12 CAPÍTULO

# EXPLORANDO TERMODINÂMICA EM UM CUBO DE RUBIK

**Rita da Silva, Geovani [1] *;**
**Henrique Ribeiro dos Anjos, Petrus [2]**

[1] Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
[2] Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Instituto de Física e Química de Catalão

*** email: geovanirdasilva@gmail.com**

**Resumo:** O famoso cubo de Rubik oferece oportunidades interessantes para ensinar diversos conceitos da física, em especial termodinâmica e mecânica estatística. Este artigo discute brevemente algumas ideias para um professor utilizar esta ferramenta e aplicar na construção dos conceitos da segunda lei da termodinâmica e da entropia, incluindo seu aspecto estatístico.

**Palavras-chave: Cubo de Rubick; Ensino de Física; Entropia**

Rita da Silva, Geovani; Henrique Ribeiro dos Anjos, Petrus; "EXPLORANDO TERMODINÂMICA EM UM CUBO DE RUBIK", p. 168-184 . In: Seminário de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação da Regional Catalão (2. : 2014 : Goiás) **Coletânea Interdisciplinar em Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação - Volume 4 : Ciências Exatas e Tecnológicas**. Anais [livro eletrônico] / organizado por Adriana Freitas Neves, Idelvone Mendes Ferreira, Maria Helena de Paula, Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos. São Paulo: Blucher, 2015. ISBN: 978-85-8039-115-2, DOI 10.5151/9788597885803911152-V4_Cap12

# 1. Introdução

A habilidade de solução de problemas desempenha um papel importante no ensino-aprendizagem da física e das demais ciências exatas. Uma grande habilidade na resolução de problemas, usualmente denota um alto desenvolvimento de competências reguladoras (planejamento, monitoramento, avaliação) e transformadoras (questionamento, formulação de hipóteses, investigação e interpretação) importantes para o aprendizado (Ref. [1]). Infelizmente, muitas vezes o ensino tradicional leva os estudantes a resolver problemas puramente de forma mecânica (Ref. [2]): o problema proposto no livro solicita uma determinada quantia e fornecem estritamente os dados necessários, então "letras vêm à memória", as formulas onde aparecem essas letras são utilizadas, se inserem os números nessas fórmulas, e – problema resolvido!

Problemas deste tipo, que não demandam raciocínio, comuns em livros-texto de física, são bastante distantes dos problemas que ocorrem na vida real. Resolver problemas, especialmente de física e química, exigem a aplicação de uma teoria/conhecimento previamente dominada (Ref. [3]), capacidade de compreensão do problema, capacidade de planejamento, de execução e de análise (Ref. [4]). Possivelmente esta é uma das motivações por trás da célebre frase de Einstein "Education is what remains after one has forgotten everything, he learned in school". Na busca de mudar esse quadro, diversas estratégias têm sido empregadas, entre elas o uso de atividades manipulativas, jogos e desafios (Ref. [5]). Neste trabalho, propomos continuar essa estratégia explorando mecanismos para utilizar o quebra-cabeça conhecido como cubo mágico no ensino de Física em particular de conceitos de termodinâmica e mecânica estatística. O cubo mágico, também chamado de cubo de Rubik, em homenagem a seu inventor o húngaro Erno Rubik, que fabricou o primeiro protótipo do cubo em 1974, para ajudar a ilustrar o conceito da terceira dimensão para alunos de arquitetura. O cubo começou a ser comercializado em 1980, e em janeiro de 2000, 350 milhões de cubos já haviam sido vendidos em todo o mundo. Ele é considerado um quebra-cabeça bastante difícil, que desafia o raciocínio espacial, a memória e a capacidade de planejamento.

A dificuldade e frustração com as seguidas falhas nas tentativas iniciais de se resolver o cubo são bastante semelhantes às enfrentadas pelos estudantes ao se depararem com problemas mais complexos de ciências e matemática. Mas como no caso do cubo de Rubik, a dificuldade da tarefa e o fato de, após muito trabalho, conseguir resolve-la, faz toda a frustração valer a pena: sente-se orgulho da realização e satisfação por aprender algo novo. Sente-se que se podemos aprender uma tarefa difícil como o cubo, também podemos aprender outras disciplinas complexas, como é o caso da Física.

Do ponto de vista do ensino de Física, um dos apelos do cubo de Rubik é a possibilidade de utiliza-lo para introduzir conceitos modernos da física oferecendo um modelo educacional para explorar um mundo desconhecido de maneira científica. As regras de movimento do cubo (impostas por suas simetrias) fixam leis de conservação, que reduzem o número de estados permitidos, mas que fazem ser difícil chegar a um estado desejado (Ref. [6]). A impossibilidade de se atingir qualquer padrão imaginado abre campo para a discussão da ergodicidade do problema . O grande número de estado sugere uma abordagem estatística para expressar a irreversibilidade experimentada por quem manipula o cubo (Ref. [7]). E mesmo ideias da Física de partículas, como por exemplo, as simetrias do Eightfold Way presente no modelo de quarks pode ser ilustrada com o uso do cubo de Rubik (Ref. [8]). Tais características tornam o cubo de Rubik uma ferramenta educacional promissora para professores de física em diversos níveis de ensino.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma: Na seção 2, discutiremos brevemente o funcionamento do cubo de Rubik e, apresentaremos uma estratégia de solução para o Cubo. Na seção 3, exploraremos algumas propriedades do Cubo de Rubik, do ponto de vista da termodinâmica e da mecânica estatística. Na seção 4, discutiremos alguns dos benefícios pedagógicos do cubo de Rubik. Na seção 5, esboçaremos algumas conclusões preliminares.

# 2. A mecânica do cubo de Rubik

O Cubo de Rubik é um quebra-cabeça tridimensional, cujo objetivo é fazer com que cada lado do cubo tenha apenas uma cor, como mostrado na Figura 1. Cada uma das três divisões horizontais do cubo é chamada de linha, ao passo que cada uma das três divisões verticais do cubo é chamada coluna. O cubo é construído de tal maneira que linhas e colunas podem girar para ambos os lados (ver Figura 2). Assim a cada instante pode se realizar 12 movimentos (de ¼ de volta) com o cubo, mudando sua configuração. Dessa forma mesmo após alguns poucos movimentos, as cores do cubo terminam embaralhadas. O desafio do quebra-cabeça é retornar as peças para suas posições originais.


Figura 1: Diagrama de um cubo de Rubik resolvido. Os seis lados são: superior ( S ), frontal (F), e direito (D) os lados são visíveis. Os restantes: lados esquerdo ( E ), traseiro ( T ) e inferior ( I ) que são mostradas pelas imagens projetadas.

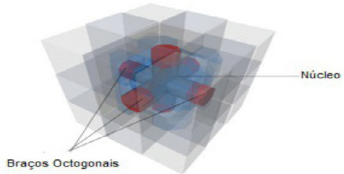



Figura 2: Diagrama do núcleo de um cubo de Rubik. O núcleo permite que cada linha e coluna do cubo girem para ambos os lados.

É difícil entender a mecânica do cubo sem primeiro conhecer os seus componentes. O cubo de Rubik consiste em duas componentes distintas: o núcleo e as peças (cubos) exteriores. A forma do núcleo consiste em um cubo central imaginário com seis braços octogonais ligados a cada uma das faces (Figura 2). Cada octógono é anexado ao cubo central permitindo a rotação livre em qualquer direção. As faces octogonais de cada um destes braços são perpendiculares ao cubo imaginário. As peças (cubos) exteriores são anexadas ao núcleo e podem ser divididas em três tipos: as centrais, as laterais e vértices (Figura 3). Há um total de seis peças centrais, cada um tem apenas uma face visível na construção final do cubo. Cada peça central é ligada perpendicularmente a um dos braços octogonais, as peças centrais nunca se movem em relação ao núcleo. Há doze peças laterais que formam as arestas do cubo, cada uma destas peças possui duas faces visíveis. Estas peças são conectadas ao núcleo por conectores cúbicos localizados nas faces não visíveis. Finalmente, há oito peças de vértice, cada uma com três faces visíveis. Cada peça do vértice possui um conector localizado na aresta oposta a de suas faces visíveis. Os conectores das peças laterais e de vértice se encaixam nas arestas dos braços octogonais.

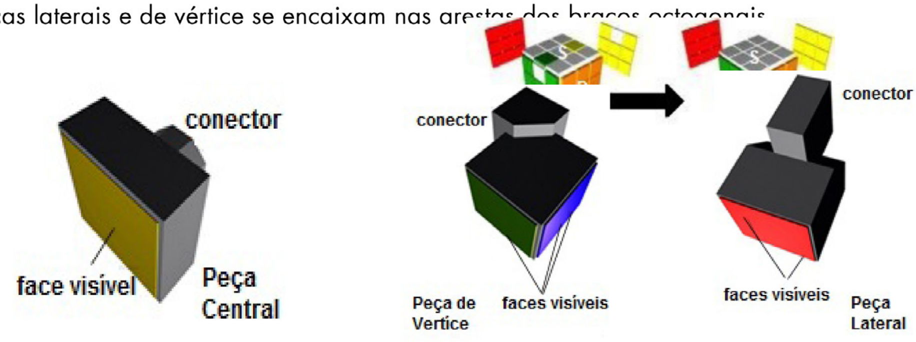



Figura 3: Componentes do Cubo de Rubik

Juntas, estas vinte e seis peças (Tabela 1) compõem a parte visível do cubo de Rubik. Cada uma delas é presa por seus conectores aos braços do núcleo, impedindo que as peças adjacentes saltem para fora. Como cada um dos braços octogonais pode rodar, as camadas do cubo (linhas e colunas) podem ser rotacionadas a partir da sua posição original. Quando um dos braços octogonais do núcleo gira, giram também os nove cubos externos conectados com ele, uma vez que estes cubos estão conectados aos núcleos e travados por seus vizinhos. Depois de apenas algumas rotações aleatórias de diferentes lados, as cores em cada uma das faces estarão muito bem embaralhadas, sendo um problema geralmente difícil devolve-lo a posição original (não embaralhado).

Tabela 1: Peças do Cubo de Rubik.

| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| # peças | 6 | 8 | 12 |
| # faces | 1 | 3 | 2 |

## 2.1 Uma "estratégia" de solução

Atualmente existe uma infinidade de métodos de solução para o cubo de Rubik, tais métodos utilizam diferentes sequências de movimentos ou dividem o problema de resolver o cubo em diferentes problemas menores que uma vez resolvidos conduzem a solução final. Nesta seção será apresentado um método simples, que utiliza apenas três sequências de movimento para mudar ou ajustar peças diferentes. Na terminologia empregada nesta seção ajustar uma peça significa alterar a direção das cores de uma peça (Fig. 4). Comutar duas peças refere-se a trocar a posição de duas peças diferentes (Fig. 5).

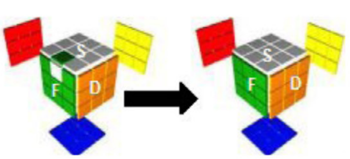



Figura 4: Ajustar uma peça

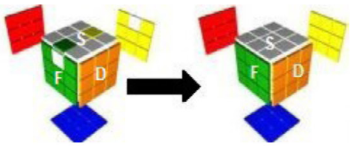



Figura 5: Comutar duas peças

**Sequência 1** – Um movimento para ajustar dois vértices consecutivos (nada mais é alterado) ( Fig. 6): i. Segurar o cubo de modo que os dois vértices a serem ajustados estejam na face superior; ii. Gire a coluna central para cima; iii. Gire a linha superior para esquerda; iv. Repita as etapas ii e iii mais duas vezes; v. Gire a linha superior para esquerda; vi. Gire a coluna central para baixo; vii. Repita os passos v e vi mais duas vezes; viii. Rodar a linha superior para esquerda duas vezes.

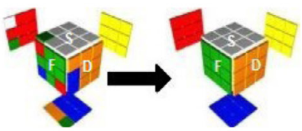



Figura 6: Ajustar vértices consecutivos

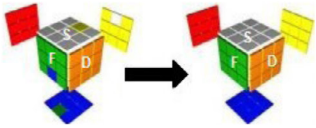



Figura 7: Ajustar três cantos

**Sequência 2** – Um movimento para ajustar três vértices de uma face (altera arestas adjacentes) (Fig. 7): i. Segure o cubo de forma que as arestas a serem alteradas estejam na face superior e voltadas para você e o canto inalterado fique na parte superior direita; ii. Gire a linha superior para a direita; iii. Gire a face frontal no sentido horário duas vezes; iv. Gire a linha superior para esquerda; v. Gire a face frontal no sentido horário; vi. Gire a linha superior para a direita; vii. Gire a face frontal no sentido horário; viii. Gire a linha superior para esquerda; ix. Gire a face superior no sentido horário duas vezes.

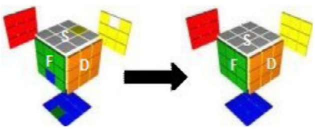



Figura 8: Mudar a posição das arestas na mesma face

**Sequência 3** – Um movimento para mudar as posições de três peças laterais em um mesmo plano (altera nada mais) (Fig. 8): i. Segurar o cubo de modo que o plano a ser alterado seja uma coluna central; ii. Posicione a quarta peça lateral no plano inferior e na face oposta a que esta próxima de você; iii. Gire a coluna central; iv. Gire a linha superior para esquerda duas vezes; v. Gire a coluna central para baixo; vi. Gire a linha superior para esquerda duas vezes.

Estas três sequências de movimento são vantajosas, pois seus efeitos são facilmente compreendidos e são de simples memorização. O planejamento de um algoritmo para resolver o cubo de Rubik utilizando estes três seria um projeto de ciências bastante interessante e factível para alunos que demonstram gosto por resolver quebra-cabeças, capacidade de raciocínio espacial e/ou já conheça como resolver o cubo de Rubik. O objetivo do aluno neste trabalho seria determinar se as três sequências de movimentos são suficientes para resolver o cubo em qualquer situação. Em outras palavras, é possível resolver o cubo com apenas estes três sequências de movimentos, ou seriam necessários movimentos adicionais?

Uma estratégia para resolver o cubo de Rubik utilizando estes três movimentos poderia ser dividida em cinco passos:

**Passo 1:** Fazer uma cruz em um lado do cubo. Fazer a cruz é simplesmente uma questão de inserção uma a uma cada uma das quatro peças laterais, um a um, em torno da peça central sem remover as peças que já foram colocadas. Gire a cruz até algumas das cores das peças laterais que formam a cruz combinem com as peças nos lados do cubo. Se apenas uma cor combinar, continue rotacionando a cruz: É sempre possível obter a combinação de duas cores.

No caso de se obter apenas duas peças laterais combinando, as peças laterais que não combinarem deve ser trocado de posição. Existem duas possibilidades diferentes. Ou as duas peças laterais a serem trocadas estão próximas umas das outras, ou estão em lados opostos do cubo. Ambos os casos podem ser tratados pela mesma estratégia. Em primeiro lugar, desloque uma destas peças para a face oposta de forma independente da camada onde foi feita a cruz. A seguir, gire a peça trocada sobre a camada superior até que ela fique posicionada diretamente acima da sua posição correta. Finalmente, gire esta peça novamente para a camada onde está a cruz. Este mesmo movimento também moverá a outra peça trocada para a camada oposta, onde ela pode ser levada para a posição correta utilizando a mesma estratégia no sentido inverso. Ao fim deste procedimento o cubo deve se encontrar num padrão análogo ao da Fig. 9. Este é um passo muito importante, visto que ele deverá ser repetido nos demais lados do cubo a fim de resolvê-lo.

Figura 9: Posição ao final do Passo 1.

Figura 10: Posição ao final do Passo 2.

**Passo 2:** Obtenha uma face de uma mesma cor: Para tanto deve-se inserir as 4 peças de vértice correspondente na camada onde foi feita a cruz. Neste ponto teremos 1/3 do cubo resolvido, como mostra a Fig. 10.

**Passo 3:** Monte a camada intermediária. O objetivo aqui é inserir uma peça lateral da camada superior da camada intermediária e não bagunçar o restante do cubo já resolvido. Ao fim deste passo teremos resolvido 2/3 do cubo, como mostra a Fig. 11.

**Passo 4:** Sem desfazer o que já está resolvido, construir uma cruz na face oposta do cubo e colocar as peças laterais de cores correspondentes em suas posições corretas.

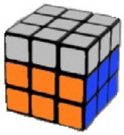


Figura 11: Posição ao final do Passo 3.

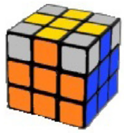


Figura 12: Posição ao final do Passo 4

**Passo 5:** Neste momento o cubo deve se encontrar de forma equivalente a mostrada na Fig.12. Agora basta mover as últimas peças vértice desta camada para a posição correta e orientação correta. O cubo está resolvido.

# 3. Entropia, Segunda Lei da Termodinâmica e o cubo de Rubik

O ensino da segunda lei da termodinâmica e do seu conceito, associado à entropia, tem sido considerado problemático por vários autores (Ref.[9]). Em grande parte, esta dificuldade esta associada a concepções prévias errôneas bastante difundidas, além de interpretações e exemplos equivocados em tentativas malsucedidas de descrever a entropia em termos leigos (Ref.[10]). Se há dificuldade em descrever a entropia em termos leigos, não há nenhuma dificuldade em descrevê-la matematicamente: entropia é uma medida do número de microestados acessíveis consistentes com o estado macroscópico de um sistema termodinâmico. Formalmente, temos

$$S = k \ln \Omega \,, \tag{1}$$

onde S denota a entropia do sistema, $k$ é uma constante de proporcionalidade (chamada constante de Boltzmann) e $\Omega$ é o número de microestados acessíveis ao sistema. Um macroestado é o estado do sistema descrito por variáveis empíricas medidas macroscopicamente, tais como temperatura, pressão, volume, magnetização, energia total. Um macroestado é o que observamos como resultado dos efeitos coletivo do estado dos diversos subcomponentes do sistema. Cada uma das configurações dessa coleção de subcomponentes é o que chamamos de microestado. Usualmente há diversos microestados distintos que resultam em um mesmo macroestado. Assim, a entropia é uma medida de quantos microestados resultam naquelas propriedades macroscópicas observadas, ou em outras palavras de quantas configurações diferentes o sistema pode se apresentar e ainda sim ter as mesmas propriedades de larga escala. A Eq. (1) pode ser reescrita em termos da probabilidade $p_n$ de se encontrar o sistema no $n-$ésimo microestado (ver Ref.[11]), assumindo a forma

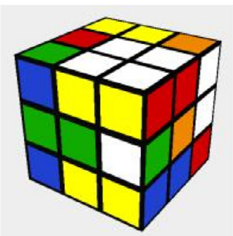
$$S = -k \sum_n p_n \ln p_n \quad , \tag{2}$$

Do ponto de vista puramente macroscópico, a entropia seria, uma medida da capacidade do sistema para realizar transformações, de maneira bastante análoga a nossa ideia de energia como uma medida da capacidade do sistema de realizar trabalho. De fato, a palavra entropia foi cunhada justamente afim explorar esta analogia unindo o prefixo "en" à expressão grega ή tropή, que significa transformação (Ref.[12]).

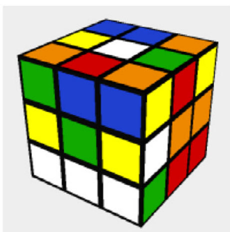
Em geral, ao passar por transformações a energia de um sistema se distribui pelos seus vários constituintes, além disso, energia e partículas são trocadas com o ambiente no qual se encontra o sistema. Isso permite que o sistema acesse um número cada vez maior de microestados, o que resulta em um aumento da entropia do sistema. Quando a entropia do sistema atingir seu valor máximo, as propriedades macroscópicas do sistema não mais se modificam, e atingimos o chamado equilíbrio. Estas observações constituem a conhecida segunda lei da termodinâmica.

## 3.1 A segunda lei da termodinâmica no cubo de Rubik

Vamos descrever a "coloração" de uma face pelo número de quadrados azuis (B), verdes (G), laranjas (O), vermelhos (R), brancos (W) e amarelos (Y) nesta face. Assim a coloração da face superior (quadrado central branco) na Figura 13a, pode ser descrita pelos inteiros 0,1,1,1,4,2 enquanto a coloração da face frontal (quadrado central verde) é dada pelos inteiros 2,2,0,0,1,4. Em outras palavras a coloração da face corresponde a um vetor $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$ de seis dimensões, que denominaremos vetor de cor. Este vetor da uma medida do grau de desordenamento da face. Note também, que a soma das componentes do vetor de cor sempre resulta em nove. Na Figura 13, $\overrightarrow{C_s}$ o vetor de cor da face superior tem comprimento $C_s = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{23}$, já $\overrightarrow{C_f}$ o vetor de cor da face frontal tem comprimento $C_f = 5$.



(a)



(b)

Figura 13: (a) Denotando por $|\,0\,\rangle$ o estado resolvido do cubo, e por B uma rotação de 90° no sentido no sentido anti-horário da face azul (respectivamente G,O, R,W e Y para as demais faces), a posição acima corresponde a $\mathrm{YBRWBY}\,|\,0\,\rangle$. (b) Um cubo com a face superior com a maior mistura de cores possível.

No caso de uma face estar completamente resolvida o vetor de cor desta face tem comprimento nove, que corresponde a seu valor máximo. Por outro, lado o caso com a face com maior mistura de cores possível (Figura 13b) todas as componentes do vetor de cor tem três componentes com valor um e três componentes com valor dois, neste caso o vetor de cor resultante tem o menor comprimento possível que corresponde a $\sqrt{15}$.

Um experimento instrutivo é verificar o comportamento do comprimento do vetor de cor de uma face após alguns movimentos aleatórios com o cubo. Começando com um cubo resolvido ( façamos alguns movimentos aleatórios com o mesmo). Um possível resultado deste experimento esta descrito nos Gráficos 1 e 2. Podemos notar que o comprimento do vetor de cor da face decresce rapidamente, para um valor ligeiramente inferior a 5 (Gráfico 1) e seu valor passa a flutuar em torno deste valor de equilíbrio (Gráfico 2).

É importante notar que os movimentos permitidos pelo cubo de Rubik fazem com que faces adjacentes interajam, trocando os cubos coloridos entre si. Assim, mesmo que tentemos propositalmente ordenar uma face (i.e. fazer o comprimento do vetor de cor desta face aumentar) essas interações, usualmente, tendem a desordenar as outras faces. Da mesma forma que no universo do cubo, no mundo real sistemas físicos em geral interagem e suas propriedades são determinadas por estados de equilíbrio, que para serem modificados alteram o equilíbrio de sistemas vizinhos.

Nossa observação experimental do cubo mostra que o comprimento do vetor de cor tende a decrescer com movimentos aleatórios, apesar disso do ponto de vista teórico todos os movimentos são reversíveis (i.e. se um movimento leva o cubo de um estado A para o estado B existe um movimento que leva o cubo de B para A). Em outras palavras parece haver uma "direção preferencial" para as transformações no cubo, uma "seta do tempo". Analogamente, enquanto acreditasse que processos físicos no nível microscópico são temporalmente simétricos, no nível macroscópico, muitas vezes, aparentemente este não é o caso: existe uma direção preferencial ou "seta do tempo". De fato, nossa pequena experiência ilustra uma versão da segunda lei da termodinâmica para o cubo de Rubik. Assim, mais do que uma atividade lúdica o cubo nos permite ensinar termodinâmica de uma forma desafiadora.

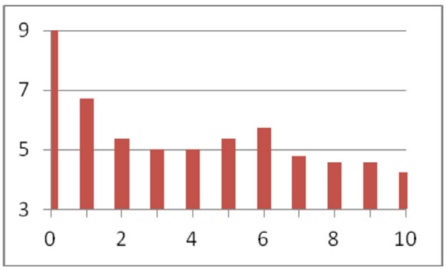



Gráfico 1 – Variação do comprimento do vetor de cor nos primeiros 10 movimentos.

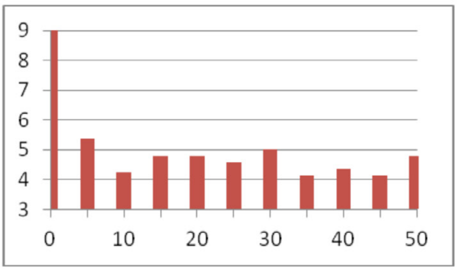



Gráfico 2 – Variação do comprimento do vetor de cor nos primeiros 10 movimentos

## 3.2. Entropia e o cubo de Rubik

Se continuarmos a fazer movimentos aleatórios com o cubo por algum tempo, podemos coletar dados estatísticos sobre a coloração das faces. É curioso notar que estados de máxima mistura de cores (i.e. os possíveis rearranjos de (2,2,2,1,1,1)) são bastante raros. Os estados mais frequentes são rearranjos de (3,2,2,1,10), isso ocorrer pois este estado pode ser formado pelo maior número de microestados diferentes, e portanto possuem a maior entropia. De fato, todos os rearranjos de (3,2,2,1,10), possuem $C = \sqrt{19} \cong 5$ e como consequência é entorno deste valor(aproximadamente 5) que flutua o valor de $C$ como visto nos Gráficos 1 e 2.

Um segundo experimento pode ser instrutivo para esclarecer como as propriedades do sistema flutuam em tono dos valores de equilíbrio. Seja $N_r$ o número de cores em uma face que ocupam exatamente $r$ quadrados nesta face. Por exemplo, os estados de máxima mistura têm $N_1 = N_2 = 3$ e todos os demais iguais à zero, já a distribuição de máxima entropia tem $N_0 = 1, N_1 = 2, N_2 = 2, N_3 = 1$ e todos os demais iguais à zero. Nosso experimento consiste em embaralhar o cubo e determinar a distribuição de cor, i.e os $N_r$ em uma face e repetir este procedimento até termos um número suficientemente grande de dados. Para 50 configurações aleatórias do cubo obtivemos a distribuição expressa no Gráfico 3.

Como esperado a distribuição média está muito próxima da distribuição mais provável. Como discutido isso ocorre pois a máxima entropia sinaliza a situação de equilíbrio para o sistema. Mas o Gráfico 3, também nos reserva uma agradável surpresa, ele lembra a forma de bem conhecida distribuição de Maxwell.

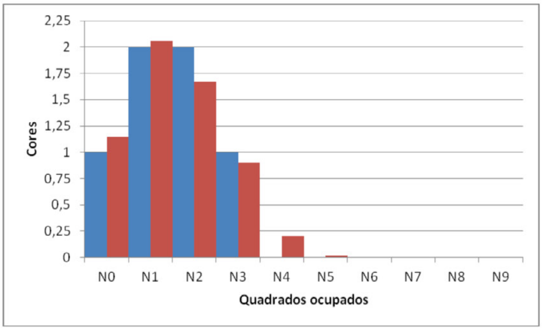



Gráfico 3 – Distribuição de Cores em uma face. Em azul a distribuição mais frequente, em vermelho a distribuição média.

## 3.3. A distribuição de Maxwell e o Cubo de Rubik

A distribuição de Maxwell é o nome pelo qual os físicos descrevem a distribuição de velocidades de partículas em gases ideais, i.e. Naqueles em que as partículas se movem livremente dentro de um recipiente estacionário sem interagir umas com as outras, com exceto durante breves colisões em que trocam energia e quantidade de movimento umas com as outras ou com o seu ambiente térmico. Surpreendentemente, não é uma simples coincidência que a distribuição de cores mostrada no Gráfico 3, lembre uma distribuição de Maxwell.

A questão da distribuição de cores em uma face do cubo pode ser descrita pelo seguinte problema de contagem: De quantas maneiras é possível distribuir as cores (B,G,O,R,W,Y) nos nove quadrados da face? Usando a notação da subseção anterior, então os $N_r$'s o número de cores que ocupam exatamente $r$ quadrados devem obedecer as seguintes relações:

$$N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 + N_9 = 6, \quad (3)$$
$$0N_0 + 1N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + 5N_5 + 6N_6 + 7N_7 + 8N_8 + 9N_9 = 9. \quad (4)$$

A Eq. (3) expressa o fato que existem apenas seis cores possíveis, enquanto a equação (4) expressa que estas cores ocuparão os nove quadrados da face. Este problema pode ser reinterpretado para uma situação mais "física" como sendo determinar o número de formas possíveis de se distribuir nove unidades (quanta) de energia entre seis átomos distinguíveis. Se existem $N_9$ átomos com nove quanta, $N_9$ átomos com oito quanta, ..., $N_9$ átomos sem quantum , o número total de casos diferentes é dada por:

$$\Omega = \frac{6!}{N_1!\,N_2!\,N_3!\,\dots N_9!}\,.$$

Dividindo as equações (3) e (4) por 6 podemos reinterpreta-las em termos de probabilidades:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 = 1, \quad (5)$$
$$0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 + 9p_9 = {}^3/_2. \quad (6)$$

A situação de equilíbrio, ou seja, a situação de maior entropia é obtida maximizando a Eq. (2), sujeita as restrições impostas pelas Eq.(5) e (6). Procedendo desta maneira (utilizando, por exemplo, multiplicadores de Lagrange, (Ref.[12])) obtemos:

$$N_r = \frac{6}{Z}e^{-kr}\,, \quad (7)$$

onde $k \cong 0{,}492$ e $Z = \sum_{r=1}^{9} e^{-kr}$. Note que esta expressão é (monotônicamente) decrescente com o aumento de $r$, o que é ligeiramente diferente do comportamento obtido no Gráfico 3. Contudo salientamos que no cálculo acima não consideramos que o quadro central da face nunca se move e se quando o trocamos por um quadrado em uma borda ou em um canto da face, nosso cálculo contabiliza este como um microestado (acessível) diferente. Assim, os nove lugares da face devem de ser distribuídos entre as seis cores, cada um possuindo um determinado vetor de cor $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$, o que altera a contagem de estados, pois adiciona uma nova restrição. Com isso a expressão para número total de microestado precisa ser alterada:

$$\Omega = \frac{6!}{N_1!N_2!N_3!\dots N_9!} \times \frac{9!}{C_1!C_2!C_3!C_4!C_5!C_6!}.$$

Com isso a entropia dada pela Eq.(1) toma o valor máximo apenas para a distribuição em azul no Gráfico 3. É claro que um leitor atento, observará que este cálculo não é preciso, uma vez que ele desconsidera as interações entre as faces do cubo. Não obstante, ele concorda muito bem com a evidência empírica, que obtivemos. Este aspecto nos ensina também algo sobre a natureza da ciência: o uso modelos simplificados para explicar alguns aspectos da natureza, e a progressiva introdução de modelos mais e mais robustos para explicar toda a complexidade de um fenômeno.

Em todo caso, vemos que a distribuição de cores em um cubo de Rubik embaralhado pode ser analisada de uma maneira similar à forma como a Física Estatística analisa a distribuição de energias nas partículas de um gás.

# 4. Benefícios do uso do cubo de Rubik no ensino

Para além de um modelo para ilustrar aplicação de conceitos físicos contemporâneos eis alguns benefícios que podem ser esperados no uso do cubo de Rubik em sala de aula:

**Aumentar a autoconfiança, especialmente nos alunos com desempenho insuficiente.** Em muitos casos pessoas que mostram proficiência na solução do cubo apresentam dificuldades na escola. Tais pessoas tendem a gostar da abordagem mais pragmática e demonstram disposição para gastar horas de seu tempo praticando e tentando melhorar. Incorporar este tipo de atividade no ensino de física e matemática pode estimular estes estudantes, mostrando que suas competências são importantes para o estudo das disciplinas. Na outra ponta, os alunos que aprendem a resolver o cubo tendem a sentir-se bem consigo mesmas, uma vez que a maioria da população em geral não pode resolvê-lo. Pode se dizer que estes alunos sentem que se eles podem resolver o cubo, então certamente eles podem fazer qualquer outra coisa que os professores peçam a eles. Em outras palavras, eles aprendem que se trabalharem o suficiente, eles podem ser bem sucedidos.

**Demonstrar a necessidade de prática.** Se os alunos resolveram o cubo uma vez e depois não forem convidados para resolvê-lo novamente, ao final de um ano ainda conseguiria fazê-lo? Muito provavelmente não. Na corrida para cobrir ementas extensas, é fácil ensinar algo uma vez e nunca mais voltar ao assunto. E se os alunos não se lembrarem do conteúdo, então eles realmente não terão aprendido. Ao praticar a resolução do cubo de Rubik, a necessidade da prática é reforçada.

**Fornece exemplo de aprendizagem verdadeira.** Pode-se argumentar que a verdadeira aprendizagem ocorreu quando já não precisamos parar para pensar. Seja amarrar os sapatos, ou usar os talheres para comer, no dia a dia uma pessoa realiza uma infinidade de atividades, sem realmente pensar em como fazê-las. Usualmente todas estas tarefas requerem atenção e trabalho para serem aprendidas. No entanto, depois de aprendidas e repetidamente executadas esses habilidades se tornam praticamente automáticas.

Eventualmente, os alunos tornam-se tão proficientes em resolver o cubo de Rubik que podem resolvê-lo sem realmente pensar sobre isso. Sua memória motora assume e eles resolvem o cubo sem praticamente sem raciocinar. Quando algo se torna automático ele é armazenado na memória de longo prazo (Ref. [13]), que é o objetivo de todo aprendizado. Um dos principais objetivos da educação é ajudar os alunos a acumular conhecimento útil na memória de longo prazo e utilizar essa informação em ocasiões posteriores para resolver efetivamente os problemas.

# 5. Conclusões

Com suas 26 peças o cubo de Rubik apresenta algumas das propriedades mais essenciais da física contemporânea, tais como simetrias de padrões discretos, caracterizada por números quânticos; leis do movimento e não comutatividade; teoremas de conservação e irreversibilidade. Por tais características, o cubo oferece oportunidades ímpares para ensinar conceitos físicos modernos, além de desenvolver habilidades de resolução de problemas.

De fato há algo especial neste quebra-cabeça 3-D, que cativa desde cientistas aos estudantes mais apáticos. Por estes motivos, é bastante proveitoso para professores de física aproveitar o Cubo de Rubik, como uma valiosa ferramenta educacional.

**Exploring thermodynamics in a Rubik's Cube**

**Abstract:** The famous Rubik's cube offers interesting opportunities to teach various concepts from physics, thermodynamics and statistical mechanics special. This article briefly discusses some ideas for a teacher to use this tool and apply the concepts in the construction of the second law of thermodynamics and entropy, including its statistical aspect.

**Keywords: Rubik's Cube, Physics Teaching, Entropy**

## Referências bibliográficas

Elshout, Jan J and Veenman, Marcel VJ. **Relation between intellectual ability and working method as predictors of learning.** The Journal of Educational Research, 85(3): 134-143. 1992

Styer, Daniel F. **Getting there is half the fun. American Journal of Physics**, 66: 105-106, 1998.

Heller, Patricia and Hollabaugh, Mark. **Teaching problem solving through cooperative grouping. Part 2: Designing problems and structuring groups.** American Journal of Physics, 60(7): 637-644, 1992.

Polya, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2, 1978.

Borko, Hilda; Eisenhart, Margaret; Brown, Catherine A; Underhill, Robert G; Jones, Doug, and Agard, Patricia C. **Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily.** Journal for research in mathematics education, 23(3):194-222, 1992.

Joyner, David. **Adventures in group theory: rubik's machine & other mathematical toys.** The Mathematical Intelligencer, 27(2):92-92,2005.

Marx, George; Gajzago, Eva; and Gnadig, Peter. **The universe of rubik's cube.** European Journal of Physics, 3(1):39, 1982.

Golomb, Solomon W. **Rubik's cube and model of quark confinement.** American Journal of Physics, 49(11):1030-1031, 1981.

DOS SANTOS, Zanoni Tadeu Saraiva. **Conteúdo de entropia na física do ensino médio: análise do material didático e abordagem histórica.** HOLOS-ISSN 1807-1600, v. 3, p. 75-84, 2009.

JOHNSTONE, A. H.; MACDONALD, J. J.; WEBB, G. **Misconceptions in school thermodynamics. Physics education**, v. 12, n. 4, p. 248, 1977.

REIF, Frederick. **Fundamentals of statistical and thermal physics.** Waveland Press, 2009.

CLAUSIUS, Rudolf. On several convenient forms of the fundamental equations of the mechanical theory of heat. Philosophical Magazine and Journal of Science, 1865.

Lee, Timothy D; Swinnen, Stephan P, and Serrien, Deborah J. Cognitive effort and motor learning. Quest, 46(3):328-344, 1994.