

15

CAPÍTULO

ABORDAGENS ROBUSTAS PARA PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO LINEAR COM INCERTEZA NOS DADOS

Marques, Raina Ribeiro ¹ *;
Queiroz, Thiago Alves de ²;

¹ Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Regional Catalão / UFG

² Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Regional Catalão / UFG

* email: raina-marques@hotmail.com

Resumo: A otimização robusta surgiu da necessidade de encontrar soluções viáveis para problemas de programação linear com incerteza nos dados. Um trabalho pioneiro foi publicado em 1973 e, em então, técnicas de otimização robusta vem sendo melhorados até agora. Devido a grande aplicabilidade de problemas com incerteza, o presente trabalho comenta sobre três abordagens robustas diferentes, sendo duas delas aplicadas no clássico problema da mochila 0-1. O problema da mochila foi resolvido com a Gurobi Optimizer® e os resultados mostraram uma diminuição no valor objetivo ótimo de 72,7% dos casos para a modelagem de Ben-Tal e Nemirovski e 100% dos casos para a abordagem de Bertsimas e Sim, uma vez que vários cenários foram analisados, a fim de compreender o comportamento de modelos.

Palavras-chave: Otimização robusta; Incerteza; Problema da mochila 0-1

Marques, Raina Ribeiro; Queiroz, Thiago Alves de;

"ABORDAGENS ROBUSTAS PARA PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO LINEAR COM INCERTEZA NOS DADOS", p. 210-225 . In: Seminário de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação da Regional Catalão (2. : 2014 : Goiás) **Coletânea Interdisciplinar em Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação - Volume 4 : Ciências Exatas e Tecnológicas**. Anais [livro eletrônico] / organizado por Adriana Freitas Neves, Idelvone Mendes Ferreira, Maria Helena de Paula, Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos. São Paulo: Blucher, 2015. ISBN: 978-85-8039-115-2, DOI 10.5151/978859788580391152-V4_Cap15

1. Introdução

Grande parte dos modelos de programação linear são discutidos em razão dos dados presentes na matriz de restrição (ou matriz tecnológica), mas nem sempre esses dados podem ser considerados certos. Em outras palavras, é preciso considerar a incerteza nestes dados para obter soluções mais próximas da realidade, como por exemplo, incerteza nos dados relacionados à demanda, custos, pesos, entre outros. De fato, a maioria dos problemas práticos possuem incerteza em seus dados (parâmetros) (ALEM, 2011).

Cabe então analisar até que ponto uma solução nominal (sem incerteza nos dados do modelo) é capaz de retratar a realidade. Nota-se que há erros na tomada de decisão

partindo de uma solução nominal, já que os modelos possuem dados incertos. Soyster (1973) foi um dos pioneiros a discutir os problemas com incerteza nos dados na matriz de restrição. De acordo com o autor, os dados nominais da matriz tecnológica podem variar de acordo com um raio de cobertura, porém estes dados aleatórios assumem sempre o pior caso, prejudicando o valor ótimo do problema nominal.

Existem outros trabalhos menos conservadores se comparado ao de Soyster (1973). Ben-Tal e Nemirovski (2000) propuseram modelos em que os dados incertos são perturbados por uma variável randômica. Com isso, buscaram analisar até que ponto estes dados são afetados por esta perturbação. Bertsimas e Sim (2004) trabalharam a hipótese de que nem todos os dados assumem o pior caso, ou seja, existe uma quantidade máxima de variáveis que podem assumir o pior caso, respeitando a garantia de violação de restrição.

Aplicações das técnicas de otimização robusta podem ser encontradas nos trabalhos de Paiva e Morabito (2011), Além e Morabito (2012) e Munhoz e Morabito (2014). Eles propuseram modelos de programação linear aplicado ao planejamento hierárquico de produção em usinas de álcool e açúcar, aplicação em indústrias moveleiras e planejamento da produção de uma empresa de citros, respectivamente.

Outras técnicas de otimização considerando incerteza nos dados podem ser encontradas nos trabalhos de El-Ghaoui e Lebret (1997), El-Ghaoui et al. (1998), Ben-Tal e Nemirovski (1998, 1999) e Bertsimas e Thiele (2006). Todos estes autores propuseram modelos menos conservadores comparados ao de Soyster (1973). Alguns, como El-Ghaoui e Lebret (1997) e Bertsimas e Thiele (2006), apresentaram modelos com incerteza não somente na matriz de restrição, mas também no vetor de custos e recursos.

Este trabalho consiste em analisar as abordagens para otimização robusta propostas por Soyster (1973), Ben-Tal e Nemirovski (2000) e Bertsimas e Sim (2004). O trabalho está estruturado da seguinte forma: na Seção 2 são abordadas as técnicas propostas pelos autores citados; a Seção 3 considera o problema da mochila 0-1 nos modelos robustos propostos por Ben-Tal e Nemirovski (2000) e Bertsimas e Sim (2004); a Seção 4 discute a resolução dos modelos para a mochila 0-1; e, por fim, a Seção 5 traz as conclusões do trabalho e direções para futuros trabalhos.

2. Abordagem de Otimização Robusta

2.1 Abordagem de Soyster

Soyster (1973) propôs um modelo de programação linear com incerteza na matriz de restrição, em que se procura analisar o pior caso. O modelo de dados incertos proposto considera incerteza coluna a coluna. A formulação robusta proposta é:

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^m c_j x_j \quad \text{sujeito a: } \begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + \sum_{j \in I_i} \hat{a}_{ij} y_j \leq b_i & \forall i \\ -y_j \leq x_j \leq y_j & \forall j \\ l_j \leq x_j \leq u_j & \forall j \\ y_j \geq 0 & \forall j \end{cases} \quad (1)$$

em que \hat{a}_{ij} é o desvio máximo de uma variável aleatória determinada \tilde{a}_{ij} com relação ao valor esperado a_{ij} , isto é, \hat{a}_{ij} é o raio de cobertura dos valores esperados; J_i é o subconjunto de índices dos parâmetros da matriz de restrição que possuem incerteza, pois não necessariamente todos os parâmetros \tilde{a}_{ij} da linha i possuem incerteza.

O raio de cobertura é correspondente ao raio de uma hipersfera com centro em a_{ij} , ou seja, cada parâmetro a_{ij} é o valor esperado de uma variável aleatória \tilde{a}_{ij} contida nesta hipersfera, isto é, $K_{ij} = \{\tilde{a}_{ij} \in R: |\tilde{a}_{ij} - a_{ij}| \leq \hat{a}_{ij}\}$.

Para garantir a viabilidade da restrição para todo raio \hat{a}_{ij} da hipersfera K_{ij} , em que o desvio unitário da variável aleatória é dada por $\eta_{ij} = \frac{(\tilde{a}_{ij} - a_{ij})}{\hat{a}_{ij}} \in [-1, 1]$, tem-se que:

$$\sum_{j=1}^m \tilde{a}_{ij}x_j = \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j + \sum_{j \in J_i} \eta_{ij}\hat{a}_{ij}x_j \leq \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}|x_j| \leq b_i \quad \forall i \quad (2)$$

O termo $\hat{a}_{ij}|x_j|$ é uma proteção que garante a viabilidade da restrição. Substituindo o parâmetro $|x_j|$ por y_j na restrição (2), chega-se no modelo (1). Segundo Bertsimas e Sim (2003) tal modelagem estima excessivamente o valor da solução ótima do problema nominal. Devido a isto outros modelos de otimização robusta foram criados.

2.2 Abordagem de Ben-Tal e Nemirovski

Duas formulações robustas foram propostas por Ben-Tal e Nemirovski (2000). Segundo esses autores, o valor \tilde{a}_{ij} é uma entrada de dados incertos obtidos por meio de um valor nominal a_{ij} e de uma perturbação randômica, ou seja: $\tilde{a}_{ij} = (1 + \epsilon \epsilon_{ij})a_{ij}$, $\tilde{a}_{ij} - a_{ij} = \epsilon \epsilon_{ij}a_{ij}$ e $|\tilde{a}_{ij} - a_{ij}| = \epsilon |a_{ij}|$, em que $\epsilon > 0$ é o nível de incerteza e ϵ_{ij} é uma variável aleatória distribuída simetricamente no intervalo de $[-1, 1]$. A variável $|a_{ij}|$ é semelhante a \hat{a}_{ij} da formulação de Soyster (1973).

A i -ésima restrição é satisfeita com um erro de no máximo $\delta \max[1, |b_i|]$, onde δ é a tolerância de inviabilidade. Dessa forma, uma restrição de desigualdade com incerteza nos dados é da forma: $\sum_{j \in J_i} a_{ij}x_j + \sum_{j \in J_i} \tilde{a}_{ij}x_j \leq b_i + \delta \max[1, |b_i|]$. Então, a formulação do problema de programação linear é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= \sum_{j=1}^m c_j x_j \\ \text{Sujeito a: } &\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j + \epsilon \sum_{j \in J_i} |a_{ij}||x_j| \leq b_i + \delta \max[1, |b_i|] & \forall i \\ l_j \leq x_j \leq u_j & \forall j \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

Substituindo a variável $|x_j|$ por y_j no modelo (3), a primeira formulação robusta de Ben-Tal e Nemirovski (2000) é:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= \sum_{j=1}^m c_j x_j \\ \text{Sujeito a: } &\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + \epsilon \sum_{j \in J_i} |a_{ij}| y_j \leq b_i + \delta \max[1, |b_i|] & \forall i \\ l_j \leq x_j \leq u_j & \forall j \\ -y_j \leq x_j \leq y_j & \forall j \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

A segunda formulação robusta proposta por Ben-Tal e Nemirovski (2000) parte do princípio de que o lado esquerdo da verdadeira restrição será dada por:

$$\zeta_x^i = \epsilon \sum_{j=1}^m \tilde{a}_{ij} x_j - b_i \leq 0 \quad (5)$$

A solução candidata x tem média e desvio padrão dados por:

$$\text{Média}(\zeta_x^i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j - b_i \quad (6)$$

$$D_\epsilon^i(x) = \epsilon \sqrt{\sum_{j \in J_i} a_{ij}^2 x_j^2} \quad (7)$$

Tendo em vista que a probabilidade do evento $\{\delta_x^i > \Omega D_\epsilon^i(x)\}$ e que $\zeta_x^i \equiv \delta_x^i + \text{Média}(\zeta_x^i)$, realizando as substituições (5), (6) e (7), e inserindo o erro máximo da i -ésima restrição, chega-se a:

$$\begin{aligned} \epsilon \sum_{j=1}^m \tilde{a}_{ij} x_j - b_i &\equiv \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j - b_i + \Omega D_\epsilon^i(x) \leq 0 \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + \Omega D_\epsilon^i(x) &\leq b_i + \delta \max[1, |b_i|] & \forall i \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + \Omega \epsilon \sqrt{\sum_{j \in J_i} a_{ij}^2 x_j^2} &\leq b_i + \delta \max[1, |b_i|] & \forall i \end{aligned} \quad (8)$$

em que a restrição (8) é uma condição suficiente para computar uma solução viável para a segunda formulação.

Segundo Ben-Tal e Nemirovski (2000), encontrar uma solução viável para a segunda formulação, também significa encontrar uma solução viável para a formulação (4). Dessa forma, a segunda formulação robusta se dá pela junção da restrição de incerteza dada na formulação (4) e da condição suficiente na eq. (8). Assim, fazendo simples modificações nas variáveis de decisão, a segunda formulação robusta é:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar } z &= \sum_{j=1}^m c_j x_j \\
 \text{Sujeito a: } &\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + \epsilon \left[\sum_{j \in J_i} |a_{ij}| y_{ij} + \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} a_{ij}^2 z_{ij}^2} \right] \leq b_i + \delta \max[1, |b_i|] & \forall i \\ -y_{ij} \leq x_j - z_{ij} \leq y_{ij} & \forall i, j \\ l_j \leq x_j \leq u_j & \forall j \end{cases} \quad (9)
 \end{aligned}$$

sendo $\Omega > 0$ um parâmetro positivo e a violação da restrição é limitada por $k = \exp\left\{\frac{-\Omega^2}{2}\right\}$.

A formulação robusta (9) é um modelo não-linear e, a partir disso, a proposta de Bertsimas e Sim (2004) surgiu para obter um novo modelo, agora linear, usando uma formulação dualidade.

2.3 Abordagem de Bertsimas e Sim

Bertsimas e Sim (2004) partem do pressuposto de que os dados incertos assumem valores de acordo com uma distribuição simétrica, com média igual ao valor nominal a_{ij} no intervalo $[a_{ij} - |a_{ij}|, a_{ij} + |a_{ij}|]$. Para todo i , existe um parâmetro Γ_i , não necessariamente inteiro, pertencente ao intervalo $[0, |J_i|]$, denominado grau de conservadorismo.

Em outras palavras, Γ_i é o número máximo de variáveis aleatórias que podem assumir o valor de pior caso. Isto porque tais autores, diferentemente de Soyster (1973), acreditam que nem todas as variáveis precisam assumir o pior caso (ALEM, 2011).

O objetivo é proteger os casos em que até $\lceil \Gamma_i \rceil$ dos coeficientes da matriz de restrição assumem o pior caso e um coeficiente assume o valor $(\Gamma_i - \lceil \Gamma_i \rceil)$. Dessa forma, é possível que a solução robusta seja viável e determinística. Mesmo que $\lceil \Gamma_i \rceil$ se altere, a solução é viável com alta probabilidade.

Considere S_i um subconjunto de J_i , tal que $|S_i| = \Gamma_i$, e assim a formulação do modelo de programação não-linear é:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar } z &= \sum_{j=1}^m c_j x_j \\
 \text{Sujeito a: } &\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + \max_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \lceil \Gamma_i \rceil, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} y_j + (\Gamma_i - \lceil \Gamma_i \rceil) \hat{a}_{ij} y_j \right\} \leq b_i & \forall i \\ -y_j \leq x_j \leq y_j & \forall j \\ l_j \leq x_j \leq u_j & \forall j \\ y_j \geq 0 & \forall j \end{cases} \quad (10)
 \end{aligned}$$

Note que se $\Gamma_i = |J_i|$, então todas as incertezas são consideradas. Por outro lado, se $\Gamma_i = 0$, então não se tem incertezas e o modelo se torna determinístico.

Pode-se dizer que a i -ésima restrição é protegida pela função de proteção $\beta_i(x^*, \Gamma_i)$. Assim, uma reformulação do modelo (10) pode ser feita de acordo com a proposição abaixo.

Proposição 1 (BERTSIMAS; SIM, 2004). Dado o vetor solução x^* , a função de proteção da i -ésima restrição dada por:

$$\beta_i(x^*, \Gamma_i) = \max_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{ij} |x_j^*| \right\} \quad (11)$$

pode ser substituída pelo seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \beta_i(x^*, \Gamma_i) = & \text{Maximizar } \sum_{j \in J_i} |a_{ij}| |x_j^*| z_{ij} \\ \text{Sujeito a: } & \begin{cases} \sum_{j \in J_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \\ 0 \leq z_{ij} \leq 1 \end{cases} \quad \forall j \in J_i \end{aligned} \quad (12)$$

Demonstração. O valor da solução ótima da função de proteção (11) é equivalente a solução do modelo (12) e consiste em $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ variáveis iguais a um e uma variável igual a $\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor$. Ou seja, é o mesmo que selecionar o subconjunto $\{S_i \cup \{t_i\} : S_i \subseteq J_i, |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i\}$.

Por exemplo, considere um conjunto J_i com doze elementos e $\Gamma_i = 8,4$. Assim, o subconjunto S_i de J_i contém oito elementos, sendo cada um com valor igual a um (então a primeira parcela de (11) será igual a oito) e um elemento t_i (elemento que pertencem a J_i , mas não a S_i) é igual a 0,4. Por sua vez, é equivalente a criar um conjunto de variáveis, que pode assumir valores entre zero e um, em que sua somatória será menor ou igual a 8,4, ao invés da utilização de subconjuntos S_i .

Observa-se que a função proteção é não-linear, de forma que se utiliza o dual para obter um modelo final que é linear. Com isso, inserindo as variáveis duais ρ_{ij} e λ_i , tem-se:

$$\begin{aligned} \beta_i(x_j, \Gamma_i) = & \text{Minimizar } \sum_{j \in J_i} \rho_{ij} + \Gamma_i \lambda_i \\ \text{Sujeito a: } & \begin{cases} \lambda_i + \rho_{ij} \geq |a_{ij}| |x_j| & \forall i, j \in J_i \\ \rho_{ij} \geq 0 & \forall i, j \in J_i \\ \lambda_i \geq 0 & \forall i \end{cases} \end{aligned}$$

tal que substituindo $|x_j|$ por y_j , tem-se a formulação dual para a função de proteção, ou seja:

$$\begin{aligned} \beta_i(x_j, \Gamma_i) = & \text{Minimizar } \sum_{j \in J_i} \rho_{ij} + \Gamma_i \lambda_i \\ \text{Sujeito a: } & \begin{cases} \lambda_i + \rho_{ij} \geq |a_{ij}| y_j & \forall i, j \in J_i \\ \rho_{ij} \geq 0 & \forall i, j \in J_i \\ \lambda_i \geq 0 & \forall i \\ y_j \geq 0 & \forall j \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Substituindo o modelo dual (13) na função de proteção do modelo (10), encontra-se o modelo robusto (14) proposto por Bertsimas e Sim (2004), a saber:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^m c_j x_j \\
 &\text{Sujeito a: } \begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \rho_{ij} + \Gamma_i \lambda_i \leq b_i & \forall i \\ \lambda_i + \rho_{ij} \geq |a_{ij}| y_j & \forall i, j \in J_i \\ -y_j \leq x_j \leq y_j & \forall j \\ l_j \leq x_j \leq u_j & \forall j \\ \rho_{ij} \geq 0 & \forall i, j \in J_i \\ \lambda_i \geq 0 & \forall i \\ y_j \geq 0 & \forall j \end{cases} \quad (14)
 \end{aligned}$$

Em que a probabilidade de violação da restrição é limitada por $k = \exp\left\{\frac{-\Gamma_i^2}{2|J_i|}\right\}$.

3. Exemplo: Formulações Robustas para o Problema da Mochila 0-1

O problema da mochila 0-1 consiste em selecionar um subconjunto de itens de máximo valor que respeite um limite informado (GOLDBARG; LUNA, 2005). A formulação do problema é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 &\text{Sujeito a: } \begin{cases} \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq b \\ x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, n \end{cases}
 \end{aligned}$$

em que x_j indica se o item do tipo j é selecionado, w_j é o custo do item j , b é o limite de custo imposto e c_j é o valor de cada item j .

Apesar de terem sido discutidas três abordagens diferentes de otimização robusta, neste trabalho apenas o modelo (4) de Ben-Tal e Nemirovski (2000) e o modelo (14) de Bertsimas e Sim (2004) são analisadas. Assim, considera-se $n=10$ itens, com peso escolhidos aleatoriamente no conjunto $\{20, 21, \dots, 29\}$, custos também escolhidos aleatoriamente dentro do conjunto $\{16, 17, \dots, 77\}$ e limite de custo igual a 200. Os dados incertos sofrem variação de 10% do seu valor nominal.

3.1 Modelagem por Ben-Tal e Nemirovski

Para esta modelagem, considera-se uma tolerância de inviabilidade de 1% ($\delta = 0,01$) e que os oito primeiros itens são incertos ($|J_i| = 8$). Assim, o modelo robusta fica:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= 22x_1 + 28x_2 + 24x_3 + 24x_4 + 28x_5 + 23x_6 + 27x_7 + 22x_8 + 24x_9 + 28x_{10} \\
 \text{Sujeito a: } &68x_1 + 29x_2 + 70x_3 + 26x_4 + 41x_5 + 68x_6 + 41x_7 + 25x_8 + 49x_9 \\
 &+ 43x_{10} \\
 &+ 0,10(68y_1 + 29y_2 + 70y_3 + 26y_4 + 41y_5 + 68y_6 + 41y_7 + 25y_8) \quad (15) \\
 &\leq 200 + 0,01\max [1, |200|] \\
 &x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \\
 &-y_j \leq x_j \leq y_j \quad \forall j
 \end{aligned}$$

3.2 Modelagem por Bertsimas e Sim

Levando em consideração os mesmos valores do modelo (15), o único valor que ainda falta estipular é o grau de conservadorismo Γ_1 . É possível encontrar este valor por meio da fórmula de violação de restrição. Considerando a probabilidade de violação de 1%, tem-se:

$$\exp\left(\frac{-\Gamma_1^2}{16}\right) - 0,01 = 0$$

Assim, o valor de Γ será 8,6 e o modelo resultante fica:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= 22x_1 + 28x_2 + 24x_3 + 24x_4 + 28x_5 + 23x_6 + 27x_7 + 22x_8 + 24x_9 + 28x_{10} \\
 \text{Sujeito a: } &68x_1 + 29x_2 + 70x_3 + 26x_4 + 41x_5 + 68x_6 + 41x_7 + 25x_8 + 49x_9 \\
 &+ 43x_{10} + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6 + \rho_7 + \rho_8 + 8,6\lambda \leq 200 \\
 &\lambda + \rho_1 \geq 0,10 * 68 * |y_1| \\
 &\lambda + \rho_2 \geq 0,10 * 29 * |y_2| \\
 &\lambda + \rho_3 \geq 0,10 * 70 * |y_3| \\
 &\lambda + \rho_4 \geq 0,10 * 26 * |y_4| \\
 &\lambda + \rho_5 \geq 0,10 * 41 * |y_5| \\
 &\lambda + \rho_6 \geq 0,10 * 68 * |y_6| \\
 &\lambda + \rho_7 \geq 0,10 * 41 * |y_7| \\
 &\lambda + \rho_8 \geq 0,10 * 25 * |y_8| \\
 &\lambda \geq 0 \\
 &\rho_j \geq 0 \quad \forall j \in J_i \\
 &y_j \geq 0 \quad \forall j \\
 &x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \\
 &-y_j \leq x_j \leq y_j \quad \forall j
 \end{aligned} \quad (16)$$

4. Testes nos Modelos Robustos

Para a realização dos testes, considera-se o problema da mochila 0-1 com 200 itens e o limite de custo igual a 4000. Os outros dados do modelo foram obtidos conforme a Seção 3, semelhando ao assumido por Bertsimas e Sim (2004)..

Vários cenários foram analisados com intuito de verificar o comportamento da função objetivo. As mesmas considerações de $|J_i|$ assumidas para o modelo (14) são também consideradas para o modelo (4). Usou-se o pacote de otimização Gurobi Optimizer® para resolver os modelo resultantes, que são semelhantes aos modelos (15) e (16), dada uma implementação em C++. O computador usado nos testes tem processador Intel Inside Core™ i5 uPro, 4 GB de memória RAM e sistema operacional Linux. Na Tabela I são apresentados os valores de J_i e os graus de conservadorismos Γ_i utilizados nos testes, escolhendo-se sempre as primeiras colunas da restrição para considerar a incerteza.

Tabela I - Valores de Γ_i para os respectivos J_i , com probabilidade de violação da restrição de 1%.

J_i	5	10	15	25	50	75	100	125	150	175	200
Γ_i	5	9,6	11,7	15,2	21,5	26,3	30,3	34	37,2	40,2	42,9

Fonte: Elaborada pelos autores.

4.1 Resultados Computacionais

Para fins de comparação, o problema da mochila 0-1 também foi resolvido sem incerteza nos parâmetros, ou seja, $J_i = 0$.

Nas Tabelas II e III estão representados os valores da função objetivo e os tempos computacionais (em segundos) para a resolução do problema da mochila 0-1, partindo da modelagem de Ben-Tal e Nemirovski e Bertsimas e Sim, respectivamente.

Tabela II – Resultados de acordo com a formulação de Ben-Tal e Nemirovski.

J_i	0	5	10	15	25	50	75	100	125	150	175	200
F.O.	2946	2959	2957	2951	2939	2918	2901	2881	2852	2834	2813	2788
Tempo	0,00	0,03	0,01	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01

Fonte: Elaborada pelos autores.

Tabela III – Resultados pela formulação de Bertsimas e Sim.

J_i	0	5	10	15	25	50	75	100	125	150	175	200
Γ_i	0	5	9,6	11,7	15,2	21,5	26,3	30,3	34	37,2	40,2	42,9
F.O.	2946	2941	2937	2931	2921	2904	2894	2882	2871	2864	2856	2850
Tempo	0,00	0,02	0,07	0,02	0,04	0,04	0,08	0,16	0,17	0,14	0,22	0,13

Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Figura I é possível analisar o comportamento dos modelos com relação à quantidade de dados incertos. Por outro lado, a Figura II ilustra o comportamento da modelagem de Bertsimas e Sim em relação ao grau de conservadorismo.

Percebe-se pelas Tabelas I e II e pela Figura I que à medida que o número de parâmetros incertos aumentam, o valor da função objetivo decresce. Como na modelagem de Ben-Tal e Nemirovski todos os parâmetros incertos assumem o pior caso, então este modelo é dito mais conservador comparado a modelagem de Bertsimas e Sim, em que apenas alguns parâmetros assumem o pior caso, de acordo com o grau de conservadorismo. Percebe-se que em relação ao valor ótimo do problema nominal, a modelagem de Ben-Tal e Nemirovski inicia com um valor ótimo maior que o do problema nominal e em seguida diminui.

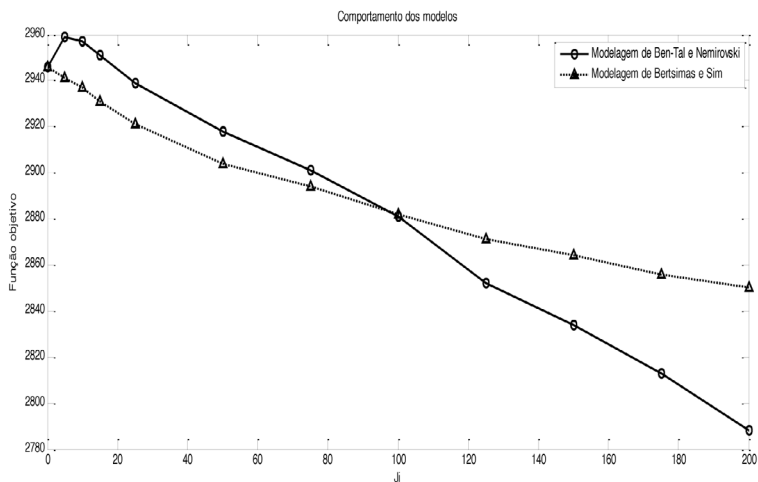


Figura I – Comparação entre os modelos robustos para o problema da mochila 0-1.

Fonte: Elaborada pelos autores.

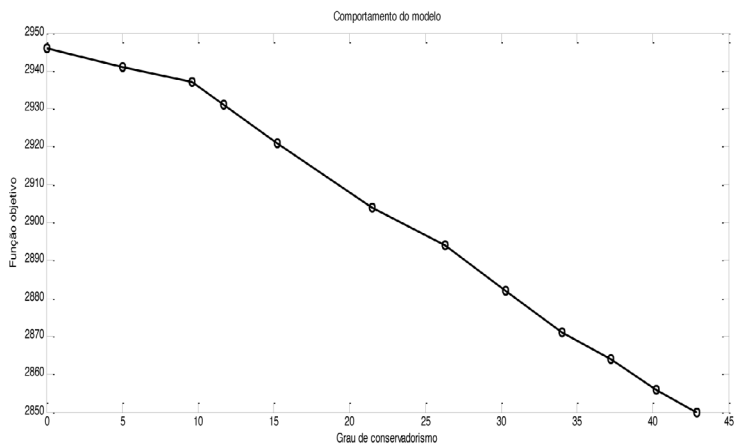


Figura II – Valores ótimos em função do grau de conservadorismo da abordagem de Bertsimas e Sim. Fonte: Elaborada pelos autores.

Quando a quantidade de dados incertos encontra-se entre 5 e 15, os valores ótimos da modelagem de Ben-Tal e Nemirovski superam a de Bertsimas e Sim. Ou seja, quando a quantidade de dados incertos pertence a este intervalo a modelagem de Ben-Tal e Nemirovski obteve valores ótimos melhores. Por outro lado o de Bertsimas e Sim sofreu uma piora em todos os casos. Além disso, note que o tempo computacional gasto não ultrapassou 0,22 segundos, em particular devido a simplicidade do problema.

A Tabela IV traz a porcentagem de aumento ou redução do valor ótimo em relação ao problema nominal. Nota-se que em 27,3% dos casos, o modelo de Ben-Tal e Nemirovski (B e N) obteve valores ótimos maiores e em 72,7% obteve valores ótimos menores que o do problema nominal, enquanto o de Bertsimas e Sim (B e S) teve 100% dos valores ótimos menores comparado ao valor ótimo nominal. Assim, fica evidente que o modelo seguindo Ben-Tal e Nemirovski superou o de Bertsimas e Sim para o caso em estudo.

Tabela IV – Aumento e redução (%) do valor ótimo dos modelos robustos em relação ao problema nominal.

J_i	5	10	15	25	50	75	100	125	150	175	200
B e N	A: 0,44	A: 0,37	A: 0,17	R: 0,24	R: 0,95	R: 1,53	R: 2,21	R: 3,19	R: 3,8	R: 4,51	R: 5,36
B e S	R: 0,17	R: 0,31	R: 0,51	R: 0,85	R: 1,43	R: 1,77	R: 2,17	R: 2,55	R: 2,78	R: 3,06	R: 3,26

Legenda: A: aumento; R: redução. Fonte: Elaborada pelos autores.

5. Conclusão

O presente trabalho procura analisar uma técnica utilizada para resolver problemas com incerteza nos dados, isto é, a otimização robusta. Em 1973 surgiu um dos trabalhos pioneiros que abriram portas para outras formulações de modelos robustos, de forma que aqui foram analisadas três dessas abordagens que levam em consideração a incerteza nos dados da matriz de restrição. Porém, utilizou-se para os testes apenas duas dessas abordagens, visto que a primeira formulação é muito conservadora, uma vez que considera sempre que todos os dados incertos assumem o pior caso.

Partindo das formulações de Ben-Tal e Nemirovski (2000) e Bertsimas e Sim (2004), foram criados os modelos robustos para o problema da mochila 0-1, considerando que o custo de alguns itens eram incertos e poderiam variar até 10% do seu valor nominal. Os resultados comparativos mostraram inicialmente uma melhora no valor ótimo robusto e depois uma piora, quando comparado ao valor ótimo do problema nominal (sem incerteza).

A modelagem de Bertsimas e Sim (2004), por considerar que nem todos os dados assumem o pior caso, é dada como menos conservadora do que a de Ben-Tal e Nemirovski (2000), podendo representar melhor a realidade. Percebe-se nos dois modelos que à medida que os valores incertos aumentam, o valor da função objetivo diminui, ficando também evidente essa conclusão quando o grau de conservadorismo aumenta.

A ocorrência da incerteza pode ocasionar a violação de restrições, por isso nas abordagens vistas são consideradas probabilidades de violação das restrições. Com isso, uma proposta futura seria analisar outros tipos de funções que delimitam a violação da restrição, buscando o aprimoramento das abordagens. Outro trabalho futuro, consiste em utilizar essas abordagens em outros problemas de programação linear inteira, especificamente no problema de localização de ambulâncias e estações, que é um típico problema com incerteza em seus parâmetros.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro recebido das agências CNPq (471351/2012-1) e FAPEG.

Robust Approaches for Linear Programming Problems with Uncertainty in Data

Abstract: The robust optimization emerged from the need to find feasible solutions to linear programming problems with uncertainty in data. A pioneering work was published in 1973 and then robust optimization techniques have been improved till now. Due to the large applicability of problems with uncertainty, this paper comments on three different robust approaches, so two of these are applied in the classical 0-1 knapsack problem. The knapsack problem was solved with the Gurobi Optimizer® and the results showed a decrease in the optimal objective value of 72.7% of cases for the modeling of Ben-Tal and Nemirovski and 100% of cases for the approach of Bertsimas and Sim, once several scenarios were analyzed in order to understand the models behavior.

Keywords: Robust optimization; Uncertainty; 0-1 Knapsack problem.

Referências bibliográficas

- ALEM, D. J. **Programação estocástica e otimização robusta no planejamento da produção de empresas moveleiras.** Tese (Doutorado em Ciências, Ciências de Computação e Matemática Computacional). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.
- ALEM, D. J.; MORABITO, R. **Production planning in furniture settings via robust optimization.** *Computers and Operations Research*, v. 39, p. 139-150, 2012.
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. **Robust convex optimization.** *Mathematics of Operations Research*, v. 23, n. 4, p. 769-805, 1998.
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. **Robust solutions of uncertain linear programs.** *Operations Research Letters*, v. 25, p. 1-13, 1999.
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. **Robust solutions of Linear Programming problems contaminated with uncertain data.** *Mathematical Programming*, v. 88, n. 3, p. 411-424, 2000.
- BERTSIMAS, D.; SIM, M. **Robust discrete optimization and network flows.** *Mathematical Programming Series B*, v. 98, n. 1-3, p. 49-71, 2003.

BERTSIMAS, D.; SIM, M. **The price of robustness.** Operations Research, v. 52, n. 1, p. 35-53, 2004.

BERTSIMAS, D.; THIELE, A. **A robust optimization approach to inventory theory.** Operations Research, v. 54, p. 150-168, 2006.

EL-GHAOUI, L.; LEBRET, H. **Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices.** SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, v. 18, p. 1035-1064, 1997.

EL-GHAOUI, L.; OUSTRY, F.; LEBRET, H. **Robust solutions to uncertain semidefinite programs.** SIAM Journal on Optimization, v. 9, p. 33-52, 1998.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, P. L. L. **Otimização combinatória e Programação linear: modelos e algoritmos.** 2ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

MUNHOZ, J. R.; MORABITO, R. **Optimization approaches to support decision making in the production planning of a citrus company: A Brazilian case study.** Computers and Electronics in Agriculture, v. 107, p. 45-57, 2014.

PAIVA, R. P. O.; MORABITO, R. **Planejamento hierárquico da produção em usinas de açúcar e álcool: modelagem de otimização robusta.** Produção, vol.24, n.3, pp. 644-663, 2014.

SOYSTER, A. L. **Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming.** Operations Research, v. 21, p. 1154-1157, 1973.