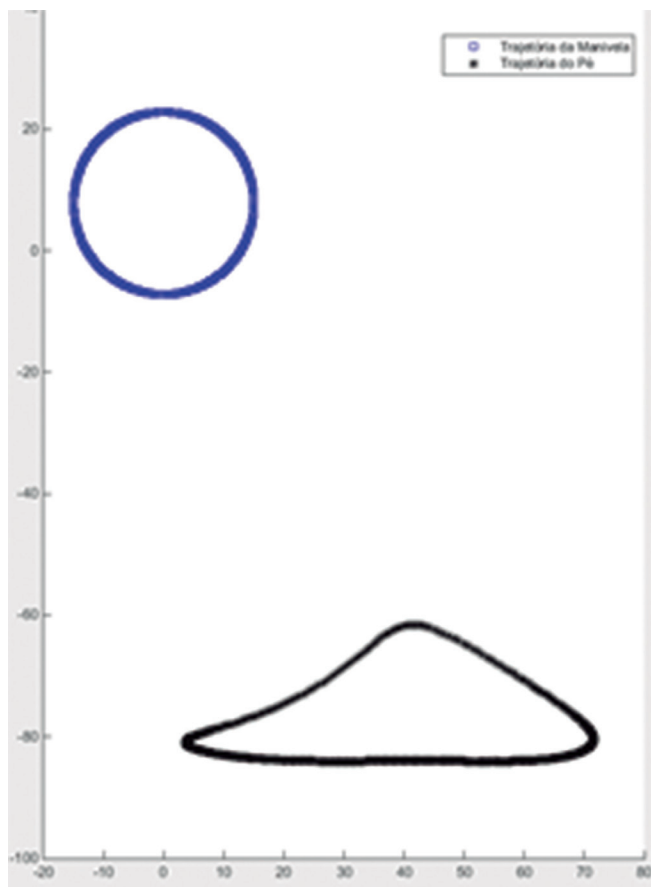


Figura 12. Movimento do pé.

## 4 CONCLUSÃO

Em função da metodologia recursiva, a determinação das equações do movimento facilita a obtenção de funções objetivo com complexidade reduzida. Isso viabiliza a utilização de métodos de otimização para, por exemplo, maximizar o alcance final da perna, ou até mesmo desenvolver estruturas similares, variando apenas a posição dos pontos fixos, descrito pelo movimento do nó G. A continuidade deste trabalho leva, naturalmente, ao estudo do comportamento, avaliando-se velocidade, aceleração, tração, compressão e torção na composição de mecanismos de locomoção mais complexos.

## REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, R. M.; GOLDSPIK, G. **Mechanics and energetics of animal locomotion**. Londres: Halsted Press, 1977.
- ARTFUTURA. **Catálogo**. 2005. Disponível em: <[http://www.artfutura.org/02/05jansen\\_en.html](http://www.artfutura.org/02/05jansen_en.html)>. Acessado em: 6 maio 2015.
- DAWKINS, R. **Climbing Mount Improbable**. London: Penguin, 1977.
- GEUS, A. R.; STOPPA, M. H. **A graphical interface for Jansen's mechanism by recursive geometric determination of nodes**. DSCI – Dalhousie Computer Science In-House Conference, 2012, Halifax, Canadá.
- HOFLAND, H. J. A.; JANSEN, T. **Strandbeesten van Theo Jansen**. Rotterdam: Kunsthal, 2001.
- INGRAM, A. J. **Numerical kinematic and kinetic analysis of a new class of twelve bar linkage for walking machines**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – 2004. Rand Afrikaans University, África do Sul. 2004. 56 p.
- \_\_\_\_\_. **A new type of mechanical walking machine**. Dissertação (Doutorado em Engenharia) – University of Johannesburg, África do Sul. 2006. 159 p.
- KNOX, P. **Neurally inspired octopod locomotion**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Rand Afrikaans University, África do Sul. 1997. 117 p.