

Parte I

Física e Química



## Solução de multi-sólitons para o modelo de TODA

Mateus Calixto Pereira  
dos Santos<sup>1</sup>

Paulo Eduardo Gonçalves  
de Assis<sup>2</sup>

**Resumo:** Neste trabalho fazemos uma revisão sobre a solução do Modelo de Toda para multi-sólitons amparados pela existência das quantidades conservadas do modelo. Mostramos que a cadeia de partículas em estudo, apesar de seu acoplamento não linear possui uma solução analítica que é construída através do método Bilinear de Hirota, admitindo um movimento do tipo pulsos solitônicos. Aplicamos os métodos e técnicas da construção da solução do Modelo de Toda para um circuito elétrico LC não linear, evidenciando a eficácia destes métodos para o tratamento dos sistemas dinâmicos. Enfim, discutimos as propriedades destas soluções obtidas tanto para o modelo de Toda quanto para o circuito elétrico LC não linear.

**Palavras-chave:** Sólitons. Cadeia de Toda. Método Bilinear de Hirota.

### 1 Introdução

O estudo de sistemas constituídos de muitos corpos são objetos de importância para Física e Engenharia, uma vez que estes podem representar sistemas reais como as redes cristalinas nos sólidos, os sistemas planetários, entre outros fenômenos da natureza. O tratamento destes sistemas possui certas dificuldades, dada a quantidade de partículas interagindo entre si, onde as soluções exatas são escassas e as simulações numéricas nem sempre são permitidas.

- 
- 1 Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Instituto de Física e Química. Contato: mateuscalixtopereira@gmail.com. Bolsista de Iniciação Científica da FAPEG.
  - 2 Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Instituto de Física e Química. Contato: paulo.assis@ufg.br

Dado os inúmeros tipos de sistemas, há uma classe especial para o nosso tratamento, os *sistemas integráveis*. Um sistema que é descrito em termos de equações diferenciais não lineares e que apresenta um número suficientemente grande de leis de conservação de modo a ser completamente resolvido de forma analítica é chamado de Sistema Integrável (DAS, 1989). Nos sistemas integráveis pode-se observar um importante objeto Físico chamado *sóliton*. Os sólitons são soluções do tipo ondas de equações diferenciais não lineares que apresentam propriedades como: a estabilidade perante as colisões, velocidade constante e a conservação de sua energia enquanto se propaga.

Em 1950 os trabalhos de Fermi, Pasta e Ulam a respeito de oscilações em redes não lineares apresentaram uma característica aproximadamente periódica da partição de energia entre os modos de oscilação da rede (FERMI et al, 1955). Assim, a partir destes estudos, viu-se que algumas redes não lineares admitiriam soluções estáveis do tipo pulsos de ondas e fundamentados neste trabalho surgiram sistemas não lineares integráveis que admitiam soluções estáveis do tipo sóliton (TODA, 1989). Um destes sistemas é a chamada: *Cadeia de Toda*.

A partir de estudos anteriores (SANTOS; ASSIS, 2015) vimos que utilizando o Formalismo de Lax para a Cadeia de Toda, poderíamos encontrar quantidades conservadas no tempo, de modo a indicar a integrabilidade do modelo. A partir deste formalismo determinamos quantidades como o chamado espectro auxiliar que foi utilizado na construção de novas coordenadas canonicamente conjugadas com o intuito de escrever uma forma alternativa da função Hamiltoniana para o modelo. Portanto, diante da existência destas quantidades conservadas iremos utilizar a integrabilidade do modelo de Toda construindo a solução analítica fazendo uso do método Bilinar de Hirota.

## 2 Desenvolvimento

Neste trabalho discutiremos as propriedades básicas das chamadas cadeias de Toda, exibindo resultados analíticos e alguns gráficos. Utilizaremos o método Bilinear de Hirota para escrever a solução analítica do modelo em diversas variáveis alternativas, evidenciando as técnicas matemáticas para tal procedimento. A partir de sua problematização apresentaremos aplicações para deste modelo.

### 2.1 Redes Dinâmicas

Alguns aspectos do modelo de Toda podem ser mais bem entendidos a partir da análise clássica das redes dinâmicos de forma geral. Portanto, admitindo um sistema composto de  $N$  corpos interligados entre si por certa força, onde a energia possa ser escrita em termos de uma hamiltoniana, temos que:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_n P_n^2 + \sum_n \Phi(y_{n+1} - y_n) = K + V, \quad (1.1.1)$$

onde  $P_n$ ,  $y_n$  e  $\Phi(y_{n+1} - y_n)$  são respectivamente o momento linear, deslocamento e energia potencial do  $n$ -ésimo corpo da rede.  $K$  e  $V$  são a energia cinética total e energia potencial total do sistema. É importante salientar que o momento linear do  $n$ -ésimo corpo pode ser escrito em termos da energia cinética total  $K$  na forma de

$$P_n = \frac{\partial K}{\partial \dot{y}_n} = m\dot{y}_n. \quad (1.1.2)$$

Alternativamente, podemos introduzir o deslocamento relativo entre os corpos do sistema

$$r_n = y_{n+1} - y_n. \quad (1.1.3)$$

Para a simplificação dos cálculos, assumiremos que a partícula  $n = 0$  está fixa, ou seja,  $y_0 = 0$ . Logo, define-se o momento conjugado a  $r_n$  como

$$s_n = \frac{\partial K}{\partial \dot{r}_n}. \quad (1.1.4)$$

onde através deste podemos relacionar  $y_n$  e  $s_n$  pela expressão

$$s_{n-1} - s_n = m\dot{y}_n. \quad (1.1.5)$$

Substituindo as relações anteriores na equação (1.1.1), temos

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{N-1} (s_{n+1} - s_n)^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \Phi(r_n), \quad (1.1.6)$$

com a qual utilizando as equações de Hamilton, obteremos

$$\dot{r}_n = -\frac{s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n}{m}, \quad (1.1.7)$$

e

$$\dot{s}_n = \frac{\partial \Phi(r_n)}{\partial r_n}. \quad (1.1.8)$$

Podemos ainda introduzir uma variável alternativa

$$S_n = \int s_n dt, \quad (1.1.9)$$

que simplificará alguns cálculos posteriores.

No decorrer desta seção apresentamos relações gerais importantes, comuns a inúmeros sistemas dinâmicos lineares e não lineares de modo que nas seções posteriores faremos a apresentação de algumas destas relações voltadas para o Modelo de Toda. Os resultados apresentados nesta seção serão indispensáveis para a construção da solução analítica do modelo de Toda que será apresentada adiante.

## 2.2 Cadeia de Toda

Em meados de 1950, o estudo das redes não lineares ganhou destaque após os trabalhos de Fermi, Pasta e Ulam. O problema de FPU, assim chamado, consistia na introdução de um termo quadrático ou cúbico na força restauradora de um sistema do tipo oscilador harmônico acoplado, ou seja, dado um sistema de  $N$  partículas interligadas por uma força do tipo Hooke, esta era modificada com a introdução de um termo não linear (TODA, 1989). A partir desta modificação esperava-se que o sistema se comportasse de forma irregular, porém notou-se certa periodicidade na transferência de energia entre os modos de vibração da rede. Assim, Toda modificou o problema de FPU introduzindo uma força do tipo exponencial através da qual o sistema de FPU se tornou integrável.

O modelo de Toda é um sistema dinâmico cujas partículas que o constitui interagem entre si de modo que a interação dependa exponencialmente da distância entre elas. Assim, podemos pensar nesta interação como sendo molas que ligam estas partículas, porém estas molas não devem obedecer a lei de Hooke. As molas do modelo de Toda são do tipo não linear, onde a força desempenhada pela mola sobre cada partícula dada por

$$f_s = a(e^{-br_n} - 1) = \dot{s}_n, \quad (1.2.1)$$

com  $a$  e  $b$  constantes. Portanto, utilizando a notação newtoniana podemos escrever a lei de movimento para a  $n$ -ésima partícula rede como:

$$m\ddot{y}_n = a\{e^{-b(y_n - y_{n-1})} - e^{-b(y_{n+1} - y_n)}\}, \quad (1.2.2)$$

Vimos que a cadeia de Toda é um sistema dinâmico não linear constituído de  $N$  partículas interagentes, logo sua equação diferencial também apresentará não linearidades devido ao tipo da força. Portanto os métodos tradicionais de resolução de equações diferenciais não possuem generalidade suficiente para que possamos utilizá-los para obter a função horária da posição de cada corpo da rede. Contudo há métodos especiais, como veremos adiante, para a resolução deste tipo de equação diferencial. Nas próximas seções discutiremos as vantagens e propriedades do método Bilinear de Hirota para a resolução de equações diferenciais não lineares.

### 3 Metodologia

A pesquisa apresentada é uma revisão de literatura com a apresentação de resultados analíticos e gráficos. A base da pesquisa consiste na utilização do método Bilinear de Hirota na construção da solução analítica para o Modelo de Toda.

#### 3.1 Método Bilinear de Hirota

No século XX, em especial após a década de 1970, houve grandes avanços nos estudos das propriedades dos sólitos, surgindo então vários novos métodos com o intuito de solucionar as equações de cada área. Então a construção das soluções analíticas destas equações levaram a uma melhor compreensão de inúmeros sistemas não lineares relacionados a Física, a Química, à Biologia e as Engenharias (RIBEIRO FILHO; VASCONCELOS, 2006). Um destes importantes métodos foi o chamado Método Bilinear de Hirota.

O método Bilinear de Hirota consiste basicamente em descrever a variável dependente da equação diferencial não linear em termos do operador Bilinear de Hirota que através de suas propriedades, auxiliará a construção da solução analítica. Este método se mostra eficaz no tratamento de várias equações como a KdV, a equação de sine-Gordon e a equação de Schroedinger não linear.

Para dar início ao tratamento do Modelo de Toda pelo método Bilinear de Hirota, definamos o operador Bilinear de Hirota atuando em um produto de duas funções  $f = f(x, t)$  e  $g = g(x, t)$  como:

$$D_x(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x} g - f \frac{\partial g}{\partial x}, \quad (2.1.1)$$

onde se nota a semelhança entre o operador bilinear de Hirota e o operador derivada. O operador bilinear de Hirota possui inúmeras propriedades, porém neste momento vale salientar apenas algumas propriedades como:

$$D_x^m(f \cdot g) = (-1)^m D_x^m(g \cdot f); \quad (2.1.2)$$

$$D_x D_t(f \cdot 1) = D_x D_t(1 \cdot f) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} f; \quad (2.1.3)$$

$$D_x^m(f \cdot f) = 0, \quad (2.1.4)$$

para todo  $m$  ímpar.

Portanto, para solucionar a equação diferencial não linear pelo método Bilinear de Hirota, devemos definir a função de Hirota  $\tau$  como sendo a função tal que a equação diferencial não linear possa ser escrita em termos do operador Bilinear

de Hirota. Assim, a variável dependente da equação diferencial deve ser função de  $\tau$ . Para o sucesso do método a função de Hirota deve ser escrita na forma de

$$\tau = 1 + \epsilon \tau_1 + \epsilon^2 \tau_2 + \epsilon^3 \tau_3 \cdots + \epsilon^N \tau_N, \quad (2.1.5)$$

onde a equação diferencial pode ser resolvida ordem a ordem, isto é, para cada coeficiente das diferentes potências de  $\epsilon$ .

Posteriormente devemos escolher o tipo de solução desejada de acordo com as condições do problema. Este método é válido para qualquer quantidade  $N$  de sólitons propagando na rede desde que  $\tau_1$  seja escolhido adequadamente, de maneira que exista certo  $\tau_\eta$  no qual para qualquer  $m > \eta$  implica em  $\tau_m = 0$  truncando a série na forma de

$$\tau = 1 + \sum_{m=1}^{\eta} \epsilon^m \tau_m. \quad (2.1.6)$$

Veremos adiante que este método possibilita a compreensão física do movimento solitônico da rede de Toda, descrevendo a evolução temporal de todos os corpos da rede. Este método proporciona também a descrição do movimento da rede excitada por inúmeros sólitons, tendo diversas aplicações.

## 4 Discussão e resultados

A partir das quantidades e métodos definidos anteriormente podemos encontrar a solução analítica do modelo de Toda e por comparação, aplicá-la a outros sistemas de interesse.

### 4.1 Solução analítica do modelo de Toda: método bilinear de Hirota

O tratamento das equações diferenciais é ditado pelas variáveis que as compõem, por isto podemos introduzir novas variáveis, ainda que estas não possuam um significado físico evidente, de modo a facilitar a resolução da equação diferencial.

Portanto, podemos reescrever a equação de movimento (1.2.4) em termos do deslocamento relativo fazendo uma subtração entre a equação de movimento para os corpos de rótulos  $n+1$  e  $n$ , resultando em

$$m\ddot{r}_n = a\{2e^{-br_n} - e^{-br_{n+1}} - e^{-br_{n-1}}\}. \quad (3.1.1)$$



Assim, substituindo a equação (1.2.1) em (3.1.1), obteremos a relação entre  $\dot{r}_n$  e  $s_n$  na forma de:

$$\ddot{r}_n = -\frac{\dot{s}_{n+1} + \dot{s}_{n-1} - 2\dot{s}_n}{m}, \quad (3.1.2)$$

a qual integrando e escolhendo adequadamente as constantes, obteremos novamente

$$\dot{r}_n = -\frac{s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n}{m}, \quad (3.1.3)$$

ou seja, recobramos a equação (1.1.7). Posteriormente podemos utilizar a equação (1.2.1) explicitando a variável  $r_n$  que ao substituir na equação (3.1.3) temos

$$\frac{d}{dt} \ln[a + \dot{s}_n] = \frac{b}{m} (s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n), \quad (3.1.4)$$

Assim, integrando a equação (3.1.4) com relação ao tempo e escolhendo adequadamente as constantes encontraremos

$$\ln \left[ 1 + \frac{\ddot{s}_n}{a} \right] = \frac{b}{m} (s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n), \quad (3.1.5)$$

e portanto obtemos mais uma forma da equação de movimento do Modelo de Toda. Tendo o conhecimento destas várias equações de movimento para o Modelo de Toda podemos partir para solução analítica. Vale salientar que de todas as equações de movimento apresentadas anteriormente a mais tangível é a equação (3.1.5).

Sendo assim, considere a equação de movimento (3.1.5), na qual suponhamos que  $s_n$  possa ser escrito na forma de:

$$s_n = \frac{m}{b} \ln \tau_n, \quad (3.1.6)$$

onde  $\tau_n = \tau(n, t)$ . Desta maneira, substituindo a equação (3.1.6) na equação de movimento (3.1.5) temos:

$$\ddot{\tau}_n \tau_n - \dot{\tau}_n^2 + \frac{ab}{m} (\tau_n^2 - \tau_{n-1} \tau_{n+1}) = 0 \quad (3.1.7)$$

Podemos ainda reescrever a equação (3.1.7) em termos do operador de Hirota utilizando sua própria definição,

$$D_t^2 (\tau_n \cdot \tau_n) + \frac{ab}{m} (\tau_n^2 - \tau_{n-1} \tau_{n+1}) = 0, \quad (3.1.8)$$

onde esta é a equação de movimento do Modelo de Toda na forma Bilinear. O processo de transformação da equação de movimento (3.1.5) na forma (3.1.8) é chamado de Bilinearização.

Assim sendo podemos admitir que a função de Hirota seja do tipo:

$$\tau_n = 1 + \epsilon \tau_{1(n)} + \epsilon^2 \tau_{2(n)} + \epsilon^3 \tau_{3(n)} \dots, \quad (3.1.9)$$

a qual substituindo na equação (3.1.8) percebe-se que os coeficientes de  $\epsilon^i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , devem ser zero separadamente.

Utilizando as propriedades do operador de Hirota, podemos reescrever o coeficiente de  $\epsilon^1$  na forma de:

$$\ddot{\tau}_{1(n)} + \frac{ab}{m} (2\tau_{1(n)} - \tau_{1(n-1)} - \tau_{1(n+1)}) = 0, \quad (3.1.10)$$

logo, uma solução possível é

$$\tau_{1(n)} = e^{2(\kappa n - \beta t)}, \quad (3.1.11)$$

onde  $\beta = \pm \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa)$ . Sendo assim, podemos encontrar os valores de  $\tau_{2(n)}$  utilizando a solução de  $\tau_{1(n)}$ . Portanto escrevendo o coeficiente de  $\epsilon^2$  e utilizando a equação (3.1.11) temos:

$$\ddot{\tau}_{2(n)} + \frac{ab}{m} (2\tau_{2(n)} - \tau_{2(n-1)} - \tau_{2(n+1)}) = 0, \quad (3.1.12)$$

ou seja, temos a mesma equação diferencial obtida para  $\tau_{1(n)}$ . Logo, se as equações diferenciais (3.1.10) e (3.1.12) são iguais, poderíamos a princípio admitir que suas soluções também são iguais, porém neste caso a solução completa  $\tau_n$  não truncará pois  $\tau_{\gamma(n)}$ , com  $\gamma > 2$  não admitirão uma solução trivial  $\tau_{\gamma(n)} = 0$ , ocasionando em uma solução completa  $\tau_n$  infinita na forma de:

$$\tau_n = 1 + \epsilon e^{2(\kappa n - \beta t)} + \epsilon^2 e^{2(\kappa n - \beta t)} + \epsilon^3 \tau_{3(n)} \dots + \epsilon^N \tau_{N(n)}, \quad (3.1.13)$$

Diante deste fato podemos considerar a solução trivial para  $\tau_{2(n)}$ . Portanto, seja

$$\tau_{2(n)} = 0, \quad (3.1.14)$$

obteremos através dos coeficientes das potências de  $\epsilon$  que  $\tau_{3(n)} = 0, \tau_{4(n)} = 0, \dots, \tau_{m(n)} = 0$ , para  $m > 1$ , truncando a solução completa.

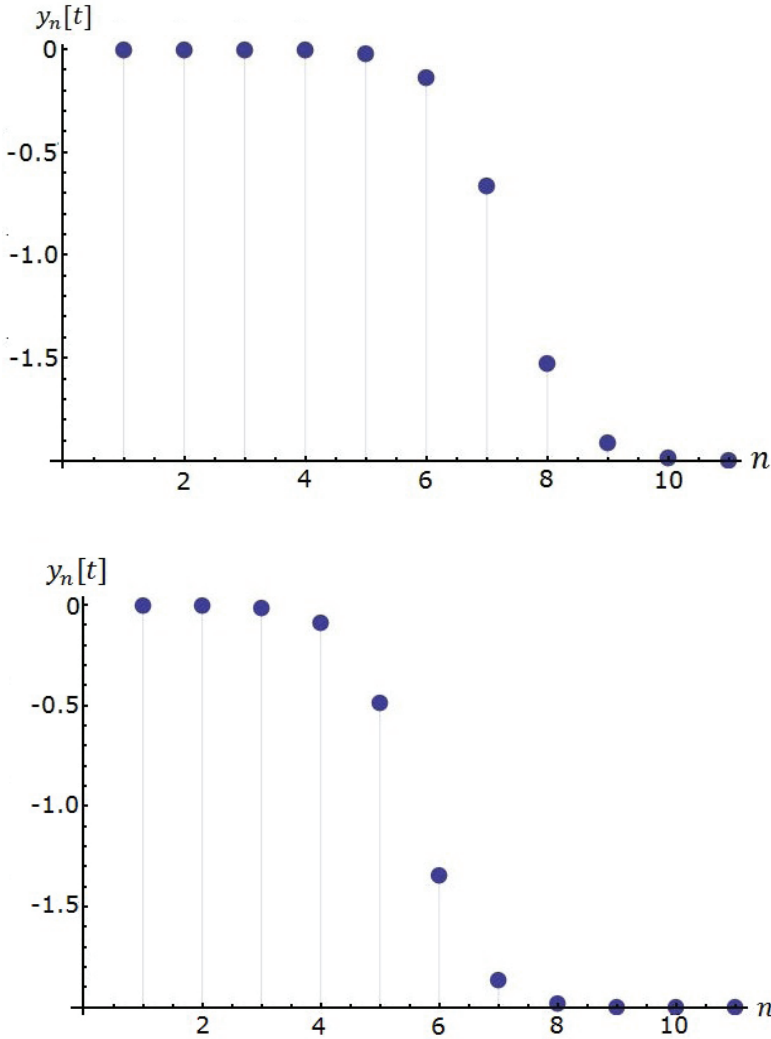
Consequentemente, a solução completa  $\tau_n$  para um sóiton se propagando na rede é dada por:

$$\tau_n = 1 + e^{2(\kappa n \mp \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa) t)}, \quad (3.1.15)$$

na qual utilizando as equações (1.1.5), (1.1.9) e (3.1.6) podemos escrever a expressão para o deslocamento do  $n$ -ésimo corpo na rede como:

$$y_n = \frac{1}{b} \ln \frac{1 + e^{2(\kappa(n-1) \mp \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa)t)}}{1 + e^{2(\kappa n \mp \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa)t)}} + \frac{\kappa}{b}. \quad (3.1.16)$$

Portanto, vimos que a cadeia de Toda, um sistema cujo acoplamento entre os corpos depende exponencialmente da distancia entre os mesmo, é um sistema integrável, admitindo uma solução analítica para o modelo.



**Figura 1** Representação gráfica de uma excitação em uma rede de Toda em dois instantes diferentes.

Percebe-se através da **Figura 1** que a rede de Toda admite um perfil de movimento do tipo onda solitária que se propaga sem dispersão ou dissipação a partir de uma excitação.

A partir das propriedades e equações mostradas anteriormente, podemos encontrar a solução analítica para dois sólitons na rede. Assim sendo, podemos utilizar as equações (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9) e (3.1.10), uma vez que estas são equações gerais que valem independentemente do número de sólitons presentes na rede. Assim como na solução para 1 sólito, devemos encontrar uma solução para  $\tau_{1(n)}$  de modo que a solução completa  $\tau_n$  trunque, porém, esta não pode ser igual a solução  $\tau_{1(n)}$  suposta para 1 sólito já que almejamos descrever uma interação entre sólitons, diferentemente do primeiro exemplo. Desta maneira tomemos

$$\tau_{1(n)} = A_1 e^{2(\kappa_1 \mp \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa_1)t)} + A_2 e^{2(\kappa_2 \mp \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa_2)t)}, \quad (3.1.17)$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são respectivamente as amplitudes do sólito 1 e 2. Utilizando a equação (3.1.17) podemos escrever uma expressão para o coeficiente de  $\epsilon^2$  na qual podemos encontrar uma solução fazendo

$$\tau_{2(n)} = A_3 e^{2(\kappa_1 + \kappa_2)n - 2(\pm \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa_1) \pm \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa_2))t}, \quad (3.1.18)$$

onde

$$A_3 = \frac{\sinh^2 \left[ \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \right]}{\sinh^2 \left[ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right]} A_1 A_2, \quad (3.1.19)$$

Valendo-se das equações (3.1.17) e (3.1.18) o coeficiente de  $\epsilon^3$  pode ser escrito como

$$\ddot{\tau}_{3(n)} + \frac{ab}{m} (2\tau_{3(n)} - \tau_{3(n-1)} - \tau_{3(n+1)}) = 0, \quad (3.1.20)$$

ou seja, recaímos na equação (3.1.10) para dois sólitons, cuja solução é dada por (3.1.17). Logo podemos considerar dois casos novamente: A)  $\tau_{3(n)} = \tau_{1(n)}$  e B)  $\tau_{3(n)} = 0$ . Como foi mostrado anteriormente para o caso de 1 sólito na rede, se considerarmos o caso A), teremos uma solução completa indesejada. Porém considerando o caso B) o coeficiente de  $\epsilon^4$  resulta em

$$\ddot{\tau}_{4(n)} + \frac{ab}{m} (2\tau_{4(n)} - \tau_{4(n-1)} - \tau_{4(n+1)}) = 0, \quad (3.1.21)$$

onde escolhendo novamente a solução trivial,  $\tau_{4(n)} = 0$ , obteremos o coeficiente de  $\epsilon^5$  na forma de:

$$\ddot{\tau}_{5(n)} + \frac{ab}{m} (2\tau_{5(n)} - \tau_{5(n-1)} - \tau_{5(n+1)}) = 0, \quad (3.1.22)$$

ou seja, o método nos proporciona uma simetria tal que escolhendo adequadamente  $\tau_{1(n)}$  os coeficientes de  $\epsilon^\eta$ , para  $\eta > 2$  apresentam uma expressão na forma de

$$\ddot{\tau}_{\eta(n)} + \frac{ab}{m} (2\tau_{\eta(n)} - \tau_{\eta(n-1)} - \tau_{\eta(n+1)}) = 0, \quad (3.1.23)$$

onde  $\tau_{\eta(n)} = 0$  é solução. Sendo assim, podemos escolher  $\tau_{\eta(n)} = 0$ , para  $\eta > 2$ , de modo a obter a solução completa na forma expressa por:

$$\begin{aligned} \tau_n = & 1 + A_1 e^{2(\kappa n \mp \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa_1)t)} + A_2 e^{2(\kappa n \mp \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa_2)t)} + \\ & + \frac{\sinh^2 \left[ \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \right]}{\sinh^2 \left[ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right]} A_1 A_2 e^{2(\kappa_1 + \kappa_2)n - 2(\pm \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa_1) \pm \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa_2))t}, \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

onde a constante  $\epsilon$  e suas potências foram reabsorvidas. A partir das equações (1.1.5), (1.1.9), (3.1.6) e (3.1.24) podemos escrever a expressão para o deslocamento do  $n$ -ésimo corpo na rede como

$$y_n = \frac{1}{b} \ln \left[ \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \right], \quad (3.1.25)$$

onde

$$\begin{aligned} \tau_{n-1} = & 1 + A_1 e^{2(\kappa(n-1) \mp \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa_1)t)} + A_2 e^{2(\kappa(n-1) \mp \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa_2)t)} + \\ & + \frac{\sinh^2 \left[ \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \right]}{\sinh^2 \left[ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right]} A_1 A_2 e^{2(\kappa_1 + \kappa_2)(n-1) - 2(\pm \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa_1) \pm \sqrt{ab/m} \sinh(\kappa_2))t}, \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

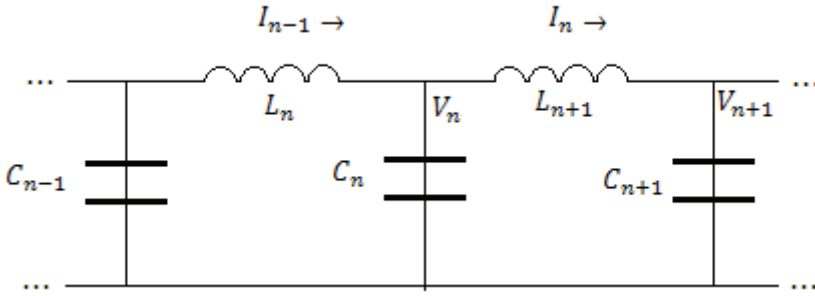
A equação (3.1.25) descreve o movimento dos corpos na rede sob a perturbação de dois sólitos.

A utilização do método Bilinear de Hirota é importante na construção de soluções analítica de sistemas dinâmicos não lineares. Além disso, a solução do modelo de Toda pode ser comparada com outros sistemas dinâmicos não lineares de modo que possamos encontrar suas respectivas soluções pelos mesmos métodos e técnicas empregadas na solução do modelo de Toda.

## 4.2 Aplicação: circuito elétrico composto LC não Linear

Os sistemas dinâmicos não lineares estão relacionados a inúmeros fenômenos naturais, por isto o seu estudo é um objeto de grande importância, ocasionando uma melhor compreensão de sistemas reais. Uma das maneiras de compreender um sistema dinâmico é resolver sua equação de movimento e portanto a aplicação do método Bilinear de Hirota pode ser útil na construção desta solução. Um sistema não linear de interesse físico é o circuito elétrico composto LC não linear.

Considere um circuito elétrico LC não linear, isto é, uma associação de  $N$  circuitos constituídos de um capacitor e um indutor onde o capacitor é do tipo não linear.



**Figura 2** Circuito elétrico LC não linear.

Assim, temos que a taxa de variação de carga com o tempo do  $n$ -ésimo capacitor é descrita por:

$$\dot{q}_n = I_{n-1} - I_n, \quad (3.2.1)$$

onde  $I_n$  é a  $n$ -ésima corrente que flui pelo circuito. Consequentemente, a variação de potencial elétrico entre os terminais de um indutor pode ser escrito como

$$-L\dot{I}_n = V_{n+1} - V_n, \quad (3.2.2)$$

onde  $V_n$  é o potencial e  $L$  é a indutância (que neste caso é constante).

Portanto, considerando um capacitor não linear do tipo:

$$q_n = C\sigma \ln \left( 1 + \frac{V_n}{\sigma} \right), \quad (3.2.3)$$

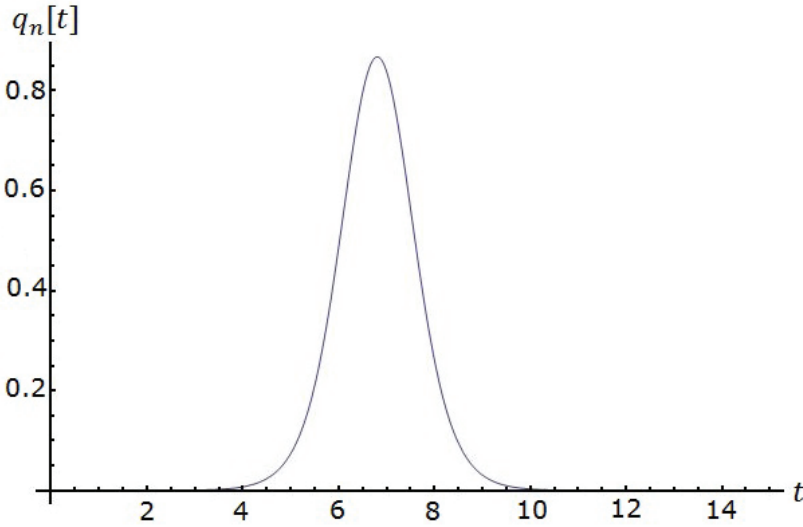
no qual  $C$  é a capacitância e  $\sigma$  é uma constante. Combinando as equações (3.2.1), (3.2.2) e (3.2.3) temos

$$LC\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln \left( 1 + \frac{V_n}{\sigma} \right) = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n, \quad (3.2.4)$$

ou seja, obtemos uma expressão com a mesma forma da equação diferencial que descreve o modelo de Toda (3.1.5). Diante disso, podemos utilizar o método Bilinear de Hirota, resultando em uma solução do tipo

$$V_n = \sigma \sinh^2(\kappa) \operatorname{sech}^2[\kappa n \pm \sqrt{1/LC} \sinh(\kappa) t]. \quad (3.2.5)$$

A equação anterior dita o comportamento do potencial elétrico entre cada polo dos  $N$  indutores, na qual podemos comparar com a força ( $f_s$ ) desempenhada pelas “molas” do modelo de Toda. Assim, utilizando a equação (3.2.3) podemos analisar o comportamento da carga de cada um dos capacitores da rede.



**Figura 3** Representação gráfica da evolução temporal da carga do  $n$ -ésimo capacitor constituinte do circuito.

Na Figura 3, cada um dos capacitores não lineares desempenha uma variação de carga com o tempo do tipo pulso de onda. Portanto, percebe-se a importância do método Bilinear de Hirota no entendimento de sistemas não lineares, possibilitando a construção da solução analítica do problema.

## 5 Conclusões

Ainda que sistemas dinâmicos não lineares possuam um tratamento complexo, estes podem conter quantidades conservadas suficientes que lhes confirmam

a característica de sistemas integráveis, possuindo então a vantagem de serem resolvidos analiticamente.

Neste trabalho mostramos que a partir do Método Bilinear de Hirota é possível construir uma solução analítica para o modelo de Toda. Determinamos a função  $\tau$  de Hirota de modo que obtivemos a equação de movimento do Modelo de Toda na forma Bilinear. Foram calculadas também as soluções para dois sólitons propagando na rede, onde vimos que a complexidade do método está no fato de conseguirmos encontrar uma solução para  $\tau_1$  (que esteja de acordo com as condições do problema) de modo que a série descrita por  $\tau$  seja finita.

Após a compreensão do modelo de Toda, aplicamos o método Bilinear de Hirota para determinar a solução do circuito elétrico LC não linear. Por analogia mostramos a semelhança entre o potencial elétrico do  $n$ -ésimo capacitor e a força da “mola” do modelo de Toda. Com isso, ficou demonstrado a eficácia deste método para o tratamento destes sistemas não lineares.

## Referências

- DAS, A. **Integrable Models**. Cingapura: World Scientific Lecture Notes in Physics, 1989.
- FERMI, E.; PASTA, J.; ULAM, S. **Studies of Nonlinear Problems**. Document LA-1940, 1955.
- MATSUNO, Y. **Bilinear Transformation Method**. Orlando: Academic Press, Inc, 1984. 224 p. 174 v.
- RIBEIRO, F. A.; VASCONCELOS, D. S. **Aspectos matemáticos em sistemas não lineares na mecânica quântica e mecânica clássica modernas**. Cadernos de Ciências Humanas – Especiaria. 2006. cap. 9, p. 397-410.
- SANTOS, M. C. P.; ASSIS, P. E. G. **Simetrias da Cadeia de Toda**. In: NEVES, A. F.; FERREIRA, I. M.; PAULA, M. H.; ANJOS, P. H. R. **Coletânea Interdisciplinar em Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação – Volume 4: Engenharias, Saúde e Gestão**. São Paulo: Edgard Blücher, 2015. cap. 16, p. 226-242.
- TODA, M. **Theory of Nonlinear Lattices**. Berlin: Springer-Verlag 1989. p. 223.