

# 9

## CAPÍTULO

# **INTRODUÇÃO ÀS TÉCNICAS DE PERTURBAÇÃO APLICADAS À RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES**

**Oliveira, Leandro 1 \*;**  
**Borges, Romes 2**

1Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão

2Departamento de Matemática. Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão

\* e-mail: [leandro\\_oliveira@live.com](mailto:leandro_oliveira@live.com)

---

**Resumo:** Nos últimos anos, várias técnicas têm sido propostas com o objetivo de se resolver problemas dinâmicos não-lineares, dentre elas destacam-se os chamados métodos de perturbação. O presente trabalho conta com um estudo introdutório acerca de sistemas vibratórios não lineares, sendo que, para isto, são utilizadas técnicas chamadas de Métodos de Perturbação. Para exemplificar o funcionamento dos métodos apresentados, utiliza-se o software Maple 16® para a resolução analítica das equações diferenciais não lineares, conhecida como equação de Duffing. Ainda neste sentido, utiliza-se do software MatLab® para se implementar as curvas de solução do problema proposto.

**Palavras-chave:** Sistemas dinâmicos; otimização; método de perturbação

---

## **1. Introdução**

Segundo Marques (2000), estruturas mecânicas, de construção civil, máquinas e equipamentos industriais estão sujeitos a vibrações mecânicas indesejáveis que podem comprometer seu correto funcionamento e sua integridade, ou ainda causar desconforto a operadores e usuários. Assim, de modo a amenizar tais vibrações, Frahm propôs a utilização do absorvedor dinâmico de vibração (ADV). Para Soeiro, o ADV é um dispositivo de massa, rigidez e amortecimento que uma vez acoplado a uma estrutura primária, absorve a energia. Para Cruz (2008), em sua grande maioria, os problemas de vibrações em engenharia são naturalmente não-lineares,

fazendo com que uma análise linear se torne inadequada para muitas aplicações. Em sistemas não lineares, aparecem vários fenômenos que não aparecem em situações lineares, necessitando assim, um conhecimento mais aprofundado em matemática aplicada, física e engenharia para estudar esse tipo de problema. Na grande maioria, os sistemas se tornam muito extensos e complexos para a sua resolução, fazendo assim, necessária a utilização de softwares para desenvolver algoritmos envolvendo programação simbólica e obter as soluções. Nessa categoria, um dos softwares mais conhecidos é o Maple®, desenvolvido e comercializado pela Maplesoft, capaz de computar expressões algébricas, simbólicas, permitindo o desenho de gráficos no plano ou no espaço.

## 1.1. Sistemas com um grau de liberdade

O pêndulo matemático é um dos mais simples sistemas mecânicos, mas apesar de sua simplicidade, possibilita serem testados com sucesso muitos métodos matemáticos empregados em oscilações não-lineares. Desprezando-se o amortecimento, a equação diferencial que rege as oscilações livres do pêndulo é dada por:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0 \quad (1)$$

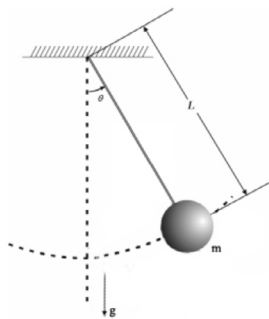


Figura 1 – Oscilador com 1 grau de liberdade (MARQUES, 2000, p.8).

onde  $m$  é a massa,  $L$  o comprimento do pêndulo,  $g$  a aceleração da gravidade e  $\omega_0^2 = g/L$ ; o ângulo representa o afastamento da posição de equilíbrio vertical. Para o sistema linearizado é usada a aproximação  $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!}$ , isto é, é considerado apenas o primeiro e segundo termo da série de TAYLOR  $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$ , o que conduz a bons resultados para pequenos valores de  $\theta$ .

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\omega_0^2}{6} x^3 = 0 \quad (2)$$

Baseando na equação de DUFFING (eq. 2) para se fazer a análise, faz-se  $-\frac{\omega_0^2}{6} = \varepsilon$ , sendo  $\varepsilon$  um pequeno parâmetro.

## 1.2. Sistema de dois graus de liberdade

A Figura 2 (a) representa um Absorvedor Dinâmico de Vibração Auto Paramétrico de dois graus de liberdade  $x(t)$  e  $\theta(t)$ . Onde  $\theta(t)$  representa um dispositivo proposadamente construído para operar sob condições de combinações de ressonâncias internas e externas.

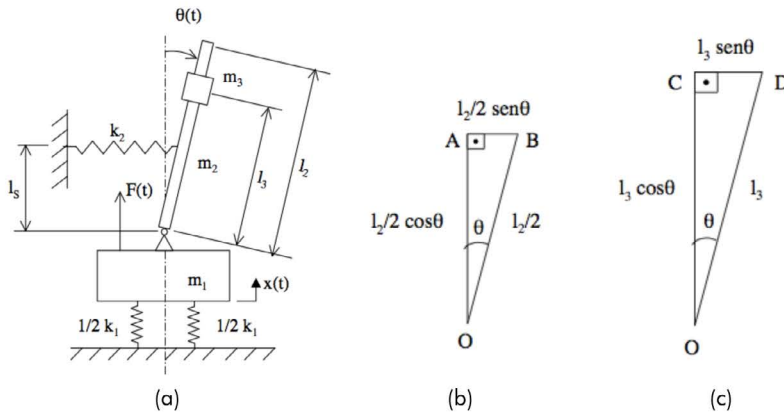


Figura 2 – (a) Absorvedor Auto-Paramétrico; (b) Posição do centro de massa  $m_2$ ; (c) Posição do centro de massa  $m_3$ .

A massa  $m_1$  suportada pelas molas é excitada externamente pela força  $F(t)$  representa o sistema primário. A parte do pêndulo constitui o absorvedor de vibração. Esta parte poderia ser substituída por uma viga elástica ou qualquer outro componente elástico (THONSEN, 2003). Abaixo esta o sistema de equações que regem o movimento desse modelo.

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x + \gamma_1 \theta^2 - \frac{\gamma_1}{\omega_2^2} \dot{\theta}^2 = q \cos \Omega t \tag{3}$$

$$\ddot{\theta} + \omega_2^2 \theta + \gamma_2 x \theta - \frac{\gamma_2}{\omega_1^2} q \theta \cos \Omega t = 0 \tag{4}$$

onde as constantes são dadas por:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1+m_2+m_3}, \omega_2^2 = \frac{k_2 l_2^2}{\frac{1}{3}(m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2)}, q = \frac{Q}{m_1+m_2+m_3}$$

$$\gamma_1 = \frac{\frac{1}{2}(m_2 l_2 + 2m_3 l_3)}{m_1+m_2+m_3} \omega_2^2, \gamma_2 = \frac{\frac{1}{2}(m_2 l_2 + 2m_3 l_3)}{\frac{1}{3}(m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2)} \omega_1^2$$

A característica fundamental é que os efeitos não lineares são usados para suprimir a vibração do sistema da massa  $m_1$  suportada pelas molas.

### 1.3. Métodos de Perturbação

Esses métodos são viáveis apenas em não-linearidades pequenas, onde a solução é escrita como uma série de potências de um determinado parâmetro pequeno de perturbação. Nessas condições, com o aumento da quantidade de termos, a solução vai se tornando mais precisa. Com o aumento da não-linearidade, deve-se aumentar a quantidade de termos para que se obtenha uma boa aproximação. Em alguns casos, a solução se torna muito complexa, fazendo com que não seja possível a aplicação do método (PASQUETTI, 2008, p. 54).

### 1.4. Método das Expansões

Esse método de aproximação é o mais simples, porém suas soluções são passíveis a erro quando é acrescentado a quantidade de termos da solução.

Para uma expansão direta, deve-se assumir uma solução expansível na forma abaixo, em termos do parâmetro pequeno  $\varepsilon$ .

$$x(t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i x_i(t) \quad (5)$$

### 1.5. Método de Lindstedt – Poincaré

Nesse método, a frequência da solução é expandida em uma serie de potências na forma:

$$\omega = \omega_0 + \sum_{i=1}^n e_i \beta^i \quad (6)$$

Aplicando a transformação do tempo  $\tau = \omega t$  na equação, faz-se com que a resposta apareça na equação, e conseqüentemente,  $x$  passa a ser função de  $\tau$ .

O processo de resolução desse método é parecido com o Método das Expansões, onde são substituídas as expansões da eq. (5) em função de  $\tau$  e  $\omega$ , obtendo assim um sistema de equações que pode ser resolvido sequencialmente.

#### 1.5.1. Método do Balanço Harmônico

Segundo Pasquetti (2008), o MBH possui a forma mais simples e direta de aplicação. Um somatório de harmônicos, acrescido de um termo constante, tal qual a serie de Fourier, tomando como solução aproximada.

$$x(t) \approx A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \cos i\omega t + B_i \sin i\omega t \quad (7)$$

Substituindo a solução aproximada obtida da eq.(7) em uma equação diferencial qualquer. As potências e produtos trigonométricos que surgirão devido às não-linearidades são substituídos pela expansão destas potências em somatórios de harmônicos. Coletando os coeficientes de cada harmônico da eq.(7) e igualando os coeficientes do lado esquerdo aos coeficientes do lado direito da equação. Cada harmônico de interesse da eq.(7) produz uma equação não-linear. Tomando todas as equações, tem-se um sistema não-linear que é resolvido iterativamente para se determinar as constantes da solução aproximada.

Em problemas de vibrações forçadas amortecidos, os termos de seno e cosseno devem estar presentes ou deve-se adicionar um ângulo de fase a cada harmônico. Assim, a expansão da eq.(7) pode ser reescrita como:

$$x(t) \approx A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \cos(i\omega t + \phi_i) \quad (8)$$

Em problemas de vibração livre ou vibração forçada não-amortecida, não é necessário estarem presentes os termos de seno e cosseno, bastando apenas um destes termos sem o ângulo de fase para descrever uma boa aproximação.

### 1.5.2. Método das Múltiplas Escalas

No Método das Múltiplas Escalas, a solução (5) que era dada em função do tempo passa a ser obtida de funções de múltiplas escalas de tempo  $T_0, T_1, \dots, T_i$ . Assumindo  $T_i = \beta^i t$ , é possível escrever a equação do movimento como:

$$x = \sum_{i=0}^n x_i(T_0, \dots, T_n)\beta^i \quad (9)$$

O sistema de equações é obtido quando (6) é substituída na equação e posteriormente, coletados os termos de mesma potência de  $\beta$ , onde o sistema é resolvido sucessivamente.

## 2. Sistemas com um grau de liberdade

### 2.1. Aplicação de Técnicas de Perturbação

Seja o problema dado pela eq.(2), baseando na equação de DUFFING para se fazer a análise, faz-se  $-\frac{\omega_0^2}{6} = \varepsilon$ , sendo  $\varepsilon$  um pequeno parâmetro

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (10)$$

Usando o Método das Expansões, procura-se uma solução de segunda ordem da eq.(5), fazendo  $i = 2$ , temos,

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) \quad (11)$$

onde  $x_i(t), i = 0,1,2$ , são funções a serem ainda determinadas. A substituição da eq.(11) na eq.(10), e posteriormente ordenando em potências de  $\varepsilon$  fornece

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \varepsilon(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + x_0^3) + \varepsilon^2(\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + 3x_0^2 x_1) = 0 \quad (12)$$

Resultando em um sistema de equações que pode ser resolvido sucessivamente.

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (13)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^3 \quad (14)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -3x_0^2 x_1 \quad (15)$$

Utilizando a linguagem de programação simbólica Maple, é possível obter esse sistema seguindo o código a seguir.

```
> eq1 := diff(x(t), t$2) + omega_0^2*x(t) + epsilon*x(t)^3 = 0;
solAp := x(t) = add(epsilon^i*x_i(t), i = 0..2);
eq2 := collect(convert(subs(solAp, lhs(eq1) - rhs(eq1)), polynom), epsilon);
eq3 := convert(series(eq2, epsilon = 0, 3), polynom) = 0;
eq4 := subs(epsilon = 0, eq3), coeff(lhs(eq3), epsilon) = 0, coeff(lhs(eq3), epsilon^2) = 0;
```

Figura 3 – Obtenção do sistema no ambiente Maple®

A solução geral da eq.(13) pode ser escrita como

$$x_0(t) = A \sin(\omega_0 t + \gamma) \quad (16)$$

Substituindo a eq.(16) na eq.(14), e resolvendo o sistema para  $x_1(t)$ , obtém-se

$$x_1(t) = \frac{3t}{8\omega_0} A^3 \cos(\omega_0 t + \gamma) - \frac{1}{32\omega^2} A^3 \sin(3\omega_0 t + 3\gamma) + A_1 \sin(\omega_0 t + \gamma_1) \quad (17)$$

Substituindo as equações (10) e (13) na equação (11) e resolvendo-a, obtém-se  $x_2(t)$  e conseqüentemente a solução para o Método das Expansões. Resolvendo para os Métodos do Balanço Harmônico e Múltiplas Escalas, é possível fazer uma comparação dos resultados, como apresentado na Fig. 4.

Na Figura 4a, é mostrada as soluções pelos Métodos das Expansões, Balanço Harmônico e Múltiplas Escalas. Na Figura 4b, é possível perceber uma aproximação de três casas decimais, validando assim os métodos.

Observando a figura a seguir, foi obtida uma melhor solução para o problema proposto utilizando os métodos do Balanço Harmônico e o das Múltiplas Escalas.



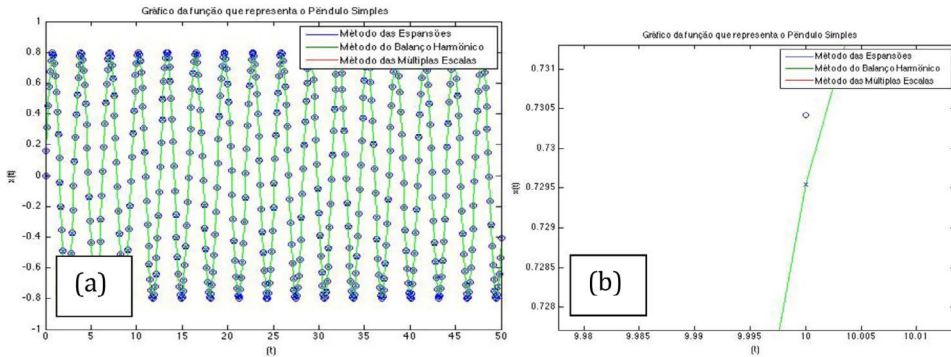


Figura 4 – Resposta no tempo, a) Visão geral, b) Aproximação para melhor visualização das respostas

## 2.2. Sistemas com não-linearidades quadráticas e cúbicas

Considerando uma partícula de massa  $m$  com oscilações livres sob a ação da gravidade e contida por uma mola não linear. A equação do movimento dada por

$$\frac{d^2}{dt^2} x + x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 0 \tag{18}$$

### 2.2.1. Método das Expansões

Considerando uma aproximação com três termos para  $x(t)$ , tem-se

$$x = \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i x_i \tag{19}$$

onde  $\varepsilon$  é um pequeno parâmetro. Substituindo esta expansão na eq.(18), ampliando o resultado e descartando os termos superiores, tem-se

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} x_1 + x_1 \right) \varepsilon + \left( \frac{d^2}{dt^2} x_2 + \alpha_2 x_1^2 + x_2 \right) \varepsilon^2 + \left( \frac{d^2}{dt^2} x_3 + x_3 + 2 \alpha_2 x_1 x_2 + \alpha_3 x_1^3 \right) \varepsilon^3 = 0 \tag{20}$$

e chega-se ao seguinte sistema de equações quando agrupamos os termos de mesma potência de  $\varepsilon$

$$\frac{d^2}{dt^2} x_1 + x_1 = 0 \tag{21}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x_2 + \alpha_2 x_1^2 + x_2 = 0 \tag{22}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x_3 + x_3 + 2 \alpha_2 x_1 x_2 + \alpha_3 x_1^3 = 0 \quad (23)$$

que pode ser resolvido sequencialmente. Primeiramente deve-se determinar  $x_1(t)$  resolvendo a eq.(21)

$$x_1(t) = a \cos(\beta + t) \quad (24)$$

Substituindo a eq.(24) na equação de segunda ordem (22), e resolvendo, obtém-se:

$$x_2(t) = \frac{1}{6} \alpha_2 a^2 \cos(2\beta + 2t) - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2 \quad (25)$$

substituindo  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  na equação de terceira ordem (23), resolvendo a equação e retirando as partes homogêneas, tem-se:

$$x_3(t) = \frac{5}{12} t \alpha_2^2 a^3 \sin(\beta + t) - \frac{3}{8} t \alpha_3 a^3 \sin(\beta + t) + \frac{1}{48} \alpha_2^2 a^3 \cos(3\beta + 3t) + \frac{1}{32} \alpha_3 a^3 \cos(3\beta + 3t) \quad (26)$$

Ao considerar as três soluções de  $x$  e substituindo na eq.(19) obtém-se a aproximação para a terceira ordem da solução da equação

$$x(t) = \varepsilon a \cos(\beta + t) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{6} \alpha_2 a^2 \cos(2\beta + 2t) - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2 \right) + \varepsilon^3 \left( \frac{5}{12} t \alpha_2^2 a^3 \sin(\beta + t) - \frac{3}{8} t \alpha_3 a^3 \sin(\beta + t) + \frac{1}{48} \alpha_2^2 a^3 \cos(3\beta + 3t) + \frac{1}{32} \alpha_3 a^3 \cos(3\beta + 3t) \right) = 0 \quad (27)$$

A solução pode ser melhorada aumentando a quantidade de termos na expansão de  $x(t)$

### 2.2.2. Método de Lindstedt – Poincaré

Nesse método, a solução é expandida em uma serie de potências de perturbação, para isso, fazendo-se  $\tau = \omega t$  e aplicam-se as expansões abaixo para obter uma solução de segunda ordem para eq.(5).

$$\omega = 1 + \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i \omega_i \quad (28)$$

$$x(\tau) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i x_i(\tau) \quad (29)$$

Substituindo as equações (28) e (29) na eq.(5), expandindo o resultado e descartando os termos de ordens superiores, é obtido

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{d\tau^2} x_1(\tau) + x_1(\tau) \right) \varepsilon + \left( 2 \left( \frac{d}{d\tau^2} x_1(\tau) \right) \omega_1 + \frac{d}{d\tau^2} x_2(\tau) + \alpha_2 x_1(\tau)^2 + x_2(\tau) \right) \varepsilon^2 + \\ & \left( \left( \frac{d}{d\tau^2} x_1(\tau) \right) (2\omega_2 + \omega_1^2) + \frac{d}{d\tau^2} x_3(\tau) + 2 \left( \frac{d}{d\tau^2} x_2(\tau) \right) \omega_1 + x_3(\tau) + 2\alpha_2 x_1(\tau) x_2(\tau) + \right. \\ & \left. \alpha_3 x_1(\tau)^3 \right) \varepsilon^3 = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Agrupando os termos de mesma potência de  $\varepsilon$ , chega-se ao sistema de equações abaixo:

$$\frac{d}{d\tau^2} x_1(\tau) + x_1(\tau) = 0 \quad (31)$$

$$2 \left( \frac{d}{d\tau^2} x_1(\tau) \right) \omega_1 + \frac{d}{d\tau^2} x_2(\tau) + \alpha_2 x_1(\tau)^2 + x_2(\tau) = 0 \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{d\tau^2} x_1(\tau) \right) (2\omega_2 + \omega_1^2) + \frac{d}{d\tau^2} x_3(\tau) + 2 \left( \frac{d}{d\tau^2} x_2(\tau) \right) \omega_1 + x_3(\tau) + 2\alpha_2 x_1(\tau) x_2(\tau) \\ & + \alpha_3 x_1(\tau)^3 = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

A solução é obtida resolvendo as equações acima sequencialmente. O primeiro termo da expansão é considerado como sendo a frequência natural do sistema linear. Resolvendo a eq.(31), encontra-se  $x_1(\tau)$ .

$$(34)$$

$$x_1(\tau) = a \cos(\beta + \tau)$$

Substituindo a eq.(34) em (32), determina-se a solução de  $x_2(\tau)$

$$x_2(\tau) = \frac{1}{6} \alpha_2 a^2 \cos(2\beta + 2\tau) - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2 \quad (35)$$

Substituindo as equações (34) e (35) na eq.(33), determina-se a solução de  $x_3(\tau)$ , e usando o terceiro termo da solução para retirar os termos seculares, obtém-se uma aproximação de segunda ordem para a solução de  $x(\tau)$

$$x(\tau) = \epsilon a \cos(\beta + \tau) + \epsilon^2 \left( \frac{1}{6} \alpha_2 a^2 \cos(2\beta + 2\tau) - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2 \right) \quad (36)$$

onde

$$\tau = \left( 1 - \frac{1}{24} \epsilon^2 a^2 (10\alpha_2^2 - 9\alpha_3) \right) t \quad (37)$$

### 2.2.3. Verificação das respostas para as Técnicas Apresentadas

Obtendo a solução através do método das Múltiplas Escalas, é possível analisar a precisão para o sistema proposto. Na Figura 5a, podemos perceber que as respostas no tempo  $t$  estão próximas, e essa verificação é acentuada visualizando a Figura 5b, onde é possível observar uma precisão de quatro casas para as soluções.

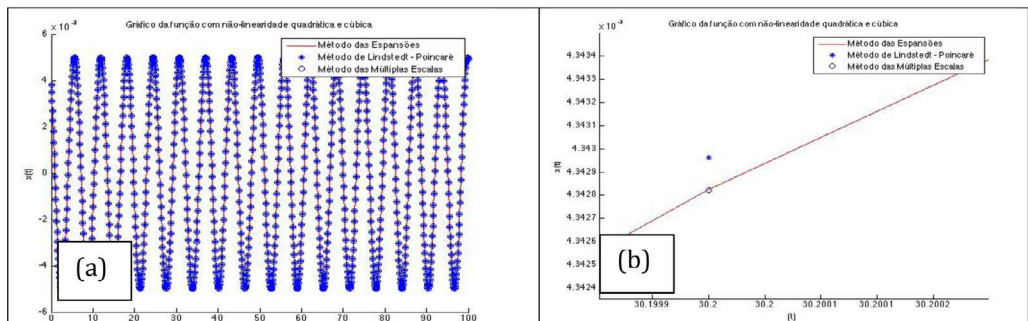


Figura 5 – Gráfico da função com não-linearidade quadrática e cúbica, a) Visão Geral, b) Aproximação para verificação da precisão das respostas

## 3. Sistemas com dois graus de liberdade

### 3.1. Absorvedor Dinâmico de Vibrações Auto-Paramétrico

Voltando ao sistema dado pela Fig. (5) e assumindo que, nas equações (3) e (4), as massas  $m_2$  e  $m_3$  são muito menores em relação à massa  $m_1$ , implica que na primeira aproximação os termos contendo  $\dot{\theta}^2$  e  $q\theta\cos(\Omega t)$  podem ser desconsiderados em comparação com os termos lineares e não lineares

remanescentes. Assim, considerando amortecimento viscoso, tem-se as seguintes equações do movimento para o absorvedor:

$$\ddot{x} + 2\beta_1\dot{x} + \omega_1^2x + \gamma_1\theta^2 = q \cos \Omega t \quad (38)$$

$$\ddot{\theta} + 2\beta_2\dot{\theta} + \omega_2^2\theta + \gamma_2x\theta = 0 \quad (39)$$

O sistema é denominado auto-paramétrico devido às equações (38) e (39) estarem acopladas entre si, ou seja, a solução  $x(t)$  da equação (38) atua como uma excitação paramétrica no termo  $x\theta$  da eq.(39). Estas equações só influenciam entre si por meio dos termos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

O princípio do absorvedor auto-paramétrico é que a energia contida na massa  $m_1$  seja transferida por meio dos movimentos da parte do pêndulo através do acoplamento não linear da massa primária e do absorvedor. Assim, será realizada uma análise de perturbação para a condição  $\Omega = \omega_1$ , que é o caso mais importante, pois corresponde à ressonância do sistema primário  $m_1$ .

### 3.1.1. Método do Balanço Harmônico (MBH)

A solução aproximada das equações (38) e (39) deve conter o harmônico fundamental  $\Omega$  pois o mesmo deve estar em fase com a força aplicada em (38), além do termo constante e os termos de seno e cosseno devido se ter uma não linearidade quadrática. Assim, tem-se as aproximações:

$$x(t) \approx A_0 + A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \sin(\Omega t) \quad (40)$$

$$\theta(t) \approx B_0 + B_1 \cos(\Omega t) + B_2 \sin(\Omega t) \quad (41)$$

Substituindo as equações (40) e (41) no sistema de equações (38) e (39), resulta em

$$\begin{aligned} &(-A_1\Omega^2 \cos(\Omega t) - A_2\Omega^2 \sin(\Omega t)) + 2\beta_1(-A_1\Omega \sin(\Omega t) + A_2\Omega \cos(\Omega t)) + \omega_1^2(A_0 \\ &+ A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \sin(\Omega t)) + \gamma_1(B_0 + B_1 \cos(\Omega t) + B_2 \sin(\Omega t))^2 \\ &= q \cos \Omega t \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} &(-B_1\Omega^2 \cos(\Omega t) - B_2\Omega^2 \sin(\Omega t)) + 2\beta_2(-B_1\Omega \sin(\Omega t) + B_2\Omega \cos(\Omega t)) + \omega_2^2(B_0 \\ &+ B_1 \cos(\Omega t) + B_2 \sin(\Omega t)) + \gamma_2(A_0 + A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \sin(\Omega t))(B_0 \\ &+ B_1 \cos(\Omega t) + B_2 \sin(\Omega t)) = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Expandindo as potencias de  $\theta$  e  $x$  e colocando em evidencia os harmônicos  $\sin(\Omega t)$  e  $\cos(\Omega t)$ , chega-se respectivamente à três sistemas de equações:

$$\omega_1^2 A_0 + \gamma_1 B_0^2 = 0 \quad (44)$$

$$\omega_2^2 B_0 + \gamma_2 A_0 B_0 = 0$$

$$-A_1 \Omega^2 + 2\beta_1 A_2 \Omega + \omega_1^2 A_1 + 2\gamma_1 B_0 B_1 = q \quad (45)$$

$$-B_1 \Omega^2 + 2\beta_2 B_2 \Omega + \omega_2^2 B_1 + \gamma_2 A_0 B_1 + \gamma_2 A_1 B_0 = 0$$

$$-A_2 \Omega^2 - 2\beta_1 A_1 \Omega + \omega_1^2 A_2 + 2\gamma_1 B_0 B_2 = 0 \quad (46)$$

$$-B_2 \Omega^2 - 2\beta_2 B_1 \Omega + \omega_2^2 B_2 + \gamma_2 A_0 B_2 + \gamma_2 A_2 B_0 = 0$$

Resolvendo os sistemas (44), (45) e (46) encontra-se os valores para  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  e  $B_2$ .

$$A_0 = -\frac{\omega_2^2}{\gamma_2} \quad (47)$$

$$B_0 = \sqrt{\frac{1}{\gamma_2 \gamma_1}} \omega_1 \omega_2 \quad (48)$$

$$A_1 = -\frac{\Omega^2(\Omega^4 + (4\beta_2^2 - \omega_1^2)\Omega^2 + (-2\omega_2^2 - 4\beta_2^2)\omega_1^2)q}{\Omega^8 + (4\beta_2^2 - 4\beta_1^2 - 2\omega_1^2)\Omega^6 + (\omega_1^4 + (-8\beta_2^2 - 4\omega_2^2)\omega_1^2 - 16\beta_2^2\beta_1^2)\Omega^4 + 4\omega_1^4(\omega_2^2 + \beta_2^2)\Omega^2 + 4\omega_2^4\omega_1^4} \quad (49)$$

$$B_1 = -\frac{\omega_2 \omega_1 (\Omega^4 + (-\omega_1^2 + 4\beta_2\beta_1)\Omega^2 - 2\omega_2^2\omega_1^2)q}{\sqrt{\frac{1}{\gamma_2 \gamma_1}}(\Omega^8 + (4\beta_2^2 - 4\beta_1^2 - 2\omega_1^2)\Omega^6 + (\omega_1^4 + (-8\beta_2^2 - 4\omega_2^2)\omega_1^2 - 16\beta_2^2\beta_1^2)\Omega^4 + 4\omega_1^4(\omega_2^2 + \beta_2^2)\Omega^2 + 4\omega_2^4\omega_1^4)\gamma_1} \quad (50)$$

$$A_2 = -\frac{2\Omega q(\beta_1 \Omega^4 + 4\beta_2^2 \Omega^2 \beta_1 - 2\omega_2^2 \omega_1^2 \beta_2)}{\Omega^8 + (4\beta_2^2 - 4\beta_1^2 - 2\omega_1^2)\Omega^6 + (\omega_1^4 + (-8\beta_2^2 - 4\omega_2^2)\omega_1^2 - 16\beta_2^2\beta_1^2)\Omega^4 + 4\omega_1^4(\omega_2^2 + \beta_2^2)\Omega^2 + 4\omega_2^4\omega_1^4} \quad (51)$$

$$B_2 = -\frac{2\omega_2 \Omega \omega_1 q((\beta_1 - \beta_2)\Omega^2 + \beta_2 \omega_1^2)}{\sqrt{\frac{1}{\gamma_2 \gamma_1}}(\Omega^8 + (4\beta_2^2 - 4\beta_1^2 - 2\omega_1^2)\Omega^6 + (\omega_1^4 + (-8\beta_2^2 - 4\omega_2^2)\omega_1^2 - 16\beta_2^2\beta_1^2)\Omega^4 + 4\omega_1^4(\omega_2^2 + \beta_2^2)\Omega^2 + 4\omega_2^4\omega_1^4)\gamma_1} \quad (52)$$

Quando substituídas as equações (47), (48), (49), (50), (51) e (52) nas equações (40) e (41), são obtidas as soluções não-lineares para  $x(t)$  e  $\theta(t)$ .

$$x(t) \approx \frac{\omega_2^2}{\gamma_2} - \frac{\Omega^2(\Omega^4 + (4\beta_2^2 - \omega_1^2)\Omega^2 + (-2\omega_2^2 - 4\beta_2^2)\omega_1^2)q}{\Omega^8 + (4\beta_2^2 - 4\beta_1^2 - 2\omega_1^2)\Omega^6 + (\omega_1^4 + (-8\beta_2^2 - 4\omega_2^2)\omega_1^2 - 16\beta_2^2\beta_1^2)\Omega^4 + 4\omega_1^4(\omega_2^2 + \beta_2^2)\Omega^2 + 4\omega_2^4\omega_1^4} \cos(\Omega t) - \frac{2\Omega q(\beta_1 \Omega^4 + 4\beta_2^2 \Omega^2 \beta_1 - 2\omega_2^2 \omega_1^2 \beta_2)}{\Omega^8 + (4\beta_2^2 - 4\beta_1^2 - 2\omega_1^2)\Omega^6 + (\omega_1^4 + (-8\beta_2^2 - 4\omega_2^2)\omega_1^2 - 16\beta_2^2\beta_1^2)\Omega^4 + 4\omega_1^4(\omega_2^2 + \beta_2^2)\Omega^2 + 4\omega_2^4\omega_1^4} \sin(\Omega t) \quad (53)$$

$$\theta(t) \approx \sqrt{\frac{1}{\gamma_2 \gamma_1}} \omega_1 \omega_2 - \frac{\omega_2 \omega_1 (\Omega^4 + (-\omega_1^2 + 4\beta_2\beta_1)\Omega^2 - 2\omega_2^2\omega_1^2)q}{\sqrt{\frac{1}{\gamma_2 \gamma_1}}(\Omega^8 + (4\beta_2^2 - 4\beta_1^2 - 2\omega_1^2)\Omega^6 + (\omega_1^4 + (-8\beta_2^2 - 4\omega_2^2)\omega_1^2 - 16\beta_2^2\beta_1^2)\Omega^4 + 4\omega_1^4(\omega_2^2 + \beta_2^2)\Omega^2 + 4\omega_2^4\omega_1^4)\gamma_1} \cos(\Omega t) - \frac{2\omega_2 \Omega \omega_1 q((\beta_1 - \beta_2)\Omega^2 + \beta_2 \omega_1^2)}{\sqrt{\frac{1}{\gamma_2 \gamma_1}}(\Omega^8 + (4\beta_2^2 - 4\beta_1^2 - 2\omega_1^2)\Omega^6 + (\omega_1^4 + (-8\beta_2^2 - 4\omega_2^2)\omega_1^2 - 16\beta_2^2\beta_1^2)\Omega^4 + 4\omega_1^4(\omega_2^2 + \beta_2^2)\Omega^2 + 4\omega_2^4\omega_1^4)\gamma_1} \sin(\Omega t)$$

(54)

Para que a ressonância interna e externa estejam sintonizadas, é necessário assumir  $\Omega = \omega_1$ . A Figura 6 mostra a curva dada pelas equações (53) e (54), na Figura 6a assumiu-se  $\beta_1 = \beta_2 = 0.01$  e na Figura 6b, assumiu-se  $\beta_1 = \beta_2 = 0.3$ .

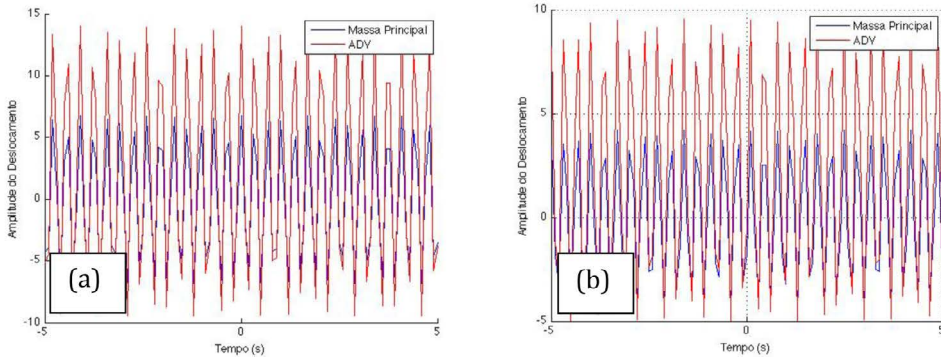


Figura 6 - Curva dada pelas Equações (52) e (53). (a)  $\beta_1 = \beta_2 = 0.01$ ; (b)  $\beta_1 = \beta_2 = 0.3$ .

Nota-se que aumentando os valores dos coeficientes de amortecimento, a amplitude do deslocamento é reduzida. Deve-se assumir que a constante de rigidez de mola  $k_2 \ll k_1$ , pois como pode ser observado na Fig. 6a,  $k_1$  sustenta todo o peso da estrutura necessitando assim uma rigidez maior, enquanto que  $k_2$  representa a rigidez da mola que sustenta a barra do pêndulo e por sua vez é engastada em uma superfície rígida.

## 4. Conclusões

Neste trabalho, procurou-se focar os sistemas dinâmicos vibratórios não lineares. Para isto fez-se uso das técnicas chamadas Métodos de Perturbação. Os cálculos foram implementados no software Maple e os gráficos foram construídos utilizando o Matlab. Nesse sentido, notou-se que os métodos de perturbação utilizados se mostraram bastante interessantes para a resolução das equações e sistemas de equações diferenciais não lineares. Fez-se o desenvolvimento das equações do movimento de um absorvedor dinâmico de vibrações Auto Paramétrico e, neste caso, pôde-se constatar a influência do fator de amortecimento na resposta deste sistema.

## **Introduction to the Study of Optimization Techniques for Bio-Inspired Application in Nonlinear Dynamical Systems**

**Abstract:** Nonlinear dynamic problems can be solved by numerical integration of motion or perturbation methods. This paper aims to make an introductory study on nonlinear vibration systems, and, for this, techniques called perturbation methods are used. To illustrate the functioning of the presented methods, is used an analytical software called Maple 16® for solving the nonlinear differential equations, known as the Duffing equation. Also in this sense, we use the Matlab® software to implement the solution curves of the proposed problem.

**Keywords:** Dynamic systems; optimization; perturbation method

---

## **Referências bibliográficas**

CRUZ, Marcia M. C. **Usando o software Maple, 2008**. 38 f. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

FRAHM, H., 1911, **Device for Damping Vibration of Bodies**. US Patent, 989.958.

MAPLE: BEHIND THE SCENES. Disponível em: <<http://www.maplesoft.com/products/maple/demo/player/MapleBehindTheScenes.aspx>>. Acesso em: 13 de julho de 2014.

MARQUES, Rodrigo F. **Estudo teórico e numérico de absorvedores dinâmicos de vibrações ativos e adaptativos**. 2000. 120 f.. Dissertação (Mestre em Engenharia Mecânica) Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

PASQUETTI, Eduardo. **Métodos Aproximados de Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares**. 255 f., 30 cm. Tese (Doutor em Engenharia Civil) Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: 2008.

SAYED M., HAMED Y. S. e AMER Y. A. **Vibration Reducion and Stability of Non-Linear System Subjected to External and Parametric Excitation Forces under a Non-Linear Absorber**. Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vo.. 6, 2011, no. 22, 1051-1070.

SOEIRO, Newton S. **Curso de fundamentos de vibrações e balanceamento de rotores**. Belém-PA, Instituto de Tecnologia – ITEC.

THONSEN, J.J. **Vibrations and Stability**. Springer-Verlag, 2nd Edition. 2003



## APÊNDICE A - Maple®

O Maple® é uma linguagem de programação capaz de não apenas fazer manipulações interativas, mas também incentiva a automatização de cálculos complicados. É fácil fazer depuração nos programas devido ser uma linguagem interativa. Para o desenvolvimento de um programa, é necessário apenas a inserção de um `proc()` e um `end` na sequência de comandos (CRUZ, 2008).

### 5.1.1. Conceitos Básicos sobre Maple®

O Maple usa `(:=)` para dar nome a uma equação e toda equação deve ser finalizada com um `(;)` quando se deseja retornar o resultado e, `(:)` em situação inversa.

```
> eqs:={a*x+b*y=c,d*x+e*y=f};
      eqs := {ax + by = c, dx + ey = f}
```

Figura A1 – Forma de lançar uma equação no ambiente Maple®

Nomes no Maple® podem conter caracteres alfanuméricos, porém não podem começar com números. Uma das maneiras de definir uma função é:

```
> f:=x->x^2+3*x;
      f := x -> x^2 + 3x
```

Figura A2 – Definindo uma função no ambiente Maple®

Também pode-se plotar a função, usando qualquer operador e avaliar de várias maneiras.

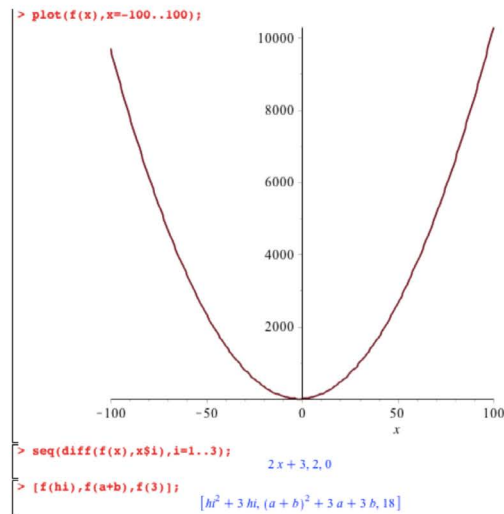


Figura A3 – Função plotada no ambiente Maple®