

Considerações sobre a substituição da armadura por fibras metálicas em vigas de concreto

Wanderlei Malaquias
Pereira Junior¹

José Júlio de Cerqueira Pituba²

Resumo: Este trabalho trata da aplicação de modelos de dano e de homogeneização em simulações numéricas de vigas de concreto fibroso. Objetiva-se iniciar uma discussão sobre a substituição da armadura de flexão, em parte, por fibras metálicas. Para tanto, um modelo de dano para o concreto é empregado, assim como um modelo de homogeneização para se levar em conta a presença de fibras metálicas. Os modelos foram implementados em código de cálculo via Método dos Elementos Finitos. Observa-se que no exemplo analisado, a inserção de fibras metálicas provoca um ganho de rigidez e resistência na viga de concreto, inclusive diminuindo o fenômeno de fissuração.

Palavras-chave: Mecânica do dano, Concreto fibroso, Modelos constitutivos.

Introdução

A modelagem constitutiva de materiais compósitos está em fraco desenvolvimento, incluindo a busca por modelos que balizem discussões sobre o emprego de materiais com propriedades adequadas que ao serem incorporados a um material base, melhore suas características mecânicas. Dentro desse contexto, o concreto fibroso merece destaque. O concreto é o material mais empregado na construção

-
- 1 Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Unidade Acadêmica Especial de Engenharias. Laboratório de Mecânica Computacional. Contato: wanderlei.malaquias.pereira.jr@gmail.com.
 - 2 Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Unidade Acadêmica Especial de Engenharias. Laboratório de Mecânica Computacional. Contato: julio.pituba@pq.cnpq.br. Bolsista de Produtividade em Pesquisa do CNPq.

de edificações e obras civis em geral, porém por seu comportamento frágil quando submetidas a esforços que levem a solicitações de tração, o concreto tem limitações de uso. A incorporação de fibras metálicas gerando o concreto fibroso pode levar a ganhos, principalmente no comportamento mecânico do concreto fissurado. Estudos experimentais sobre o concreto fibroso são onerosos, portanto, a modelagem numérica surge como uma ferramenta auxiliar para balizar discussões e orientar análises experimentais para a obtenção de materiais com propriedades adequadas.

A normalização para o concreto simples já está muito bem difundida no país através da NBR 6118 (ABNT, 2011). Contudo, cabe ressaltar que o Brasil ainda não tem nenhum procedimento para verificação no Estado Limite Último (ELU) e Estado Limite de Serviço (ELS) para peças de concreto reforçada com fibras metálicas. Portanto, trabalhos que estudem esse material são necessários para o entendimento de seu comportamento mecânico e balizar futuras discussões de norma técnica.

Dentro do contexto de modelagem do concreto, a Mecânica do Dano no Contínuo (MDC) vem despertando interesse na área de Mecânica Computacional. Modelos desse tipo intencionam reproduzir o comportamento mecânico de materiais fissurados através da quantificação de uma variável denominada dano. Por outro lado, modelos de homogeneização são necessários para a simulação de materiais compósitos como é o caso do concreto fibroso. Em suma, neste trabalho é empregado o modelo de dano formulado por Pituba (2003) e seus desenvolvimentos em Pituba e Fernandes (2011), Pituba (2006), Piuba e Proença (2008), em conjunto com a proposta de homogeneização apresentada em Pereira Júnior (2014) e Pereira Júnior et al. (2016). O objetivo consiste em verificar a empregabilidade da ideia em substituir parte da armadura de flexão por fibras metálicas. Para tanto, análises numéricas serão apresentadas e conclusões iniciais do emprego desta modelagem serão descritas ao final.

1 Desenvolvimento

No item 1 é apresentada a formulação matemática do modelo constitutivo para o concreto proposto por Pituba (2003) e seus desenvolvimentos constantes em Pituba (2006), Pituba e Proença (2008) e Pituba e Fernandes (2011). Em seguida, é abordada a incorporação das fibras metálicas na matriz cimentícia levada em conta por Pereira Júnior (2014) e Pereira Júnior et al. (2016) através de um processo de homogeneização.

1.1 Modelos Constitutivos

Segundo Pituba e Proença (2008), para modelar o comportamento do concreto, pode-se assumir que o meio pertence a uma categoria de materiais que

podem ser considerados inicialmente isotrópicos e unimodulares, porém, quando danificados passam a exibir anisotropia e bimodularidade (diferentes comportamentos em estados predominantes de tração e compressão). Dentro desse contexto, uma formulação de leis constitutivas para materiais com isotropia ou anisotropia elástica que apresentam diferentes comportamentos em tração e em compressão é apresentada em Pituba e Fernandes (2011) no espaço das tensões e de deformações no âmbito tridimensional. Ainda segundo Pituba e Proença (2008) e Pituba (2006), admite-se que para a modelagem de um material hiperelástico bimodular, a densidade de energia potencial elástica W deve ser uma vez diferenciável continuamente (em qualquer ponto), porém diferenciável duas vezes continuamente apenas por partes. A relação tensão-deformação derivada de tal potencial tem continuidade (em qualquer ponto) e apresenta um tensor de elasticidade descontínuo em relação a uma hipersuperfície que contém a origem do espaço das deformações; nessas condições torna-se possível reproduzir uma resposta diferente em tração e em compressão. Com o intuito de se levar em conta os efeitos da danificação no meio, os módulos volumétricos (λ_{ab}) e de cisalhamento (μ_a) são considerados como funções do estado de dano tal que a relação tensão-deformação é influenciada pelas variáveis de dano. Como o critério para a identificação das respostas constitutivas de compressão ou de tração, hiperplano separador $g(\epsilon, D_i)$, é função das componentes de deformação, este critério passa então a ser influenciado pelas variáveis de dano. Da formulação proposta em Pituba e Fernandes (2011) foi derivado um modelo constitutivo considerando o concreto como um meio inicialmente isotrópico com anisotropia (isotropia transversal) e bimodularidade induzidas pelo dano. A classe de anisotropia induzida, adotada no modelo, decorre do pressuposto que localmente o concreto solicitado apresenta sempre uma distribuição de danificação com orientação bem definida. Essa suposição, aliás, está justificada na observação do comportamento do material em ensaios experimentais.

A formulação do modelo tem por base o formalismo apresentado em Pituba (2003), Pituba (2006) e Pituba e Proença (2008) e, além disso, procura atender ao princípio de equivalência de energia entre meio real danificado e meio contínuo equivalente estabelecido na Mecânica do Dano. Para a definição de D , opta-se por uma forma dita de dano escalar dada por: $D = f_j(D_i) M_j$, onde $f_j(D_i)$ são funções de valores escalares das variáveis escalares de dano escolhidas e M_j são tensores de anisotropia (PITUBA e PROENÇA, 2008). No caso deste modelo, adotam-se para M_j tensores que permitem representar a isotropia transversal. Portanto, para estados predominantes de tração, apresenta-se o tensor:

$$D_T = f_1(D_1, D_4, D_5)(\underline{A} \otimes \underline{A}) + 2f_2(D_4, D_5)[(\underline{A} \otimes \underline{I} + \underline{I} \otimes \underline{A}) - (\underline{A} \otimes \underline{A})] \quad (1.1)$$

sendo $f_1(D_1, D_4, D_5) = D_1 - 2 f_2(D_4, D_5)$ e $f_2(D_4, D_5) = 1 - (1-D_4) (1-D_5)$. A variável D_1 representa a danificação na direção perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material e D_4 é a variável representativa da danificação gerada pelo escorregamento entre as bordas das fissuras pertencentes àquele plano. A terceira variável de dano D_5 é ativada somente se tiver havido compressão prévia com danificação correspondente. Na Eq. (1.1), o tensor \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem e o tensor \mathbf{A} é, por definição (PITUBA e PRIENÇA, 2008), formado pelo produto tensorial do vetor perpendicular ao plano de isotropia transversal por ele mesmo. As operações de produtos tensoriais entre os tensores de segunda ordem \mathbf{I} e \mathbf{A} são utilizadas durante toda a formulação e estão descritas em Pituba e Fernandes (2011).

Para estados predominantes de compressão, apresenta-se o seguinte tensor de dano:

$$\mathbf{D}_C = f_1(D_2, D_4, D_5) (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + f_2(D_3) [(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})] + 2f_3(D_4, D_5) [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})] \quad (1.2)$$

sendo $f_1(D_2, D_4, D_5) = D_2 - 2 f_3(D_4, D_5)$, $f_2(D_3) = D_3$ e $f_3(D_4, D_5) = 1 - (1-D_4) (1-D_5)$. Notam-se três variáveis escalares na sua composição: D_2 , D_3 e D_5 , além de D_4 , relacionada a efeitos de tração pré-existent. A variável D_2 (danificação perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material) penaliza o módulo de elasticidade nessa direção e juntamente com D_3 (representante da danificação no plano de isotropia transversal) penaliza o coeficiente de Poisson em planos perpendiculares ao de isotropia transversal. Observa-se que, é possível capturar a danificação dos módulos de cisalhamento e ao mesmo tempo atender à hipótese de salto tangencial nulo do tensor constitutivo, implícita na modelagem da bimodularidade (PITUBA e PROENÇA, 2008).

Atendendo ao formalismo proposto e ao princípio de equivalência de energia estabelecido pela MDC, o tensor constitutivo do modelo é escrito como:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) := \begin{cases} \mathbf{E}_-(\boldsymbol{\varepsilon}) & \text{se } g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) < 0, \\ \mathbf{E}_+(\boldsymbol{\varepsilon}) & \text{se } g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) > 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_+(\boldsymbol{\varepsilon}) = & \lambda_1 [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}] + 2\mu_1 [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}] - \lambda_2^+ (D_1, D_4, D_5) [\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}] \\ & - \lambda_2^+ (D_1) [\mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}] - \mu_2 (D_4, D_5) [\mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}] \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
E_-(\varepsilon) = & \lambda_l [I \otimes I] + 2\mu_l [I \otimes \bar{I}] - \lambda_2^-(D_2, D_3, D_4, D_5) [A \otimes A] \\
& - \lambda_2^-(D_2, D_3) [A \otimes I + I \otimes A] - \lambda_l^-(D_3) [I \otimes I] \\
& - \frac{(1-2\nu_0)}{\nu_0} \lambda_l^-(D_3) [I \otimes \bar{I}] - \mu_2(D_4, D_5) [A \otimes \bar{I} + I \otimes \bar{A}]
\end{aligned} \quad (1.5)$$

Observa-se que para valores nulos das variáveis de dano, o material se comporta como um meio isótropo e unimodular, onde $\lambda_{l1} = \lambda_0$; $\mu_{l1} = \mu_0$ são as constantes usuais de Lamé.

Por outro lado, o hiperplano $g(e, D)$ é definido por sua normal unitária N ($\|N\| = 1$) e caracterizado por sua dependência dos estados de deformação e de danificação. Por simplificação, restringindo-se o estudo ao caso em que o sistema local de referência adotado para o material é aquele obtido impondo-se a direção 1 como sendo perpendicular ao plano local de isotropia transversal, e em correspondência aos casos gerais de solitação, tem-se:

$$g(e, D_T, D_C) = N(D_T, D_C) \cdot e^e = g_1(D_1, D_2) \varepsilon_V^e + g_2(D_1, D_2) \varepsilon_1^e \quad (1.6)$$

onde $g_1(D_1, D_2) = \{1 + H(D_2)[H(D_1) - 1]\}h(D_1) + \{1 + H(D_1)[H(D_2) - 1]\}h(D_2)$ e $g_2(D_1, D_2) = D_1 + D_2$. As funções de Heaveside empregadas na última relação são dadas por:

$$H(D_i) = 1 \text{ para } D_i > 0; H(D_i) = 0 \text{ para } D_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.7)$$

Já as funções $h(D_1)$ e $h(D_2)$ são definidas, respectivamente, para os casos de tração, supondo que não tenha danificação prévia de compressão, e de compressão, supondo que não tenha havido danificação prévia de tração, sendo dadas por:

$$h(D_1) = \frac{-D_1 + \sqrt{3 - 2D_1^2}}{3}; h(D_2) = \frac{-D_2 + \sqrt{3 - 2D_2^2}}{3} \quad (1.8)$$

Por outro lado, tendo-se em vista que a danificação induz anisotropia no meio inicialmente isótropo, é conveniente separar os critérios de dano em: critério para início de danificação, quando o material deixa de ser isótropo; e critério para carga e descarga, entendido aqui num sentido de evolução ou não das variáveis de dano, quando o material já se apresentar como transversalmente isótropo. Este segundo critério identifica se existe ou não evolução das variáveis de dano. Esta divisão é justificada pela diferença existente entre as energias de deformação

elástica complementares de um material isotrópico e um outro com isotropia transversal.

Nos casos onde se configura carregamento é necessário atualizar os valores das variáveis escalares de dano que aparecem nos tensores DT e DC, considerando-se suas leis de evolução, que por sua vez são escritas como funções das variáveis associadas. Considerando o caso de carregamento monotônico, as leis de evolução propostas são resultantes de ajustes sobre resultados experimentais e apresentam características similares às aquelas encontradas nos trabalhos em Pituba (2003). A forma dada à equação é:

$$D_i = 1 - \frac{1 + A_i}{A_i + \exp[B_i(Y_i - Y_{0i})]} \text{ com } i = 1, 5 \quad (1.9)$$

onde A_i , B_i e Y_{0i} são parâmetros a serem identificados mediante experimentos, onde estados de tensão uniaxial e biaxial são induzidos.

Segundo Pituba e Proença (2008), quando o processo de danificação é ativado, a formulação passa a envolver o tensor \mathbf{A} que, por sua vez, depende do conhecimento da normal ao plano de isotropia transversal. Então, devem-se definir regras para a localização dessa normal para um dado estado de deformação. Inicialmente estabelece-se um critério geral para a existência do plano de isotropia transversal. Propõe-se que a isotropia transversal decorrente da danificação se manifesta somente se existirem taxas positivas de deformação, ao menos em uma das direções principais. Estabelecido o critério geral, algumas regras para identificar sua localização são definidas.

A versão unidimensional do modelo leva em conta deformações permanentes induzidas pela evolução da danificação (PITUBA e PROENÇA, 2008). Assume-se, por simplicidade, que as deformações permanentes são compostas exclusivamente pelas deformações volumétricas, e ainda levando-se em conta o efeito unilateral, a lei de evolução resulta em:

$$\dot{\epsilon}^p = \left(\frac{\beta_1}{(1 - D_1)^2} \dot{D}_1 + \frac{\beta_2}{(1 - D_2)^2} \dot{D}_2 \right) \mathbf{I} \quad (1.10)$$

Observa-se que β_1 e β_2 são parâmetros diretamente relacionados com as evoluções das deformações permanentes induzidas pelo dano em tração e compressão, respectivamente.

Vale destacar que para modelar o comportamento mecânico das armaduras de aço, um modelo constitutivo elastoplástico é utilizado.

O modelo de dano em estudo está implementado em linguagem Fortran em um código computacional baseado no Método dos Elementos Finitos para

a análise numérica de estruturas em barras discretizadas com seção transversal estratificada, permitindo assim considerar na seção transversal camadas equivalentes de aço ou concreto. Tal código é identificado aqui como EFICOS. Ao longo deste trabalho admite-se perfeita aderência entre concreto e aço, definindo assim para cada camada suas características, como módulo de elasticidade e deformações anelásticas equivalentes, utilizando regra de homogeneização para tal fim (PEREIRA JUNIOR, 2014).

Por outro lado, para modelar o concreto fibroso, em especial a interação fibra/matriz, um procedimento proposto por La Borderie (1991) é utilizado.

De forma resumida, tal modelo é expresso por (1.11) para o cálculo da tensão homogeneizada do compósito de concreto reforçado com fibras metálicas:

$$\sigma_{CRFA} = (1 - C)\sigma_m + C\sigma_f \quad (1.11)$$

Onde:

σ_{CRFA} : Tensão do material homogeneizado, dito CRFA;

C : Fração volumétrica de fibras de aço;

σ_m : Tensão na matriz cimentícia;

σ_f : Tensão na interface fibra tracionada imersa no concreto.

Observa-se que foi introduzida uma hipótese simplificadora, onde a deformação é suposta idêntica para a matriz e a fibra. Além disso, a orientação das fibras, que é aleatória e não privilegiada no sentido da solicitação, não é levada em conta na modelagem proposta (PEREIRA JUNIOR, 2014).

2 Metodologia / procedimentos utilizados

O presente trabalho empregou os modelos constitutivos descritos anteriormente via Método dos Elementos Finitos para simular o comportamento mecânico de vigas de concreto armado e concreto armado reforçado com fibras. As vigas foram ensaiadas por Álvares (1993) estando descritas naquele trabalho.

Na confecção das vigas empregou-se um concreto com $E_c = 29200$ MPa. Para o aço das armaduras adotou-se $E_a = 196000$ MPa e tensão de escoamento de 420 MPa, admitindo-se um comportamento elasto-plástico perfeito. O coeficiente de Poisson adotado foi de 0,20. Maiores detalhes sobre a resposta experimental de cada tipo de viga, colhida a partir de provas realizadas com controle de carga, encontram-se em Álvares (1993). Na Fig. 2.1 são fornecidos os detalhes de geometria e armação das vigas.

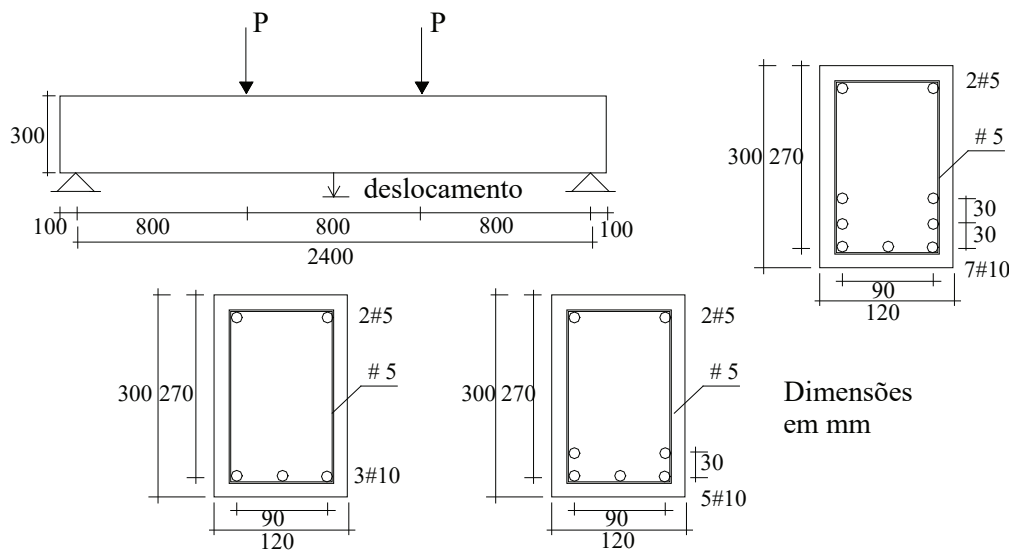


Figura 27.1 Geometria e armação das vigas

Os parâmetros de compressão do modelo foram identificados a partir de medidas de ensaios experimentais em espécimes de concreto submetidos a estados de compressão uniaxial (Álvares, 1993). Os parâmetros de tração foram identificados a partir de respostas de tração uniaxial descritas por Álvares (1993) para o concreto das vigas.

Os resultados da identificação paramétrica encontram-se na Figura 27.2 e 27.3. Os valores dos parâmetros obtidos para o modelo de dano estão relacionados na Tabela 27.1.

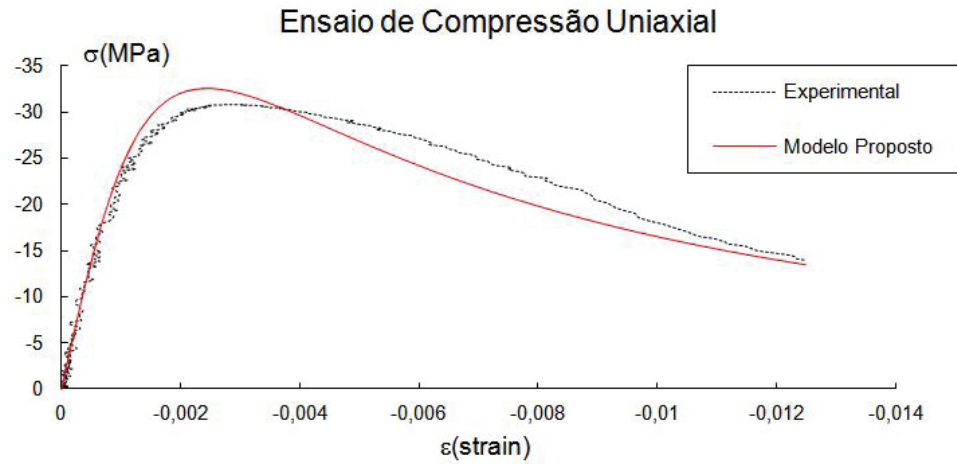


Figura 27.2 Identificação paramétrica na compressão uniaxial

Ensaio de Tração Uniaxial

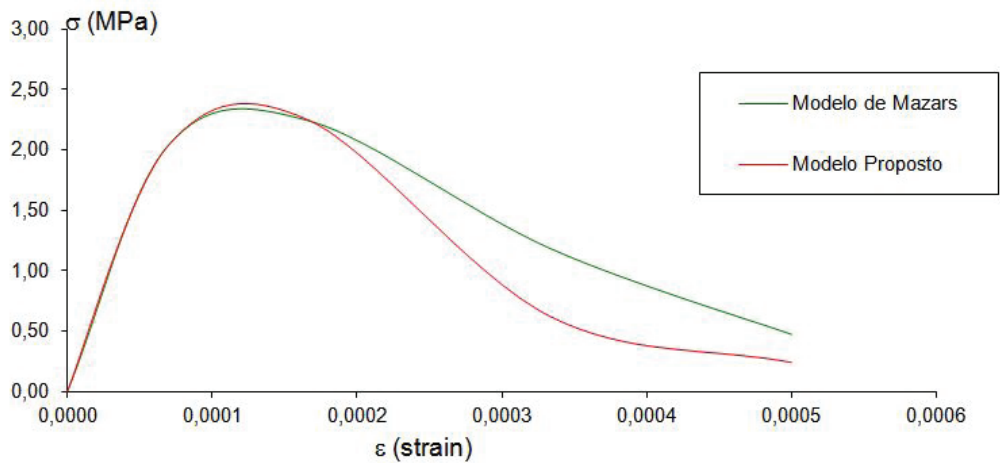


Figura 27.3 Identificação paramétrica na tração uniaxial

Tabela 27.1 Valores dos parâmetros do modelo de dano

Parâmetros de Tração	Parâmetros de Compressão
$Y_{01} = 0,72 \times 10^{-4} \text{MPa}$	$Y_{02} = 0,5 \times 10^{-3} \text{MPa}$
$A_1 = 50$	$A_2 = -0,9$
$B_1 = 6700 \text{MPa}^{-1}$	$B_2 = 0,4 \text{MPa}^{-1}$

O concreto utilizado possui um módulo de elasticidade longitudinal no valor de 29200 MPa, resistência à compressão de 30,8 MPa e resistência à tração de 2,25 MPa. Já o aço utilizado para as armaduras possui módulo de elasticidade longitudinal no valor de 196 GPa, limite de escoamento inicial de 500 MPa.

Os valores dos parâmetros do modelo de homogeneização para a concentração de fibras de 2% utilizada aqui, estão descritos na Tabela 2.2. Os dados das fibras metálicas foram propostos por Pereira Junior (2014).

Tabela 27.2 Variáveis da fibra metálica para os testes numéricos (PEREIRA JUNIOR, 2016)

Tensão de Pico (MPa)	Tensão de escoamento (MPa)	Deformação de Ruptura (%)	Concentração de fibras (%)
525,00	420,00	2,50	2,00

3 Discussão e resultados

As análises apresentadas correspondem aos gráficos de carga x deslocamento. A carga representa a força aplicada no terço do vão das vigas, enquanto que o deslocamento obtido correspondente ao ponto central das vigas. Vale ainda ressaltar que foram empregados 20 elementos finitos de barra e 21 nós na discretização longitudinal de metade das vigas devido às suas simetrias. Já as seções transversais foram discretizadas em 15 camadas, sendo uma camada de aço no caso da viga com 3#10.0 mm e 2 camadas para o caso da viga com 5#10.0mm. O restante das camadas são consideradas de concreto e/ou concreto fibroso, dependendo da análise.

A figura 27.4 apresenta inicialmente a faixa de respostas experimentais para a viga em concreto armado com 3#10.0mm e a resposta numérica com o emprego da modelagem proposta. Também é apresentada a curva carga x deslocamento com a adição de 2% de fibras metálicas. Neste último caso, observa-se o elevado ganho de rigidez e resistência quando comparado com a viga de concreto armado, principalmente quando há uma quebra de rigidez inicial devido à concentração de dano na viga. Portanto, a inclusão de fibras diminui bastante o processo de fissuração da viga conferindo-lhe resistência e rigidez elevadas.

Já a Figura 27.5 apresenta as curvas de respostas experimentais da viga de concreto armado com 5#10.0mm (normalmente armada), assim como a resposta numérica com a viga considerando apenas a armadura de flexão com 5#10.0mm. Também observa-se a resposta numérica da viga com a retirada de 2 barras de 10.0mm e a substituição destas por fibras metálicas na concentração de 2 %. Neste último caso, a viga com a substituição por concreto fibroso apresenta uma rigidez inicial similar à viga com 5#10.0 mm, poré, após o processo de início de fissuração, a viga normalmente armada apresenta uma forte perda de rigidez, o que não acontece com a viga armada reforçada com 2% de fibras. Inclusive esta reforçada encontra-se ainda dentro das respostas experimentais esperadas para uma viga com 5#10.0mm, evidenciando portanto que é possível substituir parte da armadura de flexão por fibras metálicas.

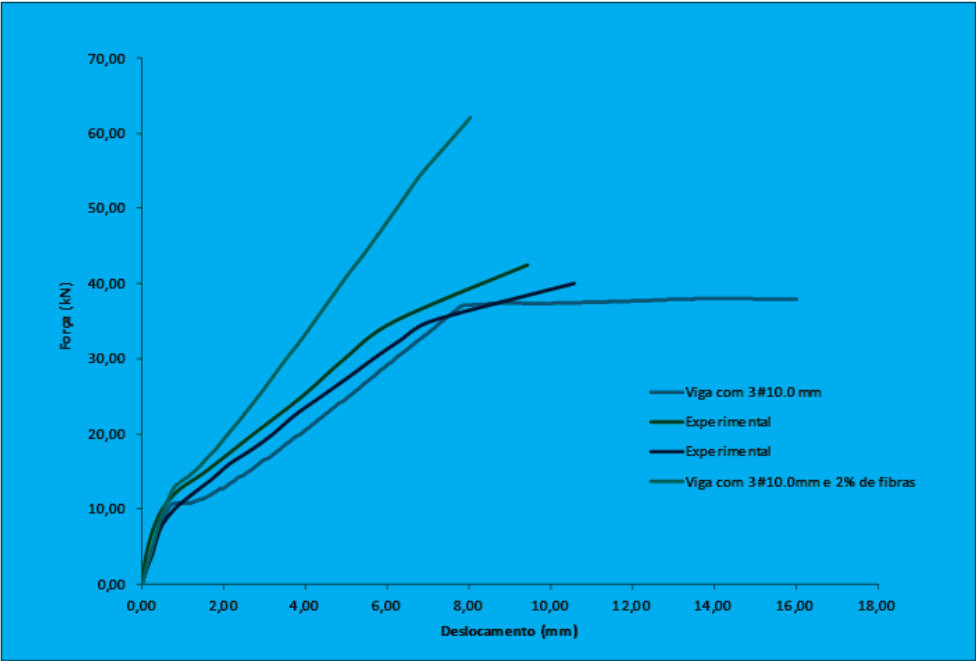


Figura 27.4 Carga versus deslocamento – viga com 3#10.0mm

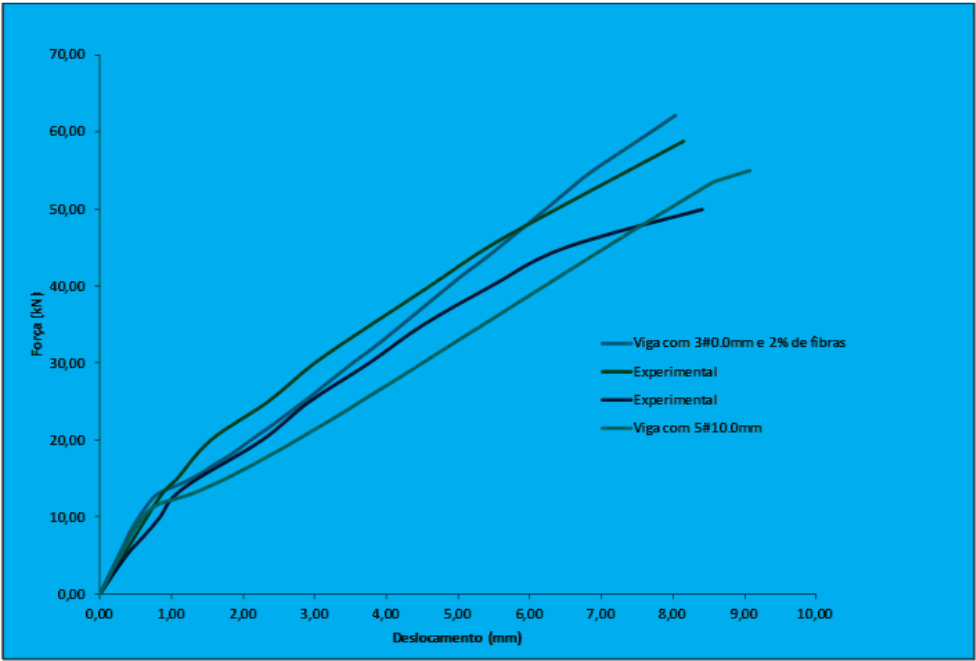


Figura 27.5 Carga versus deslocamento – viga com 5#10.0mm

Conclusões ou considerações finais

Os resultados apresentados neste trabalho são parte de uma pesquisa mais abrangente que trata do emprego do concreto reforçado com fibras metálicas. Os resultados evidenciam que a modelagem a dano é uma ferramenta numérica capaz de simular o comportamento mecânico do concreto e, associada a uma regra de homogeneização, pode também simular o comportamento mecânico do concreto fibroso.

As análises apresentadas mostram que as fibras metálicas são importantes aditivos para a correção do processo de fissuração do concreto, auxiliando na obtenção de rigidez e resistência satisfatórias. Portanto, as fibras metálicas podem ser empregadas como substitutas parciais da armadura de flexão. Cabe fazer a ressalva que esses são estudos iniciais que se mostram bastante promissores.

Referências

- _____. ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto Armado - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014, 238 p.
- ÁLVARES, M. S. Estudo de um Modelo de Dano para o Concreto: Formulação, Identificação Paramétrica e Aplicação com o Emprego do Método dos Elementos Finitos. 1993. Dissertação de Mestrado, EESC – Universidade de São Paulo, 1993.
- LA BORDERIE, C. *Phenomenes unilateraux dans un materiau endommageable: modelisation et application a l'analyse de structures en beton*. 140 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Universidade de Paris, Paris, 1991.
- PEREIRA JUNIOR, W. M. *Análise numérica de estruturas de concreto com fibras utilizando mecânica do dano*. 2014. 157 f. Dissertação (Mestrado em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil s) – Escola de Engenharia Civil da Universidade de Goiás, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.
- PEREIRA JUNIOR, W. M.; PITUBA, J. J. C.; ARAÚJO, D. L. (2016). Análise numérica de vigas de concreto com fibras de aço utilizando mecânica do dano. *Revista Ibracon de Estruturas e Materiais*, v. 9, pp 153-191.
- PITUBA, J. J. C. *Sobre a formulação de um modelo de dano para concreto*. 2003. 151 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

- PITUBA, J. J. C.; FERNANDES, G. R. (2011). Anisotropic Damage Model for Concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 137, pp 610-624.
- PITUBA, J. J. C. (2006). Formulação de modelos de dano para meios anisótropos e bimodulares. **Revista Sul-americana de Engenharia Estrutural**, v. 3, pp 7-29.
- PITUBA, J. J. C.; PROENÇA, S. P. B. (2008). Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 10, pp 117-146.

