

16

CAPÍTULO

SIMETRIAS DA CADEIA DE TODA

Santos, Mateus C.P. ¹ *;
Assis, Paulo E.G. ¹;

¹ Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física e Química, Catalão-GO-Brasil

* email: mateus-calixto@hotmail.com;

Resumo: Os sólitons são objetos de grande importância na Física contemporânea e surgem em sistemas que apresentam elevado grau de simetria. Inicialmente introduzido como ondas solitárias em fluidos, o conceito de sóliton pode ser estendido a outros contextos, inclusive ao de Física de altas energias e partículas fundamentais. Neste trabalho trataremos das simetrias (escondidas) responsáveis pelo aparecimento de sólitons em uma classe de redes discretas, que podem ser pensadas como um tipo de sistema com massas e molas acopladas: as chamadas cadeias de Toda.

Palavras-chave: Simetrias; sólitons; integrabilidade; rede de Toda

1. Introdução

O estudo de sistemas compostos por muitas partículas interagentes representa um considerável desafio da física contemporânea. Embora sejam usados para descrever importantes fenômenos da natureza, soluções exatas são raras e simulações numéricas são computacionalmente custosas, quando não proibitivas.

Dentre os modelos de interesse prático, uma classe de sistemas de muitos corpos apresenta uma grande vantagem: alguns sistemas podem ser completamente caracterizados em qualquer instante, ou seja, apresentam soluções em forma fechada. Estes modelos são denotados integráveis.

Os sistemas exatamente integráveis ganharam força apenas a partir da década de 1950, mas suas primeiras observações surgiram há mais de um século, ainda que de forma incompreendida, com as ondas solitárias que aparecem em fluidos. Estas, posteriormente chamadas de sólitons, correspondem a soluções estáveis (com respeito a colisões e interações) que aparecem em sistemas não lineares, sejam eles contínuos ou discretos.

Neste trabalho discutiremos as propriedades das chamadas cadeias de Toda, exibindo não somente resultados analíticos como simulações computacionais. Após introduzirmos sua formulação em termos dos pares de Lax, mostraremos que para cada configuração inicial existe um objeto característico, denominado curva espectral, que se conserva durante toda a evolução do sistema. A partir de tal curva, descrita pelo chamado polinômio característico, podem-se extrair informações sobre a dinâmica do sistema, como será discutido nas próximas seções. Apresentaremos um estudo sistemático desse polinômio espectral para diferentes cadeias e variadas excitações.

2. Ondas, sólitons, simetrias e os modelos integráveis não-lineares

A simetria é um conceito muito difundido e familiar a toda sociedade, fazendo parte do cotidiano da maioria das pessoas e geralmente sendo associado à ideia de perfeição, beleza e ordem. Porém, cientificamente as simetrias têm uma formulação própria, podendo ser descritas matematicamente e tendo implicações observáveis na natureza. Por exemplo, na Física, a existência de uma simetria está relacionada a uma lei de conservação (NOETHER, 1971).

Quando um sistema (para nosso interesse, descrito em termos de equações diferenciais não-lineares) apresenta um número suficientemente grande de leis de conservação, ele pode ser resolvido analiticamente. Dizemos que este é um Sistema Integrável (DAS, 1989), no qual pode observar um objeto físico único: o sóliton.

Os sólitons foram descritos formalmente em 1834 pelo engenheiro naval britânico John Scott Russell (RUSSELL, 1845). Russel observou um fenômeno peculiar: quando a barcaça puxada por dois cavalos nas margens do canal Edinburg em Glasgow era freada repentinamente, surgia uma onda única, de forma bem definida que seguia o curso por um longo trecho do canal sem mudar de forma e velocidade (CHALUB; ZUBELLI, 2001). Este fenômeno foi chamado de onda solitária. Posteriormente, procurou-se modelar o comportamento descrito por Russel através de diferentes aproximações; as mais famosas são dadas pelas chamadas equações de Boussinesq (BOUSSINESQ, 1877) e de KdV (KORTEWEG; DE VRIES, 1895).

Contudo, as pesquisas entorno dos sólitons ficaram inertes até o início de 1950, quando o estudo de oscilações em redes não lineares ganhou evidência, após os trabalhos de Fermi, Pasta e Ulam no problema da partição de energia (FERMI et al, 1955). O problema de Fermi-Pasta-Ulam (FPU) constituiu-se de simulações em uma rede de partículas ligadas entre si através de molas que obedecem a Lei de Hooke com uma correção não-linear quadrática, como será mostrada na próxima seção. Esperava-se que a deformação linear quebrasse o comportamento ergódico do sistema, mas, surpreendentemente, os estados visitados durante a evolução não eram quaisquer. A distribuição de energia entre os modos apresentava um comportamento aproximadamente periódico, fato atribuído à presença de simetrias escondidas. Em 1981, Morikazu Toda modificou o problema de FPU introduzindo uma interação exponencial (3.3.1) entre os elementos do reticulado, tornando-o um problema integrável (TODA, 1989).

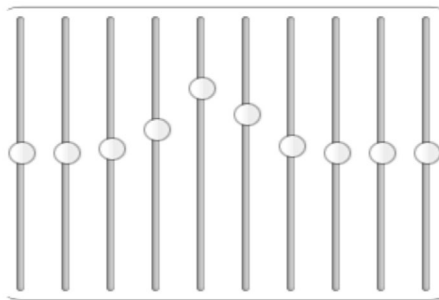


Figura 2.1: Representação gráfica de uma excitação localizada em uma rede de Toda com 10 partículas interagentes em um dado instante. Cada um dos corpos tem um grau de liberdade relacionado ao movimento na direção do eixo vertical e todos eles estão acoplados entre si de maneira não trivial. O perfil apresentado corresponde a um pulso que se propaga na rede sem dispersão ou dissipação.

Conforme o número de partículas da rede cresce indefinidamente, $N \rightarrow \infty$, a rede aproxima-se do limite contínuo e nesse regime é possível mostrar a equivalência entre a cadeia de Toda e a equação de Korteweg e De Vries (TODA, 1989). De fato, da figura 2.2 não é difícil convencer-se visualmente de que, quando o número de partículas cresce, há um adensamento das curvas de trajetórias no gráfico, que tende a formar uma superfície contínua, como na figura 2.3, que mostra sólitons de KdV.

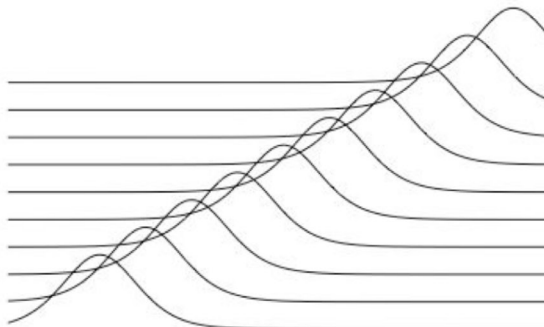


Figura 2.2: Evolução temporal da distância vertical das partículas em uma cadeia de Toda com 10 corpos. No eixo vertical está representada posição de uma das partículas enquanto o eixo horizontal está associado à coordenada temporal. A esquematização empregada mostra, portanto, a trajetória de cada corpo por meio de uma linha contínua. Como se vê a trajetória de cada objeto influencia a trajetória do objeto adjacente, possibilitando a propagação do pulso. Note que a rede de Toda admite excitações que viajam pelo espaço conservando sua forma.

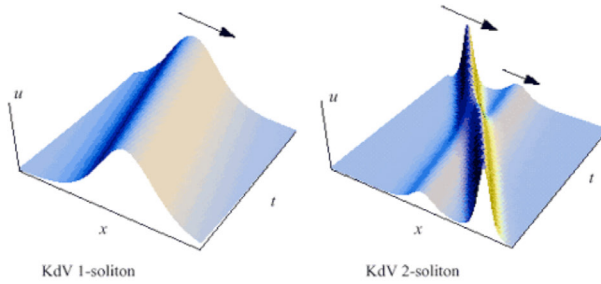


Figura 2.3: Evolução temporal da onda de KdV . À direita, tem-se uma onda solitária como a descrita por Scott Russell, enquanto à direita observa-se um processo de colisão (ou espalhamento) entre duas dessas ondas solitárias. Fonte: (BRUNELLI, 2000).

3. A cadeia de Toda como um sistema integrável

A cadeia de Toda é constituída por N corpos discretos alinhados, livres para se mover em uma única direção e ligados entre si por uma mola cuja força é do tipo exponencial. Veremos que é possível encontrar N quantidades conservadas para esse problema de N graus de liberdade. Desse modo, cada grau de liberdade é vinculado a satisfazer uma lei de conservação. Como será discutido na sequência, isso torna o sistema integrável. Pode-se pensar na cadeia de Toda como uma extensão das cadeias lineares que preserva sua solubilidade.

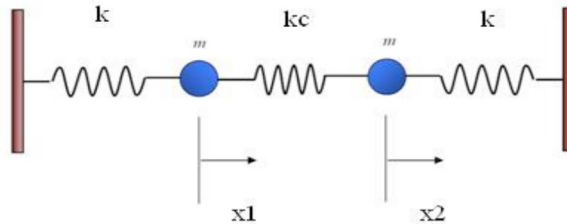


Figura 3.1: Esquema de uma cadeia linear de massas ligadas por molas.
 Fonte: <http://www.uprh.edu/rbaretti/CoupledOsc26mar2013.htm>.

3.1 As redes lineares

Uma rede linear unidimensional é descrita por uma quantidade N de partículas de massa m , que possuem uma interação entre si. Admitindo que o sistema (1) possua molas entre as partículas cuja força seja do tipo Hooke; (2) tenha um número de molas igual à $N+1$; (3) conte com os dois extremos fixos; então, a energia do sistema pode ser expressa por

$$V = \frac{1}{2} k \sum_{i=0}^N (x_{i+1} - x_i)^2. \quad (3.1.1)$$

Assim, a energia da i -ésima partícula devida a sua interação com a vizinhança, em relação ao ponto de equilíbrio, é dada por

$$V_i = \frac{1}{2} k [(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_i - x_{i-1})^2], \quad (3.1.2)$$

de modo que a lei de Newton que descreve o movimento de cada partícula é

$$m\ddot{x}_i + k(2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}) = 0. \quad (3.1.3)$$

O tratamento deste problema é bem conhecido, com solução fechada para cadeias de qualquer dimensão N , e não será discutido aqui. Ao invés disso, focaremos na sequência em generalizações envolvendo cadeias não-lineares, como as de Fermi-Pasta-Ulam e de Toda.

3.2 O problema de Fermi-Pasta-Ulam

O problema de Fermi-Pasta Ulam foi um dos precursores das simulações computacionais na área da Física e consiste em modificar a rede linear, adicionando uma não linearidade quadrática à força de Hooke,

$$F = -k\Delta x - \alpha k\Delta x^2, \quad (3.2.1)$$

onde α é o parâmetro de deformação (arbitrariamente grande ou pequeno) e Δx é o deslocamento em relação ao ponto de equilíbrio. Logo, a força experimentada por uma partícula j na rede de FPU permite-nos escrever a equação de movimento satisfeita por x_j

$$m\ddot{x}_j = k(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1})[1 + \alpha(x_{j+1} - x_{j-1})] \quad (3.2.2)$$

O FPU não é um sistema integrável: o número de quantidades conservadas é insuficiente para restringir univocamente sua evolução. A suficiência das simetrias em uma cadeia não-linear aparece nos modelos de Toda, como veremos a seguir.

3.3 A cadeia de Toda

Segundo Toda (1989), os estudos das redes não-lineares de Fermi, Pasta e Ulam mostraram que as mesmas possuem comportamento aproximadamente periódico e que poderia ser encontrada uma força não-linear que admita ondas periódicas. Em seu trabalho conclui que estas estruturas estarão ligadas a uma interação exponencial entre as partículas da rede (equação 3.3.1).

A rede de Toda é constituída de N corpos, onde estes apresentam uma interação exponencial entre si. Logo para descrever o seu movimento dos corpos discretos utilizam-se as Leis do Movimento de Newton.

Para cada corpo discreto presente na rede, tem-se uma amplitude (Q_n) , tal que

$$\dot{Q}_n = v_n, \quad \ddot{Q}_n = a_n$$

onde v_n e a_n são respectivamente a velocidade e a aceleração do corpo que ocupa a n -ésima posição da rede. Portanto as equações de movimento Newtoniano satisfeitas pelas partículas de Toda podem ser descritas pelo sistema

$$\dot{Q}_n = P_n, \quad \dot{P}_n = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \quad (3.3.1)$$

onde a massa é unitária e P é o momento linear.

3.4 A formulação de Lax

A partir das considerações discutidas na seção acima, é conveniente reescrever as equações do movimento do modelo em termos da chamada Formulação de Lax (LAX, 1968). Antes disso, introduzimos (apenas por conveniência) a seguinte abreviação

$$A_n = \frac{1}{2} e^{-\frac{Q_{n+1} - Q_n}{2}},$$

$$B_n = \frac{1}{2} P_n$$

de forma que, a partir da identificação acima, as equações de movimento para esses objetos passam a ser

$$\dot{A}_n = A_n (B_n - B_{n+1}),$$

$$\dot{B}_n = 2(A_{n-1}^2 - A_n^2).$$

3.5 Autovalores, autovetores e a evolução isospectral

Para o sucesso do método devemos introduzir, por fim, uma matriz auxiliar U cuja evolução é governada pela matriz M

$$\frac{dU}{dt} = MU$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$U(0) = 1, \quad UU^{-1} = 1.$$

Além do mais, é possível mostrar que a matriz $U(t)$, por sua vez, gera a evolução da própria matriz L ,

$$L(t) = U(t)L(0)U(t)^{-1}, \quad (3.5.1)$$

de onde se infere, usando-se a propriedade cíclica do traço, a seguinte lei de conservação

$$\frac{dT_r}{dt}(U^{-1}LU) = 0$$

Observa-se então que o $T_r(U^{-1}LU)$ é invariante no tempo e a independência temporal está associada a uma carga conservada. Na verdade, todas as potências $L(t)^n$ com $n=1,2,\dots,N$, geram cada uma das N quantidades conservadas responsáveis pela integrabilidade do modelo.

É conveniente, então, trabalharmos com os autovalores, $\lambda(t)$, e autovetores, $\varphi(t)$, da matriz L ,

$$L(t)\varphi(t) = \lambda(t)\varphi(t) \quad (3.5.2)$$

Da evolução isospectral do traço das potências da matriz $L(t)$, pode-se garantir que os autovalores também são invariantes em relação o tempo, logo

$$\lambda(t) = \lambda(0) = \lambda. \quad (3.5.3)$$

Na próxima seção estudaremos explicitamente estas propriedades analíticas para um caso específico, $N=3$, mas cujos resultados podem ser estendidos para cadeias de Toda de qualquer comprimento.

3.6 As curvas espectrais para excitações na rede de Toda

Ocasionalmente, tomando $N = 3$ como número de corpos discretos na rede de Toda, tem-se que a matriz L é dada por

$$L = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 & 0 \\ A_1 & B_2 & A_2 \\ 0 & A_2 & B_3 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores satisfazem

$$\det(\lambda I - L) = 0. \quad (3.6.1)$$

Assim, obtemos um polinômio característico de grau 3, invariante e que define a chamada curva espectral do problema,

$$-\lambda^3 + (B_1 + B_2 + B_3)\lambda^2 + (-B_2B_3 - B_2B_3 - B_1B_2 + A_2^2 + A_1^2)\lambda^2 + (B_1B_2B_3 - A_2^2B_1 - A_1^2B_3) = 0$$

que possui zeros exatamente nos valores característicos, λ_1 , λ_2 e λ_3 , como esquematizado na figura (4.1.2).

3.7 As simetrias e as cargas conservadas

Tomando o traço da matriz L para o caso de $N=3$, temos:

$$T_r L = (B_1 + B_2 + B_3) = \frac{1}{2}(P_1 + P_2 + P_3) = \frac{1}{2} P_t$$

onde P_t é o momento linear total do Sistema.

Além do mais, aplicando as relações de Girard, obtemos

$$T_r L = (B_1 + B_2 + B_3) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Analogamente, tomando o traço da potência de L , temos a metade da Energia do sistema

$$T_r L^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + 2A_1^2 + 2A_2^2 = \frac{1}{4}(P_t^2) + \frac{1}{2}[e^{-(Q_2-Q_1)} + e^{-(Q_3-Q_2)}].$$

Logo, pode-se verificar que tomando o traço das potências de L relacionada à um sistema de N corpos discretos, obteremos quantidades conservadas no tempo, dadas pela expressão

$$I_y = \text{Tr} L^y = \sum_{l=1}^N \lambda_l^y, \quad (y = 1, 2, 3, \dots, N). \quad (3.7.1)$$

Como se vê, a grande vantagem da formulação de Lax é que ela fornece um mecanismo muito bem definido que permite a construção das leis de conservação que permitem resolver exatamente o problema. A forma das cargas conservadas acima é decorrência - mesmo que de certa forma indireta - da simetria escondida nos pares Lax. Como as cadeias de Toda, existem diversos outros modelos para os quais, embora uma simetria de Noether não seja evidente, podem-se associar outros tipos de pares de Lax. Na seção a seguir veremos como essa estrutura analítica se manifesta na prática, através de simulações numéricas.

4. Observações numéricas

Nesta seção passamos a um estudo numérico das cadeias não-lineares interagentes de Toda. Usamos os resultados analíticos apresentados na seção anterior, em particular aqueles para casos facilmente obtidos como $N=3$, para nos guiar até um método que nos permita explorar as características de rede maiores, como $N=10$, por exemplo.

4.1 Validação dos resultados para 3 partículas

Como visto, um sistema com $N=3$ partículas pode ser estudado com relativa simplicidade algébrica. Os resultados mostrados na seção anterior podem então servir de guia para nossas almeçadas simulações numéricas. Idealmente, desejam-se simulações que envolvam um número grande de constituintes, pelo menos $N=10$. Antes, contudo, faremos uma comparação entre os resultados analíticos esperados e o comportamento computacional obtido "experimentalmente". A concordância entre ambas abordagens serve para qualificar ou não os métodos numéricos adotados.

Ao introduzirmos uma determinada excitação na rede podemos estudar como ela evolui e perturba a rede. Em cada instante a configuração determinada pelo potencial exponencial permite avaliarmos a energia total contida na rede. O gráfico 4.1.1 indica uma clara tendência de conservação da energia, evidenciando que não houve dissipação, como esperado.

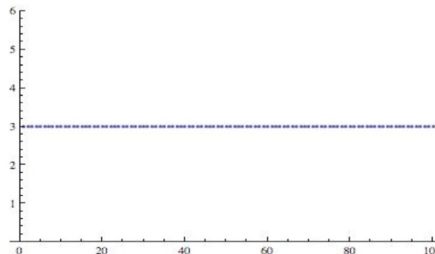


Gráfico 4.1.1: Energia x Tempo para $N=3$.

De acordo com a formulação de Lax para a rede de Toda, é possível associar o polinômio característico da matrix L com o chamado Determinante Espectral do problema. No gráfico 4.1.2 mostramos esse objeto em três diferentes instantes, separados por intervalos iguais finitos e não desprezíveis; observa-se que todas as curvas (representadas pelas cores azul, vermelho e amarelo) sobrepõem-se, atestando pela sua conservação durante a evolução. É fácil verificar que se trata da curva espectral de um sistema de $N=3$ partículas pois o polinômio associado é do terceira grau, cruzando o eixo das abcissas três vezes (nos três zeros da função).

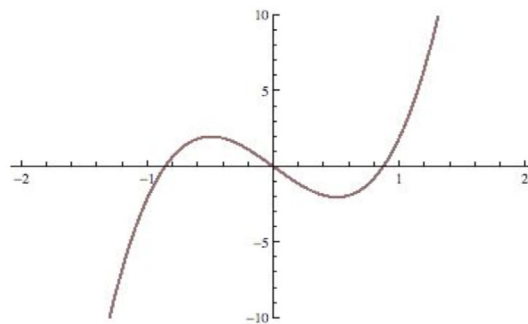


Gráfico 4.1.2: Superposição das Curvas Espectrais $\Delta_3(\lambda)$ para $N=3$ em momentos distintos. O polinômio característico permanece inalterado.

4.2 Estudo da interação entre muitos corpos

Tendo em vista o sucesso da implantação numérica adotada na verificação do caso estudado analiticamente $N=3$, a confiança no método permite investigar o comportamento de redes mais complexas, como $N=10$. O gráfico 4.2.1, que mostra um sistema composto por dez contas livres para se mover ao longo de um fio reto, ajuda na visualização de uma cadeia interagente. Nesse caso, devemos adicionar um acoplamento entre os corpos como, por exemplo, através, de molas que ligam cada uma das contas. Seguindo a proposta de Toda, de termos uma interação exponencial, passamos a permitir a existência de sólitons discretos nessa rede, como o capturado na figura 2.1

O perfil mostrado naquela figura, 2.1, poderia em princípio ser utilizado como condição inicial para qualquer sistema dinâmico discreto de 10 constituintes. A beleza e a importância dos modelos de Toda, contudo, manifestam-se na evolução temporal desse perfil de onda. Para visualizar este comportamento produzimos o gráfico 2.2, composto por dez curvas, onde cada uma fornece a trajetória de uma dada partícula. Da maneira como está apresentada, a figura abaixo permite enxergar o caminho feito pelo pulso solitônico inicial, que parte da primeira partícula e percorre toda a rede até atingir o último corpo e levá-lo a oscilar.

Uma vez estabelecido o ferramental que permite simular o comportamento de uma cadeia de Toda, testado acima para redes com apenas 3 partículas, podemos atacar o problema das cadeias com dimensão arbitrária. Ao incluirmos a excitação numa rede composta por $N=10$ corpos, a dinâmica do modelo nos permite determinar seu estado num instante futuro qualquer. Mais do que isso, podemos verificar ainda a simetria escondida do problema.

Primeiramente averiguamos que, de fato, a energia do sistema é conservada, como era de se esperar. O gráfico 4.2.1 nos mostra que em todos os instantes em que se realiza a medição o valor

da energia é sempre o mesmo, indicando sua conservação ao longo da evolução. Para se ter certeza de outras quantidades também são invariantes – e sabemos que existem pelo menos 10 delas – adotamos novamente a tática de estudar a curva espectral, $\Delta(\lambda)$.

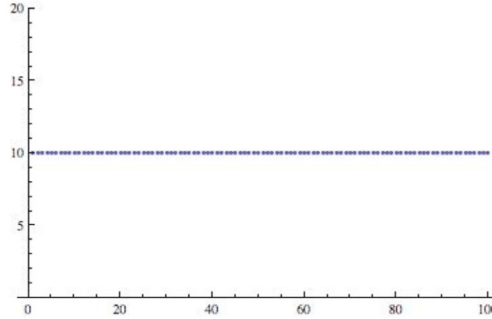


Gráfico 4.2.1: Energia x Tempo para N=10.

O gráfico 4.2.2, por sua vez, representa tal objeto: o polinômio característico $\Delta_{10}(\lambda)$ associado ao problema de autovalores e autovetores discutidos na seção 3.5, aplicado ao caso N=10. Nessa figura vemos um polinômio de décimo grau, que cruza 10 vezes o eixo horizontal, que tem sempre a mesma forma em diferentes instantes. Isso quer dizer que, muito embora a dinâmica da matriz de Lax L seja não trivial e suas entradas variem a cada momento, dela pudemos extrair uma função invariante.

A constância de curva característica proporciona-nos uma maneira indireta de checar a conservação dos autovalores, uma vez que os zeros da função graficada não sofrem alterações em suas posições com o passar do tempo. Como a soma dos autovalores corresponde essencialmente ao momentum total do sistema, pode-se verificar que no referencial adotado o conjunto encontra-se parado, já que os zeros aparecem aos pares positivo-negativo. O mesmo efeito é observado na rede com N=3.

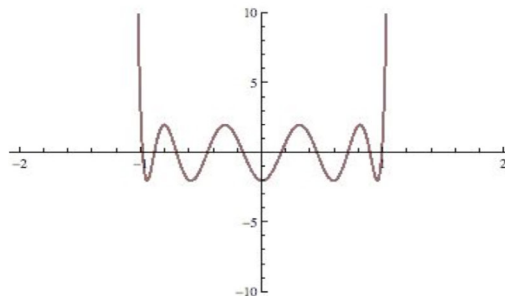


Gráfico 4.2.2: Curva Espectral $\Delta_{10}(\lambda)$ para N=10, mostrada em diferentes instantes.

Fica evidente a sua invariância temporal.

Ao somarmos o quadrado de cada um dos autovalores verifica-se que – a menos de um fator $\frac{1}{2}$ – se obtém a energia total do sistema, representada no gráfico 4.2.1, no caso $N=10$. Pode-se continuar esse processo e ir se obtendo as cargas conservadas mais altas. Apesar da primeira e da segunda serem facilmente associadas ao momentum total e à energia total do sistema, torna-se difícil uma interpretação física dos significados das integrais de movimento seguintes. Sabe-se apenas do seu papel fundamental para explicar a estabilidade física das excitações na rede e outras propriedades das redes exatamente integráveis.

5. Considerações finais

Apesar de serem sistemas complexos de difícil tratamento – analítico ou numérico – os problemas de muitos corpos podem apresentar suficientes simetrias que lhes confirmam características especiais. Neste trabalho vimos como podem ser construídas as cargas conservadas (ou leis de conservação) para a importante classe das cadeias de Toda. Estas, correspondem a redes de partículas que interagem através de um potencial não-linear mas que admitem excitações estáveis e localizadas. Mostramos que, associadas a elas existe um objeto chamado Determinante Espectral que permanece constante em todos os momentos levando ao que se chama de uma evolução isospectral, associada a sistemas exatamente solúveis.

A importância dos estudos de redes integráveis reside não apenas no fato que nelas é maior o domínio e mais efetivo o controle sobre cada um dos graus de liberdade, diferentemente das teorias de campos, mas também pelas possíveis aplicações em problemas práticos de telecomunicações e novos materiais.

6. Agradecimentos

Agradecemos à FAPEG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás) pelo apoio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

Symmetries in the Toda chain

Abstract: Solitons are objects of great importance in contemporary Physics and arise in systems with a high degree of symmetry. Initially introduced as solitary waves in fluids, the concept of a soliton can be extended to other areas, including the High Energy Physics and Fundamental Particles. In this paper we discuss the (hidden) symmetries responsible for the appearance of solitons in a class of discrete chains, which can be thought of as a kind of system with coupled masses and springs: the so called Toda chains.

Keywords: Symmetries; solitons; integrability; Toda chain.

Referências bibliográficas

NOETHER, E. **Invariante Variationsprobleme**. Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235–257. 1918.

DAS, A. Integrable Models. **World Scientific Lecture Notes in Physics**. Cingapura, 1989.

RUSSELL, J. S. (1845). Report on Waves. Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, York. London: John Murray. 311–390. 1844.

CHALUB, Fabio A.C.C. e ZUBELLI, Jorge P. **Sólitons: na crista da onda por mais de 100 anos**, in: Matemática Universitária, no. 30, junho de 2001, pp 41-65.

BOUSSINESQ, J. (1877), **Essai sur la theorie des eaux courantes, Memoires presentes par divers savants ` l'Acad. des Sci**. Inst. Nat. France, XXIII, pp. 1–680.

KORTEWEG, D. J.; de VRIES, G. (1895), **On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves**, Philosophical Magazine 39 (240): 422–443,doi:10.1080/14786449508620739.

FERMI, E.; PASTA, J.; ULAM, S. **Studies of Nonlinear Problems**. Document LA-1940, 1955.

TODA, Morikazu. **Theory of Nonlinear Lattices**, Springer-Verlag. Berlin: 1989.

LAX, P. **Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves**, Comm. Pure Applied Math. 21 (5): 467–490, doi:10.1002/cpa.3160210503. 1968.

BRUNELLI, J.C. **Dispersionless limit of integrable models**, Braz. J. Phys., vol.30, no.2, São Paulo, June, 2000.