Capítulo **4**

Modelo para resolver o problema de roteamento com restrições de empacotamento

Lorrany Cristina da Silva[1]
Thiago Alves de Queiroz[1]
Liliane de Azevedo Oliveira[1]

Resumo: Apresenta-se um algoritmo exato do tipo *branch-and-cut* com rotinas de separação para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com restrições de Empacotamento Bidimensional na versão irrestrita. O algoritmo resolve uma formulação de programação linear inteira relacionada diretamente com o roteamento de veículos, enquanto cortes são inseridos com relação as rotas inviáveis para o empacotamento e para evitar sub-rotas. O algoritmo utiliza o *framework* de otimização do *Gurobi Optimizer*, em que experimentos computacionais foram realizados em instâncias da literatura, além da comparação de resultados.

Palavras-chave: Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Carregamento. Empacotamento Bidimensional. Programação Linear Inteira.

Introdução

Este trabalho resolve o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional definido por Iori, Salazar-González e Vigo (2007) como *Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints* (2L-CVRP). O 2L-CVRP busca por rotas de custo total mínimo para que uma dada frota de veículos de mesma capacidade inicie no depósito, visite clientes e retorne para o depósito, tal que todo cliente seja atendido por uma única rota e uma única vez. Cada rota consiste na alocação de itens retangulares dos clientes

1 Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Unidade de Matemática e Tecnologia, Laboratório de Pesquisas Avançadas em Matemática Industrial. Contato: cristina_lorrany@yahoo.com.br, lilianeazevedoliveira@hotmail.com, taq@ufg.br.

visitados dentro do veículo, sem que haja a sobreposição entre os itens e os itens estejam inteiramente contidos no veículo. A consideração da versão bidimensional, isto é, por itens retangulares, aparece no contexto de itens que não podem ser empilhados devido a sua fragilidade.

O 2L-CVRP é um problema NP-difícil, pois surge a partir da combinação de dois subproblemas NP-difíceis (GAREY; JOHNSON, 1979), e é comum em empresas de transporte de cargas, tal que há a necessidade por estratégias eficientes de resolução para evitar o uso incorreto dos veículos. O 2L-CVRP foi introduzido por Iori, Salazar-González e Vigo (2007), que apresentaram um modelo de programação linear inteira para resolver a versão sequencial de forma exata por um algoritmo do tipo *Branch-and-Cut* (B&C).

A abordagem mais recente, ao nosso conhecimento, que resolve o problema em estudo usando um algoritmo exato foi apresentada por Hokama, Miyazawa e Xavier (2016). Os autores apresentaram um algoritmo B&C com a proposta de uso de rotinas de separação, já investigadas na literatura, para lidar com o roteamento, além de terem proposto rotinas para lidar com o empacotamento sobre uma malha de pontos. A heurística para o 2L-CVRP mais recente encontrada foi apresentada por Wei et al. (2015), que propuseram uma heurística de busca em vizinhança variável para resolver a versão irrestrita e sequencial do 2L-CVRP.

O estudo de variantes do 2L-CVRP também são encontradas na literatura, em que Malapert et al. (2008) resolveram a versão com restrições de coleta e entrega associada ao carregamento bidimensional (*Two-Dimensional Pickup and Delivery Routing Problem with Loading Constraints* - 2L-PDP). Já Muñoz (2011) lidou com uma variante que considera o custo de movimentação da carga (*Capacitated Vehicle Routing Problem with Two-dimensional Loading Constraints and Handling Costs* - 2L-CVRP-H). Martinez e Amaya (2013) abordaram a versão com janela de tempo, múltiplas viagens e carregamento de itens circulares (*Vehicle Routing Problem with Multi-Trips, Time Windows and Two-Dimensional Circular Loading Constraints* – VRPM-TW-CL).

Por sua vez, Côté, Potvin e Gendreau (2013) consideraram o 2L-CVRP com demanda estocástica, enquanto Khebbache-Hadji et al. (2013) propuseram um modelo para versão com janela do tempo. Leung et al. (2013) e Dominguez et al. (2016) consideraram o 2L-CVRP com frota heterogênea.

Neste trabalho adapta-se a formulação de programação linear inteira proposta por Martinez e Amaya (2013) para resolver o 2L-CVRP irrestrito, em que são adicionadas restrições para eliminar sub-rotas e respeitar a capacidade dos veículos. A resolução do empacotamento em cada rota é feita usando uma relaxação do problema de empacotamento em bins e pela resolução do problema de empacotamento ortogonal bidimensional. Essa abordagem ocorre pelo fato do empacotamento no 2L-CVRP ser um dos gargalos do problema, assim adiciona-o como planos de corte.

A próxima seção define o 2L-CVRP e descreve a formulação juntamente com as adaptações propostas. Na Seção 2 mostram-se os resultados obtidos com o modelo e as devidas comparações com a literatura. E por fim, na última seção as considerações finais são apresentadas.

1 Formulação para o 2L-CVRP

Dado um grafo não direcionado completo $G = (V^+,$ em que V^+ é o conjunto com $n + 2$ vértices, em que os vértices 0 e $n + 1$ correspondente ao depósito (as rotas iniciam e terminam no depósito) e aos clientes são $j = 1, 2, \ldots, n$, e E é o conjunto de arestas definido como $E = \{(i,j) : i,j \in V^+, i \neq j, i \neq n+1, j \neq 0\}$. A cada aresta $(i,j) \in E$ é atribuído um custo não negativo $C_{ij} = C_{ji}$ para percorrê -la. Um conjunto K de veículos idênticos com capacidade de carga P está disponível no depósito, sendo o número de rotas igual ao número de veículos disponíveis. As dimensões retangulares da base do contêiner dos veículos são: L (largura) e A (comprimento) com área total $At = LA$.

Cada cliente j possui um conjunto M_j de itens retangulares, em que o item m do cliente j possui largura l_j^m, comprimento a_j^m e peso p_j^m com $m = 1, 2, \ldots, |M_j|$. A área total dos itens pertencentes ao cliente j é $at_j = \sum_{m=1}^{|M_j|} l_j^m \cdot a_j^m$, e o peso total é dado por $pt_j = \sum_{m=1}^{|M_j|} p_j^m$, sendo que a soma do peso total e da área dos itens dos clientes de uma rota não podem exceder a capacidade e as dimensões do veículo, respectivamente. Considera-se que cada cliente só deve ser visitado por um veículo uma única vez com todos os seus itens entregues por completo, ou seja, não é permitida a entrega fracionada.

Ao empacotar os itens, deve-se respeitar as dimensões da base retangular do veículo, sem que haja sobreposição e considerando a orientação fixa, ou seja, os itens não podem ser rotacionados. Além disso, investiga-se a versão irrestrita do 2L-CVRP, a qual considera que o empacotamento dos itens não precisa respeitar a ordem de descarregamento em relação a rota, ou seja, pode ocorrer o remanejamento da carga durante o descarregamento dos itens.

1.1 Modelo adaptado para o 2L-CVRP

Como comentado anteriormente, Martinez e Amaya (2013) apresentaram um modelo de programação linear inteira para VRPM-TW-CL, que pode ser considerada uma versão do 2L-CVRP em que os itens são circulares, há múltiplas viagens e janela de tempo. Assim, adapta-se modelo de tais autores para lidar com a parte de roteamento do 2L-CVRP, em que se assume o uso dos K veículos disponíveis, a inserção de restrições para eliminar sub-rotas, que foram obtidas de Kara (2010), e planos de corte para resolver o empacotamento bidimensional que surge em cada rota.

Seja w_{ijk} a variável binária que recebe valor 1 se a aresta $(i, j) \in E$ for atravessada pelo o veículo k, caso contrário recebe 0. Seja a variável z_{jk} recebendo o valor 1 se o cliente j é visitado pelo veículo k, caso contrário vale 0. A variável u_j indica a ordem em que o cliente j é visitado na rota. Dado um conjunto S_{inv} de rotas com empacotamento inviável (começam em 0 e terminam em $n + 1$), a formulação para o 2L-CVRP é dada como:

Minimizar

$$\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} \cdot w_{ijk} \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in V^+} w_{ijk} = z_{ik}, \quad \forall i \in V\backslash\{0, n+1\}, \quad \forall k \in K \tag{2}$$

$$\sum_{k \in K} z_{jk} = 1, \quad \forall j \in V\backslash\{0, n+1\} \tag{3}$$

$$\sum_{i \in V^+ : i \neq h} w_{ihk} = \sum_{j \in V^+ : j \neq h} w_{hjk}, \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in V\backslash\{0, n+1\} \tag{4}$$

$$\sum_{j \in V^+\backslash\{0,n+1\}} w_{0jk} = 1, \quad \forall k \in K \tag{5}$$

$$\sum_{i \in V^+\backslash\{0,n+1\}} w_{i(n+1)k} = 1, \quad \forall k \in K \tag{6}$$

$$u_i - u_j + P \cdot w_{ijk} + (P - pt_i - pt_j) \cdot w_{ijk} \leq P - pt_j, \quad \forall i,j \in V\backslash\{0, n+1\}, \quad \forall k \in K \tag{7}$$

$$\sum_{j \in V^+\backslash\{0,n+1\}} z_{jk} \cdot pt_j \leq P, \quad \forall k \in K \tag{8}$$

$$j \in V+\backslash\{0, n+1\} zjk \cdot atj \leq At, \ \forall k \in K \tag{9}$$

$$i,j \in S wijk \leq S - 2, \quad \forall S \in Sinv, \quad \forall k \in K \tag{10}$$

$$j \in S \ zjk \leq S - 2, \quad \forall S \in Sinv, \quad \forall k \in K \tag{11}$$

$$wijk \in 0{,}1, \qquad \forall i,j \in E,\ \forall k \in K \tag{12}$$

$$zjk \in 0{,}1, \qquad \forall j \in V+\backslash\{0,\ n+1\},\ \forall k \in K \tag{13}$$

$$ptj \leq uj \leq P,\ \forall j \in V+\backslash\{0,\ n+1\} \tag{14}$$

A função objetivo (1) busca minimizar o custo total associado a construção das rotas. As restrições (2) garantem que haja uma aresta saindo do cliente i para algum cliente j, caso o cliente i esteja na rota feita pelo veículo k, enquanto as restrições em (3) asseguram que o cliente seja visitado uma única vez. As restrições de (4) a (6) estão relacionadas com conservação de fluxo para cada rota e, assim, permitem a utilização do número igual ao de veículos disponíveis. As restrições em (7) servem para eliminar sub-rotas e foram derivadas a partir de Kara (2010), enquanto as restrições (8) e (9) asseguram, respectivamente, que o peso e a área total de carga do veículo não sejam excedidos. As restrições em (10) e (11) garantem rotas satisfazendo o empacotamento dos itens dos clientes. Por fim, as restrições de (12) a (14) expressam o domínio das variáveis, tal que $wijk = 0$ para toda rota k com $pti + ptj > P$.

O modelo apresentado permite rota com um único cliente, ou seja, pode-se ter rota do tipo depósito – cliente – depósito, pois as restrições em (5) e (6) são de igualdade, o que obriga a usar todos os veículos disponíveis e, assim, podendo resultar em rotas únicas. Além disso, ao considerar o depósito em 0 e $n + 1$, mesmo as variáveis $wijk$ que são binárias não impedem que haja rotas com apenas um cliente.

2 Resolução do 2L-CVRP

O modelo apresentado na seção anterior para o 2L-CVRP é resolvido pelo algoritmo B&C do pacote de otimização *Gurobi Optimizer* com as restrições (10) e (11) sendo inseridas via planos de corte, o que resulta inicialmente na realização do roteamento de veículos sem observar a viabilidade do empacotamento. Assim, ao obter uma solução inteira para o modelo, que resulta em um conjunto de rotas, cada rota é analisada para checar a viabilidade do seu empacotamento, sendo as desigualdades em (10) e (11) inseridas para cada rota detectada como inviável.

Para checar a viabilidade do empacotamento, deve-se resolver o problema de empacotamento ortogonal bidimensional (*Two-dimensional Orthogonal Packing Problem* - 2OPP). A viabilidade consiste em checar se os itens dos clientes na rota podem ser organizados sem sobreposição, contidos inteiramente dentro da base do veículo e os lados dos itens devem estar ortogonais (paralelos) aos lados da base do veículo.

As restrições em (15) e (17) fornecem uma formulação para o 2OPP, que compõe a rotina de separação que checa as desigualdades em (10) e (11) para uma dada rota S. Seja $ympq$ uma variável binária que recebe valor 1 se o item m é empacotado por seu canto inferior esquerdo na posição (p,q), e 0 caso contrário. Seja M o total de itens em uma dada rota S, lm e am a largura e o comprimento do item m em S, respectivamente, e, $minL$ e $minA$ a menor largura e o menor comprimento entre os itens na rota. Essa formulação considera o recipiente discretizado em uma malha de pontos inteira.

$$m \in Mp=0, 1,\ldots,L- lm: t-lm+1\leq p\leq tq=0,1, \ldots,A- am: u-am+1\leq q\leq uympq\leq 1, \quad t=0, 1,\ldots, L- minL, \ u=0,1,\ldots,A-minA \tag{15}$$

$$\{p=0, 1,\ldots,L- lm\} \{q=0,1, \ldots, A-am\}ympq=1, \ \ \forall m \in M \tag{16}$$

$$ympq\in\{0,1\}, \quad \forall m \in M; \quad p=0, 1,\ldots, L-lm; \quad q=0, 1,\ldots, A-am \tag{17}$$

As restrições em (15) garantem que cada ponto *(t, u)* da malha só pode ser coberto por um único item empacotado em algum outro ponto *(p, q)*. Já as restrições (16) impõem que todos os itens da rota devem ser empacotados e as restrições em (17) representam o domínio das variáveis.

Antes de resolver o 2OPP, checa-se primeiro a viabilidade do empacotamento a partir da resolução da relaxação nas eqs. (18) a (20) para o *One-dimensional Contiguous Bin Packing Problem* – CBP (SILVA; QUEIROZ; TOLEDO, 2016). Essa relaxação verifica se o empacotamento é inviável e, assim o sendo, adiciona as desigualdades em (10) e (11). Considerando os clientes em S, seja emt uma variável binária que recebe 1 se o item m é empacotado na posição t, e 0 caso contrário. Seja $Dm(S,t)$ os pontos t' da forma que o item m empacotado em t' cobre a coordenada t.

$$m \in M\{t'\in DmS,t: t-am+1\leq t'\leq t\} \ am\cdot emt'\leq A, \qquad t=0, 1 \ldots, A \tag{18}$$

$$t=0, \ 1,\ldots, \ \ A-am \ emt=1, \qquad \forall \ m \in M \tag{19}$$

$$emt\in 0,1, \qquad \forall m \in M, t=0, 1, \ldots,A-am \tag{20}$$

As restrições em (18) garantem que a soma do comprimento dos itens que cobrem a coordenada t seja menor ou igual a A. As restrições em (19) asseguram que todos os itens sejam empacotados em algum ponto na direção do comprimento e as restrições em (20) representam o domínio das variáveis. As restrições (18) a (20) também são consideradas para a largura L.

Assim, a rotina de separação consiste em: para cada solução inteira encontrada pelo B&C, resolve-se primeiramente a formulação relaxada para o CBP. Se a solução é inviável, insere-se diretamente as desigualdades em (10) e (11). Caso a solução seja viável, o 2OPP é resolvido para comprovar se a rota de fato tem empacotamento válido ou se é preciso inserir as desigualdades.

3 Resultados Computacionais

O algoritmo foi codificado em linguagem C++ e os testes computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core i7-4790K de 4.0 GHz, 32 GB de memória RAM e sistema operacional Linux Ubuntu 14.04 LTS. O *framework* do algoritmo B&C utilizado está presente no pacote de otimização *Gurobi Optimizer* na versão 6.5.1.

Experimentos computacionais foram realizados para validar o modelo com 30 instâncias de Iori, Salazar-González e Vigo (2007)[2]. As instâncias possuem o número de clientes variando entre 15 a 21 e o número total de itens M de 15 a 56. As comparações são realizadas com Azevedo (2009) por resolver o 2L-CVRP irrestrito usando um algoritmo B&C também. O custo Cij de cada aresta foi obtido fazendo o cálculo da distância Euclidiana entre os clientes e pegando apenas o valor inteiro.

A Tabela 4.1 traz as informações de cada instância: o nome, a classe, a quantidade de clientes (n), a quantidade total de itens (M); a quantidade de veículos disponíveis (K); os resultados de Azevedo (2009): número de cortes inseridos no empacotamento, tempo gasto em segundos e o valor da solução; os resultados encontrados: número de cortes inseridos pelo CBP e o 2OPP, o tempo total gasto em segundos, na otimização, pelo CBP, pelo 2OPP e pelo roteamento, e o valor da solução obtido. Além disso, tem-se também o GAP (em porcentagem) retornado pelo *Gurobi* e a diferença (em porcentagem) da solução encontrada com a de Azevedo (2009).

Para as 30 instâncias, a formulação foi capaz de encontrar GAP igual a zero para 10 delas. No total, para 22 instâncias teve-se uma diferença percentual de 0%, porém, para 12 delas o GAP ainda é maior do que zero, o que significa que o *Gurobi* não conseguiu provar a otimalidade dentro do tempo limite imposto. Para três instâncias, a diferença percentual teve um valor negativo (solução melhor do que a de Azevedo (2009)), uma vez que se permite rota única, enquanto Azevedo (2009) apenas permite rotas com mais de dois clientes. Além disso, vale destacar que foram encontradas duas soluções (uma ótima e a outra viável) para instâncias que Azevedo (2009) não conseguiu resolver.

2 http://www.or.deis.unibo.it/

O tempo computacional gasto por Azevedo (2009) foi, em média, de 372,92 segundos, enquanto a formulação desenvolvida precisou de um tempo de 4.909,51 segundos, em média. Os tempos são reportados apenas para conhecimento, pois as máquinas usadas nos experimentos são diferentes. Notou-se que na maioria das instâncias, o tempo computacional utilizado para o roteamento foi significativamente maior de que o tempo gasto com a parte de empacotamento. Isso ocorre pelo fato do roteamento ser resolvido para só depois ser considerado o empacotamento via planos de corte.

Em média, Azevedo (2009) inseriu 519,93 cortes para o empacotamento, já nos resultados encontrados foi inserido apenas um corte após resolver o 2OPP dada as 30 instâncias. Esse fato se explica pela resolução da relaxação do CBP inicialmente, que é mais rápida e inseriu em média 7,53 cortes por instância.

Tabela 4.1 Comparação com os resultados de Azevedo (2009).

Instância (nxm)	Classe	n	M	K	Cort. Emp. Azev.	Tempo Azev.	Solução Azev.	Cortes CBP	Cortes 2OPP	Tempo	Tempo CBP	Tempo 2OPP	Tempo Rot.	Solução Encontrada	GAP (%)	Diferença (%)
E016-03*m*	1	*15*	*15*	*3*	0	0,63	273	0	0	16,48	0	0,36	16,12	**273**	0	0
	2	15	24	3	78	4,8	273	3	0	45,12	0,14	24,95	20,03	**273**	0	0
	3	15	31	3	75	20,11	279	9	0	248,7	7,95	209,1	31,65	**279**	0	0
	4	15	37	4	0	0,08	277	0	0	85,35	0,42	75,54	9,39	**277**	0	0
	5	15	45	4	-	5.400	-	0	0	19,58	0,16	13,93	5,49	**274**	0	-
E016-05*m*	1	15	15	5	0	0,36	329	0	0	347,8	0,01	1,23	346,56	**329**	0	0
	2	15	25	5	0	0,36	329	1	0	592,2	0,15	16,91	575,14	**329**	0	0
	3	15	31	5	124	7,72	347	6	0	835,7	0,49	17,21	818	**347**	0	0
	4	15	40	5	0	0,45	329	1	0	681,6	0,59	82,62	598,39	**329**	0	0
	5	15	48	5	0	16,33	329	0	0	412,9	0,26	11,04	401,6	**329**	0	0
E021-04*m*	1	20	20	6	0	1,76	351	0	0	7.200	0,24	2,95	7.196,81	351	4,56	0
	2	20	29	5	10.245	42,59	381	146	0	7.200	1,36	187,4	7.011,24	381	9,45	0
	3	20	46	5	3.954	223,45	387	7	0	7.200	10,37	22,42	7.167,21	383	10,7	-1,04
	4	20	44	5	-	5.400	-	7	0	7.200	6,18	118,3	7.075,52	360	4,44	-
	5	20	49	5	0	0,22	369	0	0	7.200	0,51	21,86	7.177,63	354	3,67	-4,24
E021-06*m*	1	20	20	4	0	0,26	423	0	0	7.200	0,01	1,45	7.198,54	423	13	0
	2	20	32	6	0	0,24	423	8	0	7.200	0,34	27,71	7.171,95	423	13,47	0
	3	20	43	6	0	0,32	423	0	0	7.200	0,37	31,45	7.168,18	423	12.53	0
	4	20	50	6	43	54,49	438	4	0	7.200	3,29	182,2	7.014,51	438	16,67	0

Continua

Tabela 4.1 Comparação com os resultados de Azevedo (2009). *(Continuação)*

Instância (nxm)	Classe	n	M	K	Cort. Emp. Azev.	Tempo Azev.	Solução Azev.	Cortes CBP	Cortes 2OPP	Tempo	Tempo CBP	Tempo 2OPP	Tempo Rot.	Solução Encontrada	GAP (%)	Diferença (%)
	5	20	62	6	0	1,13	423	0	0	7.200	0,87	0,87	7.198,26	423	12,29	0
E022-04*g*	1	21	21	4	0	0,14	367	0	0	7.200	0,02	2,02	7.197,96	367	4,9	0
	2	21	31	4	0	0,12	367	0	0	7.200	0,1	31,35	7.168,55	367	3,81	0
	3	21	37	4	12	0,38	373	8	0	7.200	135,2	2,27	7.062,53	373	4,56	0
	4	21	41	4	6	3,32	377	11	0	7.200	11,63	478,2	6.710,17	377	5,83	0
	5	21	57	5	0	0,11	389	0	0	7.200	0,57	34,39	7.165,04	381	3,41	-2,1
E022-06*m*	1	21	21	6	0	1,05	488	0	0	7.200	0,01	1,43	7.198,56	488	19,45	0
	2	21	33	6	4	1,35	488	2	0	7.200	0,19	20,31	7.179,5	489	20,45	0,2
	3	21	40	6	11	3,74	489	8	1	7.200	0,92	653,6	6.545,48	491	19,15	0,41
	4	21	57	6	6	1,13	489	5	0	7.200	12,72	391	6.796,28	497	21,13	1,61
	5	21	56	6	0	1	488	0	0	7.200	0,8	35,36	7.163,84	488	18,65	0
				Média:	519,93	372,92		7,53		4.909,51						

Considerações finais

Neste trabalho foi abordado o problema de roteamento de veículos capacitado com restrições de empacotamento bidimensional (2L-CVRP), o qual surgiu a partir da integração de dois outros problemas de otimização combinatória. Neste estudo foi apresentado um modelo adaptado a partir da formulação de Martinez e Amaya (2013), em que se adicionam restrições de capacidade, eliminação de sub-rotas e rotinas de separação para checar a viabilidade do empacotamento. A vantagem em checar a viabilidade do empacotamento antes de realizar o empacotamento é permitir a redução do esforço computacional, o que é fundamental para abordagens exatas.

Os experimentos computacionais foram realizados em 30 instâncias da literatura e os resultados comparados com Azevedo (2009). O modelo desenvolvido conseguiu a solução ótima para 10 instâncias (GAP e diferença iguais a zero), além de encontrar solução viável para todas as demais instâncias dentro do tempo computacional imposto, sendo que Azevedo (2009) não encontrou solução para duas delas. Também, o modelo conseguiu obter solução melhor para 3 instâncias uma vez que permitiu rotas com um único cliente.

Trabalhos futuros devem focar na resolução da versão sequencial do problema, pelo qual não é permitido remanejamento de itens. Também, devem ser investigados outros modelos da literatura para resolver o problema.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG).

Referências

AZEVEDO, B. L. P. *Uma abordagem exata para o problema de roteamento de veículos capacitados com restrições bidimensionais de carregamento*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, 2009.

CÔTÉ, J. F.; POTVIN, J. Y.; GENDREAU, M. *The vehicle routing problem with stochastic two-dimensional items*. Technical Report CIRRELT 2013-84, 2013.

DOMINGUEZ, O. et al. Using biased randomization for solving the two-dimensional loading vehicle routing problem with heterogeneous fleet. *Annals of Operations Research*, v. 236, n. 2, p. 383-404, 2016.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. San Francisco: Freeman, 1979.

HOKAMA, P.; MIYAZAWA, F. K.; XAVIER, E. C. A branch-and-cut approach for the vehicle routing problem with loading constraints. *Expert Systems with Applications*, v. 47, p. 1-13, 2016.

IORI, M.; SALAZAR-GONZáLEZ, J.; VIGO, D. An exact approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Transportation Science,* v. 41, n. 2, p. 253-264, 2007.

KARA, I. Tightening Bounding Constraints of the Miller-Tucker-Zemlin Based Formulation of the Capacitated Vehicle Routing Problems and Some Extensions, In: *Proceeding of the 2ndInternational Conference on Manufacturing Engineering, Quality and Production Systems,* Panait, C. et al., WSEAS Press, Constança, Romênia, p.137-142, 2010.

KHEBBACHE-HADJI, S. et al. Heuristics and memetic algorithm for the two-dimensional loading capacitated vehicle routing problem with time windows. *Central European Journal of Operations Research*, v. 21, n. 2, p. 307-336, 2013.

LEUNG, S. C. H. et al. A meta-heuristic algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 225, n. 2, p. 199-210, 2013.

MALAPERT, A. A. et al. Two-dimensional pickup and delivery routing problem with loading constraints. In: *Proceedings of the First CPAIOR Workshop on Bin Packing and Placement Constraints (BPPC'08)*, p. 1–46, 2008.

MARTINEZ, L.; AMAYA, C. A. A vehicle routing problem with multi-trips and time windows for circular items. *Journal of the Operational Research Society*, v. 64, n. 11, p. 1630-1643, 2013.

MUÑOZ, A. L. *Solución al problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad y reordenamiento de carga en los sitios de demanda*. Dissertação

(Mestrado) — Escuela de Ingenieria, Pontificia Universidad Catolica de Chile, Santiago, Chile, 2011.

SILVA, L. C.; QUEIROZ, T. A.; TOLEDO, F. M. B. Abordagem para o problema de roteamento de veículos com empacotamento bidimensional. In: XLVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Vitória – ES, p. 1-12, 2016.

WEI, L. et al. A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 243, n. 3, p. 798-814, 2015.