

Alexandre de Macêdo Wahrhaftig

AÇÃO DO VENTO

Em estruturas esbeltas com efeito geométrico

2ª edição

Ação do vento

Em estruturas esbeltas com efeito geométrico

tese de **Alexandre de Macêdo Wahrhaftig**

2ª edição

Patrocínio:



Ação do vento em estruturas esbeltas com efeito geométrico
© 2013 Alexandre de Macêdo Wahrhaftig
1ª edição – 2013
2ª edição – 2017
Editora Edgard Blücher Ltda.

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed.
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,
Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por
quaisquer meios sem autorização escrita da editora

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard
Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-934 – São Paulo, SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
editora@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Wahrhaftig, Alexandre de Macêdo

Ação do vento em estruturas esbeltas com efeito geométrico/
[livro eletrônico] / Alexandre de Macêdo Wahrhaftig – 2. ed. São
Paulo : Blucher, 2017.

Bibliografia

ISBN 978-85-8039-158-9 (e-book)

1. Ação do vento nas estruturas 2. Análise experimental de
estruturas 3. Análise numérica 4. Dinâmica das estruturas
I. Título.

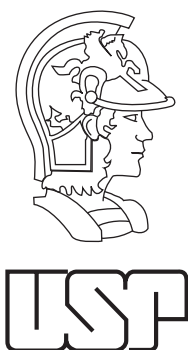
16-0346

CDD – 624.17

Índice para catálogo sistemático:

1. Ação do vento em estruturas esbeltas com efeito geométrico:
Engenharia de estruturas

Blucher



Escola Politécnica –
Universidade de São
Paulo

2008

Tese
de doutorado

TÍTULO ORIGINAL DA PESQUISA

Uma avaliação experimental e numérica do efeito da rigidez geométrica na resposta dinâmica de estruturas esbeltas sujeitas à excitação de vento

Alexandre de Macêdo Wahrhaftig

ORIENTAÇÃO

Prof. Reyolando Manoel Lopes Rebello da
Fonseca Brasil

BANCA EXAMINADORA

Prof. Reyolando Manoel Lopes Rebello da
Fonseca Brasil

Professor titular da Universidade Federal do ABC

Prof. Miguel Angel Buelta Martinez

Professor titular da Universidade de São Paulo

Prof. Marcelo Araujo da Silva

Professor da Universidade de São Paulo

Prof. Roberto Katumi Nakaguma

Pesquisador IV do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do
Estado de São Paulo

Prof. Acir Mercio Loredo Souza

Professor associado da Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Alexandre de Macêdo

Wahrhaftig possui graduação

em Engenharia Civil pela Universidade Católica do Salvador (1991), mestrado em Rehabilitación del Patrimonio Edificado – Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (1995) e doutorado em Engenharia de Estruturas pela Universidade de São Paulo – USP (2008).

Tem experiência na área de Engenharia Civil, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino, análise dinâmica e experimental de estruturas, estruturas de madeira e restauração.

Sumário

1. INTRODUÇÃO	23
2. TEMA E RELEVÂNCIA	27
3. RIGIDEZ GEOMÉTRICA E ASPECTOS DA ESTABILIDADE ESTRUTURAL	37
4. PROPOSTA PARA O CÁLCULO DA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO SOB NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA	63
5. INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL EM MODELOS	77
5.1 Instrumentos e sistemas empregados	78
5.2 Características dos sensores	79
5.3 O sistema de aquisição de dados	79
5.4 Esquema estrutural	80
5.5 Corpos-de-prova	80
5.6 Descrição dos ensaios	81
5.7 Análise dos resultados	85
5.7.1 Análise dos ensaios para o esforço de compressão	90
5.7.2 Análise dos ensaios para o esforço de tração	131
5.7.3 Análise dos ensaios para a ausência do esforço axial	137

5.7.4	Análise dos ensaios exclusivamente com o peso próprio	143
5.8	Resumo	160
6.	AÇÃO DO VENTO SEGUNDO A NBR 6123/88	163
6.1	Forças estáticas devidas ao vento	165
6.2	Resposta dinâmica pelo modelo contínuo simplificado	174
6.3	Modelo discreto	176
7.	INVESTIGAÇÃO EM ESTRUTURAS REAIS	185
7.1	Estrutura 1 – Poste metálico de 48 m	188
7.1.1	Dados e geometria	188
7.1.2	Modelagem por Elementos Finitos	192
7.1.3	Aplicação do método proposto	193
7.1.3.1	Definição dos parâmetros	193
7.1.3.2	Cálculo da massa generalizada	195
7.1.3.3	Cálculo da rigidez generalizada	195
7.1.4	Cálculo da frequência	198
7.1.5	Ação do vento	198
7.1.5.1	Forças estáticas devidas ao vento	198
7.1.5.2	Resposta dinâmica pelo modelo simplificado da NBR 6123/88	198
7.1.5.3	Resposta dinâmica pelo modelo discreto da NBR 6123/88	199
7.1.6	Análise dos resultados	200
7.2	Estrutura 2 – Poste metálico de 60,80 m	213
7.2.1	Dados e geometria	213
7.2.2	Modelagem por Elementos Finitos	217

7.2.3 Aplicação do método proposto	218
7.2.3.1 Definição dos dados parâmetros	218
7.2.3.2 Cálculo da massa generalizada	219
7.2.3.3 Cálculo da rigidez generalizada	220
7.2.3.4 Cálculo da frequência	221
7.2.4 Ação do vento	222
7.2.4.1 Forças estáticas devidas ao vento	222
7.2.4.2 Resposta dinâmica pelo modelo simplificado da NBR 6123/88	222
7.2.4.3 Resposta dinâmica pelo modelo discreto da NBR 6123/88	223
7.2.5 Análise dos resultados	223
7.3 Estrutura 3 – Poste de concreto armado de 40 m	236
7.3.1 Dados e geometria	236
7.3.2 Modelagem por Elementos Finitos	244
7.3.3 Aplicação do método proposto	245
7.3.3.1 Definição dos parâmetros	245
7.3.3.2 Cálculo da massa generalizada	246
7.3.3.3 Cálculo da rigidez generalizada	246
7.3.4 Cálculo da frequência	247
7.3.5 Ação do vento	247
7.3.5.1 Forças estáticas devidas ao vento	247
7.3.5.2 Resposta dinâmica pelo modelo simplificado da NBR 6123/88	248
7.3.5.3 Resposta dinâmica pelo modelo discreto da NBR 6123/88	248
7.3.6 Análise dos resultados	248
7.4 Estrutura 4 – poste de concreto armado de 46 m	264
7.4.1 Dados e geometria	264
7.4.2 Modelagem por Elementos Finitos	268

7.4.3 Aplicação do método proposto	271
7.4.3.1 Definição dos parâmetros	273
7.4.3.2 Cálculo da massa generalizada	274
7.4.3.3 Cálculo da rigidez generalizada	274
7.4.3.4 Rigidez geométrica generalizada	274
7.4.3.5 Rigidez elástica generalizada	275
7.4.3.6 Rigidez das molas generalizada	276
7.4.3.7 Cálculo da frequência	277
7.4.4 Ação do vento	277
7.4.4.1 Forças estáticas devidas ao vento	277
7.4.4.2 Resposta dinâmica pelo modelo simplificado da NBR 6123/88	277
7.4.4.3 Resposta dinâmica pelo modelo discreto da NBR 6123/88	278
7.4.5 Análise dos resultados	278
7.5 Estrutura 5 – Poste metálico de 30 m	302
7.5.1 Dados e geometria	302
7.5.2 Investigação experimental da frequência natural de vibração da estrutura	310
7.5.3 Modelagem por Elementos Finitos	313
7.5.4 Aplicação do método proposto	314
7.5.4.1 Definição dos parâmetros	314
7.5.4.2 Cálculo da massa generalizada	316
7.5.4.3 Cálculo da rigidez generalizada	317
7.5.5 Cálculo da frequência	318
7.5.6 Ação do vento	318
7.5.6.1 Forças estáticas devidas ao vento	318
7.5.6.2 Resposta dinâmica pelo modelo simplificado da NBR 6123/88	319

7.5.6.3 Resposta dinâmica pelo modelo discreto da NBR 6123/88	319
7.5.7 Análise dos resultados	320
7.6 Resumo	331
CONCLUSÕES	337
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	343
ANEXO A	351

O que mais me preocupa não é o grito dos violentos, nem dos corruptos, nem dos desonestos, nem dos sem caráter, nem dos sem ética, o que mais preocupa é o silêncio dos bons.

Martin Luther King

Agradecimentos

Ao professor Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca Brasil pela competente e cuidadosa orientação, tornando-se personalidade admirada e exemplo de caráter a ser seguido.

Resumo

Por uma escolha política e economicamente pragmática, o Brasil optou por desenvolver a telefonia celular, com intenção de abreviar uma etapa de desenvolvimento. Tomada a decisão, a implantação foi feita num ritmo explosivo a partir da década de 1990, com instalação de dezenas de milhares de estações. Apesar da disparidade de custo entre os sistemas eletrônicos e as obras civis, pouco se investiu na engenharia estrutural envolvida, resultando em projetos e construções realizados com metodologia duvidosa e na herança de uma grande quantidade de problemas estruturais. Represada por considerações de ordem ambiental e estética, a instalação indiscriminada de torres, vive-se uma nova demanda para a engenharia estrutural na análise do aproveitamento dos locais existentes para suporte de novas cargas. Nesse sentido, o que se observa, via de regra, são estruturas compostas apenas de um poste em balanço de análise enganosamente simples. O que se esquece, quase sempre, é a extraordinária esbelteza desses elementos, que ao engenheiro deveria sugerir a imediata necessidade de considerar a não-linearidade geométrica forçosamente existente. Além disso, o carregamento mais importante e dominante

é o do vento, de características eminentemente dinâmicas e aleatórias, desaconselhando análises estáticas ou dinâmicas determinísticas, preconizadas em Normas. Assim que, o objetivo deste trabalho é avaliar a influência da rigidez geométrica na resposta dinâmica de estruturas esbeltas sujeitas à excitação de vento. Para tanto, foi desenvolvido um modelo matemático simplificado, com características dinâmicas estabelecidas por uma técnica tipo Rayleigh, que evidencia a presença significativa da não-linearidade geométrica devida à esbelteza das peças. Para a validação dos resultados teóricos foi realizado um conjunto de ensaios dinâmicos em laboratório com modelos de barras e monitorada uma estrutura real em campo. A formulação proposta também foi aferida por métodos analíticos e numéricos como a solução de Euler para a carga crítica de flambagem e o Método dos Elementos Finitos. Os resultados obtidos validaram a proposta para o cálculo da frequência fundamental de vibração de estruturas em balanço. A influência da rigidez geométrica na resposta das estruturas sob ação de vento foi também avaliada por meio de cálculos comparativos utilizando os modelos preconizados pela norma brasileira. Verificou-se que, dependendo das cargas existentes, a consideração da rigidez geométrica pode ter significativo efeito redutor na capacidade de os postes de telecomunicações possuírem área de exposição ao vento para a instalação de antenas.

Palavras-chave: Dinâmica das estruturas. Análise experimental de estruturas. Análise numérica. Rigidez geométrica. Ação do vento nas estruturas. Método de Rayleigh.

Abstract

Due to a politically and economically pragmatic decision, Brazil has chosen to intensely develop its cellular phone system, in order to bypass a stage of development. Once the decision has been taken, implementation was set in an explosive pace in the 1990's decade by installing tens of thousands of stations. As the electronic systems are usually more expensive than the civil constructions, very little has been invested on the involved structural engineering, resulting in designs and constructions done with doubtful methodologies and in the heritage of great amounts of structural problems. Impounded by esthetical and environmental considerations, the indiscriminate installation of towers occurs. Thus, there is a new demand for the structural engineering in the analysis of the utilization of existing installation sites for bearing new loads. In this manner, what it can usually be observed are structures composed of just one cantilever pole of misleading simple analysis. What it is quite often ignored is the extraordinary slenderness of these elements, which should suggest to the designer the immediately necessity to consider the intrinsic existing geometric nonlinearity. Moreover, the wind is the most important

and dominant load, of dynamic and random nature, misadvising either static or deterministic dynamic analysis, usually recommended by Codes and Standards. In doing so, the objective of this thesis is to evaluate the influence of the geometric stiffness on the dynamic response of slender structures subjected to wind excitation. As a first step, a simplified analytical model was developed, with dynamic characteristics established by a Rayleigh type technique, which enhances the intrinsic existing geometric nonlinearity due to the slenderness of the elements. As a second step, for validating the theoretically obtained results, a series of dynamic tests was carried out in laboratory, using models of cantilever bars, and a real structure was monitored in the field. The proposed analytical model was also checked by other analytical and numerical methods, such as the Euler's solution for the critical buckling load and the Finite Element Method. The influence of the geometric stiffness in the structure response to wind loads was also evaluated by comparative calculations among the different models recommended by the Brazilian Wind Code. It was verified that, depending on the existing loads, the consideration of geometric stiffness can have significant reductive effect on the capacity of the telecommunication poles have exposition area to wind for installation of antennas.

Keywords: Structural dynamics. Experimental analysis of structures. Numerical analysis. Geometric stiffness. Wind action on the structures. Rayleigh's Method.

Introdução

Na natureza todos os fenômenos são intrinsicamente dinâmicos, isto é, variam com o passar do tempo. A dinâmica, na definição de Newton, estuda os movimentos dos corpos provocados por forças a eles aplicadas e as forças que provocam esses movimentos.

Representar os fenômenos dinâmicos em toda a sua complexidade na área da engenharia de estruturas tem sido um grande desafio para os engenheiros. Por essa razão, e devido às dificuldades existentes para a inserção de carregamentos variantes no tempo e posterior verificação das respostas estruturais, várias hipóteses simplificadoras são assumidas. A mais corrente é a que trata a aplicação dos esforços como feita de maneira lenta, com velocidades desprezíveis, sendo usual não levar em conta o aparecimento de forças de inércia. O estudo de estruturas com essa condição é feito de forma quase estática, e na maior

parte das vezes desconsiderando o efeito dos movimentos em torno da configuração de equilíbrio, constituindo a conhecida Análise Linear. No entanto, podem resultar movimentos oscilatórios em torno da configuração de referência ocasionando efeitos indesejados. Os movimentos oscilatórios, nesse caso, podem levar a reações e esforços internos solitantes diversos dos determinados estaticamente.

Um caso clássico representativo são os efeitos provocados pelas rajadas de vento, nos quais a adoção de carregamentos estáticos equivalentes representam a hipótese geralmente adotada. Não obstante, existe uma penalidade associada à adoção de tal hipótese: há efeitos dinâmicos importantes capazes mesmo de causar acidentes que não podem ser verificados. Os postes de telecomunicações são exemplos de estruturas sensíveis aos efeitos dinâmicos da ação do vento. Esses postes são estruturas de elevada esbelteza, razão pela qual há a necessidade de se considerar a não-linearidade geométrica forçosamente existente. Assim sendo, a verificação mais precisa de seu comportamento é de suma importância.

O objetivo deste trabalho é investigar a influência da rigidez geométrica no comportamento dinâmico de estruturas esbeltas sob ação de vento, e estabelecer um método simplificado de cálculo para a determinação da frequência fundamental de sistemas estruturais que levem em conta a presença da não-linearidade geométrica. Para isso, é proposta uma expressão para a obtenção da frequência do primeiro modo de vibração e desenvolvidas atividades experimentais e análises numéricas que permitiram avaliar o efeito da rigidez geométrica nas frequências naturais de vibração dessas estruturas.

O trabalho de investigação foi conduzido primeiramente estabelecendo um modelo matemático simplificado com características dinâmicas baseadas em uma técnica tipo Rayleigh, que evidenciou a presença significativa da não-linearidade geométrica devida à esbelteza das peças.

A formulação desenvolvida por esse método foi constantemente aferida por outros métodos analíticos e numéricos como as soluções de Euler-Greenhill, para a carga crítica de flambagem, e o Método dos Elementos Finitos. As soluções matemáticas desses métodos são sucintamente apresentadas nos capítulo 3.

Experimentalmente, o método proposto para o cálculo da frequência foi avaliado por meio de ensaios em laboratório e pela medição da frequência de uma estrutura real. Para o primeiro, executou-se um programa de ensaios dinâmicos em laboratório, realizados nas dependências do Gabinete de Dinâmica Não-linear do LEM/EPUSP, instalado com recursos de projetos de pesquisa do Orientador, obtido junto à FAPESP. Para o segundo, foi prospectada uma estrutura destinada ao serviço de telefonia móvel celular.

A validação experimental da formulação desenvolvida neste trabalho, com os testes de laboratório, permitiu apreciar a sensibilidade dos sistemas estruturais ao efeito da força normal sobre a frequência natural de vibração do primeiro modo.

É de especial interesse destacar que a investigação de campo, conduzida sobre um poste metálico de telefonia móvel celular, situado na cidade de Aracajú, Estado de Sergipe, mostrou a adequabilidade dessa solução para o cálculo da frequência fundamental de estruturas reais da engenharia civil. Os resultados do trabalho de campo podem ser vistos no capítulo 7, destinado à investigação de estruturas reais.

As análises numéricas realizadas sobre as estruturas reais permitiram verificar que a expressão proposta neste trabalho para o cálculo da frequência fundamental pode ser facilmente entendida a estruturas de seção variável, bastando, para isso, empregar algum critério de ponderação para geometria do corpo e, em seguida, aplicar um fator de correção que ajusta o resultado ao valor correto.

Para a avaliação da influência da rigidez geométrica sobre a resposta dinâmica sob ação de vento, foram feitas aplicações comparativas a cinco postes de telecomunicações, com e sem a inclusão da rigidez geométrica, seguindo-se os modelos preconizados na NBR6123/88 – Forças devidas ao vento em edificações. Excepcionalmente, foi introduzida a não-linearidade material do concreto por meio do produto de rigidez.

Não constitui escopo da Tese a discussão dos modelos normativos para o cálculo da ação de vento. Salienta-se, no entanto, que a abordagem presente neste trabalho pode fornecer interessante substrato ao processo de discussão e revisão da NBR 6123/88, ao apresentar uma expressão para a determinação da frequência fundamental

das estruturas esbeltas em balanço, compatível com a que seria obtida empregando-se recursos computacionais sofisticados, que pode facilmente ser utilizada pelos engenheiros.

2

Tema e relevância

Muitas estruturas do mundo da engenharia civil são sensíveis aos efeitos da não-linearidade geométrica. As construções destinadas às telecomunicações, como postes de telefonia móvel celular, são exemplos de estruturas civis cuja influência desses efeitos afetam diretamente a determinação de suas frequências. Para iniciar a compreensão dos aspectos da não-linearidade geométrica na dinâmica das estruturas é imprescindível, para o momento, entender que a matriz de rigidez de estruturas sujeitas a cargas axiais elevadas é diferente da matriz de rigidez elástica. Dessa forma, a introdução de aspectos não-lineares na dinâmica das estruturas, sob determinado contexto, pode ser convenientemente feito por meio do conceito de rigidez geométrica.

Embora de forma sutil, seu emprego é uma consideração não-linear, já que a rigidez geométrica depende do estado de tensões internas, ou esforços internos, na estrutura, que só se consegue determinar a partir das deformações causadas pelos deslocamentos que ela sofre. Claro que se esses esforços internos forem mantidos constantes a partir daí, estar-se-ia ignorando os deslocamentos adicionais que ocorrem a partir desse estado de deformações inicial. É, pois, uma linearização de um problema não-linear a partir de uma certa configuração que não é a inicial descarregada.

Analizando pelo Método dos Elementos Finitos, Cook (1974) se refere à rigidez geométrica como forças de membrana existentes em barras ou em elementos planos, como placas e cascas. O termo membrana é usado por ele para denotar uma força interna agindo na direção tangente à superfície do elemento. Para investigá-las, Cook (1974) conclui que se faz necessário introduzir uma nova matriz de rigidez, denominada de “matriz de tensões iniciais”, “matriz de rigidez geométrica” ou “matriz dos coeficientes de estabilidade”. Esses nomes derivam de suas aplicações e do fato que independem de propriedades elásticas, sendo função exclusiva da geometria e das forças internas dos elementos, presumidas conhecidas e constantes (forças nodais).

É de especial importância a investigação dos efeitos decorrentes da não-lienaridade geométrica para as estruturas esbeltas submetidas à ação de vento. Um caso de particular interesse, sem perda de generalidade, são os postes usados no sistema de telefonia móvel celular.

O vento não era problema em construções baixas e pesadas de grossas paredes, mas passou a ser, e em medida crescente, quando as construções foram-se tornando mais e mais esbeltas e as estruturas usando cada vez menos material. O perigo de o vento produzir acidentes é particularmente importante para torres de transmissão de energia elétrica, torres de rádio, televisão e microondas, antenas de radar e outras estruturas semelhantes, é o que afirma Blessmann (2001). Os efeitos de ventos sobre postes esbeltos e torres são particularmente enfatizados por Simui; Scalan (1996), Sachs (1972), Kouloušek et al (1984) e Navara (1969).

Acidentes com torres de transmissão elétrica, alguns deles envolvendo a queda de mais de 10 torres consecutivas no Estado de São Paulo, foram relatados por Blessmann (2001). Além desses acidentes, Blessmann (2001) menciona o estudo feito sobre furacões em Miami em 1950 e relata a destruição completa de 11 torres metálicas de rádio por flambagem individual de barras. A ocorrência de acidentes com postes de telefonia móvel celular são mencionados por Brasil e Silva (2006).

Levando em consideração esses aspectos, é oportuno mencionar que a NBR 8681/03 – Ações e segurança nas estruturas, norma brasileira que fixa os requisitos exigíveis na verificação da segurança das estruturas, recomenda que, no projeto de estruturas, devem ser considerados os estados limites últimos de perda de equilíbrio, global ou parcial, admitida a estrutura como um corpo rígido; e o de instabilidade dinâmica. Quando menciona os estados limites de serviço, a NBR 8681/03, prescreve que devem ser observados, os que possam afetar a sua utilização normal, entre eles o de vibração excessiva. Além da NBR 8681/03, outras duas normas que se relacionam diretamente com o projeto de postes de telecomunicações são as NBR – 6118/04 – Projeto de estruturas de concreto armado e a NBR 8800/96 – Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios, que fazem restrições quanto à esbeltez dessas estruturas.

Para efeitos deste trabalho, postes são estruturas de barra, alongados e de seção circular ou poligonal circunscrita com grande número de lados. Já as torres são estruturas reticuladas, constituídas por perfis metálicos ou tubos, podendo ser estaiadas ou não.

No Brasil, uma profunda reforma do aparato legal que regulava o setor tornou possível a reestruturação das telecomunicações. O traço fundamental foi a transformação do monopólio público, provedor de serviços de telecomunicações, em um novo sistema de concessão pública a operadores privados, fundado na competição e orientado para o crescimento da universalização dos serviços. Em 1998 o Governo Federal vendeu as 12 *holdings* criadas a partir da cisão do Sistema Telebrás, representando a transferência à iniciativa privada das Empresas de Telefonia Fixa e de Longa Distância, bem como das Empresas de Telefonia Celular.

Essa foi uma escolha política e economicamente pragmática, através da qual o Brasil optou por desenvolver a telefonia celular, com intenção de abreviar uma etapa do desenvolvimento.

A privatização do Sistema Telebrás ocorreu no dia 29 de julho 1998 por meio de 12 leilões consecutivos na Bolsa de Valores do Rio de Janeiro, configurando a maior operação de privatização de um bloco de controle já realizada no mundo.¹ A partir daí foram implantadas em todo o Brasil milhares de estações para transmissão do sinal de telefonia. A implantação foi feita num ritmo explosivo com a instalação de milhares de estações em todo o país. Dada a disparidade de custo entre os sistemas eletrônicos e as obras civis, pouco se investiu na engenharia estrutural envolvida, resultando em projetos e construções realizados com metodologia duvidosa e na herança de uma grande quantidade de problemas estruturais.

Brasil e Silva (2006) afirmam que durante a implantação do sistema de telefonia celular no Brasil mais de 10.000 estruturas de telecomunicações foram projetadas, fabricadas e construídas. Dessas, 2000 eram poste de concreto armado. Como relatam, no início dos anos 90 havia poucas companhias e técnicos para atender à demanda. Companhias especializadas em outros produtos adaptaram sua linha de produção para o mercado das telecomunicações. Nesse contexto, os engenheiros de estruturas, muitos dos quais especializados em outras aplicações, adaptaram seus modelos matemáticos ao projeto das estruturas de telecomunicações. O modelo adotado por muitos deles, continuam Brasil e Silva (2006), estavam baseados em modelos estáticos, nos quais a carga de vento era calculada como carga estática, desconsiderando os efeitos dinâmicos do vento e as características da localidade onde seriam instaladas essas estruturas. Os resultados desse distorcido e caótico processo apareceram em pouco tempo, com as estruturas apresentando uma série de problemas estruturais e com a ocorrência de alguns acidentes.

Os engenheiros de estruturas poderiam encontrar amparo para a manutenção de seus procedimentos nas prescrições da norma brasileira que trata da ação do vento em edificações, pois nela há expressões para o cálculo da frequência que, em alguns casos, lhes

1 Fonte BNDES (<http://www.bndes.gov.br>)

dispensariam da obrigação de levar em conta os efeitos dinâmicos da ação de vento. Nessas expressões, a altura da edificação é o fator preponderante de cálculo.

Represada por considerações de ordem ambiental e estética, a instalação indiscriminada de torres, atualmente vive-se uma nova demanda para a análise do aproveitamento das estruturas existentes para aplicação de novas cargas.

As estruturas usadas como suportes do sistema de transmissão do sinal de telefonia são, em boa, parte constituídas apenas de um poste em balanço (Figura 2.1), metálico ou de concreto armado, de análise estrutural enganosamente simples.

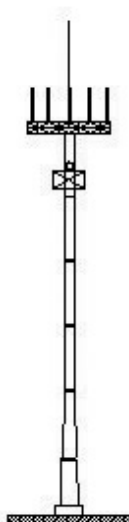


Figura 2.1 – Poste usado no sistema de telefonia celular.

O que deve ser levado em consideração, e por vezes esquecido, é a extraordinária esbelteza desses elementos, que ao engenheiro lhe deveria sugerir, de imediato, a necessidade de considerar a não-linearidade geométrica forçosamente existente. Além disso, o carregamento transversal atuante é o do vento, de características eminentemente dinâmicas e aleatórias, distintas daquelas preconizadas em Normas, quando de naturezas predominantemente estáticas ou dinâmicas determinísticas. Em decorrência da sua elevada esbelteza, essas estruturas estão passíveis de comportamentos diversos dos bá-

sicos esperados, pois, dependendo do carregamento, ou ainda devido às características próprias das estruturas da realidade, podem ocorrer fenômenos de instabilidade local ou global.

Mazzilli (1979) afirma que, à primeira vista, poderia parecer que a segurança das estruturas esbeltas estivesse perfeitamente salvaguardada desde que os materiais estruturais, nos cálculos mecânicos, não revelassem esgotamento de suas capacidades resistentes. No entanto, essas estruturas, como afirma, são sensíveis a pequenas perturbações mecânicas. Para as estruturas de telecomunicações o vento é o fator determinante de projeto.

As ações exercidas pelo vento tornam-se particularmente importantes em estruturas esbeltas e de grande altura. Quanto mais esbeltas, mais sensíveis às ações dinâmicas do vento (BLESSMANN, 1989).

A verificação dos esforços provenientes da ação do vento apresenta dificuldades à análise de estruturas devido à grande variabilidade e à aleatoriedade do carregamento. Calcular os deslocamentos e esforços internos provocados por carregamento de vento não é tarefa das mais fáceis porque as cargas mudam constantemente ao longo do tempo. Por essa razão, usualmente se adota uma simplificação importante de cálculo com a adoção de carregamentos estáticos equivalentes, considerando-se uma velocidade característica do vento.

Para muitas estruturas esse é um critério válido, onde as vibrações produzidas pelo vento podem ser desprezadas e os cálculos das tensões e deformação podem ser realizados como se o esforço do vento agisse sobre a estrutura como uma força estática, sem a necessidade de observar seus atributos dinâmicos. No entanto, para estruturas esbeltas e flexíveis, e no caso específico dos postes de telefonia móvel celular, o vento, incidindo na estrutura, nas antenas e nos demais dispositivos construtivos (Figura 2.2), introduz efeitos dinâmicos importantes, que não devem ser desprezados. A turbulência do vento causa uma carga flutuante que acarreta vibração na estrutura, daí decorre a necessidade da verificação da resposta dinâmica.

Um problema de dinâmica estrutural difere de seu equivalente estático em dois importantes aspectos. A primeira diferença a ser

notada, por definição, é a característica de variação temporal do problema dinâmico, devido ao fato de que o carregamento e a reposta variam com o tempo. É evidente que um problema dinâmico não possui uma única solução, como é o caso de um problema estático. A análise dinâmica deve, ao contrário, estabelecer uma sucessão de soluções para todos os instantes. Assim, a análise dinâmica é claramente mais complexa que a análise estática.

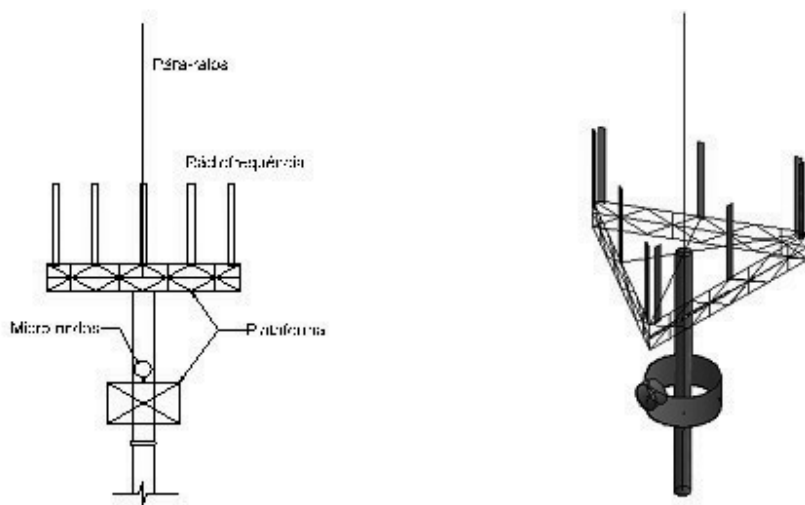


Figura 2.2 – Antenas e anteparos típicos de um poste de telefonia.

Existe, no entanto, um segundo aspecto que diferencia fundamentalmente problemas estáticos e dinâmicos. Trata-se do surgimento de forças de inércia, associadas às acelerações, e forças de dissipação, usualmente associadas às velocidades, além, é claro, das forças restauradoras. Consequentemente, a solução do problema dinâmico difere consideravelmente de seu equivalente estático, sendo necessário o desenvolvimento de soluções para as equações diferenciais no tempo.

Como expõe Ravara (1969), para realizar a análise dinâmica de uma estrutura é preciso quantificar as solicitações aplicadas; definir um modelo estrutural; definir um modelo matemático que represente, sob os pontos de vista de deformabilidade e absorção de energia, o

comportamento da estrutura; e aplicar as teorias de vibrações mecânicas ao estudo do comportamento do modelo matemático. Uma vez definido o modelo matemático, como por exemplo, um oscilador com número discreto ou infinito de graus de liberdade e quantificadas as solicitações dinâmicas que atuam sobre ele, constitui um problema da Teoria das Vibrações determinar a resposta da estrutura, ou seja, os deslocamentos, velocidades e acelerações que se desenvolvem nos seus elementos.

Os graus de liberdade representam o número escolhido de funções temporais que, uma vez conhecidas, determinam univocamente o movimento de cada elemento estrutural. Uma estrutura contínua tem infinitos graus de liberdade.

A solução de problemas de vibração para sistemas contínuos pode ser obtida empregando-se técnicas de discretização ou por métodos variacionais. Como afirmam Gêradin e Rixan (1998), sistemas contínuos são casos limites de sistemas discretos.

Embora os graus de liberdade representem o número de parâmetros necessários para definir a posição de qualquer parte do sistema, para muitas estruturas a carga dinâmica na direção do vento pode ser calculada com razoável precisão admitindo-se que a estrutura tenha um único grau de liberdade e apenas a componente da ação flutuante na direção do vento necessita ser levada em conta na verificação da vibração considerada (DYBEYE & HANSEN, 1996).

Para estruturas com modos de vibração, cujas primeiras frequências encontram-se abaixo de 1Hz, os efeitos dinâmicos do vento tornam-se importantes e a consideração desses efeitos como estáticos ou de natureza determinística é uma aproximação por demais grosseira. A importância da consideração da ação do vento nas estruturas é destacada por Durbey, C. & Hansen, O S. (1996) quando afirmam que estruturas com rigidez moderada podem vibrar de diferentes formas quando sujeitas à ação do vento, e salientam que, quando se trata de estruturas esbeltas, o efeito dinâmico produzido pela ação do vento pode, ainda, entrar em ressonância com a estrutura.

Navara (1969) destaca a relevância da consideração da estabilidade aerodinâmica para construções metálicas e de concreto armado de grande altura, como torres auto-resistente destinadas a telecomu-

nicações, tendo em vista que, além da frequência dessas estruturas situarem-se normalmente abaixo de 1 Hz, são fracamente amortecidas e, em geral, são muito expostas ao vento.

O vento age conjuntamente com a força normal proveniente do peso próprio da estrutura e das cargas em serviço. Na presença do esforço axial a estrutura modificada sua rigidez e, conseqüentemente, a maneira de como responde aos estímulos do vento, isso significa dizer que modelos lineares não conseguem descrever precisamente o comportamento estrutural.

A norma brasileira que orienta o cálculo de edificações submetidas à ação do vento é a NBR 6123/88 – Forças devidas ao vento em edificações. Nela há três maneiras de se considerar os efeitos produzidos pelo vento, para fins de cálculo. Todas os tratam como uma carga estática equivalente à ação real, dinâmica, do vento (BLESSMANN, 1989).

A opção dada ao engenheiro de escolher entre uma ou outra forma de calcular está relacionada à frequência do modo fundamental de vibração e à altura da edificação.

No primeiro modelo, a influência da resposta flutuante é levada em conta por meio do Fator de Rajada para o cálculo da velocidade característica do vento, porém sem considerar as características dinâmicas do problema em estudo, e admitindo que a estrutura não entre em ressonância com o vento.

Os dois outros modelos tratam especificamente da resposta dinâmica na direção do vento médio, e estão estipulados no capítulo 9 da NBR 6123/88. Neles se admite que as flutuações do vento se dêem nas frequências naturais da estrutura. Esses processos se iniciam com a obtenção das frequências naturais de vibração das edificações, necessárias à determinação dos correspondentes coeficientes de amplificação dinâmica. Portanto, o cálculo da frequência natural das estruturas é o fator primordial para o cálculo dos efeitos dinâmicos devidos à turbulência atmosférica.

As sugestões contidas na NBR 6123/88 para a determinação da frequência do primeiro modo de alguns tipos de estruturas não se aplicam confortavelmente às estruturas de telecomunicações, o que pode conduzir a equivocadas interpretações.

Neste trabalho, desenvolveu-se uma expressão para o cálculo da frequência fundamental das estruturas de telecomunicações, ou de qualquer outra estrutura em balanço que possa ser modelada como elemento de barra, que leva em conta a não-linearidade geométrica, importante para os sistemas esbeltos, e na qual pode ser incluída a não-linearidade do material, caso exista.

3

Rigidez geométrica e aspectos da estabilidade estrutural

Uma vez que o efeito da força axial de compressão é o de reduzir a rigidez dos membros da estrutura, a abordagem dos aspectos que envolvem o conceito de rigidez geométrica está relacionada, ao mesmo tempo, à análise da estabilidade elástica dos sistemas estruturais. A rigidez geométrica é uma função do esforço normal presente nos elementos estruturais. Expressões que deixam clara essa relação são apresentadas mais adiante nesta seção e no capítulo destinado à proposta de cálculo da frequência com a consideração da não-linearidade geométrica, apresentado no item 4. Excluindo-se a possibilidade de uma apresentação pormenorizada da teoria das vibrações, fez-se a introdução da não-

-linearidade geométrica na dinâmica estrutural no que concerne aos objetivos deste estudo.

As considerações sobre estabilidade são preponderantes na análise de muitas estruturas da engenharia porque essas são normalmente projetadas para suportar cargas com pequenas e limitadas deformações. Souza Lima e Venâncio Filho (1982) afirmam que as considerações da não-linearidade geométrica interessam a dois tipos de problema, aos que se prendem ao cálculo dos esforços de segunda ordem em estruturas de rigidez reduzida e aos que se ligam diretamente aos fenômenos de perda de instabilidade do equilíbrio por flambagem ou aparecimento de ponto limite na configuração de equilíbrio.

Importantes nomes da Física e da Matemática se sentiram atraídos por investigar o tema da estabilidade. Os primeiros estudos estão ligados a Aristóteles e Arquimedes. Nomes como os de Euler, Torricelli, Baldi, Timoshenko, Lagrange, Lamarle, Baushinger, Considère, Tetmajer, Liapunov, Hellinger, Bryan e Nicolai também aparecem como cientistas que aportaram significativas contribuições, APUD Mazzilli (1979). Mais recentemente, Ratzersdorfer (1954) apresentou abrangente estudo sobre o assunto.

A estabilidade é entendida como a tendência de um sistema estrutural em persistir em determinado estado, quando estiver sob a influência de pequenas perturbações externas agindo no sentido de encorajá-lo a abandonar tal estado. Uma configuração que não é estável é dita instável. A perda de estabilidade depende das propriedades do material, da configuração estrutural e das condições do carregamento. A instabilidade que ocorre sob ação de carga compressiva é comumente conhecida como flambagem.

A falência por flambagem é potencialmente perigosa e pode iniciar a ruína de muitos tipos de estruturas da engenharia, podendo dar-se em relação a toda a estrutura ou localmente em relação a componentes individuais, e, mesmo nesses casos, induzir a estrutura ao colapso. Para Gambir (2004) é importante destacar que a carga para a qual ocorre a flambagem depende mais da rigidez da estrutura do que da resistência dos materiais. Fusco (1981) acrescenta que para os materiais estruturais como o concreto e o aço, o estado limite de flambagem é um estado limite último.

A análise da estabilidade consiste em se determinar o modo da perda da estabilidade e a correspondente carga crítica. A estrutura permanece em repouso antes e depois da flambagem, exceto nos casos nos quais a flambagem ocorre devido à transição do estado de repouso para o movimento, chamada instabilidade cinética ou dinâmica.

As primeiras postulações analíticas para o entendimento do fenômeno da flambagem em barras comprimidas axialmente devem-se a Euler, APUD Timoshenko (1936), que considerou o pilar como uma barra prismática de eixo reto, submetida a uma força axial aplicada no centro de gravidade da seção. Dessa maneira, Euler resolveu o problema das barras comprimidas tomando como referência um *pilar ideal*, i.e., uma barra sem imperfeições geométricas nas suas condições iniciais, comprimida por uma carga aplicada no seu eixo e cujo material fosse perfeitamente elástico-linear.

As formulações analíticas da estática desenvolvidas por Euler representam a solução exata para o problema da estabilidade e, por conseguinte, têm servido de aferição às formulações desenvolvidas por outros métodos. Elas abordam o problema levando em conta duas hipóteses. A primeira restringi-se aos pequenos deslocamentos, enquanto que a segunda admite que o equilíbrio se dê na configuração deformada, a qual pode diferenciar-se consideravelmente da configuração de referência. Nesse caso, a carga crítica é aquela capaz de manter tal configuração. Os estudos feitos no presente trabalho limitam-se ao primeiro caso.

Considere-se o caso de uma barra prismática esbelta engastada na base e carregada axialmente na extremidade superior, como indica a Figura 3.1. Para valores de P abaixo da carga crítica a configuração reta de equilíbrio permanece (Figura 3.1a), porém quando é atingida a carga crítica de flambagem o equilíbrio torna-se instável e uma pequena força lateral poderá produzir um deslocamento que não desaparecerá com a causa que o produziu. A carga crítica é, então, definida como a carga axial suficiente para manter a barra estável com a forma levemente fletida (Figura 3.1b).

Nesse caso, a carga crítica é calculada pelo emprego da equação aproximada da linha elástica $\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$, na qual E é o módulo de

elasticidade do material, I é a menor inércia, e M é o momento fletor em qualquer seção transversal mn dado por $P(\delta - y)$. O desenvolvimento da expressão anterior conduz a uma equação diferencial a coeficientes constantes.

Resolvendo a equação diferencial da linha elástica resultante da introdução de M , com a observância das condições de contorno do problema, chega-se à conhecida expressão da carga crítica de Euler (Timoshenko, 1936).

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}, \quad (3.1)$$

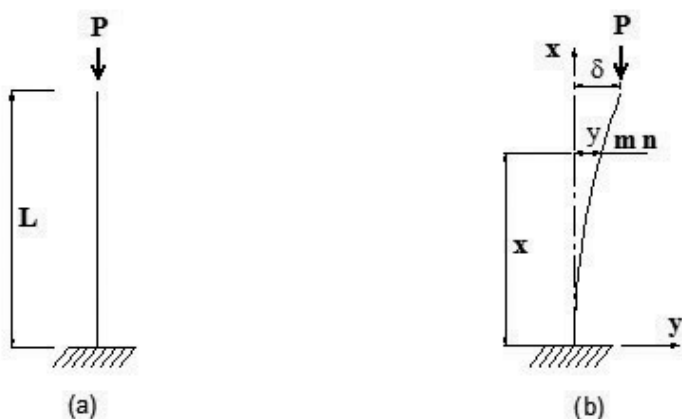


Figura 3.1 – Carga crítica de Euler - Timoshenko (1936).

A análise da estabilidade pelo método estático com a consideração do peso próprio dos elementos estruturais foi discutida inicialmente por Euler, que não teve sucesso na obtenção de uma solução satisfatória, sendo resolvido definitivamente por Greenhill em 1881 (TIMOSHENKO, 1936).

Para introduzir a ação de uma carga axial distribuída tome-se a barra da Figura 3.2 engastada na extremidade inferior e livre na superior. A obtenção da equação diferencial da curvatura para o caso de

uma força compressiva uniformemente distribuída não é tão simples quando comparada à equação diferencial a coeficientes constantes. Nesse caso, a solução normalmente exige a aplicação de séries infinitas ou baseia-se em métodos aproximados, como por exemplo, o método da energia.

Se a barra da Figura 3.2, tida no início como verticalmente reta, estiver sob a ação de uma força uniforme axialmente distribuída, a equação diferencial da curvatura será dada por:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_x^L q(\eta - y) d\xi, \quad (3.2)$$

onde a integral do lado direito da equação representa o momento fletor em uma seção qualquer devido à carga uniformemente distribuída q .

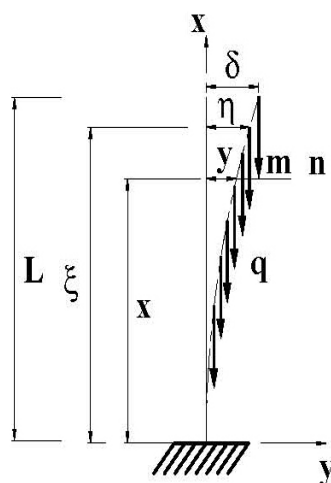


Figura 3.2 – Consideração do peso próprio da barra - Timoshenko (1936).

Nesse caso, para a barra da Figura 3.2, pode ser tomada, como uma primeira aproximação para o cálculo dos deslocamentos laterais, a seguinte expressão:

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right), \quad (3.3)$$

que representa o valor exato para o caso de uma força concentrada de compressão aplicada na extremidade da barra e que conduz à expressão (3.1).

Embora a solução do problema de uma barra sujeita a seu peso próprio seja mais complicada, a equação (3.3) satisfaz às condições de contorno, sendo, por essa razão, apropriada para a maioria das situações práticas da engenharia.

Aplicando o Princípio da Conservação da Energia chega-se à expressão (3.4), que representa uma primeira aproximação do valor da carga crítica devido ao peso próprio

$$(qL)_{cr} = \frac{7,89EI}{L^2}, \quad (3.4)$$

A expressão (3.4) representa uma diferença de 0,77%, quando comparada à solução obtida pelo método de séries infinitas, equação (3.5).

$$(qL)_{cr} = \frac{7,837EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(1,122L)^2}, \quad (3.5)$$

De fato, a carga axial distribuída reduz o valor da carga crítica que pode ser aplicada na extremidade da barra. Fazendo-se

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = \frac{mEI}{L^2}, \quad (3.6)$$

verifica-se que o fator m , menor que $\pi^2/4$, gradualmente diminui com o aumento de qL , se aproxima de zero quando qL se aproxima do valor dado em (3.5). Usando a notação

$$n = \frac{qL}{\frac{\pi^2 EI}{4L^2}}$$

pode-se calcular m para os vários valores de n . Timoshenko (1936) apresenta na Tabela 3.1 os valores de m calculados pela expressão (3.5).

O interesse em mostrar o desenvolvimento apresentado por Timoshenko (1936) para o caso de uma barra sujeita a seu peso próprio está em verificar que, pela Tabela 3.1, é uma aproximação satisfatória assumir que o efeito do peso próprio, na magnitude da carga crítica, corresponde a $0,315qL$ aplicado na extremidade da barra. Isso implica em dizer que a carga crítica de Euler (3.1) será reduzida desse valor quando for levado em conta o peso próprio na determinação da carga crítica de flambagem.

Tabela 3.1 – Relação entre o peso próprio e carga de Euler – Timoshenko (1936).

n	0	0,25	0,5	0,75	1,0	2,0	3,0	3,177	4	5	10
m	2,47	2,28	2,08	1,91	1,72	0,96	0,15	0	-0,69	-1,56	-6,95

Quando se analisa, sob a hipótese de pequenos deslocamentos, a influência do peso próprio na carga crítica de flambagem, verifica-se que quando o valor qL supera o valor dado pela expressão (3.5), P_{cr} de (3.1), torna-se negativo, o que implica em dizer que uma força

axial de tração deve ser aplicada para evitar a flambagem da barra. Na hipótese de comportamento linear, o gráfico da Figura 3.3 permite acompanhar a variação da carga crítica de Euler, com e sem o peso próprio, em função do comprimento da barra.

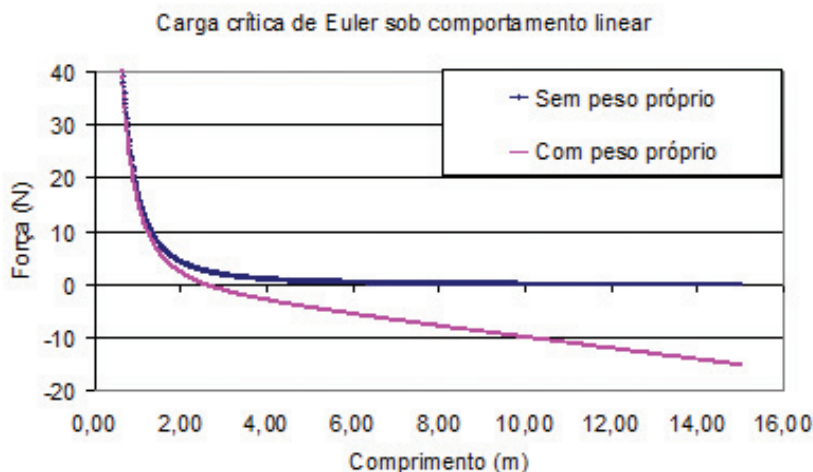


Figura 3.3 – Carga crítica levando com o peso próprio e carga crítica de Euler.

Nessa simulação foi adotado o mesmo módulo de elasticidade e a geometria da barra usada nos ensaios de laboratório, que serão apresentados na seção 5. Observa-se que devido à influência do peso próprio, a barra atinge a situação crítica da carga de compressão no comprimento de 2,56 m.

Na abordagem da estabilidade pelo Método dos Deslocamentos em formulação matricial Gambir (2004) se refere à influência da força axial como aquela que diminui a rigidez dos membros estruturais. Com isso, o efeito das cargas aplicadas sobre a estrutura aumenta, aumentando também as forças nos elementos, e a capacidade de resistência da estrutura a qualquer perturbação de natureza aleatória diminui. Para a carga de flambagem, a estrutura não oferece resistência a nenhuma perturbação que ocorra sobre ela e, em ocorrendo tal perturbação, os deslocamentos na configuração seguem aumentando sem a necessidade do acréscimo de cargas adicionais. Isso sugere que, quando se atinja esse instante, os deslocamentos da estrutura, para a carga crítica, crescerão indefinidamente, significando que, por outro lado, a rigidez da estrutura tornou-se nula.

O critério da estabilidade elástica pelo Método dos Deslocamentos em formulação matricial pode ser entendida pela exposição que se segue.

A relação entre as forças externas aplicadas e os deslocamentos nodais é dada por

$$\{F\} = [K]\{Q\}, \quad (3.7)$$

onde

$\{F\}$ é o vetor de cargas nodais

$[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura

$\{Q\}$ é o vetor deslocamento

Os deslocamentos nodais tornam-se então

$$\{Q\} = \left[\frac{\text{Adj}[K]}{|K|} \right] \{F\}, \quad (3.8)$$

onde

$\text{Adj}[K]$ é a matriz adjunta da matriz de rigidez, e

$|K|$ é o determinante da matriz de rigidez.

Pela equação (3.8) para que os deslocamentos cresçam indefinidamente é preciso que o determinante da matriz de rigidez tenda a zero. Portanto, o critério de instabilidade é a condição de

$$|K| = 0, \quad (3.9)$$

o que significa que matriz de rigidez seja singular.

A equação característica resultante de (3.9) deve apresentar mais de uma solução para o critério de instabilidade, mas a menor deles, logicamente, é o que corresponderá à carga crítica de estabilidade. A matriz de rigidez deve ser vista como composta por dois termos, sendo um deles o correspondente à parcela da rigidez geométrica. Dessa forma, a análise da carga crítica de flambagem envolve a solução de um problema de autovalores na forma de

$$\left([K_0] - \lambda_r [K_g(r)] \right) \psi = 0, \quad (3.10)$$

onde os termos entre colchetes representam as parcelas da matriz de rigidez, λ_r são os autovalores associados aos autovetores ψ correspondentes à força r . Os autovalores devem ser entendidos como um fator de multiplicação da carga r para que se atinja a flambagem. Com isso, a interpretação dada aos autovalores é a de um fator de segurança em relação à força analisada, podendo ser maior ou menor que a unidade e até assumir valores negativos. Os autovalores mais altos correspondem às diversas condições de restrições externas e, portanto, inválidas caso essas restrições não existam.

Com a Equação (3.10) fica claro que a matriz de rigidez para estruturas com elementos sujeitos às cargas axiais é diferente da matriz de rigidez elástica, e que a matriz apresentada em (3.7) deve incluir seus efeitos, quer seja para minorar, como no caso da força de compressão, ou majorar, como no caso da força de tração, a rigidez dos sistemas estruturais.

Já na análise dinâmica da instabilidade, a carga crítica é obtida a partir da equação do movimento por meio de uma solução não-trivial por autovalores. Quando ocorre a perda da estabilidade a frequência de vibração natural da estrutura tende a zero. A investigação dinâmica da instabilidade é mais abrangente do que outros métodos de análise nos quais as forças de inércia são desprezadas, como na análise estática. Assim, uma vez que o método dinâmico leva em conta as forças de inércia na formulação da análise da estabilidade das estruturas, torna-se importante a maneira como se dá a distribuição de massa e a rigidez dos sistemas elásticos (GAMBIR, 2004).

Clough (1993) ratifica a ideia de que a força axial ou qualquer força que tenda a produzir flambagem pode interferir significativamente na rigidez da estrutura. Segundo ele, a componente de uma força agindo paralelamente ao eixo originalmente vertical de elementos estruturais pode produzir efeitos adicionais nos deslocamentos nodais, ou nos extremos, desses elementos, e, portanto, a matriz de rigidez da estrutura deve ser composta por duas parcelas, uma elástica e outra geométrica. A partir daí, os modos e frequências de vibração de uma estrutura que esteja sujeita a um carregamento axial devem ser calculados exatamente da mesma forma como para sistemas que não levam em conta esses efeitos.

Levy (1994) apresenta um teorema que representa, em termos da teoria das estruturas, a importância da não-linearidade geométrica: “Na presença de tensões iniciais, não-linearidades geométricas são da mesma ordem de grandeza dos efeitos elásticos na estrutura”.

Esse teorema implica em afirmar que, na maioria dos casos, e para todos os casos de análise incremental, os efeitos decorrentes das não-linearidades geométricas devem ser levados em consideração; e que problemas envolvendo flambagem de colunas, cabos e estruturas esbeltas exigem a inclusão de hipóteses que levem em conta a não-linearidade geométrica do comportamento estrutural.

Na consideração dessas hipóteses na análise da estabilidade dos sistemas estruturais, desde que a análise não dependa das condições da configuração de inicial ou de referência, Levy (2004) constrói uma formulação utilizando o conceito de operadores geométricos. Nesse caso, a equação de equilíbrio para um sistema deve ser escrita como

$$\mathbf{C}^T \mathbf{F} = \mathbf{P}, \quad (3.11)$$

onde \mathbf{P} representa as cargas aplicadas, \mathbf{F} representa as forças ou tensões internas, e \mathbf{C} representa um operador que descreve o equilíbrio do sistema.

Essa equação pode também ser escrita através de equações matriciais de equilíbrio relativas aos nós de um sistema discreto. Se o sistema é perturbado com uma carga $d\mathbf{P}$ a sua resposta é dada por

$$dC^T F + C^T dF = dP, \quad (3.12)$$

O primeiro termo da equação (3.12) descreve a não-linearidade geométrica e o segundo termo diz respeito à teoria linear. Para um sistema discreto pode-se converter com relativa facilidade a equação anterior à forma conhecida do método dos deslocamentos

$$(K_E + K_G)\delta = dP, \quad (3.13)$$

onde K_E e K_G são as matrizes de rigidez elástica e geométrica e δ representa o deslocamento do sistema. Com essa aproximação análises não-lineares tornam-se simples aplicações do Método de Newton, que tem a vantagem de oferecer uma rápida convergência e as soluções das equações não-lineares podem ser obtidas com certa facilidade, continua Levy (1995).

Pauletti (2003) quando estuda estruturas retesadas ratifica a concepção de que o comportamento das estruturas são em maior ou menor grau não-linear. A importância da não-linearidade depende do tipo de estrutura e da fase de análise.

Para ampliar o entendimento do comportamento não-linear e a influência da rigidez geométrica é válido apresentar o trabalho que Pauletti (2003) desenvolve para uma corda (Figura 3.4), que nada mais é que um elemento de barra, estendido entre dois pontos fixos que suporta exclusivamente a força normal de tração F_0 dada por

$$F_0 = \frac{EA}{L_r}(L - L_r) = k(L - L_r),$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, A é área de sua seção transversal, L é a distância entre os pontos fixação, igual ao comprimento deformado, na configuração retilínea e L_r é o comprimento indeformado do cabo. A constante $k = \frac{EA}{L_r}$ é chamada constante de mola.

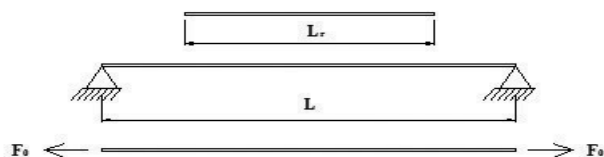


Figura 3.4 – Corda de comprimento indeformado L_r , tracionada entre dois apoios fixos distantes $L > L_r$ – Pauletti (2003).

Como a rigidez transversal da corda em torno da sua configuração retilínea não depende de deformações adicionais impostas, mas sim de sua relutância em alterar a geometria, diz-se que essa é *exclusivamente geométrica*.

Desprezando-se o peso próprio e demais cargas externas, a configuração retilínea inicial (Figura 3.5) é uma configuração de equilíbrio sob a ação da força de tração. Se, porém, como é usual na análise linear de estruturas, tentar-se expressar a deflexão da corda, decorrente da imposição de um carregamento transversal, em termos da configuração inicial, retilínea, chega-se obviamente a uma indeterminação.

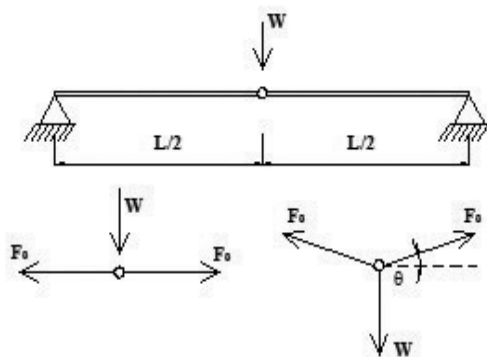


Figura 3.5 – Para a corda carregada transversalmente, o equilíbrio só é possível na configuração deformada – Pauletti (2003).

Para entender o conceito de rigidez geométrica e elaborar a formulação da hipótese não-linear é preciso definir a força desbalanceada $g(u)$ como a diferença entre a resultante das forças internas restauradoras e um carregamento externo W , de modo que se tem $g(u) = f(u) - W$.

Em muitas ocasiões é interessante decompor a força desbalanceada em um esforço interno $F = F(u)$, e um operador geométrico $C = C(u)$, aplicado sobre F , sendo ambas as grandezas função de um parâmetro de configuração u . Assim, $f(u) = F(u)C(u)$ e $g = FC - W$, cuja diferenciação leva a

$$\frac{dg}{du} = k_t = C \frac{dF}{du} + F \frac{dC}{du} - \frac{dW}{du}, \quad (3.14)$$

onde

$$\frac{dg}{du} = k_t \text{ é a rigidez tangente,}$$

$$C \frac{dN}{du} = k_e \text{ é a rigidez elástica,}$$

$$N \frac{dC}{du} = k_g \text{ é a rigidez geométrica, e}$$

$$\frac{dW}{du} = k_{\text{ext}},$$

permitindo escrever a equação (3.14) como

$$k_t = k_e + k_g - k_{\text{ext}}, \quad (3.15)$$

A expressão (3.14) admite uma possível variação de W em função de u . Em problemas conservativos, como é o caso desta pesquisa, $\frac{dW}{du} = 0$ e portanto $k_{\text{ext}} = 0$. Em problemas em que as varia-

ções geométricas são desprezíveis para efeitos da decomposição dos esforços internos, $\frac{dF}{du} = 0$, ou seja, $k_g = 0$, e o problema é geometricamente linear. Para um material de comportamento linear, $\frac{dF}{du}$ é constante. Sob estas três últimas hipóteses, portanto, recair-se-ia em um problema linear.

Venâncio Filho (1975) afirma que os problemas da não-linearidade geométrica conduz, como consequência, à análise da estabilidade ou cálculo da carga crítica das estruturas. Venâncio Filho (1975) realiza a construção da matriz de rigidez geométrica optando por uma formulação baseada no Princípio da Conservação da Energia via Método dos Elementos Finitos.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma contribuição original da engenharia de estruturas, que remonta aos estudos de Argyris, em 1954; Turner, Clough, Martin e Topp, em 1956; Clough, em 1960, entre outros, que utiliza o Princípio dos Trabalhos Virtuais. O MEF nada mais é que uma técnica de discretização de sistemas contínuos e aproximação numérica de suas equações diferenciais. Enraíza-se nos procedimentos do tipo *Trial function* utilizados nos métodos variacionais de Rayleigh (1870) e Ritz (1909) e nos de resíduos ponderados de Galerkin (1915), (BRASIL, 1995).

As estruturas reais constituem um meio contínuo de difícil equacionamento. Assim, usualmente, são utilizadas técnicas de discretização. Nelas, os deslocamentos da estrutura passam a ser descritos em função das coordenadas generalizadas adotadas. Em várias situações, um modelo adequado para representar sistemas contínuos e complexos é obtido utilizando-se um número finito de componentes simples, criando os chamados problemas discretos.

Na técnica de discretização por elementos finitos, os domínios são divididos em regiões pequenas, porém finitas, de formato simples, unidas por nós, cujos deslocamentos generalizados se tornam as incógnitas do problema. Reside aqui a diferença entre o Método dos Elementos Finitos e técnica desenvolvida neste trabalho, desenvolvida na seção 4. Enquanto que no primeiro, as funções de interpolação

são válidas para pequenas regiões ou referências locais, no segundo, as funções de interpolação são válidas para todo o domínio.

Os deslocamentos calculados pelo Método dos Elementos Finitos multiplicam funções de interpolação de integração relativamente simples que assumem valor unitário em um dos nós, zero nos demais e no restante do domínio. Com isso, consegue-se um procedimento facilmente programável, capaz de resolver problemas de grande complexidade, sendo limitado apenas pela capacidade computacional.

Venâncio Filho (1975) aborda o problema não-linear geométrico no âmbito do Método dos Elementos Finitos da seguinte forma.

Considere-se a barra da Figura 3.6, de seção transversal constante, com momento de inércia I e comprimento L , referida aos eixos locais x , y , com os deslocamentos nodais indicados.

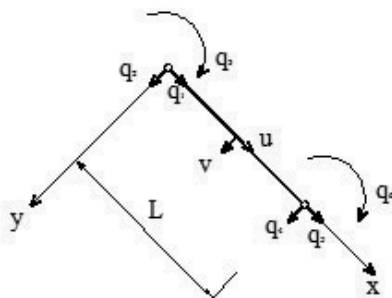


Figura 3.6 – Barra em flexão - Venâncio Filho (1975).

Para uma barra em flexão, a matriz das deformações é constituída pela curvatura do eixo da barra, à qual se associa o momento fletor. A curvatura é dada a partir do deslocamento v por

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2}, \quad (3.16)$$

Os deslocamentos u e v podem ser expressos pelos deslocamentos nodais

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 6\left(\frac{x}{L^2} - \frac{x^2}{L^3}\right)y & \left(-1 + 4\frac{x}{L} - 3\frac{x^2}{L^2}\right)y & \frac{x}{L} & 6\left(-\frac{x}{L^2} + \frac{x^2}{L^3}\right)y & 2\left(\frac{x}{L} - 3\frac{x^2}{L^2}\right)y \\ 0 & 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} & x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & 0 & 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.17)$$

ou seja:

$$\{\delta\} = [H]\{q\}, \quad (3.18)$$

onde $\{\delta\}$ é a matriz dos deslocamentos u e v , $[H]$ é a matriz que abriga as funções de interpolação e $\{q\}$ é a matriz coluna com os deslocamentos nodais do elemento.

A relação não-linear entre deslocamentos e deformações unitárias é, para este caso,

$$\varepsilon = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad (3.19)$$

sendo u_0 o de valor de u para $y = 0$. A energia de deformação é, neste caso,

$$U = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon^2 dV, \quad (3.20)$$

onde V é o volume do elemento.

Introduzindo ε da equação (3.19) na equação (3.20),

$$U = \frac{E}{2} \int_V \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dV,$$

obtem-se

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L dx \int_A \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 y^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 - 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} y + \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 y \right], \quad (3.21)$$

Desprezando o termo de ordem elevada $\frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^4$ e tendo em vista que $\int_A y dA = 0$ e $\int_A y^2 dA = I$ obtém-se, efetuando a integração sobre a área na equação (3.21),

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^L \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3.22)$$

Da equação (3.17), por outro lado, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} &= \frac{1}{L} (-q_1 + q_4) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 6 \left(-\frac{x}{L^2} + \frac{x^2}{L^3} \right) q_2 + \left(1 - 4\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \right) q_3 + 6 \left(\frac{x}{L^2} - \frac{x^2}{L^3} \right) q_5 + \left(-2\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \right) q_6 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \left(-\frac{6}{L^2} + 12\frac{x}{L^3} \right) q_2 + \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) q_3 + \left(\frac{6}{L^2} + 12\frac{x}{L^3} \right) q_5 + \left(-\frac{2}{L} + 6\frac{x}{L^2} \right) q_6 \end{aligned} \quad (3.23)$$

A introdução das equações (3.23) na equação (3.22) fornece, depois de efetuada as integrações,

$$\begin{aligned}
U = & \frac{EA}{2L} (q_1^2 - 2q_1q_4 + q_4^2) \\
& + \frac{2EI}{L^3} (3q_2^2 + L^2q_3^2 + L^2q_6^2 + 3Lq_2q_3 - 6q_2q_5 + 3Lq_2q_5 - 3Lq_3q_5 + L^2q_3q_6 - 3Lq_5q_6) \\
& + \frac{EA}{L^2} (q_4 - q_1) \left(\begin{aligned} & \frac{3}{5}q_2^2 + \frac{1}{15}L^2q_3^2 + \frac{3}{5}q_5^2 + \frac{1}{5}L^2q_6^2 + \frac{1}{10}Lq_2q_3 - \frac{6}{5}q_2q_5 + \frac{1}{10}Lq_2q_6 \\ & - \frac{1}{10}Lq_3q_5 - \frac{1}{30}L^2q_3q_6 - \frac{1}{10}Lq_5q_6 \end{aligned} \right) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Considerando a força axial de compressão positiva, a força normal F é

$$F = \frac{AE}{L} (q_1 - q_4), \quad (3.25)$$

Introduzindo a Eq. (3.25) na terceira parcela da Eq. (3.24) e escrevendo-a sob forma matricial, tendo em vista que a energia de deformação de um elemento estrutural, de um modo geral, é expressa por

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [k] \{q\}, \quad (3.26)$$

que, para o caso geométrico não-linear, torna-se

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T \left[[k_0] - [k_g] \right] \{q\}, \quad (3.27)$$

sendo $\{q\} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6\}$, $[k_0]$ a matriz de rigidez elástica e $[k_g]$ a matriz de rigidez geométrica da barra em flexão dadas por

$$[k_0] = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12I}{L^3} & \frac{6I}{L^2} & 0 & -\frac{12I}{L^3} & \frac{6I}{L^2} \\ & & \frac{4I}{L} & 0 & -\frac{6I}{L^2} & \frac{2I}{L} \\ & & & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ & \text{simétrica} & & & \frac{12I}{L^3} & -\frac{6I}{L^2} \\ & & & & & \frac{4I}{L} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

e

$$[k_g] = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{simétrica} & & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

A matriz da Equação (3.29) denota a dependência da rigidez geométrica com o esforço normal que age em seus extremos e com o comprimento do elemento.

Para uma primeira aproximação dos efeitos da não-linearidade, os postes de telefonia celular podem perfeitamente ser modelados por um sistema composto por uma barra engastada na base.

Considere-se uma barra livre em uma extremidade e engastada na outra, com os deslocamentos nodais indicados na Figura 3.7.



Figura 3.7 – Graus de liberdade de um elemento de barra.

Para se analisar o comportamento dinâmico sob não-linearidade geométrica desse sistema, nas proximidades da configuração indeformada, ou original, a matriz de rigidez, com base em (3.28) e (3.29) é

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \text{simétrica} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} - \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \text{simétrica} & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, A é a área da seção transversal, L é o comprimento da barra, I é o momento de inércia da seção em relação ao eixo perpendicular ao plano que contém a figura e F é o esforço normal de compressão tomado como positivo.

É possível realizar uma simplificação da matriz de rigidez, através da condensação estática, onde a rotação é expressa em termos da translação na direção do movimento, e considerar exclusivamente o grau de liberdade livre horizontal, o que reduz o sistema a um grau de liberdade e a matriz a um único termo:

$$K = \frac{3EI}{L^3} - 1,125 \frac{F}{L} \quad (3.31)$$

As matrizes elástica e geométrica, apresentadas em (3.28) e (3.29), foram desenvolvidas no sistema local do elemento. Quando se trata de estruturas com sistema discreto de coordenadas generalizadas é preciso referi-las ao sistema de referência global obedecendo à correlação existente entre os deslocamentos nos dois sistemas. As técnicas desse procedimento podem ser encontradas em Cook (2002) e Bathe (1996).

Quando excitados, os sistemas estruturais estarão sujeitos a forças conservativas e forças dissipativas em maior ou menor grau dependendo de suas características geométricas, materiais e do meio onde se encontra inserido. Desprezando-se os atritos, intrínseco do material e do meio, e uma vez cessada a excitação, os únicos movimentos possíveis, nessa situação, devem-se às condições iniciais de deslocamento e de velocidade.

Simiu; Scalan (1996) afirmam que um sistema estrutural com baixo amortecimento, quando excitados pelo vento, irão vibrar em ressonância com as formas definidas por suas frequências naturais. As formas (modos) e as frequências naturais de vibração são propriedades da estrutura, independem da excitação, estão relacionados à maneira de como se dá a distribuição de massa do sistema e à rigidez da estrutura.

As equações de movimento livre não amortecido de um sistema com vários graus liberdade, referidas ao sistema discreto de coordenadas generalizadas, podem ser escritas na forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (3.32)$$

onde

$[M]$ é a matriz de massa;

$\{\ddot{x}\}$ é o vetor aceleração;

$[K]$ é a matriz de rigidez, compreendida por $K = K_0 + K_g$ que introduz a não-linearidade geométrica na equação do movimento (K_0 é matriz de rigidez à elástica e K_g é a matriz de rigidez geométrica);

$\{x\}$ é o vetor deslocamento;

A Eq.(3.32) é uma equação diferencial homogênea, cujas soluções são formas $\{\Phi\}$, que representam os modos de vibração em que todas as coordenadas do sistema variam na mesma frequência e harmonicamente no tempo. Escrevem-se, portanto, os deslocamentos nodais como

$$\{x\} = \{\Phi\} \cos(\omega t - \theta) \quad (3.33)$$

A Eq. (3.33) representa a vibração do sistema segundo um modo normal de vibração, o correspondente à frequência ω . Derivando essa solução duas vezes no tempo, substituindo na equação (3.33) e cancelando a função harmônica, recai-se no sistema de equações algébricas homogêneas

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{\Phi\} = 0 \quad (3.34)$$

Para que sejam possíveis soluções não-triviais, o determinante da matriz deve ser nulo

$$\det[[K] - \omega^2 [M]] = 0 \quad (3.35)$$

resultando numa equação polinomial de grau n na variável ω^2 , conhecida como equação de frequência. As n soluções ω_i , neste caso, são reais e positivas e são as frequências naturais do sistema. Usualmente, denota-se por ω_1 a menor delas e, pela ordem, até a maior ω_n . Assim, podem-se determinar os n modos de vibração e colecioná-los numa matriz modal $n \times n$, cujas colunas são os n modos de vibração livres não amortecidos, normalizados (Brasil, 2004). Cada par de autovalores/autovetores é conhecido como uma frequência e um modo de vibração do sistema. As frequências cíclicas em Hz serão

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}, \quad (3.36)$$

cujos inversos são os períodos de vibração livres em segundos.

Para considerar todos os valores e vetores característicos em número igual ao de deslocamentos nodais do sistema, Venâncio Filho (1975) sugere escrever a Eq. (3.34) como

$$[\Phi][\omega^2] = [K][M]^{-1}[\Phi] \quad (3.37)$$

onde $[\omega^2]$ é a matriz diagonal de ordem n constituída pelas frequências naturais ao quadrado e $[\Phi]$ a matriz $n \times n$ cujas colunas são os modos normais de vibração. A matriz $[K][M]^{-1}$ é chamada de matriz dinâmica, também mencionada por Blessmann (2005).

No caso de distribuição discreta de massa (“lumped mass”), a matriz de massa do sistema estrutural é simplesmente uma matriz diagonal constituída pelas massas e momentos de inércia concentrados relativos aos deslocamentos nodais. Os problemas discretos constituem a base das análises realizadas para a determinação da resposta da estrutura à turbulência atmosférica.

Na determinação da resposta dinâmica das estruturas sob excitação de vento, os modos naturais de vibração desempenham papel

fundamental. A solução desenvolvida para o cálculo da força estática equivalente à ação dinâmica do vento baseia-se em um tratamento estatístico sobre a equação do movimento escrita com os modos normais de vibração do sistema discretizado, para as quais tanto a matriz de massa quanto as de rigidez são diagonais.

Como explicitado em (3.32), fica claro que a diferença entre a determinação da frequência de sistemas lineares e não-lineares do ponto de vista geométrico se fundamenta na construção da matriz de rigidez. Enquanto que no primeiro caso apenas os efeitos elásticos da matriz de rigidez são levados em conta, no segundo a matriz de rigidez total depende da parcela geométrica, que é função do esforço normal atuante.

Wilson e Habibullah (1987) afirmam que a utilização da matriz de rigidez na dinâmica estrutural é uma técnica viável para o cálculo dos efeitos de segunda ordem, pois esse efeito é linearizado e a solução do problema é obtida diretamente, de forma exata, sem iterações. É válida para situações onde a força vertical devido ao peso próprio e sobrecargas permanecem constantes durante o movimento da estrutura e para aquelas situações, cujos deslocamentos laterais sofridos são pequenos quando comparados às suas dimensões.

Nesse contexto, somente o peso próprio da estrutura e as sobrecargas verticais necessitam ser incluídas na parcela negativa da rigidez geométrica. Esse método se aplica tanto a cálculos estáticos quanto dinâmicos, consistindo em um processo que pode ser facilmente programável no ambiente do Método dos Elementos Finitos, exigindo reduzido esforço computacional. Medeiros e França (1989) utilizaram essa facilidade de programação e aliaram o Método dos Elementos Finitos à análise não-linear simplificada na solução de diversos problemas da engenharia, compararam os resultados obtidos a métodos analíticos e outros métodos de análise não-lineares, concluindo pela eficiência do método.

Além do mais, como expõe Rutenberg (1982), as cargas gravitacionais sobre as colunas dos edifícios são relativamente baixas quando comparadas à carga crítica de Euler, assim como os efeitos adicionais de segunda ordem, permitindo que se aplique uma solução aproximada via matriz de rigidez geométrica, linearizando o problema.

As estruturas civis são corpos sujeitos a esforços aos quais devem resistir para que a sua forma se mantenha razoavelmente próxima das configurações desejadas, durante os movimentos induzidos, ou seja, os movimentos de uma estrutura civil devem ser pequenos em torno de uma configuração projetada, portanto, a análise dinâmica sob não-linearidade geométrica realizada por meio da matriz de rigidez é perfeitamente cabível.

4

Proposta para o cálculo da frequência natural de vibração sob não-linearidade geométrica

A formulação analítica que leva em conta a rigidez geométrica dos sistemas elásticos no cálculo de suas frequências, e que servirá de referência neste trabalho, está baseada no Método de Rayleigh (1877). Aplicações da técnica de Rayleigh à problemas de vibrações de sistemas mecânicos são encontradas em Bianco-
lini, Brutti e Reccia (2005); Cheunga e Zhou (2003); Chiba e Sugimoto (2003), Hu et al (2004); Laura, Masiáb and Avalos (2006); e Kandasamy, Singh (2006).

O conceito básico que está por detrás desse método é o Princípio da Conservação da Energia dos sistemas mecânicos (Clough, 1993) e, portanto, aplicável a estruturas lineares ou não. De acordo com Temple (1933) o princípio fundamental desenvolvido por Rayleigh é aplicado não só a sistemas com um número finito de graus de liberdade, mas também a sistemas contínuos, e se destina tanto à determinação do período fundamental de vibração quanto às análises da estabilidade dos sistemas elásticos, com a precisão demandada pelos problemas da engenharia.

O Princípio da Conservação da Energia estabelece que a energia mecânica total de um sistema em vibração mantém-se constante e distribui-se por duas parcelas, correspondentes à energia cinética e à energia potencial. Cada uma das parcelas é variável no tempo. Aos máximos e mínimos da energia cinética correspondem respectivamente mínimos e máximos da energia potencial (RAVARA, 1969).

Fonseca (1964) relata que Rayleigh encontrou dificuldade para aplicação do Teorema da Conservação da Energia, quando se considerava a massa distribuída da mola. Isso decorreu do fato de que, tanto a determinação da energia potencial quanto a da energia cinética dependiam do conhecimento da configuração do sistema, a qual não era previamente conhecida. Rayleigh, primordialmente, contornou essa dificuldade admitindo, em primeira aproximação, que a energia potencial não era afetada pela pequena mudança de configuração ocasionada pela distribuição da massa da mola, calculava a energia potencial de deformação como se a mola fosse desprovida de massa, em seguida recalculava a energia cinética admitindo uma razoável configuração para o sistema em vibração. Essa dificuldade deixa de existir com a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, expresso em termos de coordenadas generalizadas.

A energia potencial de qualquer sistema estrutural, em alguma configuração real, é definida como o trabalho realizado por todas as forças atuantes, caso o sistema seja movido da configuração real para a configuração descarregada. Portanto, a energia potencial é o trabalho realizado por todas as forças atuantes quando a estrutura é movida de sua configuração com carga para uma posição sem carregamento.

Na aplicação do Princípio da Conservação da Energia, as forças atuantes na estrutura consistem em cargas externas e forças internas, sendo as últimas tensões resultantes. A energia potencial das forças internas é a energia de deformação, armazenada na estrutura carregada. Se a estrutura for descarregada, a quantidade de trabalho recuperado será igual à energia de deformação. O trabalho das forças externas é negativo porque a carga na estrutura realiza trabalho negativo caso retorne da posição carregada para a descarregada. Logo, o trabalho virtual das forças externas, realizado pelas cargas atuantes, deve ser igual ao trabalho virtual das forças internas.

No desenvolvimento da expressão para o cálculo da frequência fundamental não amortecida de estruturas em balanço, proposta neste trabalho, o Princípio dos Trabalhos Virtuais foi escrito em termos da coordenada generalizada, convenientemente escolhida no topo barra, e de uma função de forma que descreve o primeiro modo de vibração. A precisão obtida por esse método depende inteiramente da função de forma assumida para representar o modo de vibração livre, Leissa (2005). Em princípio, qualquer função que satisfaça as condições de contorno pode ser escolhida. Ao final do processo, a equação do movimento aparece em termos da coordenada generalizada e da qual se podem extrair as propriedades elásticas e geométricas generalizadas do sistema.

Considere-se o sistema contendo apenas o grau de liberdade horizontal e em movimento livre não amortecido, com os parâmetros apresentados na Figura 4.1. Admita-se que esse sistema seja composto por uma barra prismática, constituída de material elástico-linear, engastada na base, suportando, além do seu peso próprio, uma massa na extremidade livre, representativa dos corpos fixados ao seu topo. Considere-se também que o movimento do sistema não altera a orientação da força normal $F(x)$.

A estrutura representada pela Figura 4.1 constitui uma barra em flexão. Assim, o trabalho virtual das forças internas δW_i é realizado pelo momento fletor $M(x, t)$, agindo sobre a curvatura virtual $\delta \left[\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right]$ da barra. O Princípio dos Trabalhos Virtuais requer que o trabalho virtual das forças externas seja igual ao trabalho virtual das forças internas.

$$\delta W_E = \delta W_I \quad (4.1)$$

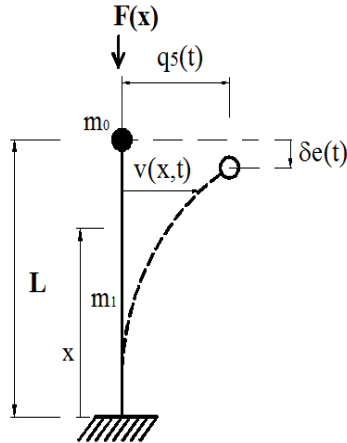


Figura 4.1 – Parâmetros do modelo para desenvolvimento do método.

O trabalho virtual das forças externas é

$$\delta W_E = - \int_0^L f_1(x) \delta v(x) dx + F(x) \delta e, \quad (4.2)$$

onde $f_1(x) = m_1(x) \ddot{v}(x, t)$ representa a força inercial.

O trabalho virtual das forças internas é dado por

$$\delta W_I = \int_0^L M(x, t) \delta v''(x) dx, \quad (4.3)$$

onde $\delta v''(x) = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}$.

Para encontrar o deslocamento axial $e(t)$ é preciso tomar um elemento infinitesimal ds da curvatura da barra, logo o encurtamento do eixo devido ao deslocamento axial será

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 - dv^2} - dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - dx. \quad (4.4)$$

Pelo desenvolvimento binomial tem-se que

$$\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{1/2} = 1 + \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^4}{8} + \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^6}{16} - \dots$$

Como os termos de ordem superior a $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$ são muito pequenos comparados à unidade, pode-se fazer

$$\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{1/2} = 1 + \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}{2},$$

permitindo reescrever a Eq. (4.4) de forma a ter-se

$$ds - dx = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \right] - dx = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx. \quad (4.5)$$

Integrando a expressão (4.5) sobre toda a viga, obtém-se

$$e = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (4.6)$$

Como os parâmetros necessários à solução do problema podem ser expressos em função da coordenada generalizada q_5 e de uma função de forma $\phi(x)$, tem-se

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \phi(x)q_5(t) & \delta v(x, t) &= \phi(x)\delta q_5(t) \\ v'(x, t) &= \phi'(x)q_5(t) & \delta v'(x, t) &= \phi'(x)\delta q_5(t) \\ v''(x, t) &= \phi''(x)q_5(t) & \delta v''(x, t) &= \phi''(x)\delta q_5(t) \\ \ddot{v}(x, t) &= \phi(x)\ddot{q}_5(t) & & \\ \dot{v}''(x, t) &= \phi''(x)\dot{q}_5(t) & \delta e &= \int_0^L v'(x, t)\delta v'(x)dx \end{aligned} \quad (4.7)$$

as quais, sendo substituídos nas Eq. (4.2) e (4.3), chega-se à equação do movimento livre não amortecido em termos da coordenada generalizada:

$$M\ddot{q}_5(t) + K_0q_5(t) - K_gq_5(t) = 0, \quad (4.8)$$

onde M , K_0 e K_g são a massa e as rigidezes generalizadas, que são apresentadas a seguir.

A função trigonométrica (4.9), ora arbitrada, pode ser encontrada em Clough (1993) e Timoshenko (1936), representa, de forma exata, o primeiro modo de flambagem do modelo, o que sugere que a sua validade está restrita à vizinhança da configuração de referência.

Tome-se a função de forma da expressão (4.9).

$$\phi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \quad (4.9)$$

A massa generalizada M será dada por

$$M = m_0 + m_2, \quad (4.10)$$

com

$$m_2 = \int_0^L m_1 \phi(x)^2, \quad (4.11)$$

onde m_1 é a massa por unidade de comprimento e m_0 é a massa concentrada no topo da barra.

A massa generalizada total, nesse contexto, é dada por

$$M = m_0 + \frac{1}{2} L m_1 \frac{3\pi - 8}{\pi}. \quad (4.12)$$

que, simplificando, leva a

$$M = m_0 + 0,227 m_1 L \quad (4.13)$$

A rigidez elástica generalizada é dada por

$$K_E = \int_0^L EI \left(\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (4.14)$$

e a matriz de rigidez geométrica, por sua vez, é dada por

$$K_G = \int_0^L F(x) \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (4.15)$$

Para o modelo da Figura 4.1 $F(x) = [m_0 + m_1(L-x)]g$, com $F(x)$ sendo a força normal interna distribuída produzida pelo carregamento externo e pelo peso próprio da barra.

A rigidez generalizada total do sistema, considerando positiva a força axial de compressão, é, então,

$$K = K_E - K_G \quad (4.16)$$

com

$$K_E = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \quad (4.17)$$

e

$$K_G = \frac{1}{16} g \frac{2\pi^2 m_0 + (\pi^2 - 4)m_1 L}{L} \quad (4.18)$$

Calculando as expressões anteriores, e simplificando a solução para o grau de liberdade horizontal, chega-se à expressão da frequência que leva em conta a influência do esforço axial, em Hertz:

$$f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\frac{\pi^4 EI}{32 L^3} - \left[\frac{\pi^2}{16} \left(\frac{2m_0 + m_1 L}{L} \right) - \frac{1}{4} m_1 \right] g}{m_0 + \frac{1}{2} L m_1 \frac{3\pi - 8}{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

Na expressão (4.19) E é o módulo de elasticidade do material, L é o comprimento da barra, I é o momento de inércia da seção em relação ao eixo perpendicular ao movimento e g é a aceleração da gravidade, cujo sinal coincide com o da força de compressão.

Havendo massas localizadas m_i ocupando posições x_i ao longo da altura, e não somente no topo da barra, como mostrado na Figura 4.2, a massa generalizada M deve levar em conta a influência dessas outras massas, devendo ser representada pela expressão (4.20).

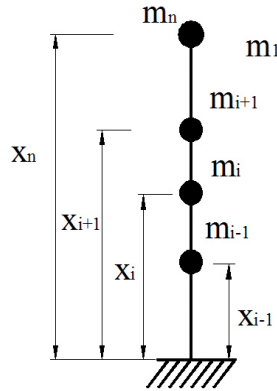


Figura 4.2 – Modelo de barra com distribuição geral de massa.

$$M = \int_0^L m_i \phi(x)^2 + \sum m_i \phi(x_i)^2, \quad (4.20)$$

Nesse caso, a expressão (4.19) deve ser escrita da seguinte forma

$$f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\frac{\pi^4 EI}{32 L^3} - \left[\frac{\pi^2}{16} \left(\frac{2m_R + m_i L}{L} \right) - \frac{1}{4} m_i \right] g}{m_R + \frac{1}{2} L m_i \frac{3\pi - 8}{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.21)$$

onde

$$m_R = \sum m_i \left[1 - \cos \left(\frac{\pi x_i}{2L} \right) \right]^2. \quad (4.22)$$

com m_i e x_i sendo as massas concentradas e suas posições, incluindo a do topo.

A rigidez da estrutura pode ser escrita como

$$K = \frac{\pi^4 EI}{32 L^3} - \left(\frac{1}{16} g \frac{2\pi^2 m_0 + (\pi^2 - 4) m_i L}{L} \right), \quad (4.23)$$

que de forma mais simples é

$$K = 3,044 \frac{EI}{L^3} - \left(1,234 \frac{F_0}{L} + 0,367 \frac{F_1}{L} \right), \quad (4.24)$$

com $F_0 = m_0 g$ e $F_1 = m_1 L g$.

A carga crítica de flambagem é obtida fazendo nula a rigidez na Eq. (4.23), o que leva a

$$F_{cr} = \frac{\pi^4 EI}{4L^2} - 0,297 m_1 L g, \quad (4.25)$$

que representa a solução de Euler com 5,85% de defasagem, conforme os dados presentes na Tabela 3.1.

Para uma comparação com o Método dos Elementos Finitos, Eq. (3.31), é preciso recordar que no MEF os esforços são relacionados aos nós do elemento. Esse tratamento é semelhante, no presente método, a considerar na expressão (4.15), $F(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{g}$, sendo M a massa generalizada da Eq.(4.12). Logicamente F será nodal, pois é o resultado da extrapolação, ou generalização, da força axial distribuída, obtida pela Eq. (4.11), mais a força aplicada no correspondente nó da coordenada generalizada.

Resolvendo a expressão (4.15) com a condição anterior, obtém-se

$$K_g = 1,145 \frac{F}{L}, \quad (4.26)$$

que é 1,7% diferente da expressão desenvolvida pelo MEF para a rigidez geométrica. Já a rigidez elástica, primeira parcela da Eq. (4.24), está 1,5% acima da parcela correspondente da Eq. (3.31).

É possível reescrever a equação (4.19) como uma função do comprimento e calcular as frequências naturais dos sistemas estruturais levando em conta apenas o produto de rigidez e as massas envolvidas. Na aplicação direta da expressão (4.19) a aceleração da gravidade será tomada com o mesmo sinal adotado para a força de compressão.

Adotando-se os parâmetros elásticos e geométricos dos corpos-de-prova utilizados nos ensaios de laboratório (espessura de 1/8 da polegada (12,7 mm) e largura de 1/2 da polegada (3,175 mm); massa específica de 8190 kg/m³; módulo de elasticidade longitudinal de 205 GPa; massa concentrada no topo da barra de 1,595 Kg; e fazendo-se variar o comprimento de 0,15 m a 5 m, em pequenos intervalos, foi possível traçar os gráficos relativos às frequências, em Hertz, para as três situações de mudança de rigidez que foram investigadas em laboratório. A primeira trata dos efeitos da força normal de compressão, a segunda dos efeitos da força normal de tração e a última investiga a ausência de esforço normal.

Reunidas no gráfico da Figura 4.3, as frequências obtidas pela Eq. (4.19) permitem conhecer a influência do esforço axial na frequência natural do primeiro de vibração dos sistemas.

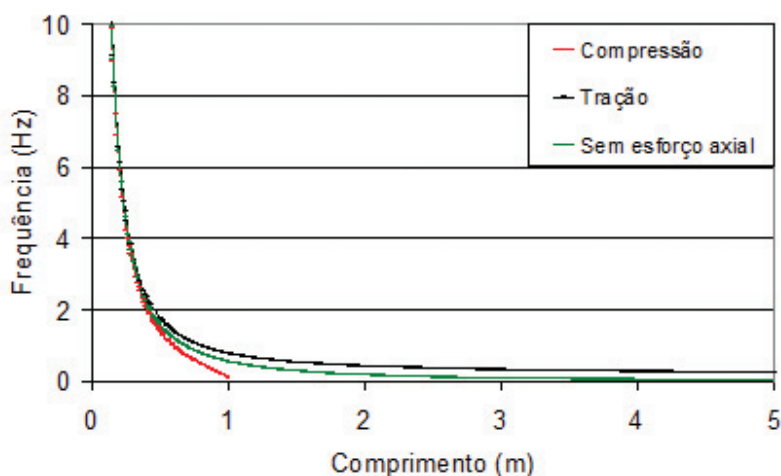
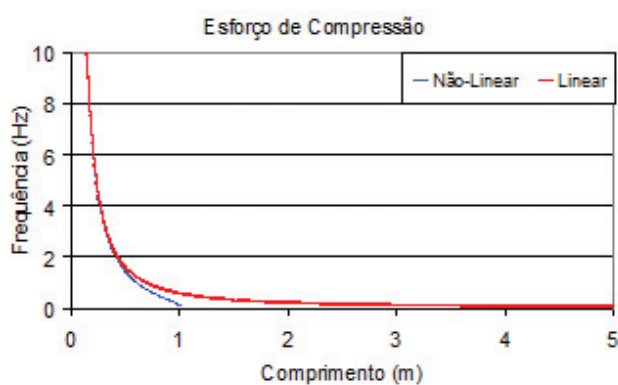


Figura 4.3 – Análise pela solução analítica proposta.

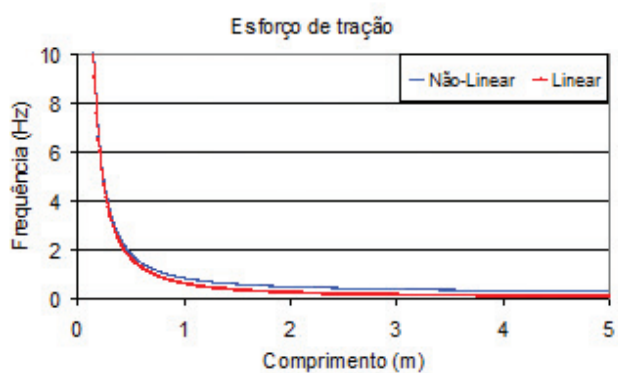
O aspecto relevante dessa simulação está em notar a condição crítica de estabilidade, que ocorre quando a frequência tende a zero. A condição crítica, admitindo-se a influência do esforço de compressão, acontece quando o comprimento atinge 1,01 m. A correspondente carga crítica obtida pela Eq. (4.25) é de 15,823 N, enquanto que pelo Método de Euler-Greenhill essa carga é de 15,766 N, 0,36% abaixo.

Se fosse desconsiderado o efeito da força de compressão sobre a rigidez geométrica da barra, a curva seguiria assintoticamente ao eixo horizontal, como pode ser observado no traçado “Linear” da Figura 4.4a. Isso revela que os sistemas estruturais sob compressão possuem um limite definido de estabilidade quando se considera o efeito da carga axial.

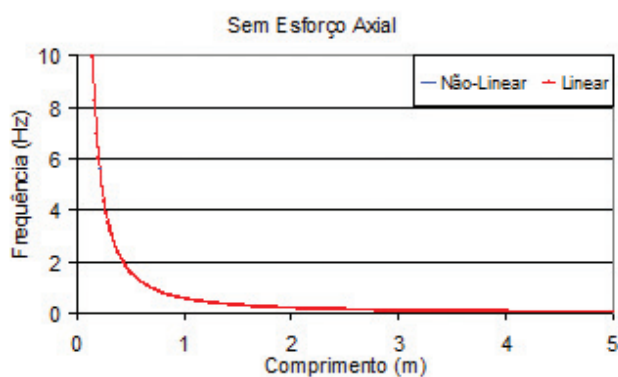
No caso do esforço de tração (Figura 4.4b) é diferente, já que esse esforço age favoravelmente na rigidez, estabilizando o sistema. Na ausência do esforço normal, a rigidez da estrutura não é modificada (Figura 4.4c), como esperado.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.4 – Frequências dos modelos pelo método proposto.

Investigação experimental em modelos

Para aferir a formulação proposta neste trabalho para o cálculo da frequência do primeiro modo de vibração, desenvolvida no capítulo 4, foram desenvolvidos ensaios dinâmicos em laboratório utilizando modelos de barras. A investigação foi realizada nas dependências do Gabinete de Dinâmica Não-Linear de Estruturas da Escola Politécnica da USP.

Dois conjuntos de testes foram conduzidos visando aferir a proposta para o cálculo da frequência e avaliar a influência da rigidez geométrica na frequência de vibração dos sistemas estruturais em balanço. O primeiro grupo estava submetido, além do seu peso próprio,

a uma força normal aplicada na extremidade. O segundo grupo estava sujeito exclusivamente ao seu peso próprio.

Para acompanhar os cálculos analíticos e os resultados experimentais, foram feitas duas análises numéricas por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando o programa SAP2000. A primeira foi realizada sob condições lineares (MEFL) e a segunda sob as condições de não-linearidade geométrica (MEFNL), essa última processada com base nos resultados provenientes de uma análise estática não-linear. Essa análise pode ser realizada com objetivos comparativos, pois é possível especificar no programa SAP2000 para que se utilize do processo de cálculo que leva em consideração o efeito da força normal sobre a rigidez do sistema. Nos dois casos, as análises foram feitas por autovalores.

Para o segundo grupo de testes, acrescentou-se à análise dinâmica, a análise estática da carga crítica de flambagem, pela formulação numérica de autovalores e pela solução de Euler-Greenhill.

Nas análises numéricas, os parâmetros empregados foram os referidos nos itens relativos aos corpos-de-prova, tendo sido lançadas nos modelos numéricos as características do material, geometrias e massas dos modelos físicos.

As análises numéricas e analíticas, mencionadas anteriormente, foram descritas no capítulo 3.

5.1 INSTRUMENTOS E SISTEMAS EMPREGADOS

Os instrumentos, entre eles os equipamentos eletrônicos, utilizados foram: extensômetros elétricos; acelerômetros piezoelétricos; sistema de aquisição de dados ADS-2000, com placa conversora AI-2161 e placa controladora AC-2122VA, e programas AqDados e AqDAnalysis para aquisição e análise de dados, da LYNX informática; microcomputador; pré-amplificadores para o sinal dos acelerômetros; calibrador manual de acelerômetro; paquímetro; régua metálica; balança eletrônica; grampos metálicos; nível de bolha com base magnética e trena metálica.

5.2 CARACTERÍSTICAS DOS SENSORES

Foram utilizados extensômetros elétricos de resistência de 120 Ω e fator 2,1; fabricados pela Excel Sensores (Excel Sensores, 2006). O arranjo adotado para a ligação dos extensômetros ao sistema de aquisição de dados foi de $\frac{1}{4}$ de ponte a três fios.

Foram também utilizados acelerômetros do tipo piezoelétricos. Os acelerômetros piezoelétricos foram de fabricação Bruel & Kjaer modelos 4393 e 4371, cujas características, respectivamente, são: sensibilidade - 3,1 pC/g e 10 pC/g, intervalo de frequência - 0,1 Hz à 16.500 Hz e 0,1 Hz à 12.600 Hz, frequência de ressonância - 55 kHz e 42 kHz, nível de ruído residual - 0,52 g e 0,24 g, nível operacional máximo - 5000 g e 6000 g, massa 2,4 gramas e 11 gramas (BRUEL & KJAER, 2005). Os acelerômetros foram calibrados usando um calibrador excitador manual da Bruel & Kjaer tipo 4294.

A ligação dos acelerômetros ao sistema de aquisição de dados foi precedida da ligação do acelerômetro ao amplificador modelo 2525 da própria Bruel & Kjaer (SERRIGDE & LICHT, 1995).

5.3 O SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE DADOS

O sistema de aquisição automático de dados empregado foi o ADS-2000 (AqDados) com placa conversora AI-2161 e placa controladora AC-2122VA, da LYNX informática, de 16 bits de resolução, cuja interface com microcomputador é feita através de rede Ethernet, (AqDados 7.02, 2003). A ligação dos sensores ao sistema de aquisição de dados é feita por meio dos conectores de entrada, que estão localizados na parte traseira do equipamento e obedeceram às seguintes configurações:

- extensômetros: $\frac{1}{4}$ de ponte a 120 Ω com 3 fios, ganho 2000, tensão de excitação de 5 volts;
- acelerômetros: tensão diferencial, ganho 1.

Durante a aquisição dos sinais foram usados filtros passa baixa de 20 Hz para os ensaios de maior frequência e 5 Hz para os demais.

Inicialmente usou-se uma taxa de amostragem de 1000 Hz para prospectar o experimento. Como as frequências mais elevadas fica-

ram abaixo de 10 Hz, optou-se por baixar a frequência de aquisição para 100 Hz, em alguns casos a aquisição foi feita a uma frequência de 500 Hz. Os pré-amplificadores 2525 foram ajustados conforme a sensibilidade de cada acelerômetro.

5.4 ESQUEMA ESTRUTURAL

O esquema estrutural adotado para os ensaios foi o de uma barra engastada em uma extremidade e livre na outra, conforme visto na Figura 4.1.

5.5 CORPOS-DE-PROVA

O corpo-de-prova (CP) do primeiro grupo de testes era constituído por uma barra metálica chata de seção nominal de 1/2" (12,70 mm) por 1/8" (3,17 mm) ao qual foram fixadas, por pressão lateral, duas massas metálica na extremidade livre, que somadas às massas dos acelerômetros e suas bases magnéticas resultaram no valor total de 1,595 gramas no topo da haste.

Por ser uma peça de aço, o módulo de elasticidade longitudinal do material foi assumido como sendo de 205 GPa. A determinação da densidade do material da haste foi feita experimentalmente no laboratório de materiais do PCC/USP usando a técnica de picnometria com gás Hélio. A densidade relativa obtida foi de 8,19 (8190 kg/m³), conforme se vê no Anexo A. As demais massas envolvidas foram medidas na balança eletrônica do laboratório de materiais da USP.

O corpo-de-prova foi instrumentado com três extensômetros e dois acelerômetros, conforme a disposição mostrada na Figura 5.1. Os extensômetros foram colados à superfície da barra, enquanto que os acelerômetros ficaram aderidos a essa por meio de bases magnéticas que fazem parte do seu estojo de acessórios.

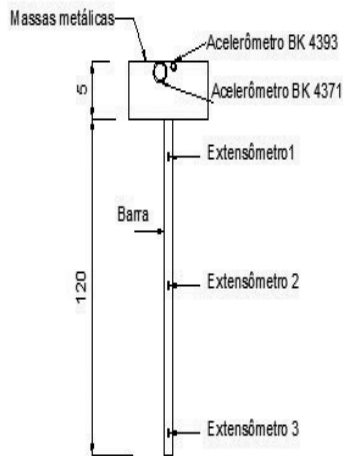


Figura 5.1 – Instrumentação do corpo-de-prova – medidas em centímetros.

O corpo-de-prova do segundo grupo ensaiado era constituído por um tubo metálico de diâmetro externo nominal de 3/8" (9,525 mm) e espessura da parede de 1,2 mm. Para esse corpo-de-prova, o módulo de elasticidade longitudinal do material foi também assumido como sendo de 205 GPa. Para esses ensaios, o corpo-de-prova foi instrumentado com o acelerômetro modelo 4371 fabricado pela Bruel & Kjaer. Os ensaios do segundo grupo foram realizados apenas para a força normal de compressão devida ao peso próprio dos modelos.

5.6 DESCRIÇÃO DOS ENSAIOS

Com as massas metálicas adicionadas à haste foram adotadas três posições de ensaio para o primeiro grupo de testes, relativas às possíveis influências da carga axial na rigidez no sistema. A primeira posição considerou a influência da força axial de compressão, logo, posicionou-se o conjunto de forma ser comprimido pelo peso próprio da barra e pela carga vertical produzida pela massa no topo. A segunda posição considerou a influência da força axial de tração, de forma que o conjunto foi posicionado de maneira a gerar força de tração no sistema e o corpo-de-prova foi posto na posição inversa à anterior. A terceira

posição analisou a ausência da influência da carga axial na frequência fundamental do modelo, por essa razão, o conjunto foi instalado na posição horizontal. Um quarto ensaio considerou exclusivamente a compressão devido ao peso próprio da barra e será descrito mais adiante. A Figura 5.2 ilustra as posições empregadas nos testes do primeiro grupo.

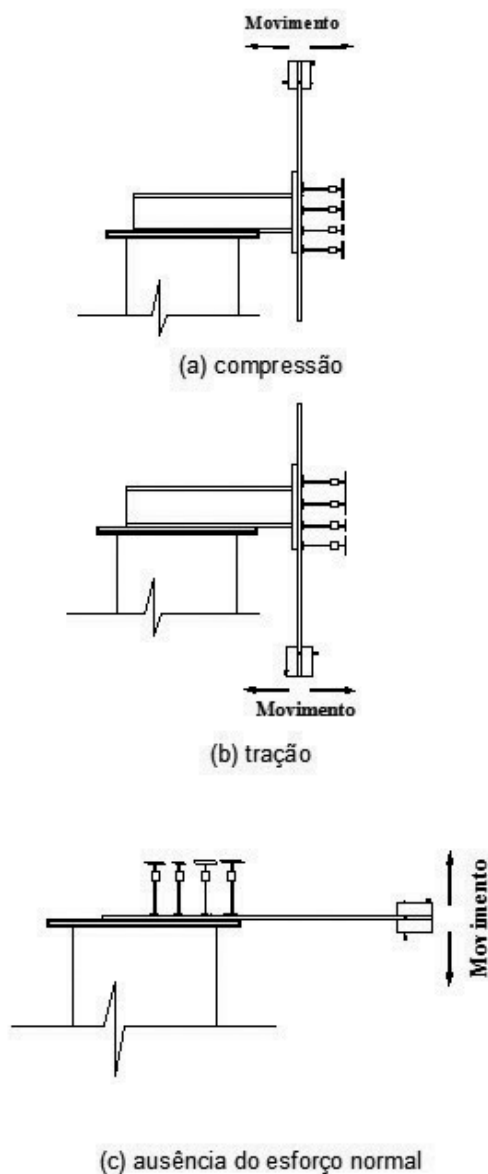


Figura 5.2 – Posições adotadas nos ensaios.

A realização dos ensaios obedeceu aos passos descritos a seguir. Antes do início dos ensaios, os acelerômetros foram calibrados com o calibrador excitador B&K modelo 4294 (Bruel & Kjaer, 2005). Os acelerômetros ficaram aderidos ao corpo-de-prova por meio das bases magnéticas com a disposição mostrada na Figura 5.3.

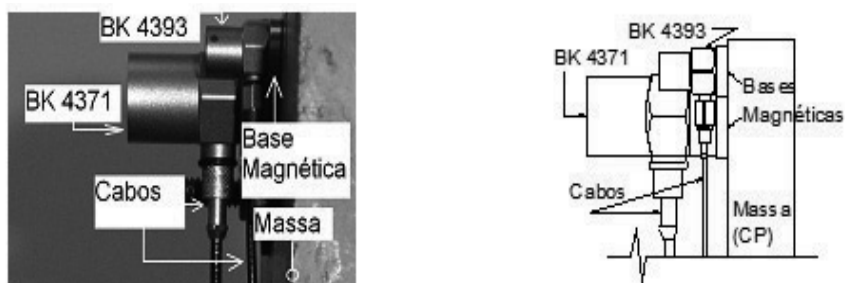


Figura 5.3 – Detalhe da fixação dos acelerômetros no CP.

Após serem fixados, tanto o aparelho de apoio quanto os modelos foram nivelados horizontal e verticalmente com nível de bolha (Figura 5.4).

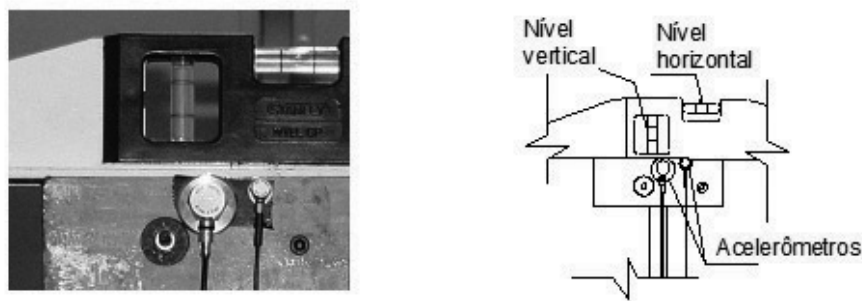


Figura 5.4 – Nivelamento dos corpos-de-prova.

O corpo-de-prova foi fixado ao aparelho de apoio por meio de grampos metálicos conhecidos comumente como grampos tipo sargento. Buscou-se manter o mesmo padrão de fixação para todos os modelos, como o tamanho e a posição dos grampos em relação aos CP e a pressão de aperto.

O comprimento experimental de referência foi controlado visualmente e a sua determinação foi feita por meio de uma trena metálica. As mesmas referências foram mantidas para as diferentes posições. Variou-se o comprimento de 5 cm em 5 cm até o limite físico de fixação possível ou até a posição de máxima estabilidade oferecida pelo conjunto. A Figura 5.5 mostra o sistema de fixação empregado nos ensaios e as referências para controle do comprimento dos corpos-de-prova.

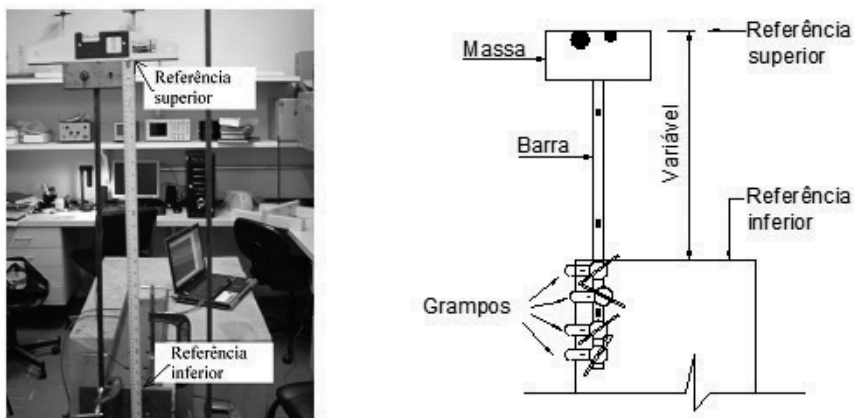


Figura 5.5 – Controle do comprimento dos modelos.

Os corpos-de-prova do grupo que estava submetido exclusivamente ao peso próprio foram fixados a um pórtico metálico por meio de uma base e uma placa metálica que permitia a mudança do comprimento ao aliviar-se a pressão exercida pelos parafusos. Buscou-se manter o mesmo padrão de aperto na fixação da barra com os diversos comprimentos adotados.

Antes de serem excitados os modelos eram verticalmente nivelados, operação que se tornava mais difícil à medida o comprimento dos modelos aumentava. O conjunto de apoio conferia uma condição inercial segura para a realização dos ensaios.

A Figura 5.6 mostra o sistema de apoio e fixação utilizado e a verificação da verticalidade dos corpos-de-prova.

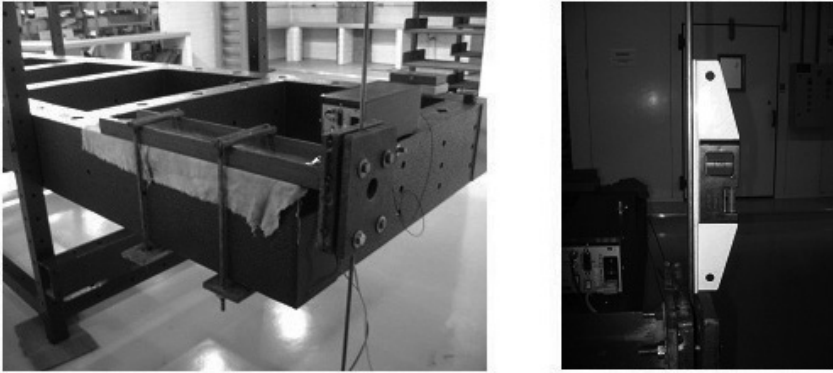


Figura 5.6 – Sistema de fixação e nivelamento do CP – Ensaios com o tubo metálico.

Em todos os ensaios, os cabos dos acelerômetros foram fixados ao sistema de apoio com fita adesiva para evitar interferência na aquisição dos sinais.

Em ambos os ensaios, os modelos, nas diversas posições e comprimentos, foram excitados por uma força aleatória com magnitude necessária e suficiente para por o sistema em movimento oscilatório. Depois de excitados, os sistemas oscilavam em torno da sua posição inicial.

Os sinais, no domínio do tempo, foram então gravados e analisados posteriormente.

5.7 ANÁLISE DOS RESULTADOS

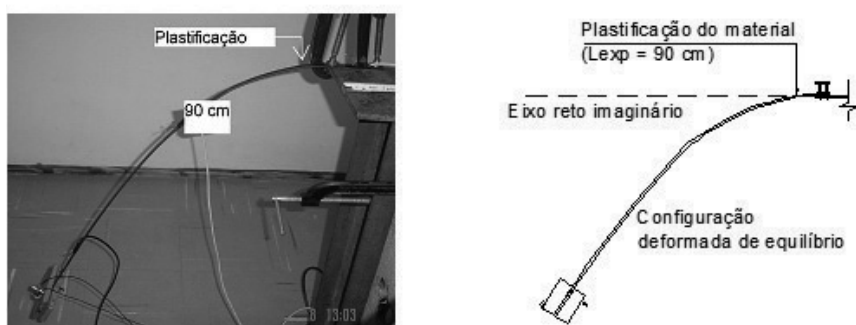
Como afirma Lobo Carneiro (1993), as vibrações livres, excitadas inicialmente a partir de um deslocamento inicial, são amortecidas por efeito histérico, por atritos, ou pela resistência de um meio viscoso. A taxa de amortecimento é uma constante física característica do material do corpo e/ou do meio que o cerca, proporcional à dissipação de energia por ciclo ou ao decréscimo relativo da amplitude de vibração.

Quanto se refere ao decréscimo da amplitude de vibração, Lobo Carneiro (1996) recomenda que o amortecimento crítico seja calculado pela Eq. (5.1).

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \cdot (\text{decréscimo relativo da amplitude por ciclo}). \quad (5.1)$$

No caso de pequenas amplitudes, tanto a experiência quanto as soluções teóricas mostram que a influência do deslocamento inicial em relação ao comprimento do corpo é desprezível e que também a influência do amortecimento sobre o período de vibração pode, em geral, ser desprezado. O amortecimento relativo medido nos ensaios por decremento logarítmico de duas amplitudes consecutivas para o corpo-de-prova em compressão com 50 cm de altura foi de 0,00724 (0,724%), corroborando as afirmações de Lobo Carneiro (1993).

É interessante mencionar que nos ensaios de compressão e sem a consideração da influência do esforço normal, os modelos mais longos apresentaram uma configuração inicial de equilíbrio estático bastante deformada em relação à posição reta do eixo da barra, chegando mesmo a ocorrer a plastificação localizada em alguns modelos. A Figura 5.7 ilustra a plastificação mencionada para o comprimento de 90 cm.



(L_{exp} = comprimento experimental de referência)

Figura 5.7 – Plastificação do material.

A situação descrita anteriormente está fora do escopo deste trabalho. No entanto, por tratar-se de atividades de prospecção, optou-se por conduzir os ensaios até onde fosse possível sua a rea-

lização. A condição relatada anteriormente representa um caso de vibração a partir da configuração inicial deformada, sendo necessário, portanto, considerar que devido à grande deformação da peça, a força F inicialmente alinhada ou perpendicular ao eixo da barra, produz uma componente axial N e gera uma força tangencial V que variam ao longo do comprimento em função da seção considerada, conforme se vê na Figura 5.8.

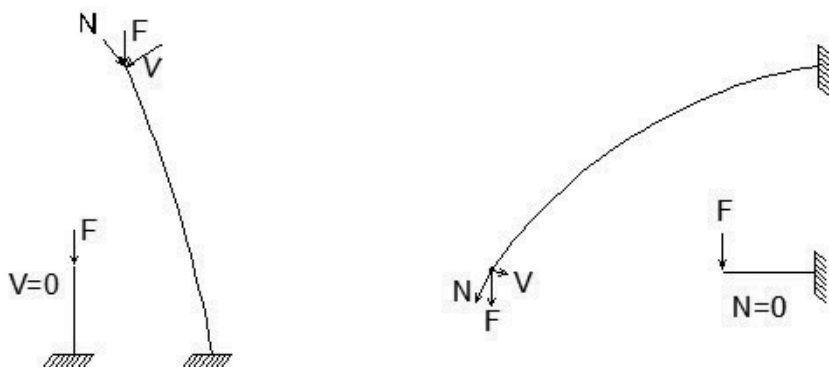
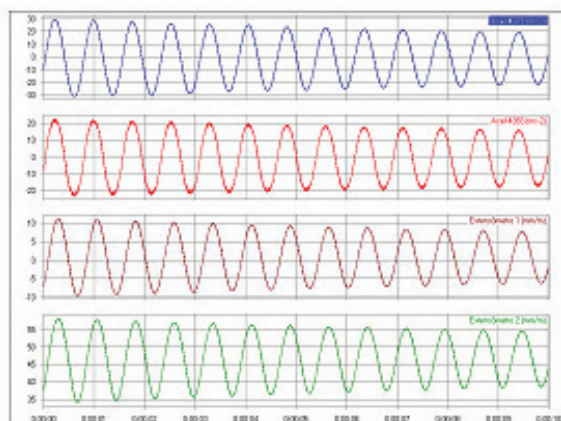


Figura 5.8 – Componentes normal e tangencial devido à curvatura acentuada da barra.

A obtenção da frequência do modo fundamental de vibração dos modelos foi feita pela transformada de Fourier no programa AqDAnalysis 7 (AqDAnalysis 7, 2004). Para isso, a análise de auto-espectro disponibilizada pelo programa foi configurada para uma janela de compensação do tipo *Hanning*, com uma janela de dados para o cálculo do espectro médio; zoom da FFT (Transformada Rápida de Fourier) igual a 1; e com a máxima resolução permitida para a quantidade de amostras aquisitadas. A resposta apresentada pelos modelos representa o movimento harmônico, conforme se vê na Figura 5.9, que exemplifica os sinais dos sensores no domínio do tempo e a transformada de Fourier correspondente ao acelerômetro B&K 4371.



(a) No domínio do tempo.



(b) No domínio da frequência.

Figura 5.9 – Resposta dinâmica experimental.

O comprimento máximo alcançado no ensaio de compressão foi de 85 cm, além do qual, o sistema não mais se manteve em equilíbrio. Os resultados dos ensaios serão discutidos mais adiante.

No que se refere às análises pelo Método dos Elementos Finitos, é oportuno salientar que:

- às frequências obtidas sob a hipótese de comportamento linear independem da natureza do esforço, pois não levam em conta a mudança na rigidez geométrica dos modelos, e, portanto, podem ser comparadas com os resultados ex-

perimentais e com os da solução proposta neste trabalho para o esforço de compressão;

- a análise dinâmica não-linear esteve baseada na matriz de rigidez de uma prévia análise estática não-linear como descrito no início deste capítulo.

Para os modelos do primeiro grupo de testes, os resultados obtidos na análise dinâmica não-linear pelo Método dos Elementos Finitos foram os seguintes:

Tabela 5.1 – Resultados da análise não-linear por Elementos Finitos.

Análise não-linear - Frequências (Hz)			
Comprimento (m)	Compressão	Tração	Sem esforço axial
0,20	6,2810	6,5146	6,3989
0,25	4,4405	4,7022	4,5733
0,30	3,3281	3,6155	3,4749
0,35	2,5940	2,9053	2,7543
0,40	2,0783	2,4121	2,2517
0,45	1,6983	2,0536	1,8848
0,50	1,4077	1,7839	1,6073
0,55	1,1783	1,5751	1,3915
0,60	0,9925	1,4096	1,2198
0,65	0,8383	1,2760	1,0805
0,70	0,7073	1,1664	0,9657
0,75	0,5936	1,0751	0,8698
0,80	0,4924	0,9981	0,7886
0,85	0,3994	0,9325	0,7192
0,90	0,3104	0,8760	0,6593

Graficamente tem-se o comportamento apresentado na Figura 5.10.

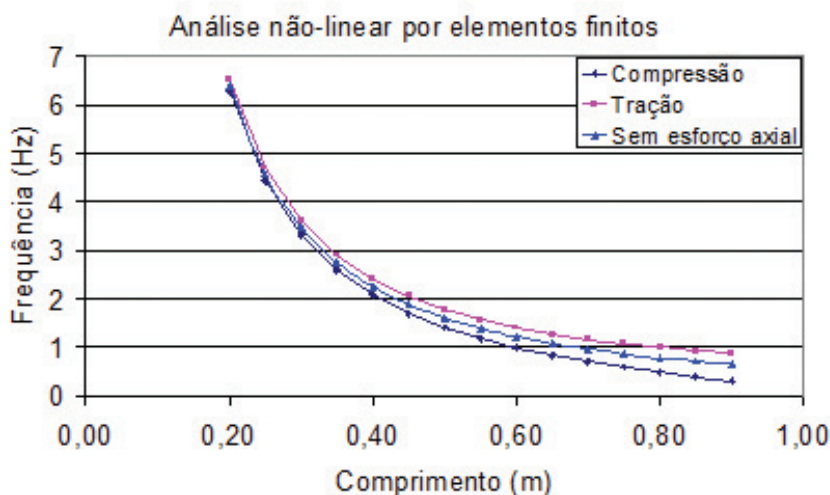


Figura 5.10 – Análise não-linear pelo Método dos Elementos Finitos.

As análises numéricas com a inclusão da não-linearidade geométrica forneceram três diferentes resultados para a frequência de vibração dos modelos. Esses resultados revelam influência que a natureza do esforço normal produz na frequência de vibração dos modelos, tornam-se, para esses sistemas, mais evidente à medida que aumenta a esbeltez dos modelos e diminui a frequência de vibração.

Os resultados obtidos pela análise dinâmica dos modelos não-lineares pelo Método dos Elementos Finitos foram comparados aos resultados experimentais e aos da solução proposta para o cálculo da frequência, desenvolvida no capítulo 4, e serão apresentados no decorrer deste capítulo.

5.7.1 Análise dos ensaios para o esforço de compressão

As diferenças percentuais entre os valores experimentais e a solução de referência, Eq. (4.19), ficaram em torno de 3,17% nos

comprimentos iniciais, passando para 5,98% ao ser alcançado o comprimento de 70 cm. A partir desse instante já se percebia uma configuração estática de equilíbrio acentuadamente deformada, e a plastificação do material já se manifestava perceptível.

A média das diferenças entre o total dos resultados experimentais e a solução proposta neste trabalho foi de 8,69%. Os resultados obtidos no ensaio de compressão estão dispostos na Tabela 5.2 com os correspondentes resultados da solução proposta neste trabalho, dados pela Eq. (4.19).

Tabela 5.2 – Esforço de compressão: resultados experimentais e solução proposta.

Esforço de compressão				
Comprimento (m)	Frequências (Hz)		Diferenças	
	Resultados experimentais	Solução proposta	Hz	%
0,20	6,3477	6,3276	0,020	0,32
0,25	4,4556	4,4729	-0,017	0,39
0,30	3,2959	3,3520	-0,056	1,67
0,35	2,5024	2,6122	-0,110	4,20
0,40	1,9836	2,0925	-0,109	5,20
0,45	1,6479	1,7096	-0,062	3,61
0,50	1,3428	1,4167	-0,074	5,21

Esforço de compressão				
Comprimento (m)	Frequências (Hz)		Diferenças	
	Resultados experimentais	Solução proposta	Hz	%
0,55	1,1292	1,1855	-0,056	4,75
0,60	0,9155	0,9983	-0,083	8,29
0,65	0,7935	0,8429	-0,049	5,86
0,70	0,6104	0,7110	-0,101	14,15
0,75	0,4883	0,5965	-0,108	18,14
0,80	0,3662	0,4946	-0,128	25,95
0,85	0,3052	0,4011	-0,096	23,90

As respostas do ensaio de compressão revelaram o comportamento presente na Figura 5.11, na qual é possível ver que os resultados obtidos pela solução analítica do método proposto, Eq. (4.19), ajustam-se bem aos resultados experimentais.

Portanto, é possível afirmar, com os ensaios realizados, que dentro do intervalo de validade da equação (4.19), até o comprimento de 65 cm, os resultados experimentais confirmam o correto cálculo da frequência propiciado pela solução desenvolvida neste trabalho.

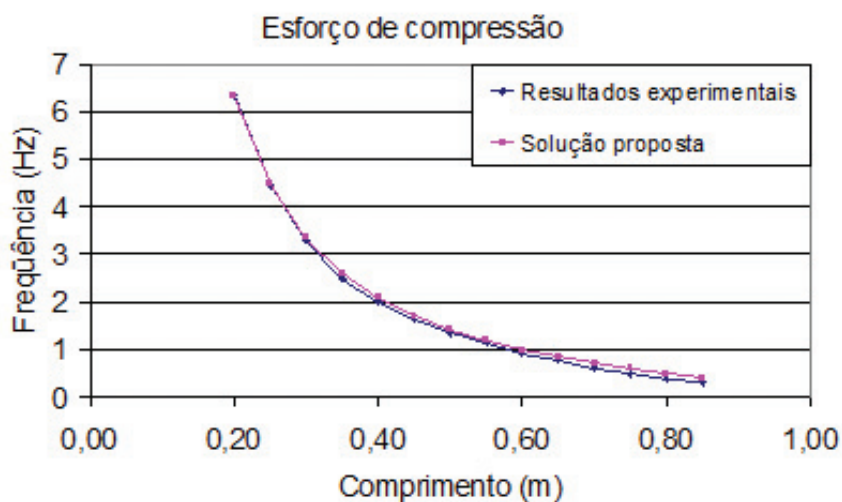


Figura 5.11 – Compressão: Resultados experimentais e solução proposta.

As frequências obtidas pelo Método dos Elementos Finitos, sob a hipótese de comportamento linear, são apresentadas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Comparativo dos resultados da análise linear pelo Método dos Elementos Finitos.

Frequências (Hz)			
Comprimento (m)	Elementos Finitos Linear	Resultados experimentais	Solução proposta
0,20	6,3989	6,3477	6,3276
0,25	4,5733	4,4556	4,4729
0,30	3,4749	3,2959	3,3520

Frequências (Hz)			
Comprimento (m)	Elementos Finitos Linear	Resultados experimentais	Solução proposta
0,35	2,7543	2,5024	2,6122
0,40	2,2517	1,9836	2,0925
0,45	1,8848	1,6479	1,7096
0,50	1,6073	1,3428	1,4167
0,55	1,3915	1,1292	1,1855
0,60	1,2198	0,9155	0,9983
0,65	1,0805	0,7935	0,8429
0,70	0,9657	0,6104	0,7110
0,75	0,8698	0,4883	0,5965
0,80	0,7886	0,3662	0,4946
0,85	0,7192	0,3052	0,4011

Graficamente tem-se:

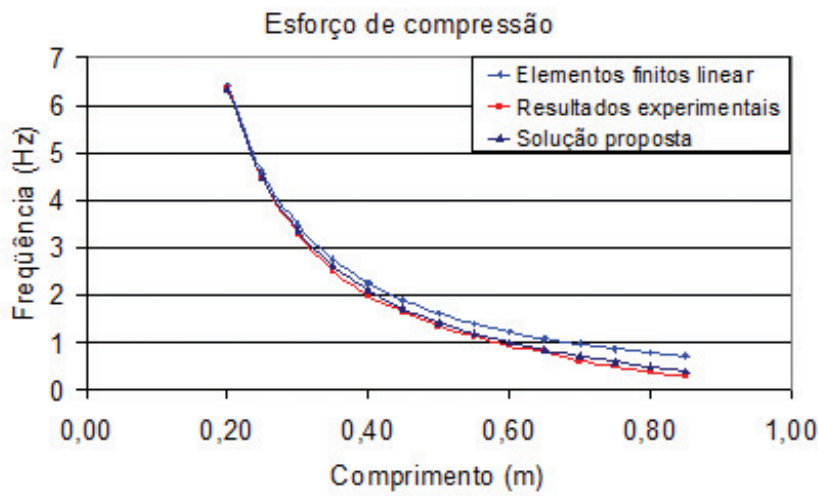


Figura 5.12 – Análise linear por elementos finitos, experimental e proposto.

Quando comparados aos resultados da formulação proposta e aos valores experimentais, para o esforço de compressão, situação em que, na prática, se encontram as estruturas civis em estudo, a análise linear apresenta diferenças importantes nas primeiras frequências.

As diferenças da análise linear pelo Método dos Elementos Finitos entre os valores experimentais e os da solução proposta podem ser encontradas na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Diferenças da análise linear pelo Método dos Elementos Finitos.

Esforço de compressão				
Comprimento (m)	Com resultados experimentais		Com a solução proposta	
	Hz	%	Hz	%
0,20	0,0512	0,80	0,0713	1,11
0,25	0,1177	2,57	0,1004	2,20
0,30	0,1790	5,15	0,1230	3,54

Esforço de compressão				
Comprimento (m)	Com resultados experimentais		Com a solução proposta	
	Hz	%	Hz	%
0,35	0,2519	9,15	0,1421	5,16
0,40	0,2681	11,90	0,1592	7,07
0,45	0,2369	12,57	0,1752	9,30
0,50	0,2645	16,46	0,1907	11,86
0,55	0,2623	18,85	0,2060	14,80
0,60	0,3043	24,95	0,2215	18,16
0,65	0,2870	26,56	0,2377	21,99
0,70	0,3553	36,79	0,2547	26,38
0,75	0,3815	43,86	0,2733	31,42
0,80	0,4224	53,56	0,2940	37,28
0,85	0,4140	57,56	0,3181	44,23

Quando comparada aos resultados experimentais, a análise linear pelo Método dos Elementos Finitos alcança um máximo de 57,56%. Para o mesmo intervalo de validade considerado para a validade da Eq. (4.19), essa diferença se aproxima de 13%.

Para melhor comparar os resultados obtidos, na Tabela 5.5 são novamente apresentadas frequências da análise não-linear pelo Método dos Elementos Finitos, para o esforço de compressão.

Tabela 5.5 – Resultados da análise não-linear pelo MEF para o esforço de compressão.

Análise não-linear - Frequências (Hz)	
Comprimento (m)	Compressão
0,20	6,2810
0,25	4,4405
0,30	3,3281
0,35	2,5940
0,40	2,0783
0,45	1,6983
0,50	1,4077
0,55	1,1783
0,60	0,9925
0,65	0,8383
0,70	0,7073
0,75	0,5936
0,80	0,4924
0,85	0,3994
0,90	0,3104

No gráfico da Figura 5.13 são mostradas as frequências dos modelos não-lineares obtidas pelo Método dos Elementos Finitos, juntamente com os respectivos valores experimentais e analíticos da solução proposta.

Na Figura 5.13, é possível ver a boa aproximação entre as curvas dos três resultados: não-linear pelo MEF, experimental e proposto, confirmando o caráter não-linear do problema e a validade da solução desenvolvida neste trabalho.

As diferenças existentes entre a análise não-linear por Elementos Finitos, com a análise linear, com a solução proposta e com os resultados experimentais são apresentadas na Tabela 5.6.

Em termos absolutos há uma significativa diferença entre a análise não-linear e a análise linear pelo Método dos Elementos Finitos, quando a primeira é superada em 0,4088 Hz. Em termos relativos, essa diferença representa um percentual de 44,46%.

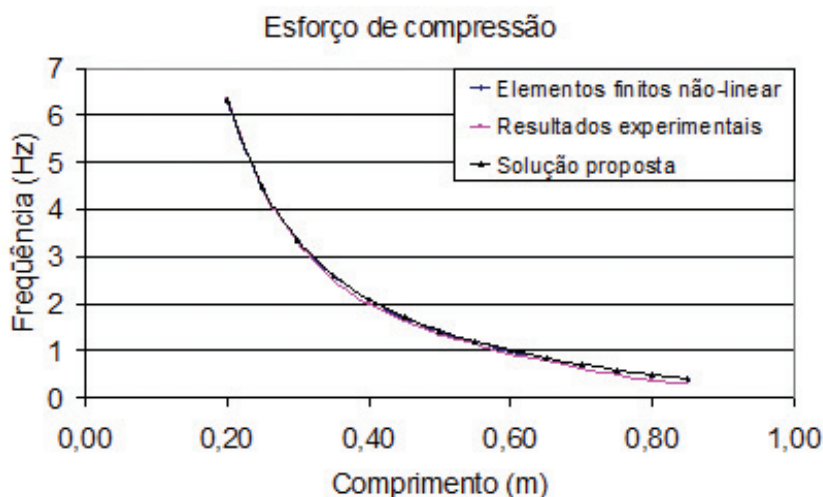


Figura 5.13 – Compressão: elementos finitos não-linear, experimental e proposto.

Tabela 5.6 – Compressão - Diferenças percentuais da análise não-linear pelo MEF.

Comprimento (m)	Com linear pelo MEF	Com experimental	Com proposto
0,20	1,88	1,05	0,74
0,25	2,90	0,34	0,72
0,30	4,22	0,98	0,71
0,35	5,82	3,66	0,70
0,40	7,70	4,77	0,68
0,45	9,89	3,06	0,66
0,50	12,42	4,83	0,63
0,55	15,32	4,35	0,61
0,60	18,64	8,41	0,58
0,65	22,42	5,64	0,55
0,70	26,76	15,88	0,51
0,75	31,75	21,57	0,48
0,80	37,56	34,46	0,44
0,85	44,46	30,88	0,40

Em situação contrária à descrita anteriormente, os resultados da análise não-linear pelo MEF guardam desprezível diferença relativa com os resultados obtidos pela solução proposta. Nas análises realizadas pelo MEF, os resultados obtidos, tanto nos modelos lineares quanto nos modelos não-lineares, obedeceram à discretização mais densa presente na Tabela 5.7, na qual podem ser encontradas as diferenças de resultados para modelos com diferentes discretizações.

Para avaliar a influência que a técnica de discretização dos modelos pelo Método dos Elementos Finitos exerce sobre as frequências de vibração, foram processadas modelagens contendo 1, 10, 40, 100, 500 e 1000 elementos. A simulação foi realizada para o esforço de compressão e os resultados estão na Tabela 5.7. A Tabela 5.8 apresen-

ta as diferenças entre as diferentes discretizações.

Tabela 5.7 – Avaliação da discretização na frequência dos modelos.

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,20	1	6,3645	801,9095	-	-	-	6,2439	801,9095	-	-	-
	10	6,3986	281,7408	804,5923	909,9312	1891,6470	6,2804	281,1122	804,5923	909,2101	1890,8900
	40	6,3989	281,7658	804,6178	910,2446	1894,3700	6,2809	281,1381	804,6178	909,5239	1893,6120
	100	6,3989	281,7669	804,6192	910,2517	1894,4120	6,2810	281,1394	804,6192	909,5313	1893,6540
	500	6,3989	281,7672	804,6195	910,2529	1894,4190	6,2810	281,1397	804,6195	909,5326	1893,6600
	1000	6,3989	281,7672	804,6195	910,2530	1894,4190	6,2810	281,1397	804,6195	909,5326	1893,6610

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,25	1	4,5427	715,4379	-	-	-	4,4061	715,4379	-	-	-
	10	4,5730	180,4822	582,9681	718,4142	1212,8010	4,4399	179,8497	582,2433	718,4142	1212,0410
	40	4,5733	180,5006	583,1643	718,4425	1214,4400	4,4404	179,8693	582,4404	718,4425	1213,6790
	100	4,5733	180,5015	583,1687	718,4441	1214,4610	4,4405	179,8704	582,4451	718,4441	1213,7000
	500	4,5733	180,5017	583,1694	718,4444	1214,4640	4,4405	179,8707	582,4459	718,4444	1213,7030
	1000	4,5733	180,5017	583,1694	718,4444	1214,4650	4,4405	179,8707	582,4460	718,4444	1213,7040

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,30	1	3,4472	651,4610	-	-	-	3,2953	651,4610	-	-	-
	10	3,4747	125,4328	405,1051	654,6964	843,0675	3,3274	124,7964	404,3766	654,6964	842,3037
	40	3,4749	125,4475	405,2427	654,7272	844,1722	3,3280	124,8125	404,5154	654,7272	843,4075
	100	3,4749	125,4483	405,2458	654,7290	844,1851	3,3281	124,8135	404,5188	654,7290	843,4207
	500	3,4749	125,4484	405,2463	654,7293	844,1871	3,3281	124,8138	404,5195	654,7293	843,4228
	1000	3,4749	125,4484	405,2464	654,7293	844,1871	3,3281	124,8138	404,5196	654,7293	843,4229

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,35	1	2,7287	601,6274	-	-	-	2,5620	601,6274	-	-	-
	10	2,7540	92,2202	297,7684	605,0954	619,7915	2,5932	91,5796	297,0362	605,0954	619,0239
	40	2,7543	92,2324	297,8720	605,1284	620,5921	2,5939	91,5935	297,1412	605,1284	619,8239
	100	2,7543	92,2330	297,8745	605,1303	620,6011	2,5940	91,5944	297,1440	605,1303	619,8332
	500	2,7543	92,2331	297,8749	605,1306	620,6024	2,5940	91,5947	297,1446	605,1306	619,8348
	1000	2,7543	92,2331	297,8749	605,1306	620,6024	2,5940	91,5948	297,1447	605,1306	619,8348

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,40	1	2,2279	561,3706	-	-	-	2,0465	561,3706	-	-	-
	10	2,2514	70,6534	228,0637	474,7380	565,0498	2,0773	70,0086	227,3275	473,9664	565,0497
	40	2,2516	70,6639	228,1455	475,3481	565,0849	2,0781	70,0210	227,4110	474,5763	565,0849
	100	2,2517	70,6644	228,1475	475,3548	565,0868	2,0782	70,0219	227,4135	474,5834	565,0868
	500	2,2517	70,6645	228,1479	475,3558	565,0872	2,0783	70,0222	227,4140	474,5846	565,0872
	1000	2,2517	70,6645	228,1479	475,3558	565,0872	2,0783	70,0223	227,4141	474,5847	565,0872

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,45	1	1,8625	527,9549	-	-	-	1,6662	527,9548	-	-	-
	10	1,8845	55,8611	180,2550	375,2252	531,8276	1,6972	55,2119	179,5148	374,4496	531,8276
	40	1,8847	55,8702	180,3219	375,7075	531,8646	1,6981	55,2232	179,5837	374,9320	531,8646
	100	1,8848	55,8707	180,3236	375,7128	531,8666	1,6982	55,2241	179,5859	374,9378	531,8666
	500	1,8848	55,8708	180,3239	375,7136	531,8670	1,6983	55,2245	179,5865	374,9389	531,8670
	1000	1,8848	55,8708	180,3239	375,7137	531,8670	1,6983	55,2245	179,5865	374,9389	531,8670

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,50	1	1,5863	499,6279	-	-	-	1,3748	499,6279	-	-	-
	10	1,6071	45,2760	146,0470	304,0110	503,6794	1,4064	44,6224	145,3028	303,2314	503,6793
	40	1,6073	45,2842	146,1032	304,4033	503,7181	1,4074	44,6330	145,3613	303,6240	503,7181
	100	1,6073	45,2846	146,1047	304,4077	503,7202	1,4076	44,6339	145,3633	303,6289	503,7202
	500	1,6073	45,2847	146,1050	304,4083	503,7206	1,4077	44,6342	145,3639	303,6299	503,7206
	1000	1,6073	45,2847	146,1050	304,4084	503,7206	1,4077	44,6342	145,3639	303,6300	503,7206

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,55	1	1,3716	475,2085	-	-	-	1,1442	475,2083	-	-	-
	10	1,3914	37,4414	120,7306	251,3022	428,2002	1,1769	36,7832	119,9823	250,5184	427,4023
	40	1,3915	37,4488	120,7788	251,6283	429,9461	1,1780	36,7932	120,0330	250,8452	429,1427
	100	1,3915	37,4491	120,7801	251,6321	429,9567	1,1782	36,7941	120,0350	250,8496	429,1540
	500	1,3915	37,4492	120,7803	251,6326	429,9581	1,1783	36,7945	120,0355	250,8505	429,1557
	1000	1,3915	37,4492	120,7803	251,6327	429,9581	1,1783	36,7945	120,0356	250,8506	429,1557

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,60	1	1,2008	453,8676	-	-	-	0,9566	453,8676	-	-	-
	10	1,2196	31,4805	101,4713	211,2019	359,8831	0,9908	30,8175	100,7189	210,4140	359,0811
	40	1,2198	31,4871	101,5133	211,4780	361,3494	0,9921	30,8271	100,7637	210,6910	360,5422
	100	1,2198	31,4875	101,5145	211,4813	361,3584	0,9924	30,8280	100,7655	210,6950	360,5518
	500	1,2198	31,4875	101,5147	211,4818	361,3595	0,9925	30,8284	100,7661	210,6959	360,5533
	1000	1,2198	31,4875	101,5147	211,4818	361,3595	0,9925	30,8285	100,7661	210,6959	360,5534

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,65	1	1,0624	435,0032	-	-	-	0,8000	435,0040	-	-	-
	10	1,0804	26,8399	86,4803	179,9876	306,6992	0,8363	26,1720	85,7237	179,1955	305,8930
	40	1,0805	26,8460	86,5173	180,2248	307,9492	0,8378	26,1813	85,7638	179,4340	307,1380
	100	1,0805	26,8463	86,5184	180,2277	307,9568	0,8381	26,1823	85,7656	179,4376	307,1464
	500	1,0805	26,8463	86,5186	180,2282	307,9578	0,8383	26,1827	85,7662	179,4385	307,1478
	1000	1,0805	26,8463	86,5186	180,2282	307,9578	0,8383	26,1827	85,7662	179,4386	307,1479

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,70	1	0,9483	418,1667	-	-	-	0,6659	418,1666	-	-	-
	10	0,9656	23,1565	74,5834	155,2155	264,4885	0,7050	22,4836	73,8225	154,4192	263,6780
	40	0,9657	23,1621	74,6164	155,4219	265,5675	0,7068	22,4927	73,8589	154,6272	264,7524
	100	0,9657	23,1624	74,6174	155,4246	265,5742	0,7072	22,4937	73,8607	154,6306	264,7599
	500	0,9657	23,1624	74,6176	155,4250	265,5750	0,7073	22,4941	73,8613	154,6315	264,7612
	1000	0,9657	23,1624	74,6176	155,4250	265,5750	0,7073	22,4942	73,8614	154,6315	264,7613

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,75	1	0,8530	403,0163	-	-	-	0,5479	403,0150	-	-	-
	10	0,8696	20,1839	64,9841	135,2276	230,4278	0,5909	19,5059	64,2189	134,4271	229,6132
	40	0,8697	20,1891	65,0139	135,4092	231,3693	0,5930	19,5148	64,2524	134,6105	230,5503
	100	0,8698	20,1894	65,0148	135,4116	231,3752	0,5934	19,5159	64,2541	134,6137	230,5571
	500	0,8698	20,1894	65,0150	135,4119	231,3760	0,5936	19,5163	64,2548	134,6146	230,5584
	1000	0,8698	20,1894	65,0150	135,4119	231,3760	0,5936	19,5164	64,2548	134,6146	230,5584

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,80	1	0,7725	389,2850	-	-	-	0,4406	389,2883	-	-	-
	10	0,7884	17,7503	57,1267	118,8668	202,5468	0,4891	17,0669	56,3571	118,0621	201,7279
	40	0,7886	17,7552	57,1537	119,0280	203,3760	0,4916	17,0758	56,3882	118,2253	202,5530
	100	0,7886	17,7554	57,1546	119,0302	203,3813	0,4921	17,0769	56,3899	118,2284	202,5593
	500	0,7886	17,7555	57,1548	119,0305	203,3820	0,4924	17,0774	56,3906	118,2293	202,5605
	1000	0,7886	17,7555	57,1548	119,0305	203,3820	0,4924	17,0774	56,3906	118,2293	202,5605

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,85	1	0,7037	376,7627	-	-	-	0,3383	376,7616	-	-	-
	10	0,7190	15,7327	50,6138	105,3058	179,4363	0,3955	15,0438	49,8398	104,4968	178,6131
	40	0,7192	15,7373	50,6385	105,4501	180,1725	0,3985	15,0527	49,8688	104,6434	179,3456
	100	0,7192	15,7375	50,6394	105,4521	180,1773	0,3991	15,0538	49,8706	104,6464	179,3513
	500	0,7192	15,7376	50,6395	105,4524	180,1779	0,3994	15,0543	49,8712	104,6472	179,3525
	1000	0,7192	15,7376	50,6395	105,4524	180,1780	0,3994	15,0544	49,8713	104,6473	179,3526

L (m)	Nº EF	Frequência (Hz) - Linear					Frequência (Hz) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,90	1	0,6443	365,2798	-	-	-	0,2323	365,2584	-	-	-
	10	0,6592	14,0414	45,1552	93,9404	160,0670	0,3053	13,3469	44,3768	93,1271	159,2396
	40	0,6593	14,0457	45,1780	94,0704	160,7254	0,3092	13,3558	44,4041	93,2597	159,8944
	100	0,6593	14,0460	45,1788	94,0723	160,7298	0,3099	13,3569	44,4059	93,2626	159,8998
	500	0,6593	14,0460	45,1789	94,0726	160,7303	0,3103	13,3575	44,4065	93,2635	159,9010
	1000	0,6593	14,0460	45,1789	94,0726	160,7304	0,3104	13,3575	44,4066	93,2635	159,9011

(Nº EF = Número de Elementos Finitos)

Tabela 5.8 – Diferenças da frequência com a discretização dos modelos.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

L (m)	Nº EF	Diferenças (%) - Linear					Diferenças (%) - Não-linear				
		1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
0,90	1	2,28	-2500,60	-	-	-	25,16	-2634,48	-	-	-
	10	0,02	0,03	0,05	0,14	0,41	1,64	0,08	0,07	0,15	0,41
	40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,38	0,01	0,01	0,00	0,00
	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,14	0,00	0,00	0,00	0,00
	500	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
	1000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

(Nº EF = Número de Elementos Finitos)

Para o primeiro modo, a diferença entre a frequência do modelo mais simplesmente discretizado e o modelo mais densamente discretizado aumenta continuamente, alcançando 2,28% quando a frequência é obtida de forma linear e 25,16% quando é calculada com a não-linearidade geométrica. É importante realizar a discretização com mais de um elemento para o cálculo da resposta da estrutura sob ação de vento, que pretendam incluir o segundo modo de vibração ou superiores, pois o segundo modo de vibração, para modelos discretizados com apenas um elemento, é um modo axial de vibração.

Quando se trata de análises não-lineares as diferenças entre as frequências do primeiro modo de vibração de modelos de discretização mais pobre para os de discretização mais rica vão se ampliando com a esbeltez.

5.7.2 Análise dos ensaios para o esforço de tração

Os resultados obtidos no ensaio de tração estão dispostos a seguir com os correspondentes da solução proposta. As respostas do ensaio de tração revelaram o comportamento apresentado no gráfico da Figura 5.14, no qual se verifica, novamente, uma boa aproximação com a solução proposta.

Tabela 5.9 – Esforço de tração: resultados experimentais e Proposto.

Esforço de tração				
Comprimento (m)	Frequências (Hz)		Diferenças	
	Resultados experimentais	Solução proposta	Hz	%
0,20	6,5430	6,5660	-0,023	0,35
0,25	4,6997	4,7400	-0,040	0,85
0,30	3,5706	3,6452	-0,075	2,05
0,35	2,8687	2,9298	-0,061	2,09
0,40	2,3804	2,4330	-0,053	2,16
0,45	1,9836	2,0721	-0,088	4,27
0,50	1,7330	1,8004	-0,067	3,74
0,55	1,5240	1,5902	-0,066	4,16
0,60	1,3430	1,4237	-0,081	5,67
0,65	1,2210	1,2892	-0,068	5,29
0,70	1,1230	1,1789	-0,056	4,74
0,75	1,0250	1,0870	-0,062	5,71
0,80	0,9770	1,0096	-0,033	3,23
0,85	0,9520	0,9437	0,008	0,88
0,90	0,8790	0,8869	-0,008	0,90

Graficamente tem-se:

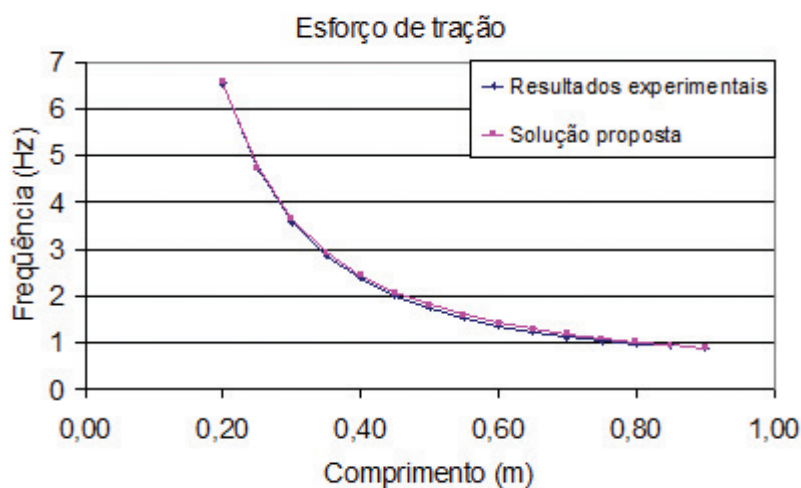


Figura 5.14 – Resultados experimentais de tração e Proposto.

A média das diferenças entre os valores experimentais e a formulação desenvolvida pelo método proposto foi de 0,052 Hz. Em valores percentuais isso representa 3,07%, considerando todo o conjunto de resultados. Portanto, pelos resultados experimentais obtidos para o esforço de tração, é possível concluir pela propriedade da solução analítica, proposta neste trabalho, para o cálculo da frequência de sistemas não-lineares geométricos. Na análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos, quando a força normal é de tração, a situação se repete. A Tabela 5.10 apresenta os resultados da análise não-linear pelo MEF.

Tabela 5.10 – Resultados da análise não-linear pelo MEF para o esforço de tração.

Análise não-linear - Frequências (Hz)	
Comprimento (m)	Tração
0,20	6,5146
0,25	4,7022
0,30	3,6155
0,35	2,9053
0,40	2,4121
0,45	2,0536
0,50	1,7839
0,55	1,5751
0,60	1,4096
0,65	1,2760
0,70	1,1664
0,75	1,0751
0,80	0,9981
0,85	0,9325
0,90	0,8760

As curvas que representam a análise não-linear por Elementos Finitos, a da solução proposta e os resultados experimentais praticamente se sobrepõem, com o pode ser observado no gráfico da Figura 5.15.

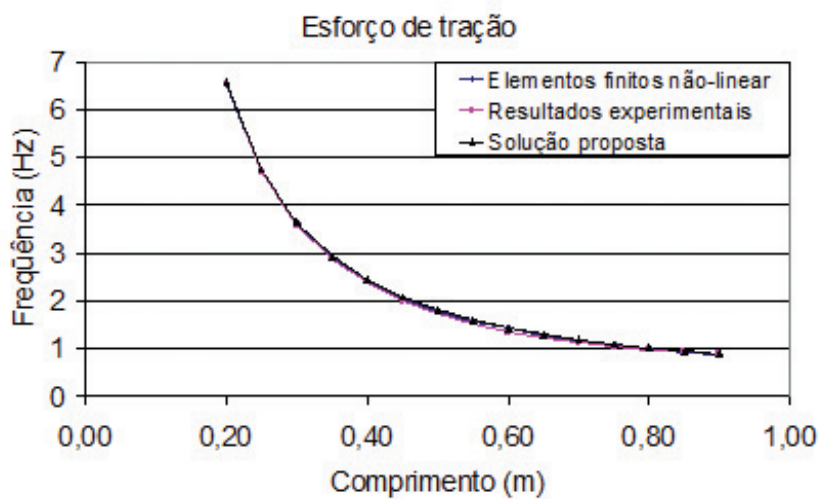


Figura 5.15 – Tração não-linear: Elementos finitos, experimental e proposto.

Quanto às diferenças da análise não-linear, presentes na Tabela 5.11, o panorama permanece semelhante ao obtido para o esforço de compressão, com percentuais elevados entre os resultados lineares e não-lineares, pequenos percentuais entre os não-lineares e a solução proposta e praticamente inexistindo entre os resultados não-lineares e os resultados dos ensaios.

Tabela 5.11 – Tração - Diferenças percentuais da análise não-linear pelo MEF.

Comprimento (m)	Com linear pelo MEF	Com experimental	Com proposto
0,20	1,789	1,446	-1,096
0,25	2,777	1,606	-0,752
0,30	3,973	1,775	0,291
0,35	5,373	1,951	0,149
0,40	6,962	2,139	0,033
0,45	8,735	2,336	1,982
0,50	10,681	2,544	1,229
0,55	12,794	2,759	1,432
0,60	15,061	2,984	2,747
0,65	17,475	3,217	2,117
0,70	20,026	3,457	1,294
0,75	22,704	3,705	2,035
0,80	25,503	3,958	-0,812
0,85	28,414	4,218	-5,391
0,90	31,429	4,482	-3,830

5.7.3 Análise dos ensaios para a ausência do esforço axial

Os resultados obtidos nos ensaios horizontais, i.e., sem a influência da carga axial, estão dispostos na Tabela 5.12, ao lado dos correspondentes resultados da solução analítica proposta.

A diferença média percentual para todo o grupo de resultados é de 7,30% e a diferença absoluta média entre os dois resultados é de 0,008 Hz.

Tabela 5.12 – Sem esforço axial: resultados experimentais e proposto.

Sem esforço axial				
Comprimento (m)	Frequências (Hz)		Diferenças	
	Resultados experimentais	Solução proposta	Hz	%
0,20	6,3230	6,4479	-0,125	1,94
0,25	4,3700	4,6084	-0,238	5,17
0,30	3,4180	3,5017	-0,084	2,39
0,35	2,7100	2,7756	-0,066	2,36
0,40	2,2220	2,2691	-0,047	2,08
0,45	1,8550	1,8995	-0,044	2,34
0,50	1,6110	1,6199	-0,009	0,55
0,55	1,4160	1,4025	0,013	0,96
0,60	1,2450	1,2295	0,015	1,26

Sem esforço axial				
Comprimento (m)	Frequências (Hz)		Diferenças	
	Resultados experimentais	Solução proposta	Hz	%
0,65	1,1470	1,0892	0,058	5,31
0,70	1,0500	0,9735	0,077	7,86
0,75	0,9770	0,8768	0,100	11,43
0,80	0,9520	0,7950	0,157	19,75
0,85	0,8790	0,7250	0,154	21,23
0,90	0,8300	0,6647	0,165	24,86

A curva com a solução dada pela Eq. (4.19) tem a tendência de sobrepor-se à experimental, como pode ser visto no gráfico da Figura 5.16.

É importante ressaltar que, para o comprimento igual a 70 cm e superiores, os modelos apresentavam *visível* configuração deformada, o que os coloca fora da hipótese cinemática assumida, como já foi mencionado.

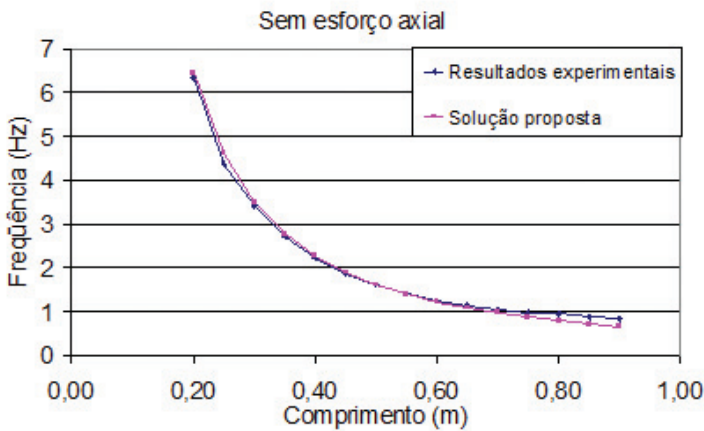


Figura 5.16 – CP horizontais: Resultados experimentais e proposto.

As análises não-lineares pelo Método dos Elementos Finitos forneceram os resultados presentes na Tabela 5.13.

Tabela 5.13 – Resultados da análise não-linear pelo MEF sem a consideração do esforço normal.

Análise não-linear - Frequências (Hz)	
Comprimento (m)	Sem esforço normal
0,20	6,3621
0,25	4,5450
0,30	3,4544
0,35	2,7416
0,40	2,2473
0,45	1,8896
0,50	1,6222
0,55	1,4174
0,60	1,2575
0,65	1,1308
0,70	1,0291
0,75	0,9466
0,80	0,8790
0,85	0,8231
0,90	0,7763

Os resultados não-lineares pelo MEF, os da solução proposta e os resultados dos ensaios estão praticamente sobrepostos, conforme se vê na Figura 5.17, o que revela a adequabilidade da solução analítica, também, para o cálculo da frequência de sistemas exclusivamente elástico-lineares.

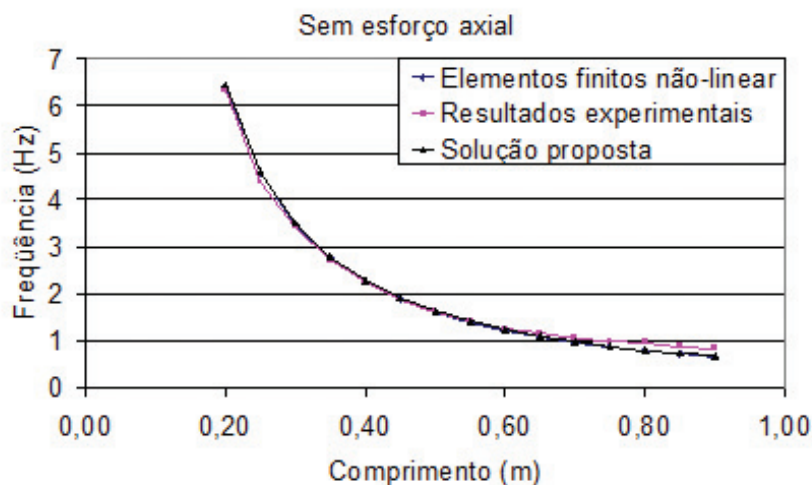


Figura 5.17 – Sem esforço axial não-linear: Elementos finitos, experimental e proposto.

As diferenças percentuais entre a análise não-linear pelo MEF e os resultados experimentais mantêm a tendência de crescimento à medida que os modelos tornam-se longos, chegando a alcançar 25,89%, pelos motivos já expostos.

Em relação ao método proposto, a análise não-linear pelo MEF segue com resultados muito próximos aos dados pela Eq. (4.19).

Tabela 5.14 – Sem esforço axial - Diferenças percentuais da análise não-linear pelo MEF.

Comprimento (m)	Com linear por EF	Com experimental	Com proposto
0,20	0,00	1,19	0,77
0,25	0,00	4,45	0,77
0,30	0,00	1,64	0,77
0,35	0,00	1,61	0,77
0,40	0,00	1,32	0,78
0,45	0,00	1,58	0,78
0,50	0,00	0,23	0,78
0,55	0,00	1,76	0,79
0,60	0,00	2,06	0,79
0,65	0,00	6,15	0,80
0,70	0,00	8,73	0,80
0,75	0,00	12,33	0,81
0,80	0,00	20,72	0,81
0,85	0,00	22,22	0,82
0,90	0,00	25,89	0,82

Os resultados experimentais podem então ser reunidos em um único gráfico (Figura 5.18), para que se perceba o conjunto de diferentes resultados que aparecem conforme a solicitação axial imposta aos modelos físicos.

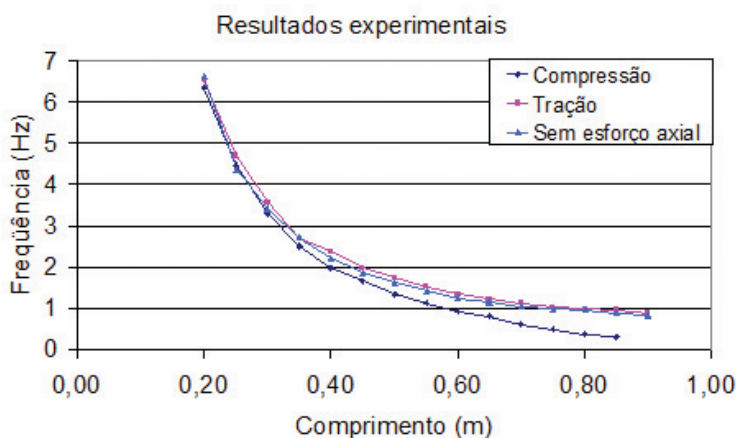


Figura 5.18 – Resultados experimentais.

O gráfico da Figura 5.19 reúne os resultados experimentais e os da solução proposta pela Eq. (4.19).

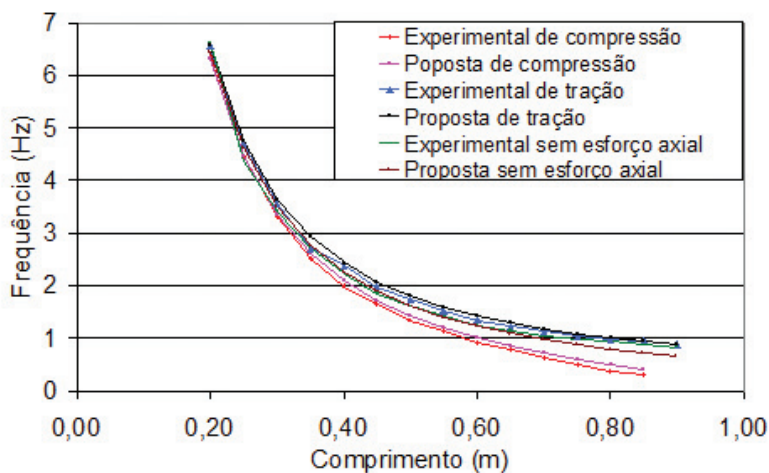


Figura 5.19 – Resultados experimentais e da solução proposta.

5.7.4 Análise dos ensaios exclusivamente com o peso próprio

A solução dinâmica proposta neste trabalho, para os ensaios com a influência exclusiva do peso próprio, estão baseados na expressão (4.21), na qual fez-se a correção da massa na extremidade devida a influência do acelerômetro e sua base magnética, conforme recomendado no item 4. De forma semelhante, foi feito na modelagem pelo Método dos Elementos Finitos, com o lançamento dessa massa adicional e da força axial correspondente, atribuídas, no modelo numérico, no ponto relativo à aplicação do sensor.

A carga crítica de flambagem de barras submetidas exclusivamente ao seu próprio peso pode ser analisada pela estática ou pela dinâmica. No primeiro processo encontram-se a formulação de Euler-Greenhill e a formulação por autovalores desenvolvida pelo Método dos Elementos Finitos, conforme descrito na Eq. (3.10). No segundo processo, a solução pode ser obtida dinamicamente pelo método proposto neste trabalho ou também pela solução, não-linear, por autovalores pelo Método dos Elementos Finitos.

A Tabela 5.15 apresenta os resultados experimentais obtidos e as diferenças guardadas com as mencionadas soluções dinâmicas. A diferença entre os resultados experimentais e a análise dinâmica linear pelo MEF chega a alcançar mais de 15%, enquanto que na comparação com as análises não-lineares esse valor fica em torno de 3%. Na avaliação dinâmica se pode observar a boa aproximação das soluções não-lineares com os resultados experimentais e um afastamento desses com os resultados lineares.

Tabela 5.15 – Considerando exclusivamente o peso próprio.

L	Resultados Experimentais	Proposta NL	MEF NL	MEF Linear	Diferença (%)			
					Exper. Ray NL	Exper. MEF NL	Exper. MEF L	Proposta MEF NL
(m)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)				
1,00	8,179	8,172	8,229	8,254	-0,09	0,61	0,91	0,70
1,05	7,477	7,481	7,503	7,529	0,05	0,34	0,69	0,29
1,10	6,622	6,869	6,863	6,891	3,60	3,52	3,90	-0,09
1,15	6,317	6,326	6,298	6,326	0,14	-0,30	0,15	-0,44
1,20	5,768	5,841	5,797	5,826	1,26	0,50	1,00	-0,77
1,25	5,188	5,408	5,351	5,381	4,07	3,05	3,60	-1,07
1,30	4,883	5,019	4,953	4,984	2,71	1,41	2,03	-1,34

L	Resultados Experimentais	Proposta	MEF	MEF	Diferença (%)			
					Exper.	Exper.	Exper.	Proposta
	(m)	(Hz)	NL (Hz)	NL (Hz)	Linear (Hz)	Ray NL	MEF NL	MEF L
1,35	4,517	4,669	4,596	4,629	3,26	1,72	2,41	-1,59
1,40	4,303	4,353	4,275	4,309	1,15	-0,65	0,14	-1,82
1,45	3,906	4,067	3,986	4,021	3,95	2,00	2,86	-2,02
1,50	3,693	3,807	3,724	3,760	2,98	0,84	1,79	-2,21
1,55	3,51	3,570	3,487	3,524	1,68	-0,67	0,40	-2,39
1,60	3,296	3,354	3,271	3,309	1,72	-0,78	0,40	-2,54
1,65	3,082	3,156	3,073	3,113	2,34	-0,28	1,00	-2,69
1,70	2,899	2,974	2,893	2,934	2,54	-0,21	1,19	-2,82

L	Resultados Experimentais	Proposta NL	MEF NL	MEF Linear	Diferença (%)			
					Exper. Ray NL	Exper. MEF NL	Exper. MEF L	Proposta MEF NL
(m)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	Ray NL	MEF NL	MEF L	MEF NL
1,75	2,747	2,808	2,727	2,770	2,16	-0,72	0,81	-2,95
1,80	2,594	2,654	2,575	2,619	2,26	-0,74	0,94	-3,06
1,85	2,472	2,512	2,435	2,480	1,59	-1,53	0,30	-3,17
1,90	2,299	2,381	2,305	2,351	3,43	0,27	2,22	-3,27
1,95	2,197	2,259	2,185	2,233	2,74	-0,53	1,59	-3,36
2,00	2,106	2,146	2,074	2,123	1,86	-1,53	0,79	-3,45
2,05	1,984	2,041	1,971	2,021	2,77	-0,66	1,82	-3,53
2,10	1,892	1,943	1,876	1,926	2,60	-0,88	1,77	-3,57

L	Resultados Experimentais	Proposta NL	MEF NL	MEF Linear	Diferença (%)			
					Exper.	Exper.	Exper.	Proposta
(m)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	Ray NL	MEF NL	MEF L	MEF NL
2,15	1,801	1,851	1,786	1,838	2,71	-0,84	2,00	-3,65
2,20	1,724	1,766	1,702	1,755	2,35	-1,27	1,78	-3,72
2,25	1,648	1,685	1,624	1,678	2,22	-1,48	1,80	-3,78
2,30	1,556	1,610	1,551	1,606	3,37	-0,34	3,13	-3,84
2,35	1,495	1,540	1,482	1,539	2,91	-0,88	2,84	-3,91
2,40	1,434	1,473	1,417	1,475	2,68	-1,18	2,80	-3,97
2,45	1,373	1,411	1,356	1,416	2,70	-1,22	3,02	-4,02

L	Resultados Experimentais	Proposta	MEF	MEF	Diferença (%)			
					Linear	Exper.	Exper.	Proposta
(m)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	MEF NL	MEF L	MEF NL
2,50	1,312	1,352	1,299	1,360	2,97	-0,99	3,51	-4,08
2,55	1,251	1,297	1,245	1,307	3,52	-0,47	4,28	-4,14
2,60	1,221	1,244	1,194	1,257	1,86	-2,25	2,88	-4,19
2,65	1,16	1,194	1,146	1,210	2,89	-1,24	4,16	-4,25
2,70	1,129	1,147	1,100	1,166	1,61	-2,63	3,17	-4,31
2,75	1,068	1,103	1,057	1,124	3,16	-1,06	4,98	-4,36
2,80	1,038	1,061	1,016	1,084	2,13	-2,20	4,26	-4,42

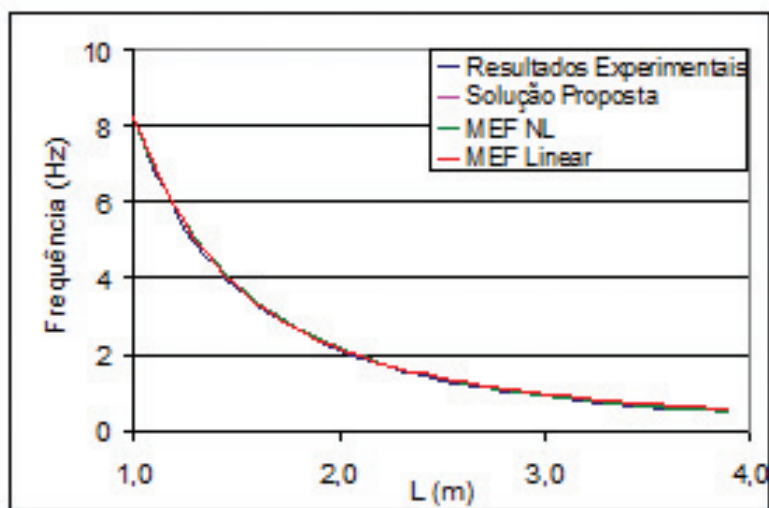
L	Resultados Experimentais	Proposta	MEF	MEF	Diferença (%)			
					Exper.	Exper.	Exper.	Proposta
	(m)	(Hz)	NL (Hz)	NL (Hz)	Linear (Hz)	Ray NL	MEF NL	MEF L
2,85	0,992	1,020	0,977	1,047	2,78	-1,57	5,21	-4,47
2,90	0,977	0,982	0,940	1,011	0,52	-3,99	3,34	-4,53
2,95	0,916	0,946	0,904	0,977	3,14	-1,31	6,22	-4,59
3,00	0,885	0,911	0,872	0,945	2,85	-1,51	6,31	-4,49
3,05	0,854	0,878	0,840	0,914	2,72	-1,70	6,56	-4,55
3,10	0,824	0,846	0,809	0,885	2,64	-1,84	6,86	-4,60
3,15	0,793	0,816	0,780	0,857	2,84	-1,68	7,45	-4,65
3,20	0,763	0,787	0,752	0,830	3,09	-1,48	8,11	-4,71

L	Resultados Experimentais	Proposta	MEF	MEF	Diferença (%)			
	(Hz)	NL (Hz)	NL (Hz)	Linear (Hz)	Exper. Ray NL	Exper. MEF NL	Exper. MEF L	Proposta MEF NL
(m)								
3,25	0,732	0,760	0,725	0,805	3,64	-0,95	9,06	-4,77
3,30	0,717	0,733	0,699	0,781	2,21	-2,50	8,17	-4,82
3,35	0,692	0,708	0,675	0,758	2,24	-2,53	8,66	-4,89
3,40	0,659	0,684	0,651	0,736	3,59	-1,18	10,40	-4,95
3,45	0,641	0,660	0,629	0,714	2,91	-1,96	10,27	-5,01
3,50	0,61	0,638	0,607	0,694	4,35	-0,51	12,12	-5,08
3,55	0,59	0,616	0,586	0,675	4,25	-0,69	12,55	-5,15
3,60	0,57	0,595	0,566	0,656	4,26	-0,74	13,12	-5,23

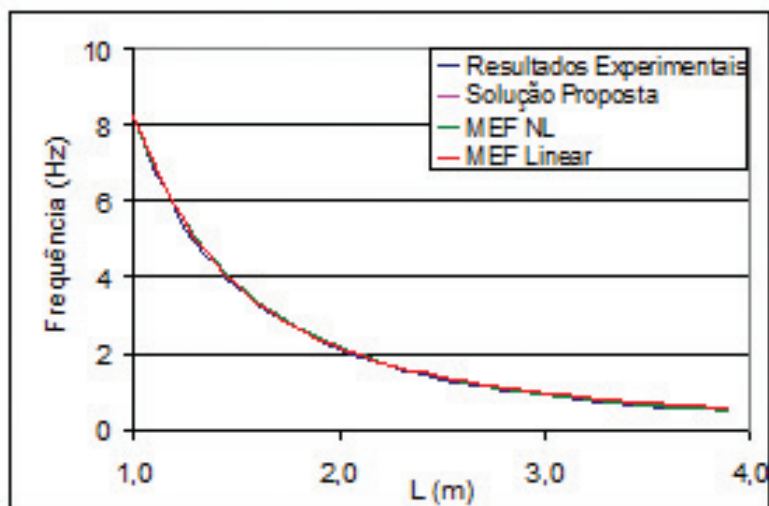
L	Resultados Experimentais	Proposta	MEF	MEF	Diferença (%)			
					Linear	Exper.	Exper.	Proposta
(m)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	MEF NL	MEF NL	MEF NL
3,65	0,565	0,575	0,546	0,638	1,80	-3,41	11,47	-5,31
3,70	0,534	0,556	0,528	0,621	3,97	-1,20	14,02	-5,39
3,75	0,519	0,537	0,510	0,605	3,44	-1,84	14,16	-5,47
3,80	0,504	0,520	0,492	0,589	2,99	-2,41	14,41	-5,56
3,85	0,488	0,502	0,475	0,574	2,83	-2,67	14,93	-5,66
3,90	0,473	0,485	0,459	0,559	2,56	-3,05	15,39	-5,76

(L=comprimento, l=autovalores, PP=peso próprio, MEF=Método dos Elementos Finitos, Exper.=Experimental)

Os gráficos da Figura 5.20 trazem as curvas dos resultados dinâmicos e uma ampliação da região de comprimentos mais elevados, onde se torna mais evidente a influência da rigidez geométrica.



(a) todo o ensaio.



(a) todo o ensaio.

Figura 5.20 – Resultados do ensaio como peso próprio-tubo.

Pela Figura 5.21 fica clara a tendência de que o comprimento crítico de flambagem corresponda ao mesmo valor, tanto pela análise estática de Euler-Greenhill quanto pelos resultados experimentais.

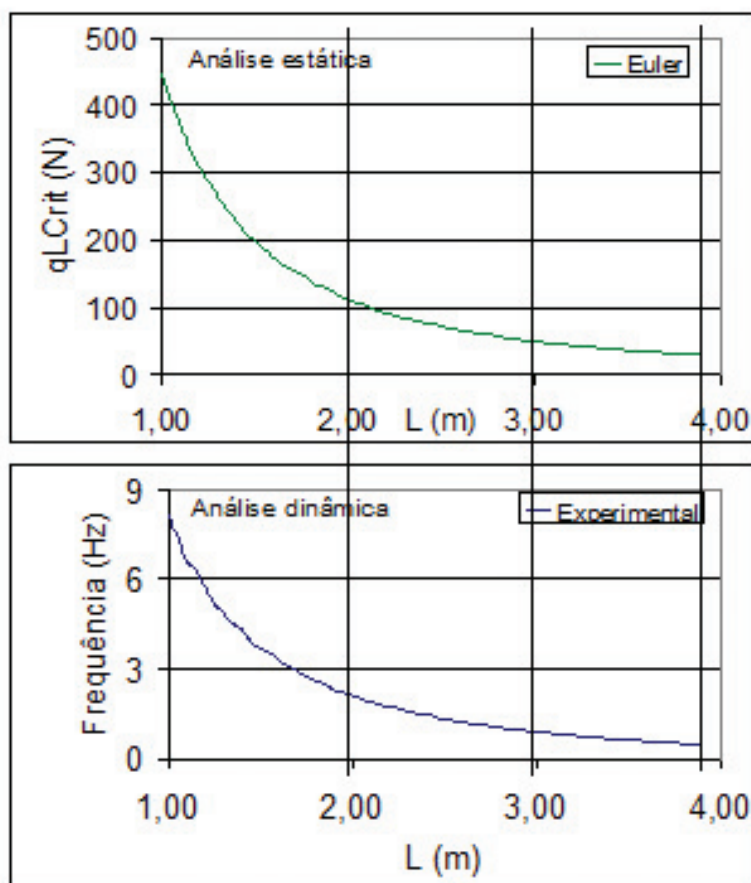


Figura 5.21 – Resultados do ensaio com o peso próprio.

As diferenças entre os resultados obtidos pela formulação de Euler-Greenhill e a de Elementos Finitos situam-se logo acima dos 2%. A Tabela 5.16 e a Figura 5.22 apresentam os resultados dessas análises.

Tabela 5.16 – Euler e MEF: exclusivamente o peso próprio.

L	Aut.	PP	N ⁰	MEF	Euler	Difer	L	Aut.	PP	N ⁰	MEF	Euler	Difer
(m)	I	(N)	EF	(N)	(N)	(%)	(m)	I	(N)	EF	(N)	(N)	(%)
1,00	164,35	2,73	50	449,10	446,06	0,68	2,45	12,14	6,24	50	75,73	74,31	1,90
1,05	143,83	2,85	50	410,41	404,59	1,44	2,50	11,43	6,36	50	72,66	71,37	1,81
1,10	126,43	2,97	50	376,04	368,65	2,01	2,55	10,77	6,48	50	69,78	68,60	1,72
1,15	111,61	3,10	50	345,45	337,29	2,42	2,60	10,16	6,60	50	67,06	65,99	1,63
1,20	98,94	3,22	50	318,17	309,77	2,71	2,65	9,60	6,72	50	64,50	63,52	1,54
1,25	88,05	3,34	50	293,79	285,48	2,91	2,70	9,08	6,84	50	62,08	61,19	1,46
1,30	78,66	3,46	50	271,95	263,94	3,03	2,75	8,59	6,96	50	59,80	58,98	1,38
1,35	70,52	3,58	50	252,33	244,75	3,10	2,80	8,14	7,08	50	57,64	56,90	1,30

L	Aut.	PP	N ⁰	MEF	Euler	Difer	L	Aut.	PP	N ⁰	MEF	Euler	Difer
(m)	I	(N)	EF	(N)	(N)	(%)	(m)	I	(N)	EF	(N)	(N)	(%)
1,40	63,44	3,70	50	234,67	227,58	3,12	2,85	7,72	7,20	50	55,59	54,92	1,22
1,45	57,26	3,82	50	218,73	212,16	3,10	2,90	7,33	7,32	50	53,65	53,04	1,15
1,50	51,84	3,94	50	204,29	198,25	3,05	2,95	6,96	7,44	50	51,81	51,26	1,07
1,55	47,08	4,06	50	191,20	185,67	2,98	3,00	6,72	7,56	100	50,83	49,56	2,57
1,60	42,87	4,18	50	179,29	174,24	2,90	3,05	6,40	7,69	100	49,15	47,95	2,50
1,65	39,14	4,30	50	168,43	163,84	2,80	3,10	6,09	7,81	100	47,55	46,42	2,44
1,70	35,83	4,42	50	158,50	154,35	2,69	3,15	5,81	7,93	100	46,02	44,95	2,37
1,75	32,88	4,54	50	149,41	145,65	2,58	3,20	5,54	8,05	100	44,57	43,56	2,31

L	Aut.	PP	N ⁰	MEF	Euler	Difer	L	Aut.	PP	N ⁰	MEF	Euler	Difer
(m)	I	(N)	EF	(N)	(N)	(%)	(m)	I	(N)	EF	(N)	(N)	(%)
1,80	30,24	4,67	50	141,06	137,67	2,46	3,25	5,29	8,17	100	43,18	42,23	2,25
1,85	27,87	4,79	50	133,39	130,33	2,34	3,30	5,05	8,29	100	41,86	40,96	2,20
1,90	25,74	4,91	50	126,31	123,56	2,22	3,35	4,83	8,41	100	40,60	39,75	2,14
1,95	23,82	5,03	50	119,77	117,31	2,10	3,40	4,62	8,53	100	39,39	38,59	2,08
2,00	22,09	5,15	50	113,72	111,52	1,98	3,45	4,42	8,65	100	38,24	37,48	2,03
2,05	20,52	5,27	50	108,12	106,14	1,86	3,50	4,23	8,77	100	37,13	36,41	1,98
2,10	19,25	5,39	50	103,77	101,15	2,60	3,55	4,06	8,89	100	36,08	35,39	1,93
2,15	17,95	5,51	50	98,90	96,50	2,49	3,60	3,89	9,01	100	35,06	34,42	1,88

L	Aut.	PP	N ⁰	MEF	Euler	Difer	L	Aut.	PP	N ⁰	MEF	Euler	Difer
(m)	I	(N)	EF	(N)	(N)	(%)	(m)	I	(N)	EF	(N)	(N)	(%)
2,20	16,76	5,63	50	94,36	92,16	2,39	3,65	3,73	9,13	100	34,09	33,48	1,83
2,25	15,67	5,75	50	90,13	88,11	2,29	3,70	3,58	9,26	100	33,16	32,58	1,78
2,30	14,67	5,87	50	86,17	84,32	2,19	3,75	3,44	9,38	100	32,27	31,72	1,73
2,35	13,76	5,99	50	82,46	80,77	2,09	3,80	3,31	9,50	100	31,41	30,89	1,69
2,40	12,92	6,11	50	78,99	77,44	1,99	3,85	3,18	9,62	100	30,59	30,09	1,64
							3,90	3,06	9,74	100	29,80	29,33	1,60

(L=comprimento, l=autovalores, PP=peso próprio, N° EF=Número de Elementos Finitos, MEF=Método dos Elementos Finitos).

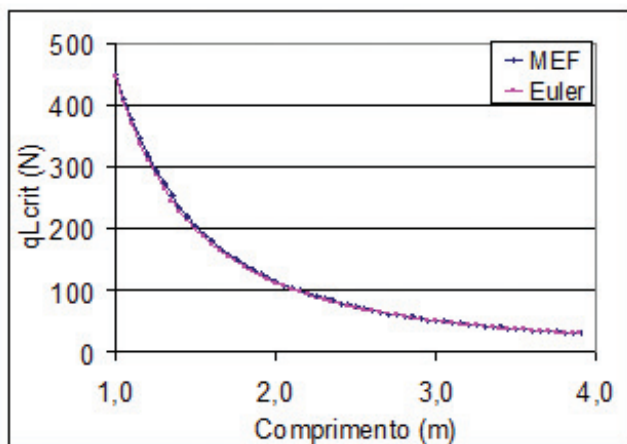


Figura 5.22 – Euler e Elementos Finitos: exclusivamente o peso próprio.

Quando se analisa sob a hipótese de pequenos deslocamentos, a influência do peso próprio na carga crítica de flambagem, verifica-se que, quando o valor qL supera o valor dado pela expressão (3.1) P_{cr} torna-se negativo, o que pode ser apreciado pela Figura 5.23.

Por regressão de potência chega-se a uma equação que representa os resultados pelo processo estático do MEF ($457,79L^{-2,0059}$). Essa é 2,7% superior à da formulação de Euler-Greenhill ($445,49L^{-2}$).

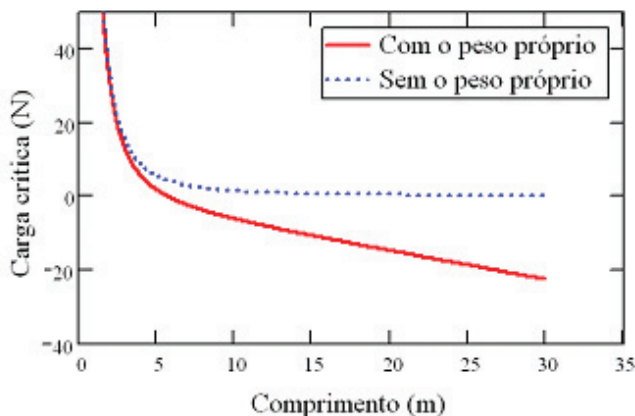


Figura 5.23 – Solução de Euler-Greenhill.

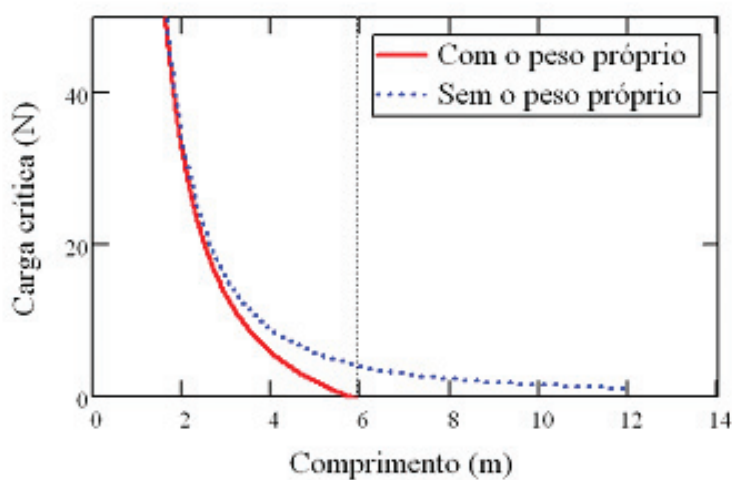
Uma outra forma de se obter a carga crítica de flambagem é por meio da expressão da rigidez generalizada total, desenvolvida no capítulo 4. A expressão (4.25) quando igualada a zero fornece a equação para o valor para a carga crítica de flambagem, Eq. (5.2),

$$qL_{\text{crit}} = \frac{8,298EI}{L^2}. \quad (5.2)$$

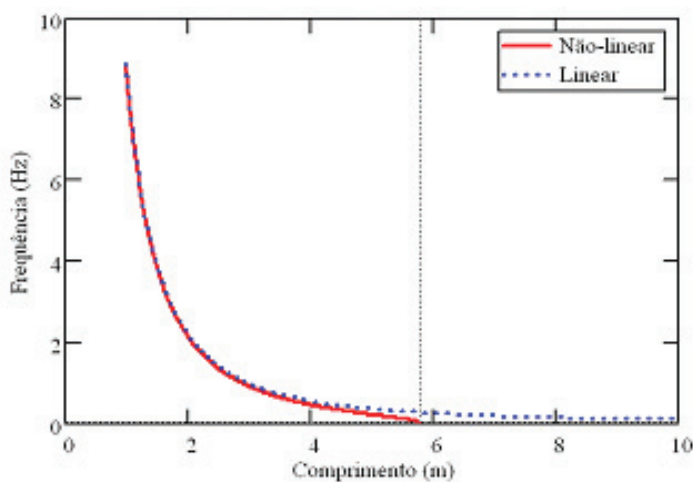
que é 5,17 % maior que a solução de Euler-Greenhill da Eq. (3.4).

O comprimento crítico de flambagem, com os parâmetros da barra testada, pela solução de Euler-Greenhill, quando se leva em conta o peso próprio na carga crítica de Euler, é de 5,8 m. Pela solução desenvolvida neste trabalho chega-se ao mesmo resultado, porem é necessário retirar a massa do acelerômetro da formulação, como foi mencionado no início desta seção, pois a força axial correspondente não pôde ser contemplada por meio do equacionamento de Euler-Greenhill, apresentado no capítulo 3.

Os traçados correspondentes aos comprimentos críticos pelos dois processos podem ser observados na Figura 5.24. Esses resultados reforçam a validade da formulação proposta com a função de forma escolhida. Em suma, a consideração do peso próprio dos elementos estruturais pela Eq. (3.5) na carga de crítica de flambagem da Eq. (3.1) é o equivalente à consideração da rigidez geométrica nas análises não-lineares, quer sejam dinâmicas ou estáticas.



(a) Euler: 5,8m.



(b) Método proposto: 5,8m.

Figura 5.24 – Comprimento crítico de flambagem.

5.8 RESUMO

O conjunto de ensaios dinâmicos conduzidos em laboratório permitiu comprovar experimentalmente a influência da carga

axial na frequência natural de vibração dos sistemas estruturais. Em um primeiro grupo de ensaios foi aplicada uma massa concentrada na extremidade da barra e três posições de testes foram adotadas, uma para o esforço de compressão, outra para o esforço de tração e uma terceira para a ausência do esforço normal. Esperava-se encontrar três valores distintos para as frequências, o que foi confirmado.

Um segundo grupo de testes foi conduzido levando em conta modelos sujeitos exclusivamente ao seu peso próprio, visando simular sistemas com reduzida força axial externa aplicada. A aferição da solução proposta neste trabalho foi feita dinamicamente e também pelo método estático para a determinação da carga crítica de flambagem, tanto pela solução de Euler-Greenhill quanto a solução do Método dos Elementos Finitos.

É possível concluir, portanto, que, dentro do intervalo de validade adotado para a equação (4.19), os resultados experimentais confirmaram:

- primeiramente, o caráter não-linear geométrico de sistema esbeltos;
- segundo, a validade do método proposto; e;
- por último, o cálculo correto da frequência do primeiro modo de vibração, propiciado pela solução desenvolvida neste trabalho.

Em outras palavras, a formulação elaborada nesta Tese, para o cálculo da frequência fundamental de estruturas em balanço, pôde ser avaliada por meio de análises dinâmicas e estáticas, sendo possível validar seus resultados.

As análises feitas utilizando como referência os modelos físicos de laboratório levaram à comprovação de que a consideração do esforço normal na rigidez dos sistemas estruturais modifica as suas frequências de vibração.

No capítulo 7 será investigada a aplicabilidade da solução proposta à estruturas reais e as repercussões que as frequências calcu-

ladas sob não-linearidade geométrica trazem ao cálculo da ação dinâmica do vento.

Ainda no capítulo 7, será apresentada uma investigação experimental de campo, realizada sobre uma estrutura real, para avaliação do método e da solução proposta neste trabalho.

No capítulo seguinte serão apresentados os modelos para o cálculo da ação do vento segundo a NBR 6123/88 – Forças devidas ao vento em edificações.

6

Ação do vento segundo a NBR 6123/88

A turbulência atmosférica e a gerada por edificações ou outros obstáculos situados na proximidade de uma edificação causam alterações na velocidade média do vento, originando efeitos dinâmicos que se superpõem aos efeitos estáticos causados pela velocidade média.

Esquemáticamente, Blessmann (1989) classifica os efeitos causados pela ação do vento como efeitos estáticos, devidos à ação estática do vento, considerando sua velocidade média; e efeitos dinâmicos, causados ou pela energia cinética contida na turbulência atmosférica; ou pela turbulência gerada em edificações ou obstáculos situados a

barlavento da edificação em estudo; ou pelo desprendimento cadenciado de vórtices; ou ainda por instabilidade aerodinâmica por galope ou drapejamento.

Carril Júnior (2000) quando estuda os efeitos dinâmicos em torres treliçadas para telecomunicações afirma que os possíveis esforços que podem estar atuando nesse tipo de estrutura são os esforços pseudo estáticos correspondentes à parte média do vento e os esforços dinâmicos decorrentes da parte flutuante do vento. O cálculo do efeito dinâmico do vento sobre estruturas esbeltas, conforme Carril Júnior (2000), é composto de três estágios básicos: a descrição do vento, a descrição das propriedades físicas e aerodinâmicas da estrutura e a combinação desses fatores na determinação da resposta da estrutura.

Galindez (1979) relata que a resposta ressonante provocada pela turbulência atmosférica foi estudada primeiro em relação a estruturas aeronáuticas por Liepmann e que para a aplicação dos conceitos desenvolvidos por ele às estruturas civis foi necessário desenvolver modelos representativos do vento turbulento nas proximidades do terreno. Um modelo foi proposto por Davenport em 1961 para avaliar a resposta de edifícios altos na direção da velocidade média.

Particularmente, a consideração dos efeitos dinâmicos e de vibração excessiva das estruturas expostas à ação do vento está descrita no item 9 da NBR 6123/88 – Forças devidas ao vento em edificações. O objetivo da NBR 6123/88 é fixar as condições exigíveis na consideração das forças devidas à ação estática e dinâmica do vento, para efeitos de cálculo.

As recomendações existentes na NBR 6123/88 para a análise dinâmica levam em conta a variação no módulo e na orientação da velocidade média do vento. A velocidade média produz efeitos meramente estáticos na estrutura, enquanto que as flutuações ou rajadas produzem oscilações importantes, “especialmente em edificações altas e esbeltas”. Esse modelo de análise dinâmica de estruturas altas é destacada por Simiu; Scalan (1996) e Belvins (1977) que o associa à necessidade da análise de vibrações induzidas por carregamento flutuante, APUD LAZANHA (2003). Blessmann (2005) esclarece que o processo que a norma brasileira apresenta para ação estática equivalente do vento, embora baseada no método de vibração aleatória

proposto por Davenport difere dele na determinação dos parâmetros que definem essa ação. Por exemplo, a velocidade média do vento, que é referida a um intervalo de tempo de uma hora e não de dez minutos como na norma brasileira e o fator de escala para a determinação da frequência reduzida, que Davenport adota 1200 m e a norma brasileira 1800 m.

A NBR 6123/88 incorpora esses conceitos e destaca que edificações com período fundamental superior a 1s, frequências até 1 Hz, podem apresentar importante resposta flutuante na direção do vento médio.

A NBR 6123/88 apresenta três modelos de cálculo para a ação do vento nas estruturas, assim denominados: 1) Forças estáticas devidas ao vento ou Modelo Estático, 2) Modelo dinâmico simplificado e 3) Modelo dinâmico discreto. Esses três procedimentos de cálculo são apresentados a seguir sem a intenção de aprofundar discussões sobre esses eles, tendo em vista não ser esse o objetivo deste trabalho.

6.1 FORÇAS ESTÁTICAS DEVIDAS AO VENTO

Segundo a NBR 6123/88 as forças estáticas devidas ao vento são determinadas como se segue.

A velocidade básica do vento, V_0 , está relacionada ao local onde a estrutura será construída. Por definição é a velocidade de uma rajada de 3 segundos, excedida em média uma vez em 50 anos, acima de 10 m do terreno, em campo aberto e plano. A norma traz as isopletras da velocidade básica no Brasil, Figura 6.1.

Como regra geral, admite-se que o vento básico possa soprar de qualquer direção horizontal.

Uma vez calculada, a velocidade básica é multiplicada pelos fatores S_1 , S_2 e S_3 para ser obtida a velocidade característica do vento V_k , para a parte da edificação em consideração, logo:

$$V_k = V_0 S_1 S_2 S_3, \quad (6.1)$$

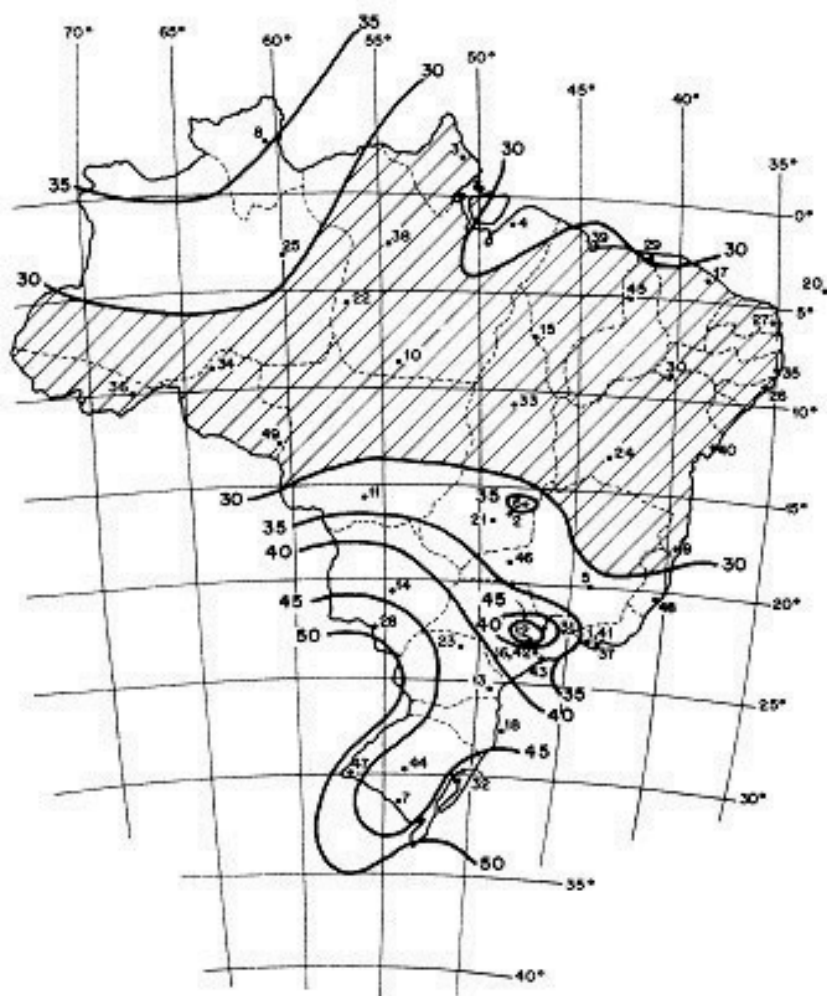


Figura 6.1 – Isopletas da velocidade básica V_0 (m/s) (NBR 6123/88).

O fator topográfico S_1 leva em consideração as variações do relevo do terreno e o aumento da velocidade do vento na presença de morros e taludes, mas não considera a diminuição da turbulência com o aumento da velocidade do vento. A turbulência é importante para a determinação da resposta dinâmica de

estruturas esbeltas, ressalva Brasil (2004). Para terrenos planos ou fracamente acidentados o fator S_1 vale 1,0, variando conforme a inclinação, quando se tratar de taludes e morros, e 0,9 no caso de vales profundos protegidos.

O fator S_2 considera o efeito combinado da rugosidade do terreno, da variação da velocidade do vento com a altura acima do terreno e das dimensões da edificação ou parte da edificação em consideração. Para efeitos da NBR 6123/88, a rugosidade do terreno é dividida em 5 categorias. No tocante às dimensões, as edificações foram divididas em 3 classes. Para levar em conta a altura sobre o terreno no cálculo do fator S_2 , a norma brasileira estabelece a expressão (6.2).

$$S_2(z) = bF_r(z/10)^p, \quad (6.2)$$

O fator de rajada F_r é sempre correspondente à categoria II. Os fatores b e p são parâmetros meteorológicos tabelados. Para empregar a expressão (6.2) é preciso usar a Tabela 21 do Anexo A da NBR 6123/88, que traz os parâmetros meteorológicos e o fator de rajada F_r , que está reproduzida na Tabela 6.1, abaixo. O tempo que define o fator de rajada é função da classe da edificação. Ele será de 3 s, 5 s ou 10 s, conforme a edificação seja de Classe A, B ou C, respectivamente.

Tabela 6.1 – Parâmetros b , p , $F_{r,II}$ (NBR 6123/88).

Cat.	t(s)	3	5	10	15	20	30	45	60	120	300	600	3600
I	b	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,19	1,21	1,23	1,25
	p	0,06	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10	0,10
II	b	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	p	0,09	0,09	0,10	0,11	0,11	0,12	0,12	0,13	0,14	0,15	0,15	0,16
	F_r	1,00	0,98	0,95	0,93	0,90	0,87	0,84	0,82	0,77	0,72	0,69	0,65
III	b	0,94	0,94	0,93	0,92	0,92	0,91	0,90	0,90	0,89	0,87	0,86	0,85
	p	0,10	0,11	0,12	0,13	0,13	0,14	0,15	0,15	0,16	0,18	0,19	0,20
IV	b	0,86	0,85	0,84	0,83	0,83	0,82	0,80	0,79	0,76	0,73	0,71	0,68
	p	0,12	0,13	0,14	0,15	0,15	0,16	0,17	0,18	0,20	0,22	0,23	0,25
V	b	0,74	0,73	0,71	0,70	0,69	0,67	0,64	0,62	0,58	0,53	0,50	0,44
	p	0,15	0,16	0,18	0,19	0,19	0,21	0,22	0,23	0,26	0,29	0,31	0,35

Os valores correspondentes de S_2 , para as diversas categorias de rugosidade do terreno e classes de dimensões definidas anteriormente, foram organizados de forma sintética pela norma e constam na Tabela 6.2.

O fator S_3 é baseado em conceitos estatísticos, e considera o grau de segurança requerido e a vida útil da edificação. Representa a probabilidade de 63% de que a velocidade básica do vento seja igualada ou excedida no seu período de recorrência. A NBR 6123/88 indica como valores mínimos de S_3 os da Tabela 6.3.

A velocidade característica do vento permite, então, determinar a pressão dinâmica pela expressão

$$q = 0,613V_k^2, \quad (6.3)$$

com q em N/m^2 e V_k em m/s .

Tabela 6.2 – Fatores S_z (NBR 6123/88).

z	Categoria														
	I			II			III			IV			V		
	Classe			Classe			Classe			Classe			Classe		
(m)	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
≤ 5	1,06	1,04	1,01	0,94	0,92	0,89	0,88	0,86	0,82	0,79	0,76	0,73	0,74	0,72	0,67
10	1,10	1,09	1,06	1,00	0,98	0,95	0,94	0,92	0,88	0,86	0,83	0,80	0,74	0,72	0,67
15	1,13	1,12	1,09	1,04	1,02	0,99	0,90	0,96	0,93	0,90	0,88	0,84	0,79	0,76	0,72
20	1,15	1,14	1,12	1,06	1,04	1,02	1,01	0,99	0,96	0,93	0,91	0,88	0,82	0,80	0,76
30	1,17	1,17	1,15	1,10	1,08	1,06	1,05	1,03	1,00	0,98	0,96	0,93	0,87	0,85	0,82
40	1,20	1,19	1,17	1,13	1,11	1,09	1,08	1,06	1,04	1,01	0,99	0,96	0,91	0,89	0,86
50	1,21	1,21	1,19	1,15	1,13	1,12	1,10	1,09	1,06	1,04	1,02	0,99	0,94	0,93	0,89

z	Categoria													
	I				II				III				IV	
	Classe				Classe				Classe				Classe	
														V
60	1,22	1,22	1,21	1,16	1,15	1,14	1,12	1,11	1,09	1,07	1,04	1,02	0,97	0,92
80	1,25	1,24	1,23	1,19	1,18	1,17	1,16	1,14	1,12	1,10	1,08	1,06	1,01	0,97
100	1,26	1,26	1,25	1,22	1,21	1,20	1,18	1,17	1,15	1,13	1,11	1,09	1,05	1,01
120	1,28	1,28	1,27	1,24	1,23	1,22	1,20	1,20	1,18	1,16	1,14	1,12	1,07	1,04
140	1,29	1,29	1,28	1,25	1,24	1,24	1,22	1,22	1,20	1,18	1,16	1,14	1,10	1,07
160	1,30	1,30	1,29	1,27	1,26	1,25	1,24	1,23	1,22	1,20	1,18	1,16	1,12	1,10
180	1,31	1,31	1,31	1,28	1,27	1,27	1,26	1,25	1,23	1,22	1,20	1,18	1,14	1,12
200	1,32	1,32	1,32	1,29	1,28	1,28	1,27	1,26	1,25	1,23	1,21	1,20	1,16	1,14

z	Categoria																	
	I			II			III			IV			V					
	Classe			Classe			Classe			Classe			Classe					
	1,34	1,34	1,34	1,31	1,31	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,25	1,23	1,20	1,20	1,20			
250	1,34	1,34	1,34	1,31	1,31	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,25	1,23	1,20	1,20	1,18			
300	-	-	-	1,34	1,33	1,33	1,32	1,32	1,31	1,29	1,27	1,26	1,23	1,23	1,22			
350	-	-	-	-	-	-	1,34	1,34	1,33	1,32	1,30	1,29	1,26	1,26	1,26			
400	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,34	1,32	1,32	1,29	1,29	1,29			
420	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,35	1,35	1,33	1,30	1,30	1,3			
450	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,32	1,32	1,32			
500	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,34	1,34	1,34			

Tabela 6.3 – Fatores S_3 (NBR 6123/88).

Grupo	Descrição	S_3
1	Edificações cuja ruína total ou parcial pode afetar a segurança ou possibilidade de socorro a pessoas após uma tempestade destrutiva (hospitais, quartéis de bombeiros e de forças de segurança, centrais de comunicação, etc)	1,10
2	Edificações para hotéis e residências. Edificações para comércio e indústria com alto teor fator de ocupação	1,00
3	Edificações e instalações industriais com baixo fator de ocupação (depósitos, silos, construções rurais, etc)	0,95
4	Vedações (telhas, vidros, painéis de vedação, etc)	0,88
5	Edificações temporárias. Estruturas dos grupos 1 a 3 durante a construção	0,83

A componente da força global na direção do vento, força de arrasto é F_a é obtida por

$$F_a = C_a q A_e, \quad (6.4)$$

onde C_a é o coeficiente de arrasto, e A_e é a área frontal efetiva: área da projeção ortogonal da edificação, estrutura ou elemento estrutural sobre um plano perpendicular à direção do vento.

O coeficiente de arrasto é uma função do número de Reynolds, das dimensões e formas do corpo, sendo esse dado por $R_e = 70000 V_k L_1$, onde V_k em m/s já foi dada em (6.1) e L_1 em m é a dimensão de referência. Os coeficientes de arrasto possuem valores prescritos em tabelas ou ábacos da NBR 6123/88 para diversas situações de cálculo.

6.2 RESPOSTA DINÂMICA PELO MODELO CONTÍNUO SIMPLIFICADO

Se a edificação tiver seção transversal constante e distribuição de massa mais ou menos uniforme, aplica-se um método simplificado de cálculo, desde que a estrutura não ultrapasse 150 m de altura. Admite-se que, para a resposta dinâmica pelo método simplificado, baste a retenção única do modo fundamental de vibração, o que pode conduzir a aceitáveis erros de 10%, segundo a NBR 6123/88.

Para esse caso a expressão (6.5) engloba tanto a resposta média quanto a amplitude máxima da resposta flutuante do vento.

$$q(z) = \bar{q}_0 b^2 \left[\left(\frac{z}{z_r} \right)^{2p} + \left(\frac{h}{z_r} \right)^p \left(\frac{z}{h} \right)^\gamma \frac{1+2\gamma}{1+\gamma+p} \xi \right], \quad (6.5)$$

Assim, a pressão $q(z)$ é uma função contínua da altura sobre o terreno. ξ é o coeficiente de amplificação dinâmica, função das dimensões da edificação, da razão de amortecimento crítico e da frequência, z_r é a altura de referência e \bar{q}_0 é a pressão na altura de referência. Esses parâmetros serão detalhados na descrição do modelo discreto.

O primeiro modo pode ser representado pela expressão (6.6).

$$x = \left(\frac{z}{h} \right)^\gamma, \quad (6.6)$$

A NBR 6123/88 fornece tanto o período do primeiro modo de vibração quanto expoente γ da Eq. (6.6), que podem ser vistos na Tabela 6.4. Os coeficientes p e b estão na Tabela 6.5. Ambas foram extraídas do texto da Norma. Observe-se que nas expressões apresentadas na Tabela 6.4 a altura da edificação é único fator preponderante

para o cálculo da frequência. Uma vez determinada a pressão de vento, os esforços internos na estrutura são obtidos pelos procedimentos usuais de cálculo.

Tabela 6.4 – Parâmetros para a determinação dos efeitos dinâmicos (NBR 6123/88).

Tipo da edificação	γ	ζ	T_1
Edifícios com estrutura aporticadas de concreto, sem cortinas	1,2	0,020	$0,05h + 0,015h$ (h em metros)
Edifícios com estrutura de concreto, com cortinas para absorção de forças horizontais	1,6	0,015	$0,05h + 0,012h$
Torres e chaminés de concreto, seção variável	2,7	0,015	$0,02h$
Torres, mastros e chaminés de concreto, seção uniforme	1,7	0,010	$0,015h$
Edifícios com estrutura de aço soldada	1,2	0,010	$0,29 \sqrt{h} - 0,4$
Torres e chaminés de aço, seção uniforme	1,7	0,008	
Estruturas de madeira	-	0,030	

Tabela 6.5 – Expoente p e parâmetro b (NBR 6123/88).

Categoria de Rugosidade	I	II	III	IV	V
p	0,095	0,15	0,185	0,23	0,31
b	1,23	1	0,86	0,71	0,5

6.3 MODELO DISCRETO

Se uma edificação possui propriedades variáveis com a altura, como comumente encontrado em postes de telecomunicações, ela deve ser representada por um modelo discreto, conforme Figura 6.2.

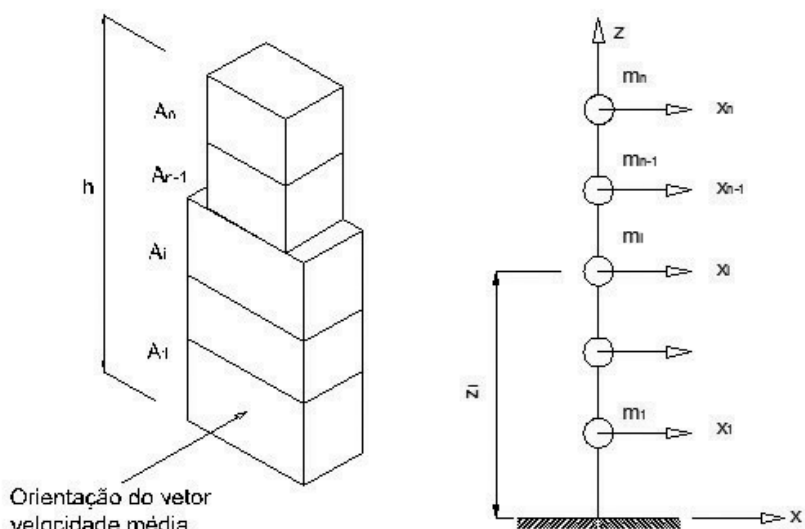


Figura 6.2 – Esquema para o modelo dinâmico discreto (NBR 6123/88).

Pela NBR 6123/88 a resposta dinâmica total é considerada como a superposição das respostas média e flutuante, obtidas da seguinte forma.

A velocidade de projeto deve ser calculada usando a expressão

$$\bar{V}_p = 0,69 V_0 S_1 S_3, \quad (6.7)$$

correspondente à velocidade média sobre 10 minutos a 10 metros de altura sobre o solo, em terreno de categoria II. Quando se deseja determinar as contribuições modais na resposta dinâmica do modelo discretizado, tem-se que, para o i -ésimo grau de liberdade, a carga total X_i na direção do vento será a soma da componente média \bar{X}_i e da componente flutuante \hat{X}_i , logo:

$$X_i = \bar{X}_i + \hat{X}_i \quad (6.8)$$

onde a força média \bar{X}_i é:

$$\bar{X}_i = \bar{q}_0 b^2 C_j A_j \left(\frac{z_j}{z_r} \right)^{2p} \quad (6.9)$$

e a componente flutuante \hat{X}_i é dada por:

$$\hat{X}_i = F_H \psi_i x_i, \quad (6.10)$$

onde

$$\psi_i = \frac{m_i}{m_0}, \quad F_H = \bar{q}_0 b^2 A_0 \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i x_i}{\sum_{i=1}^n \psi_i x_i^2} \xi \quad (6.11)$$

e

$$\beta_i = C_{ai} \frac{A_i}{A_0} \left(\frac{z_i}{z_r} \right)^p, \quad \bar{q}_0 = 0,613 \bar{V}_p^2 \quad (6.12)$$

sendo b e p indicados na tabela 20 da NBR 6123/88; z_r o nível de referência e, recordando, \bar{V}_p a velocidade de projeto. \bar{q}_0 (em N/m^2) é a pressão dinâmica, z_i , x_i , m_i , m_0 , A_i , A_0 , ξ e C_{ai} são, respectivamente, a altura, o modo de vibração correspondente a coordenada i ; a massa concentrada no i -ésimo grau de liberdade; a massa de referência; a área equivalente para o i -ésimo grau de liberdade; a área de referência; o coeficiente de amplificação dinâmica; e o coeficiente de arrasto correspondente à coordenada i .

Os coeficientes de amplificação dinâmica foram calculados por Galindez (1979) admitindo a forma modal da equação (6.6), foram transformados em ábacos e incluídos na NBR 6123/88 para as cinco categorias de terreno. Para usá-los é preciso determinar a largura da edificação por

$$L_1 = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{h} . \quad (6.13)$$

onde h é a altura da edificação.

O processo de cálculo finaliza de forma semelhante ao realizado na estática, através da superposição dos efeitos das variáveis intervenientes.

Quando mais de um modo for retido na solução, a NBR 6123/88 estabelece que o efeito combinado pode ser calculado pelo critério da raiz quadrada da soma dos quadrados. Indicando por \hat{Q}_i uma variável estática qualquer (força, momento fletor, tensão etc) ou geométrica (deformação, deslocamento, giro), correspondente ao modo j , a superposição dos efeitos é calculada por:

$$\hat{Q} = \left[\sum_{j=1}^n \hat{Q}_i^2 \right]^{1/2}. \quad (6.14)$$

É interessante observar que não existe referência nas expressões adotadas pela NBR 6123/88 que indiquem relação com a rigidez da estrutura na determinação da frequência natural de vibração, ponto de partida de todo o processo de cálculo da resposta dinâmica e diretamente relacionado à determinação dos coeficientes de amplificação dinâmica.

Além de induzir vibrações longitudinais, as flutuações aleatórias da velocidade instantânea em relação à velocidade média do vento são responsáveis por vibrações da estrutura na direção perpendicular à direção do fluxo médio. A NBR 6123/88 prescreve que as solicitações resultantes na direção perpendicular à direção do vento podem ser calculadas computando-se um terço das forças efetivas na direção do vento.

Além das vibrações transversais devidas às flutuações em relação ao vento médio, para o presente estudo há interesse apenas nas relacionadas ao desprendimento cadenciado de vórtices, que devem ser superpostas às primeiras caso ocorram. Como afirma Blessmann (2005) a força perpendicular à direção do vento induzida pelo desprendimento de vórtices deve ser superposta à força lateral devida à turbulência atmosférica. Carril Júnior (2000), em sua Tese de Doutorado, enfatiza que, embora as oscilações na direção do vento devidas ao desprendimento de vórtices raramente ocorram na prática, as oscilações transversais à direção do vento podem ocorrer em estruturas de seções circulares e com outras formas de cantos vivos.

Movimentos transversais à direção do vento podem ser produzidos se uma das frequências naturais da estrutura for igual à frequência de desprendimento de um par desses vórtices, dentro da faixa de velocidade esperada para o vento.

Morais (2007) afirma que, apesar de constituir um problema clássico da Mecânica dos Fluidos, o escoamento ao redor de corpos

rombudos, ou seja, que não possuem boa forma aerodinâmica apresenta elevada complexidade. O fenômeno do desprendimento de vórtices é um dos temas mais controversos no meio técnico e científico (Santos, 2005). No entanto, a solução do escoamento dos fluidos em torno de corpos rombudos é útil para a engenharia devido à sua aplicação a muitas estruturas reais. O escoamento com número de Reynolds superior a aproximadamente 30, conforme Carril Júnior (2000), induz o aparecimento de vórtices imediatamente após o corpo rombudo, formando a esteira de vórtices de von Karmann. O corpo fica então sujeito a forças dinâmicas que fazem com que esse vibre com frequências ligadas às frequências com que se desprendem os vórtices. Santos (2005) esclarece que a esteira de von Karman depende da relação entre a velocidade do fluxo, o diâmetro do cilindro e da viscosidade cinemática. Essa relação recebe o nome de número de Reynolds e, à medida que o número de Reynolds aumenta, ocorre uma mudança na esteira de vórtices.

O mecanismo de geração de vórtices está relacionado à diferença de pressão no escoamento ao longo da superfície e da consequente formação da zona de recirculação à jusante do corpo. O desprendimento dos vórtices acontece de forma oscilatória, fazendo com que o cilindro fique sujeito à ação de forças dinâmicas transversais ao escoamento, também chamadas forças de sustentação.

As forças de sustentação atuam de maneira que o cilindro vibre com frequências ligadas às frequências de desprendimento dos vórtices. Essas, por sua vez, são expressas através do número de Strouhal (Philippi & Haverroth, 2005). O mecanismo de desprendimento de vórtices pode ser visto na Figura 6.3.

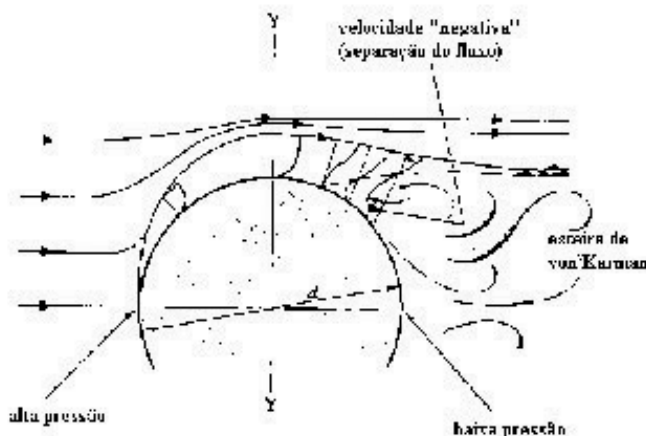


Figura 6.3 – Desprendimento de vórtices – Santos (2005).

É importante destacar que o fenômeno do desprendimento de vórtices constitui-se em um tópico particular de investigação em diversas áreas, na engenharia civil, naval, automotiva e de petróleo.

A própria NBR 6123/88 destaca a particular nocividade que esse fenômeno pode representar para estruturas como chaminés e torres cilíndricas.

Movimentos transversais importantes podem ser produzidos por esse fenômeno se a frequência natural da estrutura coincidir com a frequência de desprendimento de um par de vórtices, dada pela equação

$$f_s = \frac{St \bar{V}}{L}, \quad (6.15)$$

sendo f_s a frequência de desprendimento de um par de vórtices, em Hz; St o número de Strouhal; \bar{V} a velocidade do vento, sobre 10 min, em m/s, para o local onde está situada a edificação e L a dimensão característica ou diâmetro da edificação.

Como afirma Blessmann (2005) se \bar{V} for variável ao longo do comprimento da edificação, a frequência de desprendimento de vórti-

ces tende a ser governada pela frequência f_s relativa ao ponto em que a amplitude de deslocamento é máxima.

A velocidade crítica do vento é o parâmetro empregado para a determinação da ocorrência do desprendimento de vórtices. É definida como a velocidade para qual a frequência de desprendimento de um par de vórtices coincide com uma das frequências naturais da estrutura. Portanto, efeitos dinâmicos transversais à direção do vento médio são possíveis se a velocidade crítica for igual ou inferior à máxima velocidade média \bar{V} , prevista para o local da edificação.

Para estruturas com seção circular o número de Reynolds é

$$Re = 70000\bar{V}d, \quad (6.16)$$

e para o cálculo da velocidade crítica L , nesse caso, passa a ser o diâmetro da seção e número de Strouhal será 0,20 para $10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$ e 0,28 para $Re > 10^6$, cabendo interpolação linear.

A amplitude da resposta é calculada para a velocidade crítica do vento para a qual a frequência f_s coincide com a frequência da estrutura associada ao primeiro modo de vibração. Essa velocidade é obtida pela expressão:

$$V_{cr} = \frac{f_1 L}{St}, \quad (6.17)$$

onde

f_1 é a frequência fundamental da estrutura, L é a dimensão característica, e St é o número de Strouhal.

A pressão dinâmica de cálculo é dada por

$$q_{cr} = 0,613 \left(\bar{V}_{cr} \right)^2, \quad (6.18)$$

e a amplitude de vibração induzida pelo desprendimento de vórtices, perpendicular à direção do vento, dada por

$$Y_0 = \frac{q_{cr} l_1}{8\pi^2 f_1^2 \zeta} \frac{1+2\gamma}{1+\gamma} \frac{C_l C_R}{M_0}, \quad (6.19)$$

onde g é o expoente da forma modal presente na Tabela 6.4, C_l denota o coeficiente de forma da seção transversal e M_0 representa a massa equivalente.

No caso de modelos discretos, a massa equivalente é dada por

$$M_0 = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{z_i}{h} \right)^{2\gamma}}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{z_i}{h} \right)^{2\gamma}}, \quad (6.20)$$

e o coeficiente de correlação longitudinal é obtido pela expressão

$$C_R = 1 - \left(1 - \frac{L_R / L}{h / L} \right)^{1+\gamma}, \quad (6.21)$$

O comprimento de correlação está relacionado com a amplitude das vibrações transversais através da expressão empírica

$$L_R / L = 12 - 10e^{-4Y_0/L}.$$

Com a introdução de C_R e L_R/L na Eq. (6.19), cria-se um problema linear cuja solução é obtida iterativamente.

Na aplicação dos modelos para o cálculo da ação do vento às estruturas reais, desenvolvidos no capítulo seguinte, o desprendimento de vórtices foi avaliado para frequências 5% acima e abaixo das frequências naturais das estruturas.

Nos termos em que foi descrita neste capítulo, a resposta dinâmica às flutuações do vento deve obedecer às regras do cálculo vetorial.

Investigação em estruturas reais

No início deste trabalho foi mencionado que muitas estruturas do mundo da engenharia civil podem ser sensíveis aos efeitos da não-linearidade geométrica. Mencionou-se que eram de especial importância para a investigação desses efeitos as estruturas usadas no sistema de transmissão do sinal de telefonia móvel celular.

A razão desse particular interesse deveu-se ao fato de que o Brasil, a partir de 1998, havia promovido uma reestruturação do seu sistema de telecomunicações para estimular o crescimento e a universalização dos serviços de telefonia. Com isso, favoreceu a implantação, em todo o território brasileiro, de milhares de estações para a transmissão do sinal de telefonia móvel celular. Para tanto, os opera-

dores privados, valeram-se de estruturas compostas, em muitos casos, apenas de postes em balanço de elevada esbelteza e, por conseguinte, sensíveis às ações dinâmicas do vento.

Como a implantação do sistema de telefonia móvel deu-se em um ritmo acelerado, não houve tempo hábil para que os profissionais envolvidos nos projetos dessas estruturas adaptassem seus modelos de cálculo e, portanto, mantiveram em uso aqueles com os quais estavam mais familiarizados. Nesse sentido, os projetos desenvolvidos para construção dos postes de telecomunicações estavam baseados no processo de cálculo previsto no item 4 da NBR 6123/88, denominado, neste trabalho, de modelo estático, e descrito na seção 6.1.

O presente capítulo visa avaliar dois aspectos relativos aos postes de telecomunicações, que são:

- a diferença produzida entre o modelo estático de cálculo para a ação do vento, usado no dimensionamento das estruturas, e os demais modelos presentes na NBR 6123/88; e
- a influência que a rigidez geométrica exerce no cálculo da frequência e na, consequente, resposta dinâmica devida à turbulência atmosférica.

Para isso foram selecionados cinco postes de telecomunicações. Os dados relativos à geometria das estruturas e os parâmetros para o cálculo da ação do vento foram gentilmente cedidos pela RM Engenharia, sediada na cidade de São Paulo-SP. Informações não autorizadas foram intencionalmente omitidas.

O aço foi considerado submetido a tensões dentro da região elástica de deformação. Quando necessário, o módulo de elasticidade do concreto foi calculado usando-se a expressão da NBR 6118/04 - Projeto de Estruturas de Concreto Armado, seguindo a expressão $E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}}$, onde f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto em MPa. O módulo de elasticidade secante do concreto, recomendado para as análises elásticas de projeto, é definido pela NBR 6118/04 como $E_{cs} = 0,85E_{ci}$. O módulo de elasticidade e o peso específico do aço, adotados nas análises das estruturas reais, de 205 GPa e 77 kN/m³, foram os recomendados pela NBR 8800/96 - Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios. A densidade corresponde ao peso específico do aço é, portanto, 7850 kg/m³. Mes-

mo já tendo sido mencionadas anteriormente, as características dos materiais também foram indicadas em cada análise.

Na determinação dos esforços devidos ao vento foram desenvolvidos cinco processos de cálculo. Inicialmente foi utilizado o método para a determinação exclusiva da ação do vento como força estática (modelo estático), previsto no item 4 da NBR 6123/88 – Forças devidas ao vento em edificações.

No segundo e no terceiro processos foram usados o método contínuo simplificado (modelo dinâmico simplificado), estipulado no item 9.3.1 da NBR 6123/88, sendo a frequência obtida sob condições lineares e não-lineares. Nos outros dois modelos, a resposta dinâmica da estrutura foi obtida utilizando-se o modelo dinâmico discreto (análise dinâmica discreta), conforme preconizado no item 9.3.2 da NBR 6123/88, também utilizando-se modelos lineares e não-lineares. Os modelos simplificado e discreto estão previstos no capítulo 9 - Cálculo da resposta dinâmica na direção do vento médio, da NBR 6123/88. Todos os modelos para o cálculo da ação do vento, mencionados anteriormente, foram apresentados no capítulo 6 do presente trabalho.

Os processos de cálculos dinâmicos lineares foram desenvolvidos buscando-se o máximo de apoio nas prescrições da NBR 6123/88. Já os métodos não-lineares foram desenvolvidos levando em conta a influência do esforço normal no cálculo das frequências e nas formas modais naturais de vibração das estruturas.

A discretização da massa e as formas modais das estruturas foram obtidas pelos modelos elaborados em Elementos Finitos, no programa SAP2000.

Os comentários acerca do emprego do Método dos Elementos Finitos foram feitos no capítulo 3. No entanto, o emprego do método proposto nesta Tese para o cálculo da frequência fundamental requer que sejam feitos comentários adicionais neste momento. Como as estruturas possuem geometria e propriedades variando com a altura, o emprego do método deve ser feito por trechos, sendo suas integrais resolvidas nos limites estabelecidos para cada intervalo.

Para o emprego correto do método, as propriedades generalizadas como as massas e as rigidezes também devem ser calculadas para

cada parte da estrutura. Cuidado especial deve ser tomado ao serem calculadas as rigidezes geométricas, pois cada parcela deve levar em conta a força normal distribuída no respectivo intervalo e os esforços que atuam nos segmentos superiores.

De um modo geral, o emprego do método proposto nesta pesquisa foi dividido nas seguintes etapas: definição dos dados e geometria, cálculo da massa generalizada, determinação da rigidez generalizada e cálculo da frequência. Chama-se a atenção para o fato de que nenhum fator de majoração dos esforços ou minoração das resistências dos materiais foi adotado.

7.1 ESTRUTURA 1 – POSTE METÁLICO DE 48 M

7.1.1 Dados e geometria

Trata-se de um poste metálico destinado ao suporte do sistema irradiante do sinal de telefonia móvel celular. A estrutura possui 48 metros de altura e seção transversal circular vazada de diâmetro externo (ϕ_{ext}) e espessura (e) variáveis.

A Tabela 7.1 e a Figura 7.1 apresentam as propriedades da estrutura e a discretização do modelo. Na Figura 7.2 podem ser vistas fotografias da estrutura.

O índice de esbeltez da estrutura é $\lambda = 310$. Cabe mencionar que o comitê de revisão da NBR 8800/96 - Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios, na proposta de revisão de abril de 2006, sugere que a esbeltez das barras comprimidas não deve ser superior a 200.

A Tabela 7.2 apresenta os parâmetros estruturais e dos dispositivos existentes para o cálculo da ação do vento.

Tabela 7.1 – Estrutura 1: dados da estrutura e discretização do modelo.

cota	fext	e.	cota	fext	e.	cota	fext	e.	cota	fext	e.
(m)	(cm)	(cm)	(m)	(cm)	(cm)	(m)	(cm)	(cm)	(m)	(cm)	(cm)
48,00	40,64	0,48	30,00	80,00	0,80	20,00	90,00	0,80	10,00	97,56	0,80
46,00	40,64	0,48	29,00	80,00	0,80	19,00	90,00	0,80	9,00	105,11	0,80
44,00	40,64	0,48	28,00	80,00	0,80	18,00	90,00	0,80	8,00	112,67	0,80
42,00	65,00	0,80	27,00	80,00	0,80	17,00	90,00	0,80	7,00	120,22	0,80
40,00	65,00	0,80	26,00	80,00	0,80	16,00	90,00	0,80	6,00	127,78	0,80
38,00	65,00	0,80	25,00	80,00	0,80	15,00	90,00	0,80	5,00	135,33	0,80
36,00	70,00	0,80	24,00	90,00	0,80	14,00	90,00	0,80	4,00	142,89	0,80
34,00	70,00	0,80	23,00	90,00	0,80	13,00	90,00	0,80	3,00	150,44	0,80
32,00	70,00	0,80	22,00	90,00	0,80	12,00	90,00	0,80	2,00	158,00	0,80
31,00	80,00	0,80	21,00	90,00	0,80	11,00	90,00	0,80	1,00	165,56	0,80
									0,00	173,11	0,80

Tabela 7.2 – Estrutura 1: características dos dispositivos.

Dispositivo	Área frontal	Ca	Cota	Peso específico, Peso distribuído ou Peso
Poste	Variável	0,6	de 0 a 48 m	7850 kN/m ³
Escada	0,05 m ² /m	2,0	de 0 a 48 m	0,15 kN/m
Cabos	0,15 m ² /m	1,2	de 0 a 48 m	0,25 kN/m
Antenas e suportes	1,1 m ²	1,0	48 m	3,36 kN

(Ca = Coeficiente de arrasto)



Figura 7.1 – Estrutura 1: Fotografias.

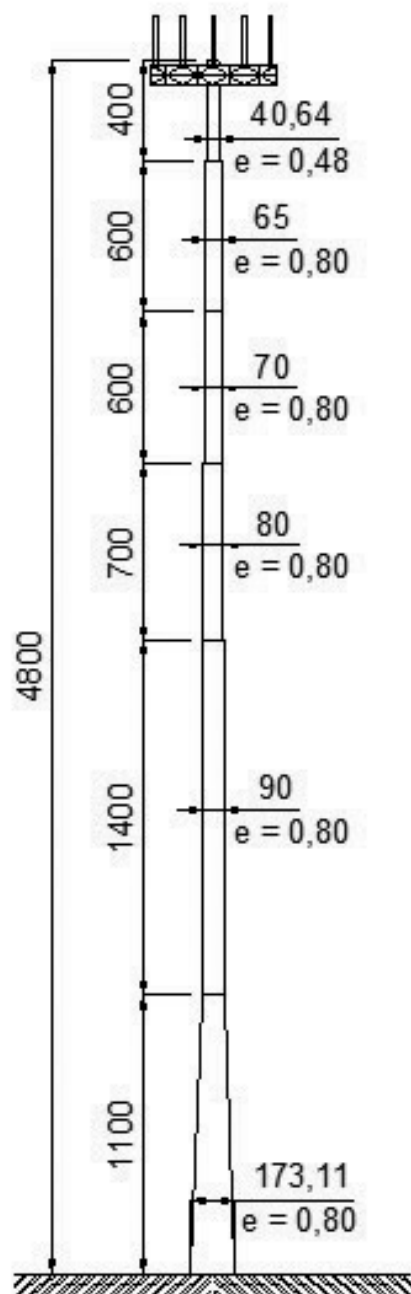


Figura 7.2 – Estrutura 1: Geometria - Medidas em centímetro.

7.1.2 Modelagem por Elementos Finitos

A estrutura foi modelada utilizando-se elementos de barra com seções transversais constantes e variáveis, conforme o caso. No modelo foram atribuídas as forças descritas na Tabela 7.2, com as correspondentes massas.

A Figura 7.3 apresenta o modelo tridimensional disponibilizado pelo programa e a discretização da estrutura construída com 40 elementos de barra.

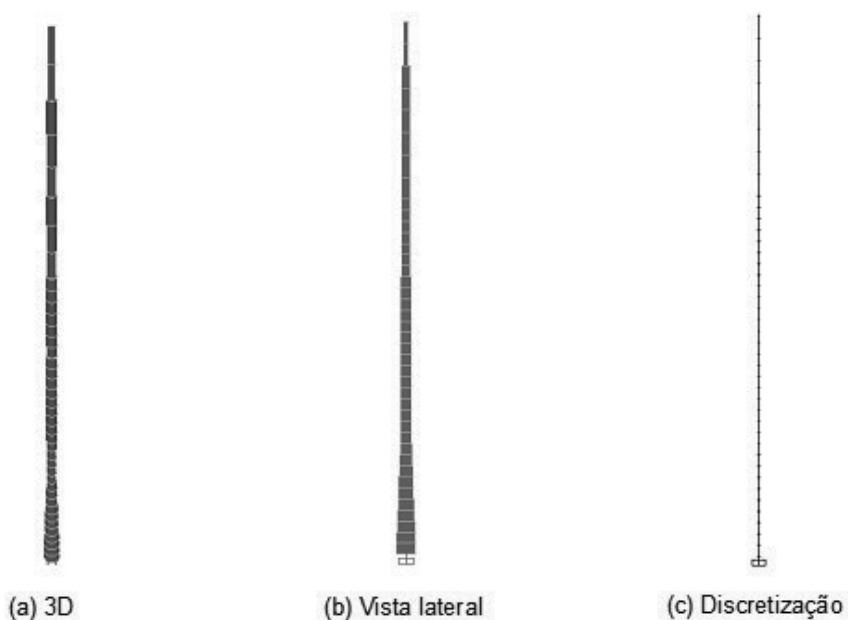
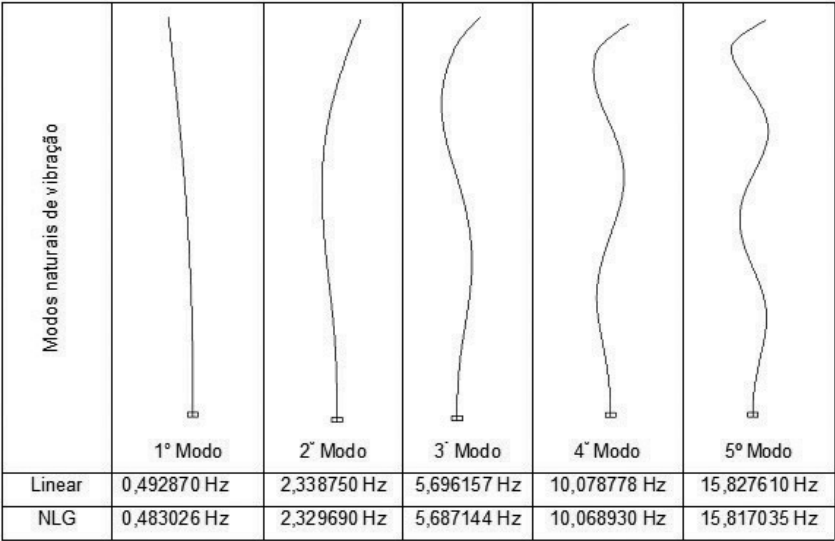


Figura 7.3 – Estrutura 1: modelo por Elementos Finitos.

Os modos de vibração e as frequências obtidas pelo Método dos Elementos Finitos são as constantes na Figura 7.4.



(NLG = Não-Linearidade Geométrica)

Figura 7.4 – Estrutura 1: modos naturais de vibração.

7.1.3 Aplicação do método proposto

7.1.3.1 Definição dos parâmetros

Os dados utilizados na aplicação do método proposto foram os seguintes:

- módulo de elasticidade: $E = 205 \text{ GPa}$,
- densidade do aço: $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$,
- massa concentrada no topo: $m_0 = 342,40 \text{ kg}$;
- massa distribuída por unidade de altura: $m_e = 40 \text{ kg/m}$.

As ordenadas correspondentes às alturas na estrutura e as propriedades geométricas das seções transversais, dos respectivos trechos, são dadas por:

Na base, quando $x = 0$, tem-se: $D_1 = 173,11 \text{ cm}$, $e_1 = 0,80 \text{ cm}$,

$$d_1 = D_1 - 2e_1, \quad A_1 = \frac{\pi}{4}(D_1^2 - d_1^2), \quad I_1 = \frac{\pi}{64}(D_1^4 - d_1^4).$$

No segmento subsequente, de propriedades variáveis,

$$\text{tem-se: } D(x) = \frac{D_2 - D_1}{L_1}x + D_1, \quad d(x) = D(x) - 2e_1,$$

$$A(x) = \frac{\pi}{4}(D(x)^2 - d_1(x)^2), \quad I(x) = \frac{\pi}{64}(D(x)^4 - d(x)^4).$$

Na ordenada $L_1 = 11 \text{ m}$, define-se: $D_2 = 90,00 \text{ cm}$,

$$e_2 = 0,80 \text{ cm}, \quad d_2 = D_2 - 2e_2, \quad A_2 = \frac{\pi}{4}(D_2^2 - d_2^2),$$

$$I_2 = \frac{\pi}{64}(D_2^4 - d_2^4).$$

Em $L_2 = 25,00 \text{ m}$, tem-se: $D_3 = 80,00 \text{ cm}$, $e_3 = 0,80 \text{ cm}$,

$$d_3 = D_3 - 2e_3, \quad A_3 = \frac{\pi}{4}(D_3^2 - d_3^2), \quad I_3 = \frac{\pi}{64}(D_3^4 - d_3^4).$$

Em $L_3 = 32,00 \text{ m}$, tem-se: $D_4 = 70,00 \text{ cm}$, $e_4 = 0,80 \text{ cm}$,

$$d_4 = D_4 - 2e_4, \quad A_4 = \frac{\pi}{4}(D_4^2 - d_4^2), \quad I_4 = \frac{\pi}{64}(D_4^4 - d_4^4).$$

Em $L_4 = 38,00 \text{ m}$, tem-se: $D_5 = 65,00 \text{ cm}$, $e_5 = 0,80 \text{ cm}$,

$$d_5 = D_5 - 2e_5, \quad A_5 = \frac{\pi}{4}(D_5^2 - d_5^2), \quad I_5 = \frac{\pi}{64}(D_5^4 - d_5^4).$$

Para $L_5 = 44,00 \text{ m}$ e $L_6 = 48,00 \text{ m}$, tem-se: $D_6 = 40,64 \text{ cm}$,

$$e_5 = 0,48 \text{ cm}, \quad d_6 = D_6 - 2e_6, \quad A_6 = \frac{\pi}{4}(D_6^2 - d_6^2),$$

$$I_5 = \frac{\pi}{64}(D_5^4 - d_5^4).$$

7.1.3.2 Cálculo da massa generalizada

Os subíndices em números romanos, introduzidos a partir deste ponto, visam evitar redundância de notação nas expressões. A massa generalizada foi obtida por meio das integrais dispostas a seguir.

Para o primeiro segmento:

$$m_I = \int_0^{L_I} m_I(x) \phi(x)^2 dx, \text{ com } m_I(x) = A(x)\rho + m_e.$$

Para o segundo segmento:

$$m_{II} = \int_{L_I}^{L_{II}} m_{II} \phi(x)^2 dx, \text{ com } m_{II} = A_2\rho + m_e.$$

Analogamente ao segundo trecho, para os demais, pode-se escrever na forma geral

$$m_i = \int_{L_{i-1}}^{L_i} m_i \phi(x)^2 dx, \text{ com } m_i = A_i\rho + m_e.$$

A massa distribuída generalizada foi obtida por

$$m_R = \sum_{i=1}^6 m_i$$

E a massa generalizada total por:

$$M = m_0 + m_R$$

7.1.3.3 Cálculo da rigidez generalizada

Rigidez geométrica generalizada

Para calcular a rigidez geométrica generalizada foi preciso determinar os esforços normais relativos aos trechos definidos na geometria. Do topo para a base da estrutura os esforços normais são:

$$F_0 = m_0 g ,$$

$$F_6 = \int_{L_5}^L m_{VI} g dx ,$$

$$F_5 = \int_{L_4}^{L_5} m_V g dx ,$$

e assim sucessivamente, ou seja:

$$F_i = \int_{L_{i-1}}^{L_i} m_i g dx$$

sendo que o esforço normal relativo ao primeiro segmento, que é linearmente variável, foi obtido pela seguinte expressão

$$F_1 = \int_0^{L_1} m_I(x) g dx ,.$$

A força normal generalizada F é então:

$$F = \sum_{i=0}^6 F_i .$$

E as rigidezes geométricas foram calculadas pelas seguintes expressões:

$$K_{g6} = \int_{L_5}^L \left[F_0 + m_{VI}(L_6 - x) g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right] ,$$

$$K_{g5} = \int_{L_4}^{L_5} \left[F_0 + F_6 + m_V(L_5 - x) g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right] ,$$

$$K_{g4} = \int_{L_3}^{L_4} \left[F_0 + F_6 + F_5 + m_{IV}(L_4 - x) g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right] ,$$

$$K_{g3} = \int_{L_2}^{L_3} \left[F_0 + F_6 + F_5 + F_4 + m_{III}(L_3 - x)g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right] dx,$$

$$K_{g2} = \int_{L_1}^{L_2} \left[F_0 + F_6 + F_5 + F_4 + F_3 + m_{II}(L_2 - x)g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right] dx.$$

$$K_{g1} = \int_0^{L_1} \left[F_0 + F_6 + F_5 + F_4 + F_3 + F_2 + m_I(x)(L_1 - x)g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right] dx.$$

A rigidez geométrica generalizada K_g da estrutura é, portanto:

$$K_g = \sum_{i=1}^6 K_{gi}$$

Rigidez elástica generalizada

As parcelas da rigidez elástica são:

$$K_{01} = \int_0^{L_1} EI(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right)^2 dx,$$

$$K_{02} = \int_{L_1}^{L_2} EI_2 \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right)^2 dx,$$

que, de forma análoga ao segundo trecho, para os demais, pode ser escrita como

$$K_{0i} = \int_{L_{i-1}}^{L_i} EI_i \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right)^2 dx$$

E a rigidez elástica generalizada K_0 será dada pela soma de suas parcelas, logo:

$$K_0 = \sum_{i=1}^6 K_{0i}$$

7.1.4 Cálculo da frequência

As frequências do primeiro modo de vibração da estrutura pelo método proposto são as seguintes: modelo linear = 0,569799 Hz, modelo não-linear = 0,562350 Hz.

7.1.5 Ação do vento

7.1.5.1 Forças estáticas devidas ao vento

Os parâmetros empregados na determinação das forças estáticas devidas a ação do vento foram:

- fator topográfico $S_1 = 1,0$;
- fator de rugosidade do terreno S_2 correspondente à categoria III, classe B, com os parâmetros $p = 0,105$, $b = 0,940$ e $F_r = 0,980$;
- fator estatístico $S_3 = 1,1$;
- velocidade básica do vento $V_0 = 45$ m/s.

7.1.5.2 Resposta dinâmica pelo modelo simplificado da NBR 6123/88

Os parâmetros usados na determinação da resposta dinâmica pelo modelo contínuo simplificado da NBR 6123/88 foram os seguintes: largura da edificação 0,875 m; altura da edificação 48 m; categoria do terreno III; velocidade básica do vento e fatores estatísticos como descrito no item anterior.

A NBR 6123/88 sugere o expoente de 1,7 para a forma modal e uma razão de amortecimento crítico de 0,008. Para o cálculo da frequência recorrer-se-á, subsidiariamente, à recomendação contida na Tabela 6.4 (Tabela 19 da NBR 6123/88), item *Edifícios com estrutura de aço soldada*. O inverso da expressão $0,29\sqrt{h} - 0,4$, portanto, fornece $f_1 = 0,621435$ Hz, um resultado distante 9% do calculado pelo método proposto neste trabalho e 22,27% do cálculo efetuado pelo MEF. Com isso, relação adimensional $V_p/(f_1 L)$ torna-se igual a 0,031. Adotando a taxa de amortecimento crítico ζ igual a 0,008 chega-se a um coeficiente de amplificação dinâmica ξ de 2,406; obtido por interpolação linear.

Uma segunda avaliação, usando o modelo simplificado da NBR 6123/88, foi feita sob condições não-lineares. Esse modelo foi chamado de Modelo Simplificado Não-Linear por estar apoiado na frequência e na forma do primeiro modo de vibração do modelo não-linear. A frequência da estrutura sob não-linearidade geométrica é 0,48318 Hz. Com isso, a relação adimensional $V_p/(f_1 L)$ é 0,039, o que conduz a um fator de amplificação dinâmica ξ de 2,519, considerando a taxa de amortecimento crítico já adotada.

7.1.5.3 Resposta dinâmica pelo modelo discreto da NBR 6123/88

A resposta dinâmica pelo modelo dinâmico discreto linear foi calculada com base na frequência de 0,429870 Hz, $V_p/(f_1 L) = 0,038$, $\xi = 2,590$; e demais parâmetros para a ação do vento como citados anteriormente. É válido observar que a frequência do primeiro modo de vibração, obtida pelo método proposto, conforme descrito no item 7.4.3, foi de 0,569799 Hz e, pelo Método dos Elementos Finitos, foi de 0,483026 Hz, apresentando uma diferença de 16,42%, decorrente do ligeiro afastamento das formas de vibração resultantes de cada método.

O cálculo da resposta dinâmica com a inclusão da não-linearidade geométrica foi feito levando-se em conta as contribuições até o 5º modo de vibração. Para o primeiro modo a relação adimensional $V_p/(f_1 L)$ e o coeficiente de amplificação dinâmica são os mesmo do Mode-

lo Simplificado Não-linear, presentes no item anterior. Para os modos de 2 a 5, a frequência, a relação adimensional e o coeficiente de amplificação dinâmica são, respectivamente: 2,32969 Hz, 0,008 e 1,895; 5,687144 Hz, 0,003 e 1,613; 10,06893 Hz, 0,002 e 1,588; 15,817035 Hz, 0,001 e 1,463.

7.1.6 Análise dos resultados

Inicia-se a análise dos resultados avaliando a formulação desenvolvida no método proposto por meio da intensidade do esforço normal. O modelo elaborado no programa de Elementos Finitos serve como referência. Os esforços normais na estrutura por ambos os métodos estão na Tabela 7.3.

Tabela 7.3 – Estrutura 1: esforço normal.

L	Proposto	MEF	Diferença	
(m)	(kN)	(kN)	Absoluta	(%)
48,00	3,355520	3,355520	0,0000	0,000000
44,00	6,786842	6,786842	0,0000	-0,000001
38,00	16,585633	16,585633	0,0000	-0,000001
32,00	26,964392	26,964392	0,0000	-0,000001
25,00	40,426203	40,426204	0,0000	-0,000002
11,00	70,056344	70,056345	0,0000	-0,000002
0,00	102,174047	102,174049	0,0000	-0,000002

A diferença entre a frequência de vibração do modo fundamental, calculada sob não-linearidade geométrica, pelo método proposto, de 0,562350 Hz e a obtida pelo Método dos Elementos Finitos, de 0,483026 Hz, é de 16%.

Pela expressão adotada na NBR 6123/88, a frequência calculada para o primeiro modo de vibração foi de 0,621435 Hz, 35,13% acima da frequência calculada pela solução proposta nesta Tese.

Verificou-se um ligeiro afastamento na forma modal dada pela função trigonométrica, assumida como função de forma do método proposto, e a obtida pelo modelo não-linear pelo MEF, como será discutido ao final desta seção.

A frequência calculada pela expressão (4.19) foi de 0,403193 Hz, o que representa uma diferença de 28,30 % em relação ao valor exato do método.

Os resultados críticos da ação do vento na estrutura são encontrados na comparação entre a análise estática e a análise pelo modelo dinâmico simplificado linear, onde o momento fletor da análise simplificada linear alcança o valor de 1,49 vezes o valor do momento fletor da análise estática.

Embora o coeficiente de amplificação dinâmica usado no modelo simplificado não-linear seja 4,6% superior ao do modelo simplificado linear, o seu resultado, na comparação como modelo estático, situou-se abaixo do modelo simplificado linear, com uma relação entre os momentos de 1,46, o que revela a influência que a forma modal assumida no modelo simplificado linear exerce nos resultados da resposta dinâmica da estrutura.

Computando-se as contribuições até o 5° modo de vibração do modelo dinâmico discreto não-linear, a relação entre o momento fletor máximo na estrutura e o resultado obtido pela análise estática é de 1,33 vezes (33,34%), apresentando uma diferença de 399,73 kNm.

Avaliando-se os resultados obtidos nas análises discretas não-lineares verifica-se uma pequena influência da contribuição dos modos de vibração acima do fundamental, resultando em uma diferença de 0,44%, quando computadas exclusivamente as contribuições do 1° modo com a superposição das contribuições do 1° ao 5° modo, pelo critério da raiz quadrada da soma dos quadrados. As flutuações resultantes do primeiro modo de vibração são as que aportam maior contribuição para a resposta dinâmica da estrutura, 64% da resposta total, mesmo quando computadas as contribuições até o 5° modo, conforme disposto na Tabela 7.4.

Já as resposta dinâmicas obtida pelos modelos dinâmicos discretos, linear e não-linear, levando-se em conta apenas o 1° modo, guardam entre si uma reduzida diferença de 0,52%. A diferença entre a frequência fundamental do modelo linear e a do modelo não-linear, de 2%, elevou o coeficiente de amplificação dinâmica em 0,37%. Com isso, o momento na estrutura foi acrescido de 8,09 kNm.

Tabela 7.4 – Estrutura 1: momentos fletores da análise discreta não-linear.

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
48	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
46	2,77	8,24	3,63	2,14	1,02	0,56
44	6,89	19,59	8,30	4,58	1,96	0,91
42	12,41	35,11	13,94	6,87	2,41	0,72
40	19,69	55,64	20,20	8,50	2,15	0,05
38	28,78	80,76	26,50	9,17	1,27	0,75
36	39,66	110,14	32,31	8,71	0,01	1,36
34	52,35	143,46	37,15	7,10	1,39	1,50
32	66,84	180,29	40,67	4,52	2,56	1,12
31	74,80	199,91	41,82	2,98	2,97	0,77
30	83,33	220,34	42,50	1,30	3,23	0,34
29	92,43	241,52	42,70	0,47	3,34	0,14

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
28	102,10	263,39	42,40	2,26	3,27	0,62
27	112,33	285,92	41,59	4,02	3,04	1,06
26	123,10	309,04	40,28	5,72	2,66	1,44
25	134,42	332,72	38,47	7,29	2,15	1,73
24	146,28	356,92	36,14	8,68	1,52	1,89
23	158,70	381,63	33,29	9,85	0,81	1,92
22	171,68	406,79	29,93	10,76	0,05	1,81
21	185,22	432,37	26,09	11,37	0,72	1,58
20	199,30	458,32	21,79	11,67	1,46	1,23
19	213,91	484,60	17,06	11,64	2,13	0,80
18	229,05	511,16	11,94	11,27	2,70	0,31
17	244,69	537,98	6,45	10,55	3,15	0,20
16	260,84	565,01	0,63	9,50	3,44	0,69
15	277,49	592,23	5,48	8,12	3,55	1,12
14	294,61	619,60	11,86	6,43	3,49	1,47
13	312,19	647,11	18,46	4,45	3,23	1,71

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
12	330,24	674,71	25,25	2,22	2,79	1,82
11	348,72	702,40	32,21	0,24	2,17	1,78
10	367,63	730,16	39,30	2,90	1,39	1,60
9	386,98	757,97	46,50	5,74	0,45	1,27
8	406,78	785,83	53,80	8,73	0,63	0,80
7	427,02	813,72	61,18	11,86	1,82	0,19
6	447,70	841,63	68,62	15,09	3,13	0,52
5	468,83	869,57	76,11	18,40	4,51	1,34
4	490,38	897,52	83,63	21,78	5,96	2,23
3	512,35	925,49	91,18	25,19	7,45	3,17
2	534,63	953,45	98,74	28,63	8,96	4,15
1	557,18	981,42	106,30	32,09	10,49	5,14
0	579,96	1009,39	113,87	35,54	12,03	6,14

A Tabela 7.5 apresenta o valor dos momentos fletores na estrutura devidos à ação do vento das análises descritas anteriormente, comparando-as ao modelo estático.

Tabela 7.5 – Estrutura 1: momentos fletores na estrutura.

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	
48	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
46	5,19	10,86	10,90	11,66	11,91	11,97	11,98	14,20	14,55
44	12,93	26,13	26,21	27,90	28,38	28,47	28,49	34,92	35,78
42	23,33	46,89	47,04	49,70	50,32	50,39	50,40	61,96	63,45
40	37,12	74,35	74,59	78,13	78,73	78,77	78,77	96,46	98,71
38	54,40	108,11	108,45	112,67	113,16	113,17	113,17	138,03	141,14
36	75,13	147,83	148,29	152,91	153,24	153,24	153,25	186,09	190,09

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	
34	99,45	193,24	193,83	198,54	198,71	198,72	198,73	240,29	245,15
32	127,32	243,88	244,61	249,13	249,18	249,20	249,20	300,05	305,70
31	142,69	271,09	271,90	276,21	276,23	276,26	276,26	331,95	337,95
30	159,21	299,66	300,55	304,59	304,60	304,62	304,62	365,40	371,69
29	176,88	329,53	330,50	334,23	334,23	334,25	334,25	400,32	406,85
28	195,70	360,65	361,70	365,08	365,09	365,11	365,11	436,63	443,33
27	215,66	392,95	394,09	397,08	397,11	397,13	397,13	474,24	481,03

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
26	236,75	426,38	427,60	430,21	430,26	430,27	430,27	513,07	519,87
25	258,96	460,89	462,20	464,40	464,48	464,49	464,49	553,03	559,76
24	282,30	496,45	497,84	499,66	499,76	499,77	499,77	594,05	600,62
23	306,82	533,06	534,54	535,99	536,11	536,11	536,12	636,13	642,43
22	332,52	570,68	572,25	573,34	573,48	573,48	573,49	679,20	685,11
21	359,40	609,24	610,90	611,68	611,83	611,83	611,84	723,17	728,59
20	387,44	648,70	650,45	650,97	651,11	651,12	651,12	767,97	772,78

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
19	416,63	689,01	690,85	691,15	691,29	691,29	691,29	813,54	817,61
18	446,95	730,12	732,05	732,19	732,31	732,32	732,32	859,79	863,01
17	478,40	771,97	773,99	774,03	774,14	774,14	774,14	906,68	908,92
16	510,97	814,54	816,65	816,65	816,73	816,74	816,74	954,14	955,26
15	544,63	857,76	859,97	859,99	860,05	860,06	860,06	1002,10	1002,00
14	579,37	901,61	903,91	904,02	904,05	904,06	904,06	1050,52	1049,06
13	615,18	946,05	948,43	948,69	948,71	948,72	948,72	1099,33	1096,40

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
12	652,04	991,03	993,51	993,98	993,98	993,99	993,99	1148,50	1143,98
11	689,93	1036,53	1039,10	1039,83	1039,83	1039,83	1039,84	1197,96	1191,76
10	728,85	1082,52	1085,17	1086,22	1086,23	1086,23	1086,23	1247,68	1239,70
9	768,81	1128,99	1131,73	1133,15	1133,17	1133,17	1133,17	1297,64	1287,77
8	809,87	1175,94	1178,77	1180,60	1180,64	1180,64	1180,65	1347,79	1335,95
7	852,03	1223,36	1226,28	1228,56	1228,65	1228,65	1228,65	1398,12	1384,23
6	895,34	1271,24	1274,25	1277,03	1277,16	1277,17	1277,17	1448,58	1432,58
5	939,79	1319,58	1322,68	1325,98	1326,17	1326,18	1326,18	1499,16	1480,99

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
4	985,41	1368,03	1371,54	1375,40	1375,66	1375,68	1375,68	1549,75	1529,41
3	1032,18	1416,57	1420,81	1425,27	1425,60	1425,63	1425,64	1600,36	1577,83
2	1079,84	1465,13	1470,40	1475,46	1475,89	1475,93	1475,94	1650,97	1626,25
1	1128,36	1513,68	1520,25	1525,96	1526,47	1526,53	1526,54	1701,58	1674,67
0	1177,67	1562,24	1570,33	1576,69	1577,31	1577,38	1577,40	1752,19	1723,09
Relação	1,00	1,33	1,33	1,34	1,34	1,34	1,34	1,49	1,46
D kNm	0,00	384,57	392,66	399,02	399,64	399,71	399,73	574,52	545,43
D %	0,00%	32,66%	33,34%	33,88%	33,94%	33,94%	33,94%	48,78%	46,31%

(ADDL – Análise Dinâmica Discreta Linear, ADSL – Análise Dinâmica Simplificada Linear, ADSNL – Análise Dinâmica Simplificada Não-Linear).

O gráfico da Figura 7.5 apresenta os resultados obtidos para a resposta da ação do vento sobre a estrutura. De baixo para cima, nesta ordem, estão: a análise estática, as análises dinâmicas discretas linear e não-linear do 1º modo e modos superiores até o 5º e as análises dinâmicas simplificadas.

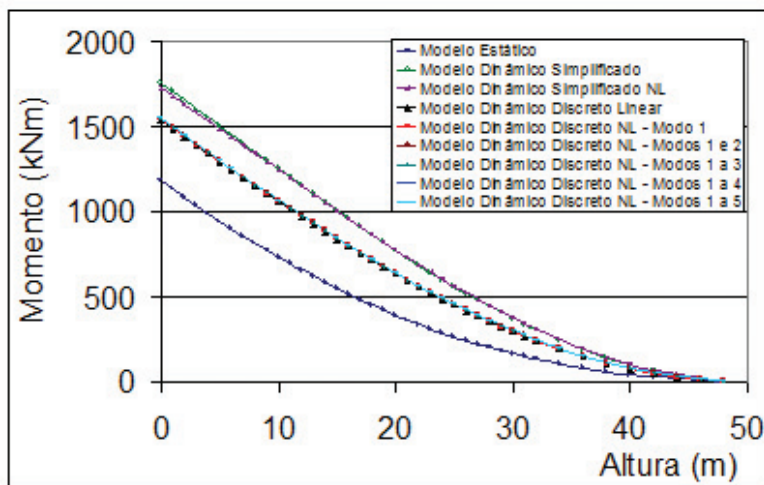


Figura 7.5 – Ação do vento na estrutura 1.

As formas modais da NBR 6123/88, a do Método dos Elementos Finitos e do método proposto constam na Figura 7.6(a).

A substituição do expoente (γ) da forma modal sugerida pela NBR 6123/88, expressão (6.6), por 1,965, propicia uma melhor aproximação à forma modal do modelo não-linear desta estrutura, pois a curva definida com esse novo expoente oferece pontos mais próximos aos da forma modal não-linear, como pode ser observado na Figura 7.6(b).

O expoente sugerido anteriormente supera em 16% o valor do recomendado pela NBR 6123/88.

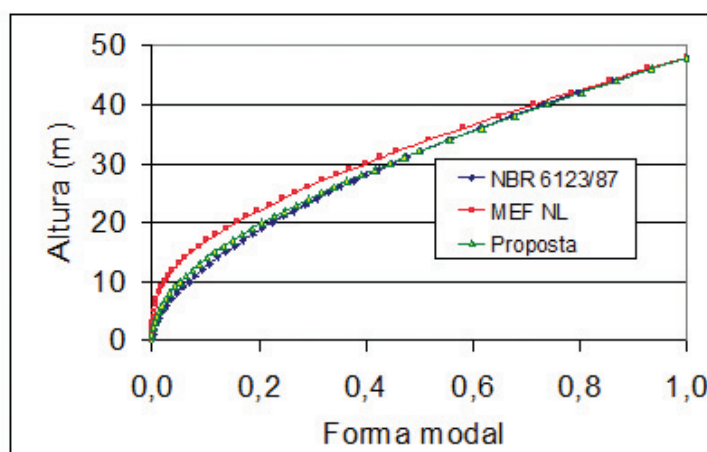
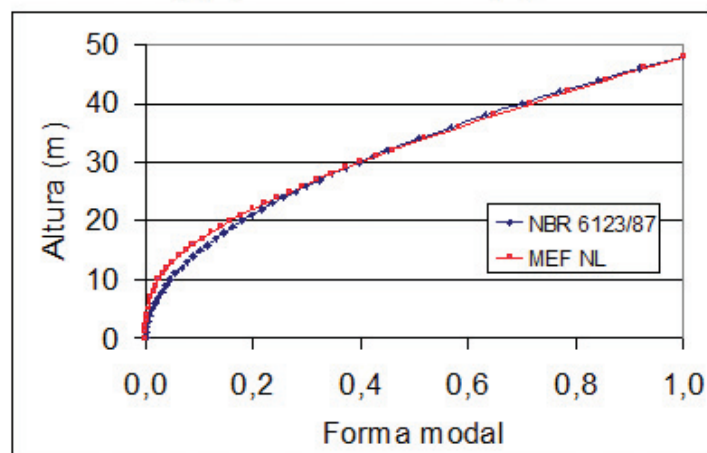
(a) expoente da forma modal: $\gamma = 1,7$ (b) expoente da forma modal: $\gamma = 1,965$

Figura 7.6 – Estrutura 1 – Comparativo das formas modais: (a) usada na análise, (b) sugerida.

7.2 ESTRUTURA 2 – POSTE METÁLICO DE 60,80 M

7.2.1 Dados e geometria

Foi analisado um poste metálico destinado também ao suporte de sistemas irradiantes de sinal de telefonia móvel celular. A estrutura possui 60,80 metros de altura e seção transversal circular vazada com diâmetro externo (ϕ_{ext}) e espessura (e) variável conforme indicação na Tabela 7.6. Na Figura 7.7 podem ser vistas fotografias da estrutura.

A Tabela 7.7 e a Figura 7.8 apresentam os parâmetros estruturais e dos dispositivos existentes, para o cálculo da ação do vento. A esbeltez da estrutura é 280.

Tabela 7.6 – Estrutura 2: dados e discretização da superestrutura do modelo.

cota	fext	e.	cota	fext	e.	cota	fext	e.	cota	fext	e.
(m)	(cm)	(cm)	(m)	(cm)	(cm)	(m)	(cm)	(cm)	(m)	(cm)	(cm)
60,80	94,00	0,64	45,60	108,77	0,64	30,40	123,54	0,84	15,20	138,30	0,84
59,28	95,48	0,64	44,08	110,24	0,64	28,88	125,01	0,84	13,68	139,78	0,84
57,76	96,95	0,64	42,56	111,72	0,64	27,36	126,49	0,84	12,16	141,26	0,84
56,24	98,43	0,64	41,04	113,20	0,64	25,84	127,97	0,84	10,64	142,73	0,84
54,72	99,91	0,64	39,52	114,67	0,64	24,32	129,44	0,84	9,12	144,21	0,84
53,20	101,38	0,64	38,00	116,15	0,64	22,80	130,92	0,84	7,60	145,69	0,84
51,68	102,86	0,64	36,48	117,63	0,64	21,28	132,40	0,84	6,08	147,16	0,87
50,16	104,34	0,64	34,96	119,10	0,64	19,76	133,87	0,84	4,56	148,64	0,87
48,64	105,81	0,64	33,44	120,58	0,64	18,24	135,35	0,84	3,04	150,12	0,87
47,12	107,29	0,64	31,92	122,06	0,84	16,72	136,83	0,84	1,52	151,59	0,87
									0,00	153,07	0,87

Tabela 7.7 – Estrutura 2: características dos dispositivos.

Dispositivo	Área	Ca	Cota	Peso específico, peso distribuído ou peso
Poste	Variável	0,6	de 0 a 60,8 m	7850 kN/m ³
Escada	0,05 m ² /m	2,0	de 0 a 60,8 m	0,15 kN/m
Cabos	0,15 m ² /m	1,2	de 0 a 60,8 m	0,25 kN/m
Antenas e plataforma	2,8 m ²	1,0	60,8 m	1,88 kN

(Ca = Coeficiente de arrasto)



Figura 7.7 – Estrutura 2: Fotografias.

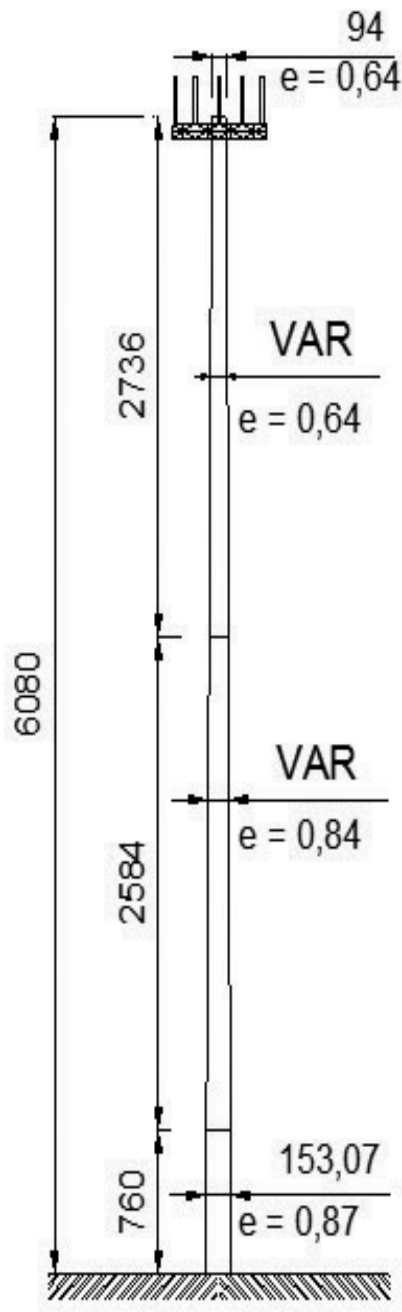


Figura 7.8 – Estrutura 2: Geometria - Poste Metálico – 60,8 m - Medidas em centímetros.

7.2.2 Modelagem por Elementos Finitos

A modelagem por Elementos Finitos da estrutura acompanhou os critérios já utilizados nas estruturas precedentes. A Figura 7.9 apresenta o modelo tridimensional, a vista lateral e a discretização da estrutura construídos pelo programa SAP2000.

Os modos de vibração e as frequências obtidas pelo Método dos Elementos Finitos são mostradas na Figura 7.10.

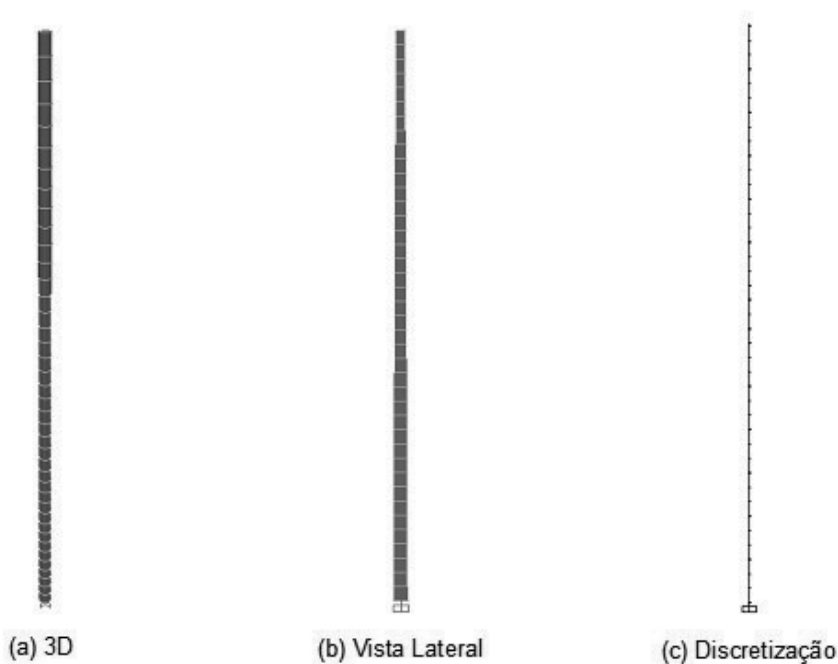
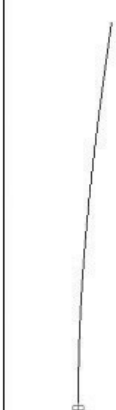
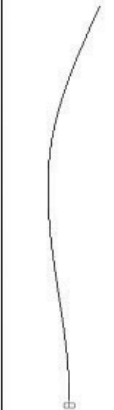





Figura 7.9 – Estrutura 2: Modelo por Elementos Finitos.

Modos naturais de vibração						
	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo	5º Modo	
	Linear	0,410648 Hz	1,925679 Hz	5,068824 Hz	9,690264 Hz	15,874428 Hz
	NLG	0,402199 Hz	1,917513 Hz	5,060654 Hz	9,681720 Hz	15,865699 Hz

(NLG = Não-Linearidade Geométrica)

Figura 7.10 – Estrutura 2: modos naturais de vibração.

7.2.3 Aplicação do método proposto

7.2.3.1 Definição dos dados parâmetros

Os dados para aplicação do método foram os seguintes:

- módulo de elasticidade: $E = 205 \text{ GPa}$;
- densidade do aço: $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$;
- massa concentrada no topo: $m_0 = 451,20 \text{ kg}$;
- massa distribuída por unidade de altura: $m_e = 40 \text{ kg/m}$.

O diâmetro externo das seções varia linearmente com a altura com seguinte expressão:

$$D(x) = \frac{D_2 - D_1}{L_1} x + D_1$$

onde D_2 é o diâmetro do topo e D_1 é o diâmetro da base da estrutura.

As alturas e as propriedades geométricas das seções nos trechos definidos na geometria são dadas por:

$$L_1 = 7,60\text{m}, D_1 = 153,07\text{cm}, e_1 = 0,87\text{cm}, d_1(x) = D(x) - 2e_1,$$

$$A_1(x) = \frac{\pi}{4} (D^2 - d_1(x)^2), I_1(x) = \frac{\pi}{64} (D(x)^4 - d_1(x)^4);$$

$$L_2 = 33,44\text{m}, e_2 = 0,84\text{cm}, d_2(x) = D(x) - 2e_2,$$

$$A_2(x) = \frac{\pi}{4} (D(x)^2 - d_2(x)^2), I_2(x) = \frac{\pi}{64} (D(x)^4 - d_2(x)^4);$$

$$L_3 = 60,80\text{m}, D_2 = 94\text{cm}, e_3 = 0,64\text{cm}, d_3(x) = D(x) - 2e_3,$$

$$A_3(x) = \frac{\pi}{4} (D(x)^2 - d_3(x)^2), I_3(x) = \frac{\pi}{64} (D(x)^4 - d_3(x)^4).$$

7.2.3.2 Cálculo da massa generalizada

A massa generalizada foi obtida por meio das seguintes integrais:

$$m_1 = \int_0^{L_1} m_I(x) \phi(x)^2 dx, \text{ com } m_I(x) = A_1(x)\rho + m_e;$$

$$m_2 = \int_{L_1}^{L_2} m_{II}(x) \phi(x)^2 dx, \text{ com } m_{II}(x) = A_2(x)\rho + m_e;$$

$$m_3 = \int_{L_2}^L m_{III}(x) \phi(x)^2 dx, \text{ com } m_{III}(x) = A_3(x)\rho + m_e.$$

A massa distribuída generalizada foi calculada por

$$m_R = \sum_{i=1}^3 m_i$$

E a massa generalizada total pela expressão:

$$M = m_0 + m_R$$

7.2.3.3 Cálculo da rigidez generalizada

Rigidez geométrica generalizada

Os esforços normais relativos aos trechos definidos na geometria, são

$$F_0 = m_0 g ,$$

$$F_3 = \int_{L_2}^{L_3} m_{III}(x) g dx ,$$

$$F_2 = \int_{L_1}^{L_2} m_{II}(x) g dx , \text{ e}$$

$$F_1 = \int_0^{L_1} m_I(x) g dx ,$$

A força normal generalizada F foi obtida pela soma dessas parcelas:

$$F = \sum_{i=0}^3 F_i .$$

As rigidezes geométricas foram calculadas pelas seguintes integrais:

$$K_{g3} = \int_{L_2}^{L_3} \left[F_0 + m_{III}(x)(L_3 - x) g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right]$$

$$K_{g2} = \int_{L_1}^{L_2} \left[F_0 + F_3 + m_{II}(x)(L_2 - x) g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right]$$

$$K_{g1} = \int_{L_2}^{L_3} \left[F_0 + F_3 + F_2 + m_1(x)(L_1 - x)g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right]$$

A rigidez geométrica generalizada é:

$$K_g = \sum_{i=1}^3 K_{gi}$$

Rigidez elástica generalizada

As parcelas da rigidez elástica para os intervalos já definidos são:

$$K_{01} = \int_0^{L_1} EI_1(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right)^2 dx ,$$

$$K_{02} = \int_{L_1}^{L_2} EI_2(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right)^2 dx \text{ e}$$

$$K_{03} = \int_{L_2}^L EI_3(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right)^2 dx .$$

E a rigidez à flexão generalizada K_0 é, portanto:

$$K_0 = \sum_{i=1}^3 K_{0i}$$

7.2.3.4 Cálculo da frequência

As frequências do primeiro modo de vibração da estrutura pelo método proposto são: modelo linear = 0,411504 Hz, modelo não-linear = 0,403130 Hz.

7.2.4 Ação do vento

7.2.4.1 Forças estáticas devidas ao vento

Os parâmetros empregados na determinação das forças estáticas devidas a ação do vento foram: fator topográfico $S_1 = 1,2$; fator de rugosidade do terreno S_2 correspondente à categoria III, classe C, com os parâmetros $p = 0,115$, $b = 0,930$ e $F_r = 0,950$; fator estatístico $S_3 = 1,1$; velocidade básica do vento $V_0 = 40$ m/s.

7.2.4.2 Resposta dinâmica pelo modelo simplificado da NBR 6123/88

Os parâmetros usados na determinação da resposta dinâmica pelo modelo contínuo simplificado da NBR 6123/88 foram os seguintes: largura da edificação 1,235 m; altura da edificação para o cálculo da frequência 60,80 m; categoria do terreno, velocidade básica do vento e fatores estatísticos como descrito no item anterior. A frequência fundamental foi obtida fazendo $T_1 = 0,29\sqrt{h} - 0,4$ (Tabela 6.4), logo $f_1 = 0,537272$ Hz. A forma modal foi obtida pela expressão (6.6) com γ igual a 1,7. A relação adimensional $V_p/(f_1 L)$, para esse caso, é 0,038. Adotando a taxa de amortecimento crítico ζ igual a 0,008 chega-se a um coeficiente de amplificação dinâmica ξ igual a 2,471.

Para desenvolvimento do modelo simplificado não-linear, tomou-se a frequência e o modo de vibração da estrutura sob não-linearidade geométrica. A frequência do modelo não-linear é 0,402115 Hz. Com isso, a relação adimensional $V_p/(f_1 L)$ é de 0,050, o que conduz a um fator de amplificação dinâmica $\xi = 2,603$, considerando a taxa de amortecimento crítico já adotada.

7.2.4.3 Resposta dinâmica pelo modelo discreto da NBR 6123/88

A resposta dinâmica pelo modelo dinâmico discreto linear foi calculada com base nos parâmetros e relações apresentadas no item anterior.

Os parâmetros usados no cálculo da resposta dinâmica pelo modelo discreto, com a inclusão da não-linearidade geométrica, foram descritos na análise simplificada não-linear, apresentada também no item anterior. Para os modos de 2 a 5 os fatores de amplificação dinâmica, dadas as frequências mostradas na Figura 7.10, são, respectivamente: 1,963; 1,647; 1,599; 1,463.

7.2.5 Análise dos resultados

Os esforços normais na estrutura pelo método proposto e pelo MEF estão na Tabela 7.13.

Tabela 7.8 – Estrutura 2: esforço normal.

L	Proposto	MEF	Diferença	
(m)	(kN)	(kN)	Absoluta	(%)
60,80	4,421760	4,421760	0,0000	0,0000000
33,44	60,275586	60,275587	0,0000	-0,0000017
7,60	139,796072	139,796074	0,0000	-0,0000018
0,00	166,504082	166,504085	0,0000	-0,0000018

A frequência do primeiro modo de vibração obtida pelo método proposto, como descrito no item 7.4.3, foi de 0,403130 Hz e pelo Método dos Elementos Finitos foi de 0,402115 Hz, apresentando uma diferença de 0,23%.

Encontra-se o valor de 0,307058 Hz no cálculo dessa frequência quando feita pela expressão (4.19), o que representa uma diferença de 23,83% em relação ao cálculo exato; de 23,66% em relação ao MEF e de 42,85% em relação à expressão adotada da NBR 6123/88 (0,537272 Hz).

Os resultados críticos para a ação do vento na estrutura voltam a ser encontrados na comparação entre o modelo estático e os modelos dinâmicos simplificados. Com o modelo dinâmico simplificado não-linear, a relação entre o momento fletor máximo na estrutura é de 2,22 vezes, que representa uma diferença 3827,93 kNm (122,41%).

Nas análises discretas não-lineares verifica-se uma pequena influência da contribuição dos modos de vibração acima do fundamental. Quando computadas as contribuições do vento médio e as flutuações do 1° ao 5° modo, pelo critério da raiz quadrada da soma dos quadrados, surge uma diferença de 1,56% em relação à análise que inclui apenas a combinação do vento médio com o primeiro modo. As flutuações resultantes do primeiro modo de vibração são as que aportam maior contribuição na resposta da estrutura, retendo 67% do esforço total, quando se adiciona exclusivamente o primeiro modo de vibração.

A diferença entre a análise discreta não-linear e análise das forças estáticas, prevista no item 4 da NBR 6123/88 (modelo estático), é de 60,90%, conforme mostrado na Tabela 7.9 .

Analisando os resultados obtidos da resposta dinâmica dos modelos discretos, linear e não-linear, observa-se uma diferença na frequência do primeiro modo de 2,10% e do fator de amplificação dinâmica de 0,38%. Com isso, o momento na estrutura foi acrescido de 75,60 kNm, uma diferença de 1,55%.

A Tabela 7.9 apresenta o valor dos momentos fletores do vento médio e das flutuações correspondentes aos modos de vibração de 1 a 5, da análise dinâmica discreta não-linear.

Tabela 7.9 – Estrutura 2: momentos fletores da análise discreta não-linear.

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
60,80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
59,28	5,98	12,58	3,39	0,69	0,65	0,22
57,76	13,91	31,01	8,10	1,56	1,36	0,41
56,24	23,82	55,14	13,79	2,46	1,90	0,45
54,72	35,70	84,78	20,15	3,26	2,06	0,28
53,20	49,55	119,74	26,85	3,82	1,68	0,17
51,68	65,38	159,84	33,58	4,03	0,66	0,90
50,16	83,19	204,89	40,04	3,80	1,05	1,86
48,64	102,98	254,68	45,92	3,05	3,42	2,99
47,12	124,74	309,03	50,96	1,75	6,38	4,16
45,60	148,49	367,73	54,89	0,13	9,78	5,29
44,08	174,21	430,58	57,48	2,59	13,46	6,26
42,56	201,90	497,37	58,51	5,59	17,23	6,99
41,04	231,56	567,89	57,81	9,07	20,87	7,43

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
39,52	263,18	641,95	55,21	12,96	24,19	7,56
38,00	296,76	719,34	50,59	17,18	27,04	7,43
36,48	332,28	799,85	43,85	21,61	29,27	7,07
34,96	369,75	883,29	34,92	26,15	30,80	6,59
33,44	409,14	969,45	23,76	30,69	31,61	6,08
31,92	450,44	1058,27	10,27	35,10	31,68	5,63
30,40	493,65	1149,93	5,92	39,25	30,98	5,39
28,88	538,75	1244,32	24,84	42,98	29,64	5,43
27,36	585,71	1341,20	46,42	46,20	27,83	5,81
25,84	634,52	1440,35	70,56	48,81	25,75	6,56
24,32	685,16	1541,56	97,15	50,72	23,62	7,65
22,80	737,61	1644,61	126,03	51,88	21,68	9,03
21,28	791,83	1749,31	157,06	52,25	20,13	10,62
19,76	847,81	1855,47	190,07	51,82	19,17	12,31
18,24	905,51	1962,90	224,88	50,58	18,96	13,98

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
16,72	964,89	2071,42	261,30	48,57	19,61	15,53
15,20	1025,91	2180,88	299,13	45,83	21,20	16,83
13,68	1088,54	2291,11	338,20	42,40	23,76	17,81
12,16	1152,73	2401,99	378,30	38,37	27,27	18,41
10,64	1218,42	2513,37	419,25	33,82	31,68	18,60
9,12	1285,55	2625,15	460,89	28,83	36,88	18,39
7,60	1354,05	2737,22	503,05	23,49	42,75	17,81
6,08	1423,85	2849,50	545,58	17,89	49,15	16,91
4,56	1494,86	2961,92	588,37	12,10	55,94	15,77
3,04	1566,79	3074,42	631,31	6,20	62,98	14,47
1,52	1639,53	3186,95	674,33	0,24	70,15	13,08
0,00	1712,90	3299,49	717,36	5,74	77,36	11,67

A Tabela 7.10 resume os valores dos momentos fletores na estrutura devidos à ação do vento, obtidos nas análises descritas anteriormente, comparando-as ao modelo estático.

Tabela 7.10 – Estrutura 2: momentos fletores na estrutura.

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
60,80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
59,28	10,29	18,11	18,34	18,79	18,81	18,83	18,83	36,69	38,24
57,76	23,97	43,86	44,43	45,47	45,51	45,53	45,54	84,97	88,58
56,24	41,06	77,08	78,10	79,79	79,85	79,88	79,88	144,44	150,61
54,72	61,59	117,60	119,18	121,53	121,59	121,61	121,61	214,68	223,90
53,20	85,56	165,25	167,48	170,44	170,50	170,51	170,51	295,27	308,01
51,68	113,00	219,85	222,82	226,30	226,35	226,35	226,35	385,79	402,53

z	Análise		ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática	Combinação das contribuições modais								
		Modo 1		1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5			
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
50,16	143,93	281,21	285,02	288,88	288,91	288,92	288,93	485,83	507,01	
48,64	178,36	349,13	353,88	357,97	357,98	358,01	358,02	594,98	621,02	
47,12	216,30	423,44	429,19	433,35	433,35	433,42	433,44	712,83	744,13	
45,60	257,78	503,91	510,76	514,82	514,82	514,95	514,98	838,96	875,88	
44,08	302,79	590,37	598,39	602,19	602,20	602,40	602,45	972,97	1015,87	
42,56	351,36	682,59	691,86	695,27	695,30	695,60	695,65	1114,46	1163,64	
41,04	403,49	780,39	790,96	793,89	793,96	794,34	794,39	1263,04	1318,77	
39,52	459,19	883,55	895,50	897,86	897,99	898,44	898,49	1418,30	1480,84	

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
38,00	518,46	991,86	1005,25	1007,02	1007,23	1007,73	1007,77	1579,86	1649,43
36,48	581,32	1105,13	1120,02	1121,21	1121,50	1122,04	1122,07	1747,35	1824,12
34,96	647,76	1223,14	1239,58	1240,27	1240,66	1241,19	1241,21	1920,37	2004,50
33,44	717,78	1345,70	1363,75	1364,04	1364,52	1365,03	1365,05	2098,57	2190,19
31,92	791,39	1472,71	1492,41	1492,46	1493,04	1493,51	1493,52	2281,58	2380,79
30,40	868,59	1604,36	1625,76	1625,78	1626,44	1626,86	1626,87	2469,04	2575,92
28,88	949,36	1740,50	1763,66	1763,91	1764,65	1765,00	1765,01	2660,62	2775,21
27,36	1033,71	1880,91	1905,87	1906,67	1907,46	1907,75	1907,76	2855,97	2978,31

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear						ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais							
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5			
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	
25,84	1121,61	2025,34	2052,14	2053,86	2054,68	2054,91	2054,93	3054,77	3184,86	
24,32	1213,07	2173,56	2202,24	2205,29	2206,11	2206,29	2206,31	3256,71	3394,53	
22,80	1308,06	2325,34	2355,94	2360,74	2361,55	2361,70	2361,72	3461,47	3607,00	
21,28	1406,56	2480,47	2513,02	2520,02	2520,80	2520,91	2520,94	3668,76	3821,95	
19,76	1508,56	2638,73	2673,25	2682,92	2683,63	2683,73	2683,77	3878,30	4039,09	
18,24	1614,01	2799,91	2836,43	2849,20	2849,85	2849,94	2849,99	4089,82	4258,14	
16,72	1722,91	2963,81	3002,34	3018,67	3019,23	3019,33	3019,38	4303,07	4478,83	
15,20	1835,19	3130,22	3170,79	3191,10	3191,57	3191,68	3191,74	4517,80	4700,92	

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
13,68	1950,83	3298,96	3341,57	3366,27	3366,66	3366,78	3366,84	4733,78	4924,17
12,16	2069,77	3469,84	3514,52	3543,97	3544,27	3544,42	3544,49	4950,80	5148,37
10,64	2191,95	3642,69	3689,44	3723,98	3724,20	3724,40	3724,46	5168,68	5373,34
9,12	2317,31	3817,34	3866,16	3906,09	3906,25	3906,50	3906,56	5387,22	5598,89
7,60	2445,74	3993,62	4044,52	4090,11	4090,21	4090,53	4090,59	5606,27	5824,88
6,08	2577,17	4170,30	4224,35	4275,82	4275,88	4276,29	4276,34	5825,38	6050,91
4,56	2711,46	4347,29	4405,50	4463,05	4463,07	4463,59	4463,63	6044,52	6276,98
3,04	2848,04	4524,36	4587,64	4651,42	4651,43	4652,05	4652,09	6263,67	6503,04

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
1,52	2986,73	4701,47	4770,60	4840,75	4841,50	4841,53	6482,81	6729,10	
0,00	3127,24	4878,59	4954,19	5030,82	5031,70	5031,72	6701,96	6955,17	
Relação	1,00	1,56	1,58	1,61	1,61	1,61	2,14	2,22	
D kNm	0,00	1751,35	1826,95	1903,58	1904,47	1904,49	3574,72	3827,93	
D %	0,00%	56,00%	58,42%	60,87%	60,90%	60,90%	114,31%	122,41%	

(ADDL – Análise Dinâmica Discreta Linear, ADSL – Análise Dinâmica Simplificada Linear, ADSNL – Análise Dinâmica Simplificada Não-Linear).

No gráfico da Figura 7.11 podem ser encontrados os resultados obtidos para a ação do vento sobre a estrutura. O traçado mais inferior corresponde ao valor do momento fletor para a análise estática, usada originalmente para dimensionar a estrutura. Os traçados superiores subsequentes correspondem aos resultados das análises dinâmicas discretas. Logo acima se encontram as curvas das análises dinâmicas simplificadas.

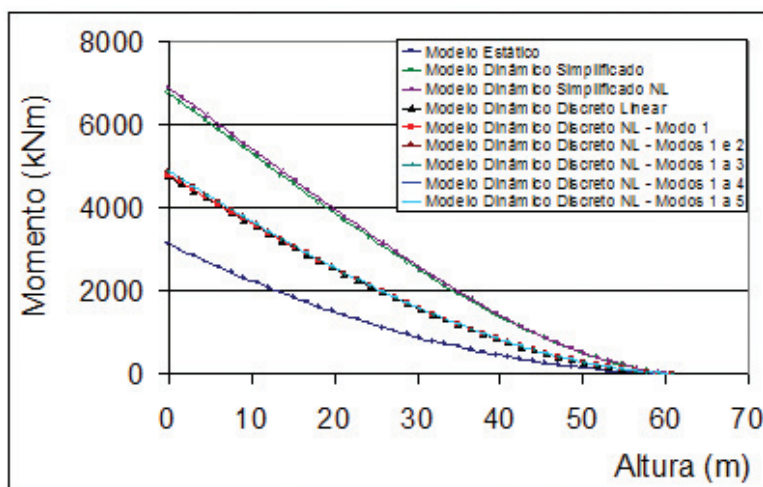


Figura 7.11 – Ação do vento na estrutura 2.

As formas modais da NBR 6123/88, a do Método dos Elementos Finitos e do método proposto constam na Figura 7.12(a).

Uma melhor aproximação à forma modal não-linear é conseguida substituindo-se o expoente da expressão (6.6) por 1,775; pois a curva definida com esse novo expoente oferece pontos mais próximos à forma modal não-linear, como pode ser observado na Figura 7.12(b).

O expoente sugerido anteriormente supera em 4,4% o valor do recomendado pela NBR 6123/88.

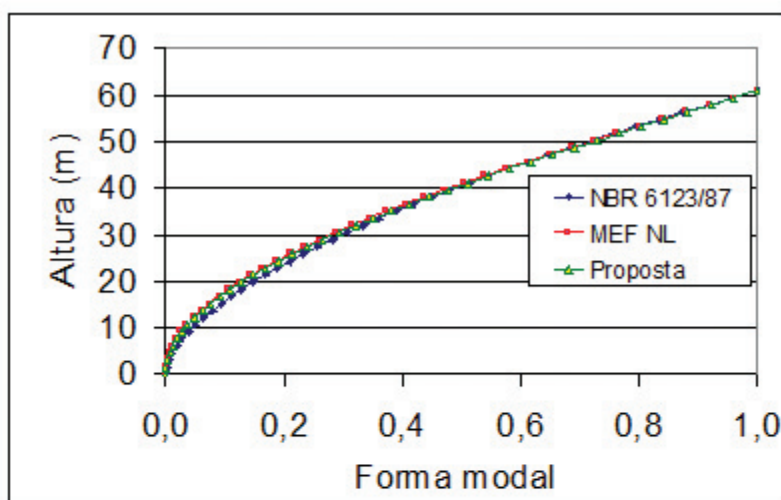
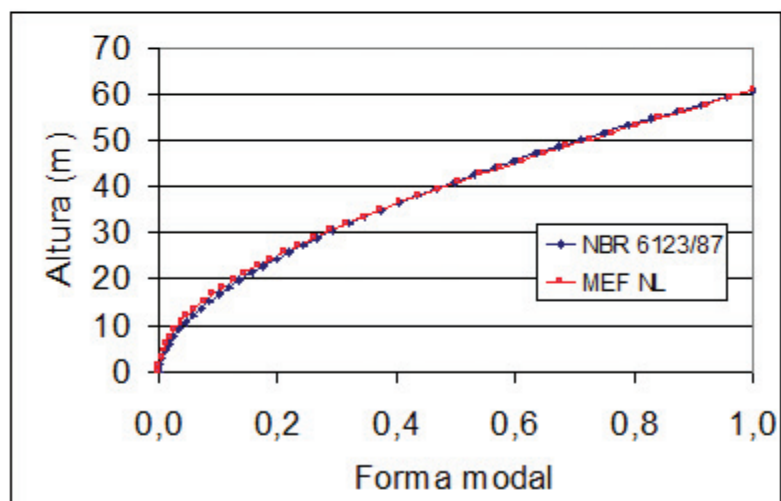
(a) expoente da forma modal: $\gamma = 1,7$ (b) expoente da forma modal: $\gamma = 1,775$

Figura 7.12 – Estrutura 2 – comparativo das formas modais: (a) usada na análise, (b) sugerida.

7.3 ESTRUTURA 3 – POSTE DE CONCRETO ARMADO DE 40 M

7.3.1 Dados e geometria

Semelhantemente às precedentes, esta é uma estrutura destinada ao suporte de sistemas irradiantes de sinal de telefonia móvel celular. É um poste de concreto armado de 40 m de altura e com seção transversal circular vazada de diâmetro externo de 60 cm. As propriedades da seção mudam ao longo do comprimento devido à mudança da espessura e da variação da área de aço na seção transversal ao longo do eixo longitudinal da estrutura. o índice de esbeltez da estrutura é $\lambda = 462$. A seção 15.8.1 da NBR – 6118/04 limita o índice de esbeltez a 200 de pilares isolados de concreto armado. Exceto para postes com força normal menor que $0,10f_{cd}A_c$, o índice de esbeltez pode ser maior. A estrutura atende a essa condição.

O concreto usado na fabricação da estrutura teve como resistência característica à compressão igual a 45 MPa e densidade de 2600 kg/m³. O cobrimento especificado para as armaduras foi de 25 mm e o aço empregado na construção do poste foi o CA-50. O módulo de elasticidade secante do concreto, de 3193 MPa, foi calculado conforme a NBR 6118/03.

A estrutura possui um conjunto de antenas e acessórios, como plataforma, escada, cabos e esteiramento, com as características da Tabela 7.11.

Tabela 7.11 – Características da estrutura 3 e dispositivos.

Dispositivo	Área	Ca	Cota	Peso específico, peso distribuído ou peso
Poste	0,6 m ² /m	0,6	de 0 a 40 m	25,48 kN/m ³
Escada	0,05 m ² /m	2,0	de 0 a 40 m	0,15 kN/m
Cabos	0,15 m ² /m	1,2	de 0 a 40 m	0,25 kN/m
Plataforma e suportes	1 m ²	2,0	40 m	4,90 kN
Antenas	3 m ²	1,0	40 m	1,88 kN

(Ca indica o coeficiente de arrasto)

Como se trata de uma estrutura de concreto armado é preciso levar em conta a presença do aço no momento de inércia da seção transversal, o que deve ser feito por meio da homogeneização da seção de concreto.

Seja uma seção circular vaza de diâmetro externo D. Uma barra de aço qualquer b_i ocupa uma posição i na seção definida por Rb_i e θ_i , conforme representado na Figura 7.13.

Rb_i determina a posição do centro de cada barra em relação ao centro da seção. Como todas as barras possuem o mesmo raio, por simplicidade de notação, se fará $Rb_i = Rb$, logo:

$$Rb = \frac{D}{2} - cob - \frac{d_{bi}}{2} ,$$

onde cob é o cobrimento das armaduras e d_{bi} é o diâmetro da barra i .

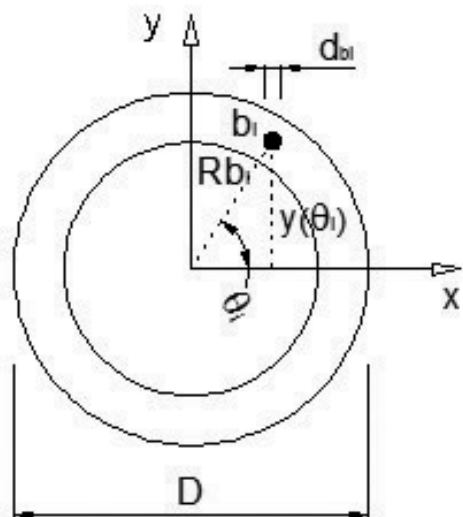


Figura 7.13 – Estrutura 3: parâmetros para homogeneização da seção.

Sendo θ a variável independente, a distância entre o centro de cada barra em relação ao eixo central de inércia da seção é $y(\theta) = \text{sen}(\theta)Rb$. O espaçamento entre os centros de cada barra da

seção foi obtido por $\text{esp} = \frac{2\pi Rb}{nb}$, e a defasagem angular entre elas

por $\Delta\theta = \frac{\text{esp}}{Rb}$. Fazendo-se θ variar de 0 a 2π em intervalos definidos

por $\Delta\theta$, a inércia total das barras de aço em relação à seção da estrutura pôde ser obtida pelo teorema dos eixos paralelos com a expressão

$$I_s = \sum_{\theta} \left(\frac{\pi d_b^4}{64} + y(\theta)^2 \frac{\pi d_b^2}{4} \right)$$

O momento de inércia homogeneizado das barras de aço será, pois:

$$I_{\text{shom}} = \sum_{\theta}^{2\pi} I(\theta) \left(\frac{E_s}{E_{\text{csec}}} - 1 \right).$$

A parcela da inércia de concreto é $I_{\text{conc}} = I - I_s$, com I sendo a inércia da seção circular. A inércia total da seção homogeneizada será obtida por $I_{\text{tot}} = I_{\text{conc}} + I_{\text{shom}}$.

Para encontrar um fator F que multiplique a inércia nominal da seção em termos da inércia homogeneizada da seção total de aço faz-se

$$F = 1 + \frac{I_{\text{shom}}}{I_{\text{tot}}}, \quad (7.1)$$

Os fatores de homogeneização, as propriedades estruturais e geometria da estrutura estão na Tabela 7.12. A estrutura está representada pela Figura 7.14.

Tabela 7.12 – Estrutura 3: propriedades da estrutura e fatores de homogeneização das seções.

Nó	Altura	f externo	Espessura	nb	f b	Fator de inércia
	(m)	(cm)	(cm)		(mm)	
41	40	60	10	20	13	1,0963
40	39	60	10	20	13	
39	38	60	10	20	13	
38	37	60	10	20	13	
37	36	60	10	20	13	
36	35	60	10	20	13	
35	34	60	10	20	13	
34	33	60	10	20	13	
33	32	60	10	20	13	
32	31	60	13	20	13	1,0869
31	30	60	12	15	16	1,0995

Nó	Altura	f externo	Espessura	nb	f b	Fator de inércia
	(m)	(cm)	(cm)		(mm)	
30	29	60	11	15	16	1,1029
29	28	60	11	15	16	
28	27	60	11	15	16	
27	26	60	11	15	16	
26	25	60	11	16	16	1,1091
25	24	60	11	17	16	1,1153
24	23	60	11	18	16	1,1214
23	22	60	11	19	16	1,1274
22	21	60	11	20	16	1,1334
21	20	60	14	20	16	1,123
20	19	60	15	15	20	1,1374
19	18	60	16	15	20	1,1354
18	17	60	13	16	20	1,1512
17	16	60	13	16	20	
16	15	60	13	17	20	1,1594

Nó	Altura	f externo	Espessura	nb	f b	Fator de inércia
	(m)	(cm)	(cm)		(mm)	
15	14	60	13	18	20	1,1675
14	13	60	13	19	20	1,1755
13	12	60	13	19	20	
12	11	60	13	20	20	1,1833
11	10	60	13	22	20	1,1987
10	9	60	16	22	20	1,1889
9	8	60	16	15	25	1,1961
8	7	60	17	15	25	1,194
7	6	60	14	16	25	1,2132
6	5	60	14	16	25	
5	4	60	14	17	25	1,2241
4	3	60	14	17	25	
3	2	60	14	17	25	
2	1	60	18	17	25	1,2136
1	0	60	18	17	25	

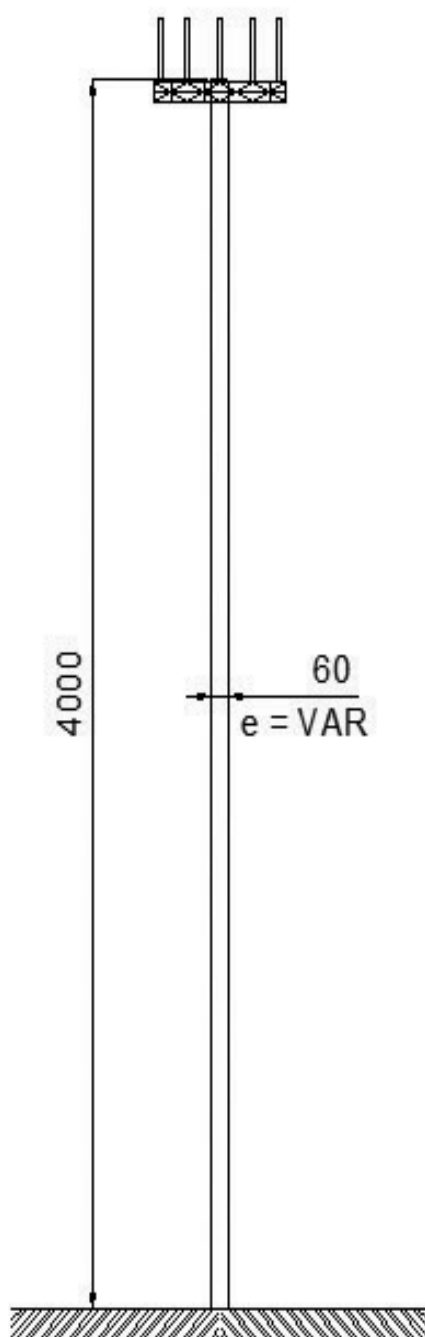


Figura 7.14 – Estrutura 3: geometria - medidas em centímetros.

7.3.2 Modelagem por Elementos Finitos

A modelagem por Elementos Finitos da estrutura acompanhou os critérios utilizados na modelagem das estruturas precedentes. As seções tiveram seus momentos de inércias majorados pelos respectivos fatores de homogeneização.

A Figura 7.15 apresenta o modelo com a discretização da estrutura. Os modos de vibração e as frequências obtidas pelo Método dos Elementos Finitos são as constantes na Figura 7.16.

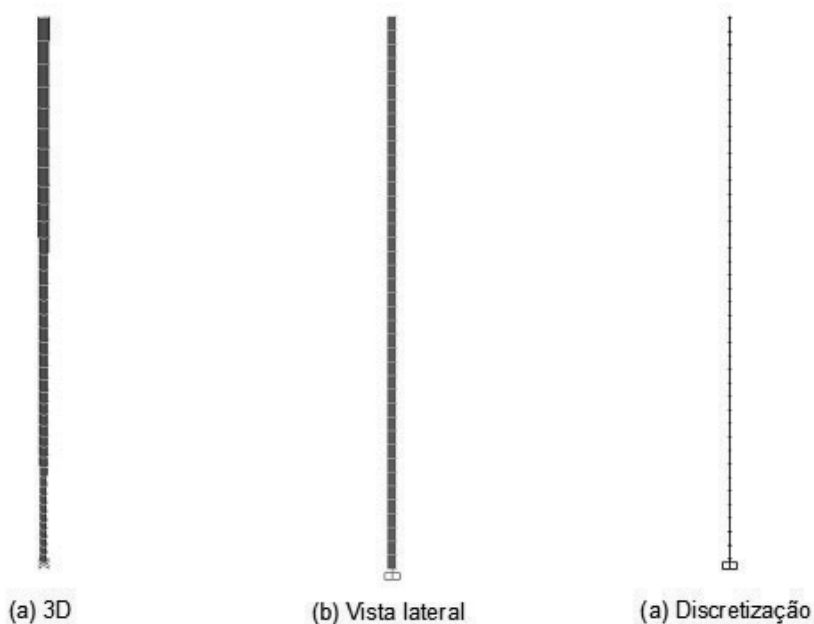
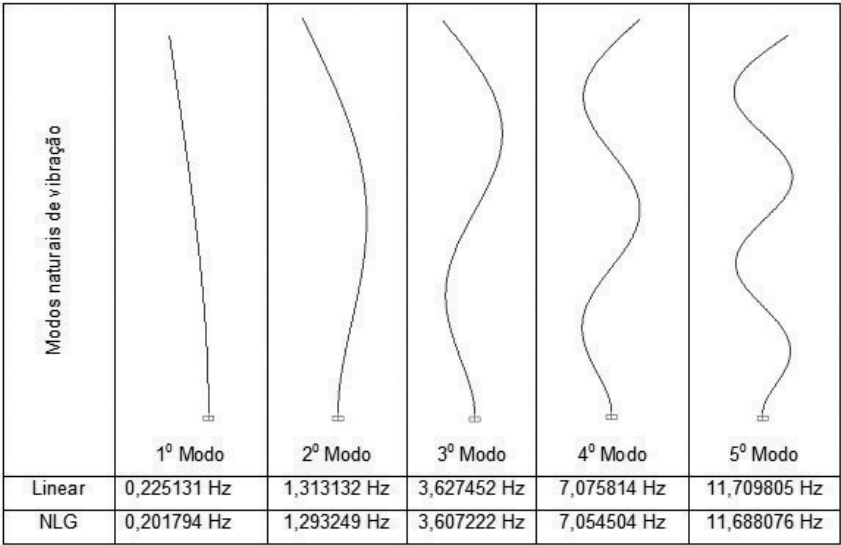


Figura 7.15 – Estrutura 3: modelo por Elementos Finitos.



(NLG diz respeito à Não-Linearidade Geométrica)

Figura 7.16 – Estrutura 3: modos naturais de vibração.

7.3.3 Aplicação do método proposto

7.3.3.1 Definição dos parâmetros

Os dados utilizados na aplicação do método proposto nesta Tese foram:

- módulo de elasticidade do concreto: $E = 31931 \text{ MPa}$,
- densidade do concreto: $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$,
- massa concentrada no topo: $m_0 = 692 \text{ kg}$;
- massa distribuída por unidade de altura: $m_e = 40 \text{ kg/m}$.

As ordenadas de interesse ao longo da altura, a área e a inércia das seções são dadas por:

$$L = L_i, \quad A_i = \frac{\pi}{4} (D^2 - d_i^2) \quad \text{e} \quad I_i = \frac{\pi}{64} (D^4 - d_i^4) f_i, \quad \text{com}$$
$$i = 1, 2, \dots, 40.$$

Nas expressões anteriores, D é o diâmetro externo da estrutura, constante, nesse caso, f é o fator de homogeneização da seção e i , se refere a uma dada posição ou seção na altura.

7.3.3.2 Cálculo da massa generalizada

A massa generalizada total é obtida pelas expressões que se apresentam a seguir. A introdução dos subíndices gregos objetivam evitar a redundância de notação.

$$M = m_0 + \sum_{i=1}^{40} m_i, \text{ com}$$

$$m_i = \int_{i-1}^i m_l \phi(x)^2 \text{ sendo a massa generalizada, e}$$

$$m_l = A_l \rho + m_e \text{ a massa distribuída do intervalo } i, i;$$

$$\text{com } i, l = 1, 2, \dots, 40.$$

7.3.3.3 Cálculo da rigidez generalizada

A parcela da rigidez generalizada relativa à rigidez geométrica foi obtida por:

$$K_g = \sum_{i=1}^{40} K_{gi}, \text{ com}$$

$$K_{gi} = \int_{i-1}^i \left[F_0 + \sum_{i=1}^{40} F_i + m_l (L_i - x)g \right] \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 dx,$$

$$F_i = \int_{i-1}^i m_l g dx$$

e

$$F_0 = m_0 g$$

A rigidez elástica generalizada, por sua vez, foi encontrada por:

$$K_0 = \sum_{i=1}^{40} K_{0i}, \text{ com}$$

$$K_{0i} = \int_{i-1}^i EI_i \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 dx, \text{ com } i = 1, 2, \dots, 40.$$

Com isso, a rigidez generalizada da estrutura pôde ser calculada fazendo $K = K_0 - K_g$, considerando o esforço normal de compressão positivo.

7.3.4 Cálculo da frequência

A frequência natural da estrutura relativa ao primeiro modo de vibração, considerando a rigidez geométrica, é de 0,214575 Hz, enquanto que para o modelo linear é de 0,237367 Hz.

7.3.5 Ação do vento

7.3.5.1 Forças estáticas devidas ao vento

Os parâmetros empregados na determinação das forças estáticas devidas a ação do vento foram: fator topográfico $S_1 = 1,0$; fator de rugosidade do terreno S_2 correspondente à categoria IV, classe B, com os parâmetros $p = 0,125$, $b = 0,85$ e $F_r = 0,98$; fator estatístico $S_3 = 1,1$; velocidade básica do vento $V_0 = 35$ m/s.

7.3.5.2 Resposta dinâmica pelo modelo simplificado da NBR 6123/88

Os parâmetros usados na determinação da resposta dinâmica pelo modelo contínuo simplificado da NBR 6123/88 foram os seguintes: largura da edificação 0,6 m; altura da edificação 40 m; categoria do terreno, velocidade básica do vento e fatores estatísticos como descrito no item anterior.

A frequência fundamental foi obtida fazendo $T_1 = 0,015h$ (Tabela 6.4), logo $f_1 = 1,666667$ Hz. A forma modal foi obtida pela expressão (6.6) com g igual a 1,7. A relação adimensional $V_p/(f_1 L)$ é igual a 0,009, o que leva, com uma taxa crítica de amortecimento ζ igual a 0,01, a um coeficiente de amplificação dinâmica ξ de 1,611.

O modelo simplificado não-linear foi calculado com o coeficiente de amplificação dinâmica, obtido com a frequência do modelo discreto não-linear, que será descrito adiante.

7.3.5.3 Resposta dinâmica pelo modelo discreto da NBR 6123/88

A resposta dinâmica pelo modelo dinâmico discreto linear foi calculada com base na frequência 0,225131 Hz. A relação adimensional $V_p/(f_1 L)$, nesse caso, é 0,066, e o fator de amplificação dinâmica ξ é igual a 2,313, para o amortecimento crítico de 0,01. A frequência fundamental da estrutura com a inclusão da não-linearidade geométrica é 0,201796 Hz, o que leva a um coeficiente de amplificação dinâmica ξ de 2,516. Para os modos de 2 a 5 os fatores de amplificação dinâmica, dadas as frequências apresentadas na Figura 7.16, são, respectivamente: 1,686; 1,400; 1,354; 1,236.

7.3.6 Análise dos resultados

Os esforços normais em relação às alturas definidas na discretização da estrutura 3, obtidos pela solução matemática do método proposto, e pelo Método dos Elementos Finitos, estão na Tabela 7.13.

Tabela 7.13 – Estrutura 3: esforço normal.

L	Proposto	MEF	Diferença		L	Proposto	MEF	Diferença	
			Abs	%				Abs	%
40	6,7816	6,7816	0,0000	0,0000000000	19	104,5230	104,5230	0,0000	0,0000000003
39	11,1760	11,1760	0,0000	0,0000000003	18	110,3183	110,3183	0,0000	0,0000000003
38	15,5704	15,5704	0,0000	0,0000000004	17	116,3456	116,3456	0,0000	0,0000000003
37	19,9648	19,9648	0,0000	0,0000000005	16	121,6285	121,6285	0,0000	0,0000000003
36	24,3592	24,3592	0,0000	0,0000000005	15	126,9115	126,9115	0,0000	0,0000000003
35	28,7535	28,7535	0,0000	0,0000000006	14	132,1944	132,1944	0,0000	0,0000000004
34	33,1479	33,1479	0,0000	0,0000000006	13	137,4773	137,4773	0,0000	0,0000000003

L	Proposto	MEF	Diferença		L	Proposto	MEF	Diferença	
			Abs	%				Abs	%
33	37,5423	37,5423	0,0000	0,0000000006	12	142,7602	142,7602	0,0000	0,0000000003
32	41,9367	41,9367	0,0000	0,0000000006	11	148,0431	148,0431	0,0000	0,0000000002
31	46,3311	46,3311	0,0000	0,0000000006	10	153,3261	153,3261	0,0000	0,0000000002
30	51,6140	51,6140	0,0000	0,0000000007	9	158,6090	158,6090	0,0000	0,0000000002
29	56,6168	56,6168	0,0000	0,0000000008	8	164,6363	164,6363	0,0000	0,0000000003
28	61,3233	61,3233	0,0000	0,0000000001	7	170,6637	170,6637	0,0000	0,0000000001
27	66,0299	66,0299	0,0000	0,0000000006	6	176,9072	176,9072	0,0000	0,0000000002
26	70,7365	70,7365	0,0000	0,0000000002	5	182,4543	182,4543	0,0000	0,0000000003

L	Proposto	MEF	Diferença		L	Proposto	MEF	Diferença	
			Abs	%				Abs	%
25	75,4431	75,4431	0,0000	0,0000000005	4	188,0013	188,0013	0,0000	0,0000000002
24	80,1496	80,1496	0,0000	0,0000000002	3	193,5484	193,5484	0,0000	0,0000000002
23	84,8562	84,8562	0,0000	0,0000000003	2	199,0955	199,0955	0,0000	0,0000000001
22	89,5628	89,5628	0,0000	0,0000000003	1	204,6426	204,6426	0,0000	0,0000000001
21	94,2694	94,2694	0,0000	0,0000000003	0	211,0862	211,0862	0,0000	0,0000000001
20	98,9760	98,9760	0,0000	0,0000000003					

(Abs. = Absoluta)

A frequência do primeiro modo de vibração obtida pelo método proposto, como descrito no item 7.4.3 foi de 0,215715 Hz e, pelo Método dos Elementos Finitos, foi de 0,201794 Hz, uma diferença de 6,9%. Pela NBR 6123/88 essa frequência ficou em 1,666667 Hz. No cálculo simplificado do método proposto, utilizando a Eq. (4.21), com as propriedades geométricas da estrutura de forma ponderada, encontra-se o valor de 0,189377 Hz, o que representa uma diferença de 13,91% em relação ao cálculo exato do método; de 6,15% em relação ao MEF e de 88,64% em à NBR 6123/88.

Acompanhando os resultados já encontrados, os valores críticos da ação do vento encontram-se na comparação entre o modelo estático e o modelo dinâmico discreto simplificado não-linear. A diferença do momento fletor máximo na estrutura, entre essas duas análises, atinge um valor de 61,19%.

Nas análises discretas não-lineares segue-se com uma pequena influência da contribuição dos modos de vibração acima do fundamental. Quando computadas as contribuições do vento médio e as flutuações do 1º ao 5º modo surge uma diferença de 0,006% em relação à combinação que leva em conta o vento médio e apenas a flutuação do primeiro modo, sendo, portanto, desprezível. Nesse caso, as flutuações resultantes do primeiro modo de vibração são as que aportam maior contribuição na resposta da estrutura, com 68% do valor total.

A diferença entre a análise discreta não-linear e análise das forças estáticas é de 29,07%. Os resultados das diferentes análises para a determinação da ação do vento podem ser encontradas na Tabela 7.14.

Analisando os resultados dos modelos discretos, linear e não-linear, observa-se, para o modelo não-linear, uma diminuição, na frequência do primeiro modo de vibração, de 10,34% e uma elevação do fator de amplificação dinâmica de 10,57%.

A Tabela 7.15 resume o valor dos momentos na estrutura devidos à ação do vento das análises descritas anteriormente, comparando-as ao modelo estático.

Tabela 7.14 – Estrutura 3: momentos da análise discreta não-linear.

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
39	2,19	1,93	0,00	0,32	0,09	0,16
38	4,62	4,76	0,01	0,75	0,20	0,36
37	7,29	8,47	0,02	1,27	0,33	0,55
36	10,20	13,02	0,02	1,83	0,45	0,71
35	13,35	18,38	0,03	2,40	0,56	0,81
34	16,73	24,52	0,04	2,95	0,64	0,83
33	20,34	31,40	0,05	3,44	0,68	0,76
32	24,18	38,99	0,06	3,86	0,69	0,61
31	28,24	47,25	0,07	4,18	0,65	0,39
30	32,52	56,22	0,08	4,37	0,57	0,13
29	37,02	65,90	0,09	4,42	0,44	0,15
28	41,73	76,23	0,10	4,32	0,29	0,41

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
27	46,65	87,14	0,10	4,08	0,12	0,62
26	51,78	98,60	0,11	3,70	0,06	0,75
25	57,11	110,57	0,11	3,20	0,24	0,80
24	62,64	123,04	0,12	2,59	0,40	0,75
23	68,37	135,95	0,12	1,90	0,53	0,61
22	74,29	149,29	0,12	1,14	0,62	0,40
21	80,39	163,01	0,12	0,33	0,68	0,14
20	86,68	177,09	0,12	0,48	0,68	0,15
19	93,15	191,54	0,12	1,28	0,64	0,42
18	99,80	206,34	0,11	2,03	0,55	0,65
17	106,62	221,49	0,11	2,69	0,42	0,80
16	113,60	236,94	0,10	3,24	0,25	0,85
15	120,75	252,64	0,09	3,66	0,07	0,81
14	128,05	268,55	0,07	3,95	0,12	0,67

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
13	135,51	284,66	0,06	4,07	0,30	0,45
12	143,11	300,94	0,05	4,04	0,45	0,19
11	150,86	317,36	0,03	3,83	0,58	0,10
10	158,75	333,91	0,01	3,46	0,66	0,38
9	166,76	350,56	0,00	2,94	0,69	0,61
8	174,90	367,30	0,02	2,26	0,66	0,77
7	183,16	384,12	0,04	1,43	0,58	0,82
6	191,53	401,00	0,06	0,48	0,44	0,76
5	200,00	417,92	0,08	0,57	0,25	0,59
4	208,56	434,87	0,10	1,69	0,02	0,33
3	217,22	451,84	0,12	2,87	0,23	0,01
2	225,92	468,82	0,15	4,07	0,50	0,39
1	234,65	485,80	0,17	5,29	0,78	0,80
0	243,41	502,78	0,19	6,51	1,06	1,22

Tabela 7.15 – Estrutura 3: momento fletor na estrutura,

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
39	4,73	3,86	4,06	4,06	4,09	4,09	4,09	8,10	10,43
38	9,98	8,75	9,26	9,26	9,32	9,32	9,33	17,07	21,99
37	15,77	14,66	15,56	15,56	15,65	15,66	15,68	26,88	34,63
36	22,08	21,55	22,93	22,93	23,06	23,07	23,09	37,48	48,31
35	28,91	29,38	31,34	31,34	31,49	31,50	31,52	48,83	62,98

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
34	36,26	38,13	40,74	40,74	40,92	40,92	40,94	60,90	78,60
33	44,12	47,76	51,10	51,10	51,29	51,30	51,31	73,65	95,11
32	52,49	58,25	62,40	62,40	62,59	62,59	62,60	87,04	112,47
31	61,37	69,55	74,58	74,58	74,76	74,76	74,77	101,04	130,65
30	70,75	81,69	87,68	87,68	87,85	87,85	87,85	115,60	149,59
29	80,63	94,69	101,70	101,70	101,85	101,85	101,85	130,71	169,25
28	91,00	108,45	116,57	116,57	116,69	116,69	116,69	146,32	189,60
27	101,86	122,95	132,22	132,22	132,32	132,32	132,32	162,40	210,58

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
18	220,85	280,77	302,67	302,67	302,68	302,68	302,68	323,69	422,03
17	236,34	300,90	324,40	324,40	324,41	324,41	324,41	342,98	447,39
16	252,26	321,45	346,58	346,58	346,60	346,60	346,60	362,45	473,01
15	268,60	342,39	369,17	369,17	369,19	369,19	369,19	382,09	498,85
14	285,37	363,67	392,13	392,13	392,16	392,16	392,16	401,88	524,91
13	302,54	385,28	415,43	415,43	415,46	415,46	415,46	421,81	551,14
12	320,12	407,19	439,05	439,05	439,07	439,07	439,07	441,85	577,52
11	338,09	429,36	462,95	462,95	462,97	462,97	462,97	461,99	604,04

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL	
	Estática		Combinação das contribuições modais							
				Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
10	356,45	451,78	487,10	487,10	487,12	487,12	487,12	487,12	482,21	630,67
9	375,19	474,42	511,49	511,49	511,50	511,50	511,50	511,50	502,50	657,40
8	394,30	497,27	536,09	536,09	536,09	536,09	536,09	536,09	522,86	684,20
7	413,77	520,29	560,88	560,88	560,88	560,88	560,88	560,88	543,26	711,06
6	433,58	543,48	585,83	585,83	585,83	585,83	585,83	585,84	563,70	737,97
5	453,73	566,82	610,94	610,94	610,94	610,94	610,94	610,94	584,16	764,92
4	474,19	590,21	636,16	636,16	636,16	636,16	636,16	636,16	604,64	791,87
3	494,95	613,66	661,48	661,48	661,49	661,49	661,49	661,49	625,12	818,83

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
2	515,88	637,11	686,86	686,86	686,88	686,88	686,88	645,60	845,79
1	536,97	660,57	712,29	712,29	712,31	712,31	712,32	666,08	872,75
0	558,18	684,03	737,73	737,73	737,78	737,78	737,78	686,56	899,71
Relação	1,00	1,23	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,23	1,61
D kNm	0,00	125,85	179,55	179,55	179,60	179,60	179,60	128,38	341,53
D %	0,00%	22,55%	32,17%	32,17%	32,18%	32,18%	32,18%	23,00%	61,19%

(ADDL – Análise Dinâmica Discreta Linear, ADSL – Análise Dinâmica Simplificada Linear, ADSNL – Análise Dinâmica Simplificada Não-Linear).

No gráfico da Figura 7.17 podem ser encontrados os resultados obtidos para a ação do vento sobre a estrutura. Nele se encontram, de baixo para cima, e nessa ordem, a análise estática, as análises dinâmicas discretas intercaladas pela análise dinâmica simplificada linear e, por último, a análise dinâmica simplificada não-linear.

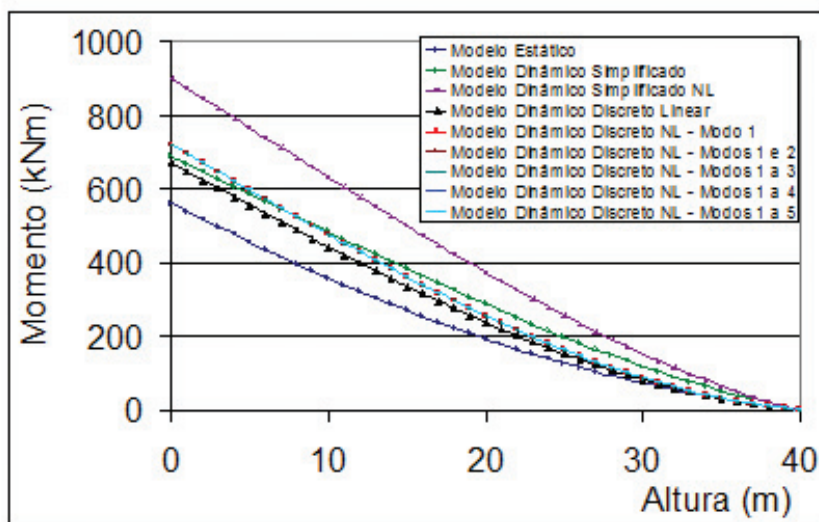


Figura 7.17 – Ação do vento na estrutura 3.

As formas modais da NBR 6123/88, a do Método dos Elementos Finitos e do método proposto constam na Figura 7.18 (a).

Uma melhor aproximação à forma modal não-linear é conseguida substituindo-se o expoente da expressão (6.6) por 1,60; tendo em vista que a curva definida com esse novo expoente oferece uma menor diferença entre seus pontos e os pontos da curva da forma modal não-linear, como pode ser observado na Figura 7.18(b).

O expoente sugerido anteriormente situa-se 6% abaixo do valor recomendado pela NBR 6123/88.

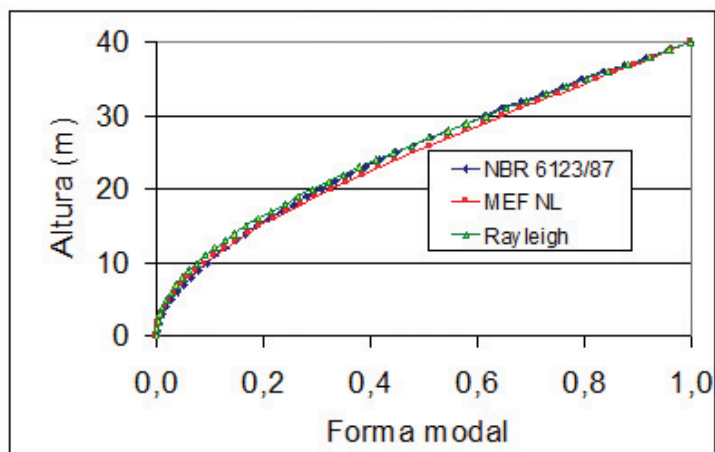
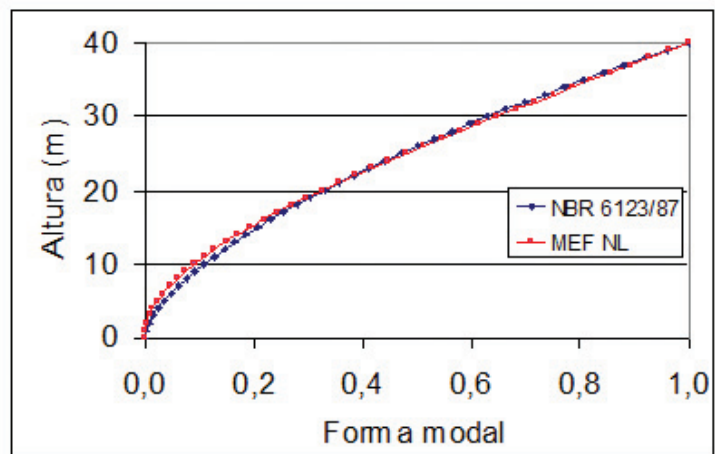
(a) expoente da forma modal: $\gamma = 1,7$ (b) expoente da forma modal: $\gamma = 1,60$

Figura 7.18 – Estrutura 3 – comparativo das formas modais: (a) usada na análise, (b) sugerida.

7.4 ESTRUTURA 4 – POSTE DE CONCRETO ARMADO DE 46 M

7.4.1 Dados e geometria

Esta é mais uma estrutura destinada ao serviço de telecomunicações. Trata-se de um poste de concreto armado com 46 metros de comprimento, incluindo a fundação e com 40 m de altura fora do solo. O poste possui seção circular vazada, com trechos retos e trechos que variam com a altura. A sua esbeltez, incluindo a fundação, é de 334, sem a fundação passa a 375. O módulo de elasticidade do concreto foi calculado com f_{ck} de 45 MPa, para o poste, e de 20 MPa para a fundação, conforme os dados recebidos e como é usual na construção dessas estruturas. Verificou-se que a condição do limite de esbeltez requerida pelo item 15.8.1 da NBR 6118/04 foi atendida.

Para poder avaliar as diferenças produzidas entre uma análise puramente linear, tanto do ponto de vista material quanto geométrico, e outra análise completamente não-linear, também em ambos os aspectos, foi adicionada à análise não-linear geométrica a não-linearidade material do concreto.

Esse tipo de estrutura é predominantemente submetida à flexão, cujo coeficiente Gama Z (γ_z), obtido pela análise dinâmica discreta linear, para esse caso, é 1,05. O coeficiente Gama Z está previsto no item 15.5.3 da NBR 6118/04 – Projeto de estruturas de concreto e fornece uma medida da importância dos esforços de segunda ordem globais, sendo calculado pela seguinte expressão:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{l,tot,d}}}, \quad (7.2)$$

onde:

$M_{l,tot,d}$ é o momento de tombamento em relação à base da estrutura,

$\Delta M_{tot,d}$ é a soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura pelos deslocamentos de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos na análise de 1ª ordem.

O item 15.7.3 da NBR 6118/03, permite usar $0,5E_{ci}I_c$ nas análises aproximadas para a consideração da não-linearidade física do concreto, para estruturas com Gama Z inferior a 1,3.

Brasil, Silva e Wahrhaftig (2007); e Silva & Brasil (2006), ao estudarem a estrutura da seção anterior, verificaram, por meio do conceito do produto de rigidez efetiva, que a relação entre a inércia efetivamente solicitada e a inércia total da seção de concreto armado é de 0,4, quando o momento fletor atuante se iguala ao momento último resistente da seção.

A rotação calculada para o correspondente deslocamento horizontal, no cálculo do coeficiente Gama Z, foi de 0,045 rd, o que permite enquadrar a cinemática da estrutura na hipótese de rotações muito pequenas, conforme as definições de Souza Lima e Venâncio Filho (1982).

Ressalta-se que a inércia da seção deve ser majorada em função da seção de aço existente, como visto no item anterior, que deixa de ser aplicada por falta de informação a respeito.

Na estrutura há um conjunto de antenas e uma plataforma fixada no topo que totalizam a massa de 1097,76 kg. Há ainda escada e guarda-corpo que conferem à estrutura uma massa adicional distribuída de 40 kg/m. As áreas de exposição ao vento computadas foram de 9,34 m²; 1,40 m²; 0,40 m²/m e 0,05 m²/m; respectivamente para as antenas; plataforma; escada, guarda-corpo, cabos e esteiramento. Os coeficientes de arrasto utilizados foram: 0,6 para o poste; escada, cabos e esteiramento 1,2; plataforma 2 e antenas 1.

O solo lateral foi representado por molas distribuídas de rigidez igual a 2668,93 kN/m³ (300 tf/m³). A massa específica adotada para o concreto armado da fundação foi de 2500 kg/m³, enquanto que o da superestrutura foi considerado de 2600 kg/m³, por ser concreto centrifugado.

Os dados da geometria da superestrutura constam na Tabela 7.16. A fundação é do tipo tubulão com as seguintes características: diâmetro da base 140 cm, diâmetro do fuste 80 cm, comprimento do fuste 580 cm e altura da base 20 cm, conforme disposto na Tabela 7.17.

Tabela 7.16 – Estrutura 4: dados e discretização da superestrutura do modelo.

cota	fext	e	cota	fext	e	cota	fext	e	cota	fext	e
(m)	(cm)	(cm)	(m)	(cm)	(cm)	(m)	(cm)	(cm)	(m)	(cm)	(cm)
40	70,00	13	30	70,00	13	20	70,00	13	10	74,00	15
39	70,00	13	29	70,00	13	19	70,00	13	9	75,50	15
38	70,00	13	28	70,00	13	18	70,00	13	8	77,00	15
37	70,00	13	27	70,00	13	17	70,00	13	7	78,50	15
36	70,00	13	26	70,00	13	16	70,00	13	6	80,00	15
35	70,00	13	25	70,00	13	15	70,00	13	5	80,00	15
34	70,00	13	24	70,00	13	14	70,00	13	4	80,00	15
33	70,00	13	23	70,00	13	13	70,00	13	3	80,00	15
32	70,00	13	22	70,00	13	12	70,00	15	2	80,00	15
31	70,00	13	21	70,00	13	11	72,50	15	1	80,00	15
									0	80,00	15

(fext = diâmetro externo, e = espessura da parede da seção transversal)

Tabela 7.17 – Estrutura 4: dados e discretização da fundação.

Diâmetro da base	140 cm
Diâmetro do fuste	80 cm
Altura do fuste	580 cm
Altura da base	20 cm

Fotografias da estrutura podem ser vistas na Figura 7.20, assim como, a geometria na Figura 7.19.

**Figura 7.19 – Estrutura 4: Fotografias.**

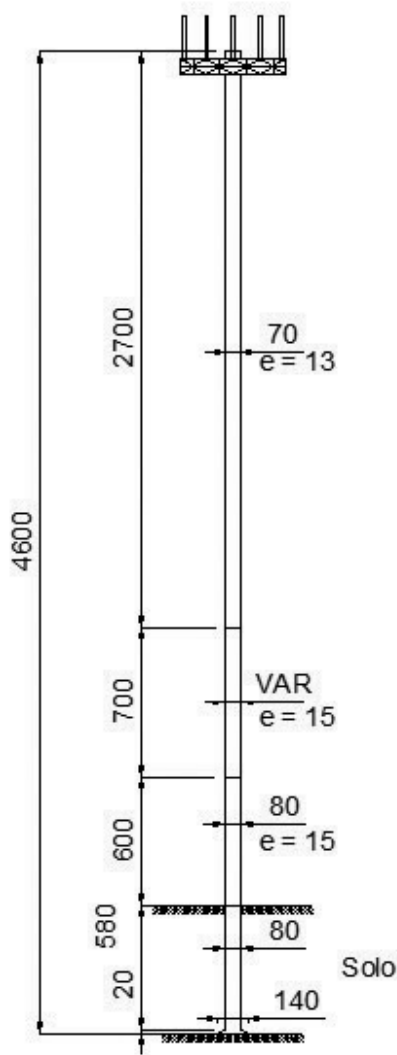


Figura 7.20 – Estrutura 4: geometria - medidas em centímetros.

7.4.2 Modelagem por Elementos Finitos

A estrutura foi modelada utilizando-se elementos de barra, com seções transversais constantes e variáveis. Foram feitos dois modelos. O primeiro, com 46 m de altura e 51 elementos, engloba, tanto as fundações quanto a superestrutura. Nesse modelo, a estrutura foi

engastada na base, tendo o solo sido representado por molas laterais distribuídas. O segundo modelo também emprega elementos de barra de seção constante e variável, porém, a estrutura foi modelada engastando-a exclusivamente na base e com 40 m de altura a partir da superfície do terreno.

Em ambos os modelos foram consideradas a massa concentrada no topo e a massa distribuída devido à escada, cabos e esteiramento. Essas massas produzem os esforços normais externos atuantes na estrutura, que também foram introduzidos no modelo. Tanto a massa própria quanto o peso próprio da estrutura, foram calculadas automaticamente pelo programa SAP2000.

A Figura 7.21 e a Figura 7.23 trazem os modelos com a discretização da estrutura. Os modos de vibração e as frequências obtidas pelo Método dos Elementos Finitos estão mostradas na Figura 7.22 e Figura 7.24.

- Modelo com 46 m de altura.

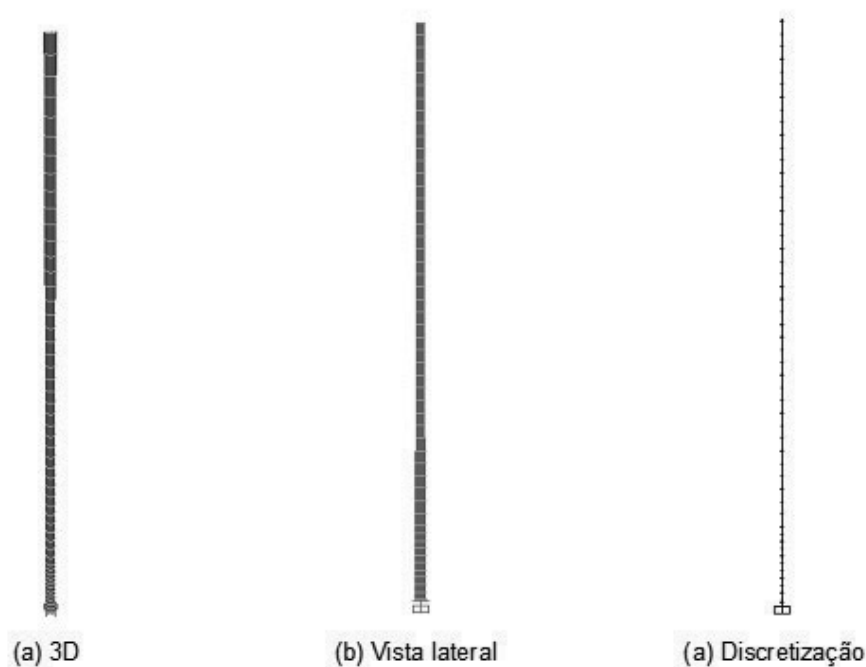
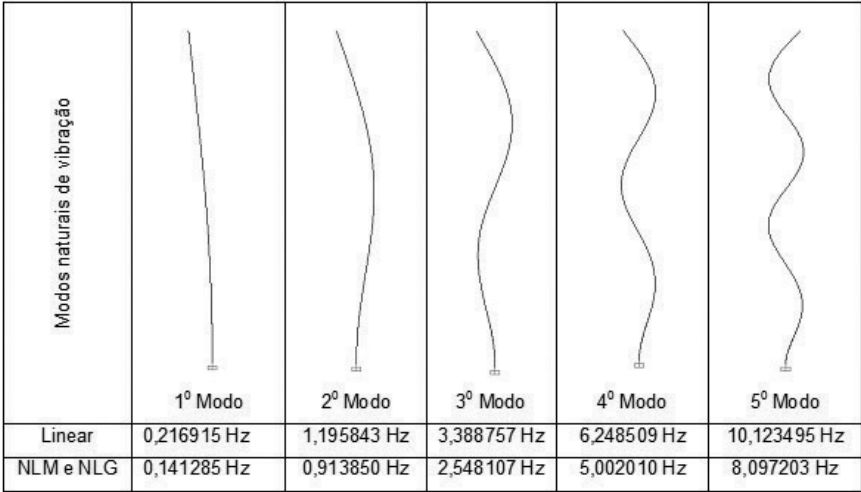


Figura 7.21 – Estrutura 4: Modelo de 46 m por Elementos Finitos.



(NLG diz respeito à não-linearidade geométrica e NLM à não-linearidade material)

Figura 7.22 – Estrutura 4: modelo de 46 m - modos naturais de vibração.

- Modelo com 40 m de altura.

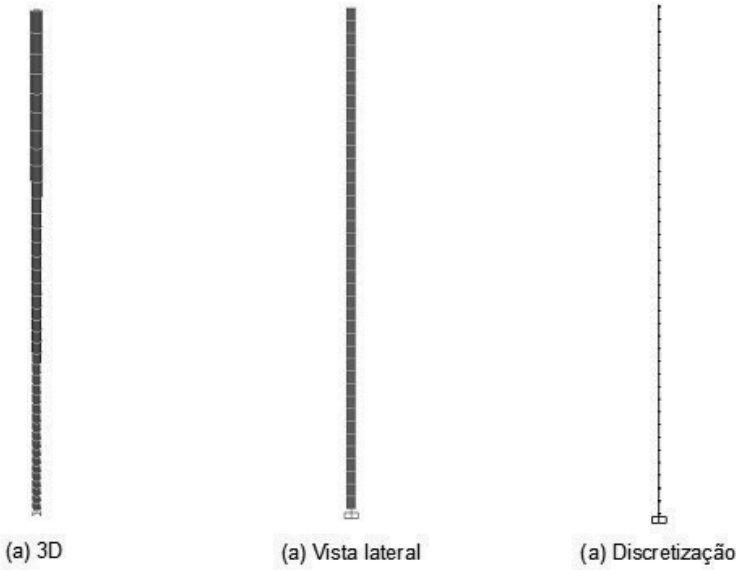
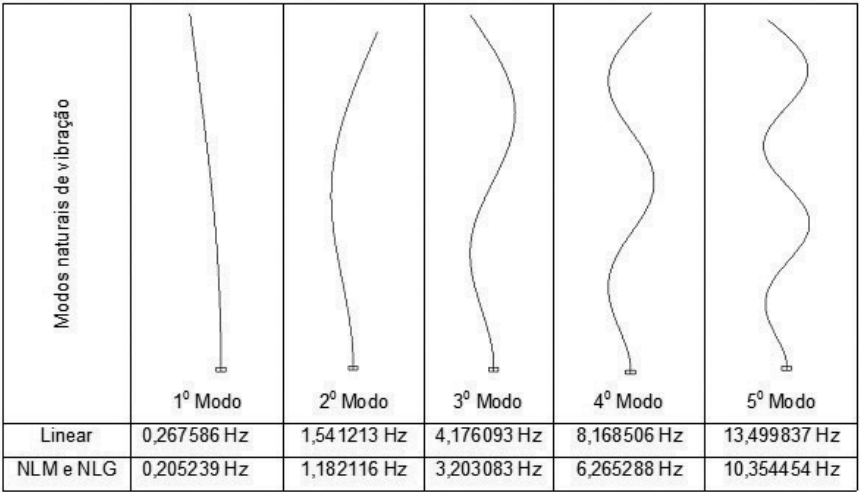


Figura 7.23 – Estrutura 4: modelo com 40 m por Elementos Finitos.



(NLG diz respeito à não-linearidade geométrica e NLM à não-linearidade material)

Figura 7.24 – Estrutura 4: modelo de 40 m - modos naturais de vibração.

7.4.3 Aplicação do método proposto

7.4.3.1 Definição dos parâmetros

Para esta estrutura devem ser observados: na fundação trechos de comprimento 0,2 m e 5,80 m, diâmetros de 140 cm, 80 cm e um trecho de diâmetro variável, módulo de elasticidade E_1 de 12522 MPa e densidade ρ_1 de 2500 kg/m³. Para a superestrutura trechos de comprimento de 6 m, 7 m e 27 m, seção circular vazada com espessuras de 15 cm e 13 cm; diâmetros externos de 80 cm, 70 cm e um trecho variável, módulo de elasticidade E de 18783 MPa e densidade do concreto ρ de 2600 kg/m³. Os módulos de elasticidade do concreto, incluindo-se a não-linearidade material, passam a ser 14901 MPa e 22352 MPa, respectivamente para a fundação e para a superestrutura.

Conforme descrito no item 7.4.1, a estrutura ainda suporta uma massa concentrada na extremidade superior, uma massa distribuída ao longo do seu comprimento e sua fundação está sujeita ação lateral do solo.

Ficam definidas as seguintes ordenas referentes às alturas na estrutura: $L_1 = 0,2\text{m}$, $L_2 = 6,0\text{m}$, $L_3 = 12,0\text{m}$, $L_4 = 19,0\text{m}$,

$L_5 = 46,0\text{m}$. Na base da fundação tem-se: $D_1 = 140\text{cm}$, $A_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2$,

$I_1 = \frac{\pi}{64} D_1^4$. No fuste $D_2 = 80\text{cm}$, $A_2 = \frac{\pi}{4} D_2^2$, $I_2 = \frac{\pi}{64} D_2^4$. O diâmetro

do trecho variável entre a base e o fuste será obtido por interpola-

ção linear fazendo-se $D_1(x) = \frac{D_2 - D_1}{L_1} x + D_1$. Assim, a área e a inér-

cia da seção serão dadas por $A_1(x) = \frac{\pi}{4} D_1(x)^2$ e $I_1(x) = \frac{\pi}{64} D_1(x)^4$.

Chamando de D_3 e e_3 o diâmetro externo e a espessura da seção inicial da superestrutura, tem-se: $D_3 = 80\text{cm}$ e $e_3 = 13\text{cm}$. Logo, o

diâmetro interno, a área e a inércia dessa seção são: $d_3 = D_3 - 2e_3$,

$A_3 = \frac{\pi}{4} (D_3^2 - d_3^2)$ e $I_3 = \frac{\pi}{64} (D_3^4 - d_3^4)$. Analogamente, D_5 , e_5 ,

d_5 , A_5 e I_5 são o diâmetro externo, a espessura, a área e a inér-

cia referente ao último segmento. Entre esses dois trechos há um de

seção variável, de espessura igual à do segmento anterior ($e_4 = e_3$),

cujos diâmetro pode ser obtido por interpolação linear de maneira

semelhante ao que foi feito na primeira variação, usando a expres-

são $D_4(x) = \frac{D_4 - D_3}{L_4 - L_3} (x - L_3) + D_3$. Portanto, $d_4(x) = D_4(x) - 2e_4$,

$A_4(x) = \frac{\pi}{64} (D_4(x)^4 - d_4(x)^4)$ e $I_4(x) = \frac{\pi}{64} (D_4(x)^4 - d_4(x)^4)$ são,

respectivamente, o diâmetro interno, a área e a inércia variável da seção do trecho correspondente.

7.4.3.2 Cálculo da massa generalizada

A massa generalizada foi obtida por meio das seguintes integrais:

$$m_1 = \int_0^{L_1} m_I(x) \phi(x)^2 dx, \text{ com } m_I(x) = \left(\frac{A_2 - A_1}{L_1} + A_1 \right) \rho_1;$$

$$m_2 = \int_{L_1}^{L_2} m_{II} \phi(x)^2 dx, \text{ com } m_{II} = A_2 \rho_1;$$

$$m_3 = \int_{L_2}^{L_3} m_{III} \phi(x)^2 dx, \text{ com } m_{III} = A_3 \rho + m_e;$$

$$m_4 = \int_{L_3}^{L_4} m_{IV}(x) \phi(x)^2 dx, \text{ com } m_{IV} = A_4(x) \rho + m_e \text{ e}$$

$$A_4(x) = \frac{\pi}{4} (D_4(x)^2 - d_4(x)^2);$$

e

$$m_5 = \int_{L_4}^L m_V \phi(x)^2 dx, \text{ com } m_V = A_5 \rho + m_e$$

Nas expressões anteriores m_e representa a massa por unidade de comprimento proveniente da escada, cabos e esteiramento, sendo $m_e = 40 \text{ kg / m}$. Designando a massa distribuída generalizada por m_R , tem-se

$$m_R = \sum_{i=1}^5 m_i$$

Com m_0 igual a 1097,76 kg, representando a massa oriunda das antenas e demais corpos fixados ao topo da estrutura. A massa generalizada total fica, então:

$$M = m_0 + m_R$$

7.4.3.3 Cálculo da rigidez generalizada

7.4.3.4 Rigidez geométrica generalizada

Para calcular a rigidez geométrica generalizada foi preciso determinar os esforços normais relativos aos trechos definidos na geometria. Do topo para a base da estrutura têm-se:

$$F_0 = m_0 g ,$$

$$F_5 = \int_{L_4}^L m_v g dx ,$$

$$F_4 = \int_{L_3}^{L_4} m_{IV}(x) g dx ,$$

$$F_3 = \int_{L_2}^{L_3} m_{III} g dx ,$$

$$F_2 = \int_{L_1}^{L_2} m_{II} g dx \text{ e}$$

$$F_1 = \int_0^{L_1} m_I(x) g dx .$$

A força normal generalizada F será obtida pela soma de suas parcelas,

$$F = \sum_{i=1}^5 F_i .$$

As rigidezes geométricas podem, por fim, serem calculadas pelas seguintes integrais:

$$K_{g5} = \int_{L_4}^L \left[F_0 + m_v (L - x) g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right]$$

$$K_{g4} = \int_{L_3}^{L_4} \left[F_0 + F_5 + m_{IV}(x)(L_4 - x)g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right]$$

$$K_{g3} = \int_{L_2}^{L_3} \left[F_0 + F_5 + F_4 + m_{III}(L_3 - x)g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right]$$

$$K_{g2} = \int_{L_2}^{L_3} \left[F_0 + F_5 + F_4 + F_3 + m_{II}(L_2 - x)g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right]$$

$$K_{g2} = \int_{L_2}^{L_3} \left[F_0 + F_5 + F_4 + F_3 + F_3 + m_I(x)(L_1 - x)g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right]$$

A rigidez geométrica generalizada final K_g é

$$K_g = \sum_{i=1}^5 K_{gi}$$

7.4.3.5 Rigidez elástica generalizada

As parcelas da rigidez elástica para os intervalos definidos na geometria são:

$$K_{01} = \int_0^{L_1} E_1 I_1(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right)^2 dx$$

$$K_{02} = \int_{L_1}^{L_2} E_1 I_2 \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right)^2 dx$$

$$K_{03} = \int_{L_2}^{L_3} E I_3 \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right)^2 dx$$

$$K_{04} = \int_{L_3}^{L_4} EI_4(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right)^2 dx$$

$$K_{05} = \int_{L_4}^L EI_5 \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right)^2 dx$$

E a rigidez elástica generalizada K_0 é, portanto:

$$K_0 = \sum_{i=1}^5 K_{0i}$$

7.4.3.6 Rigidez das molas generalizada

Para explorar todos os recursos e avaliar a potencialidade do método proposto neste trabalho de pesquisa fez-se a introdução de molas distribuídas para representar o solo lateral.

Chamando de k_s o fator de mola, cujo valor, para o caso específico, é $k_s = 2669 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$, as molas distribuídas, no primeiro e no segundo trecho do fuste, são dadas por $k_1(x) = k_s D_1(x)$ e $k_2(x) = k_s D_2$. A rigidez generalizada das molas, designada por K_m , foi calculada por meio da seguinte expressão:

$$K_m = \int_0^{L_1} k_1(x) \phi(x)^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} k_2(x) \phi(x)^2 dx$$

A rigidez generalizada K da estrutura pode então ser determinada pela soma algébrica das parcelas calculadas nos subitens precedentes, de forma que se obtém:

$$K = K_0 - K_g + K_m$$

7.4.3.7 Cálculo da frequência

Para o modelo de 46 m, o valor da frequência fundamental com a não-linearidade geométrica e material é de 0,145517 Hz. Uma análise exclusivamente linear pelo método proposto fornece uma frequência para o primeiro modo de 0,218848 Hz.

Já para o modelo de 40 m, tem-se, com ambas as não-linearidades, a frequência de 0,195532 Hz, e para o modelo exclusivamente linear, a frequência de 0,285602 Hz.

7.4.4 Ação do vento

7.4.4.1 Forças estáticas devidas ao vento

As forças estáticas devidas à ação do vento foram calculadas como descrito no item 6.1. Os parâmetros empregados na análise foram: fator topográfico $S_1 = 1,1$; fator de rugosidade do terreno S_2 correspondente à categoria IV, classe B, calculado conforme a expressão (6.2) com os parâmetros $p = 0,125$, $b = 0,85$ e $F_r = 0,98$, presentes na Tabela 6.1; fator estatístico $S_3 = 1,1$; velocidade básica do vento $V_0 = 35$ m/s e altura sobre o solo de 40 m.

7.4.4.2 Resposta dinâmica pelo modelo simplificado da NBR 6123/88

Na determinação da resposta dinâmica pelo modelo contínuo simplificado foram empregados os seguintes parâmetros: largura da edificação 0,723 m; altura da edificação de 46 m para o cálculo da frequência; categoria do terreno IV; velocidade básica 35 m/s; fatores estatísticos S_1 e S_3 iguais a 1,1.

A frequência fundamental foi obtida fazendo $T_1 = 0,02h$ (Tabela 6.4), logo $f_1 = 1,086957$ Hz. É interessante ressaltar que a frequência fundamental da estrutura, como calculada, ficou acima de 1 Hz, o que poderia induzir ao engenheiro a eximir-se do cálculo da resposta dinâmica da estrutura, conforme previsto no capítulo 9 da NBR 6123/88.

A forma modal obedeceu à expressão (6.6) com g igual a 2,7. Conhecida a velocidade de projeto e a frequência natural da estrutura, obteve-se a relação adimensional $V_p/(f_1 L)$ de 0,013, o que leva, com uma taxa crítica de amortecimento ζ igual a 0,015, a um coeficiente de amplificação dinâmica ξ de 1,131.

No cálculo da resposta dinâmica com base no modelo contínuo simplificado da NBR 6123/88, com a inclusão da não-linearidade geométrica e material, a relação adimensional $V_p/(f_1 L)$ é de 0,115. Com os ábacos da NBR 6123/88, e para o mesmo amortecimento crítico, obtém-se $\xi = 2,758$.

7.4.4.3 Resposta dinâmica pelo modelo discreto da NBR 6123/88

Calculando a frequência pelo Método dos Elementos Finitos encontra-se uma frequência para o modo fundamental de 0,216915 Hz. A relação adimensional $V_p/(f_1 L)$ passa a ser 0,075, o que conduz a um fator de amplificação dinâmica ξ de 1,702, considerando o mesmo amortecimento crítico.

Os parâmetros usados no cálculo da resposta dinâmica discreta, com a inclusão da não-linearidade geométrica e material, são descritos na análise simplificada não-linear, apresentados no item anterior. Para os modos de 2 a 5 os fatores de amplificação dinâmica, dadas as frequências apresentadas na Figura 7.22, são, respectivamente: 1,796; 1,492; 1,321; 1,321.

7.4.5 Análise dos resultados

As diferenças no valor do esforço normal entre o método proposto e o Método dos Elementos Finitos, nas posições de interesse definidas na geometria da estrutura, podem ser encontrada na Tabela 7.18.

Tabela 7.18 – Estrutura 4: esforço normal.

L	Proposto	MEF	Diferença	
(m)	(kN)	(kN)	Absoluta	(%)
46,00	10,758048	10,758048	0,0000	0,0000000
19,00	181,493643	181,493637	0,0000	0,0000034
12,00	234,667745	234,667737	0,0000	0,0000035
6,00	283,847697	283,847687	0,0000	0,0000035
0,20	355,274947	355,274935	0,0000	0,0000036
0,00	360,277934	360,277921	0,0000	0,0000036

A frequência do primeiro modo, obtida pelo método proposto, como descrito no item 7.4.3, foi de 0,145517 Hz. Quando calculada pelo Método dos Elementos Finitos essa mesma frequência é de 0,141285 Hz, o que corresponde a uma diferença de apenas 2,99%. Um cálculo simplificado pelo método proposto pôde ser feito utilizando-se as propriedades geométricas e materiais da estrutura de forma ponderada. Assim, mantendo-se a rigidez elástica das molas na formulação, encontra-se um valor de 0,115210 Hz, o que representa uma diferença de 20,83% em relação ao cálculo exato; de 18,46% em relação ao mesmo modelo pelo MEF e de 89,40% em relação à prescrição da NBR 6123/88.

No entanto, para usar diretamente a expressão (4.19) é preciso considerar a estrutura simplesmente engastada na superfície do terreno. Com essa hipótese, o cálculo simplificado pelo método proposto, incluindo a não-linearidade do concreto, conduz à frequência de 0,195532 Hz, distante 34,37% do valor anterior. Pelo MEF, com o modelo correspondente, obtém-se 0,205239 Hz, o que significa uma diferença de 4,73%, e pela NBR 6123/88 encontra-se 1,25 Hz, representando uma diferença de 84,36%.

Acompanhando os resultados já encontrados para as estruturas anteriores, os valores críticos para resposta dinâmica da estrutura sob ação do vento encontram-se na comparação entre o modelo estático e o modelo dinâmico discreto simplificado não-linear. A diferença do momento fletor na estrutura entre essas duas análises atinge o valor máximo de 53%.

Já a resposta dinâmica obtida com o modelo simplificado conduz ao momento máximo 1,18 vezes maior do que o encontrado nos cálculos com o modelo de forças estáticas.

Nas análises discretas não-lineares segue-se com uma pequena influência da contribuição dos modos de vibração acima do fundamental. Quando computadas as contribuições do vento médio e as flutuações do 1° ao 5° modos surge uma diferença de 0,01%, portanto desprezível, em relação à combinação que leva em conta apenas a ação do vento médio com a contribuição do primeiro modo de vibração.

As flutuações resultantes do primeiro modo de vibração são as que aportam maior contribuição na resposta da estrutura, representando 60% do valor total. Analisando os resultados obtidos na resposta dinâmica dos modelos discretos, linear e não-linear, observa-se uma diferença na frequência do primeiro modo de 35 % e no fator de amplificação dinâmica de 8,06%. Com isso, o momento fletor máximo na estrutura ficou acrescido de 38,99 kNm, o que equivale a uma força de 1 kN aplicada no topo. Na Tabela 7.19 constam os resultados da análise dinâmica discreta não-linear.

A diferença entre a análise discreta não-linear e análise das forças estáticas, ou modelo estático, é de 8,33%, o que reduz a capacidade da estrutura em possuir área de exposição ao vento, uma vez que seu projeto foi realizado com os esforços do vento sendo computados pelo último processo.

A Tabela 7.20 resume os valores dos momentos na estrutura devidos à ação do vento das análises descritas anteriormente, comparando-as ao modelo estático.

Tabela 7.19 – Estrutura 4: momentos da análise discreta não-linear ($\zeta = 0,015$).

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
39	6,23	2,76	0,32	0,54	0,30	0,28
38	12,78	6,72	0,76	1,28	0,69	0,62
37	19,65	11,86	1,31	2,15	1,13	0,97
36	26,84	18,12	1,95	3,11	1,56	1,28
35	34,35	25,47	2,66	4,10	1,96	1,51
34	42,16	33,86	3,43	5,07	2,28	1,62
33	50,28	43,25	4,23	5,97	2,51	1,60
32	58,71	53,61	5,06	6,77	2,61	1,44
31	67,43	64,88	5,89	7,44	2,58	1,16
30	76,44	77,04	6,70	7,93	2,42	0,78
29	85,74	90,03	7,49	8,23	2,12	0,33
28	95,33	103,82	8,24	8,32	1,72	0,15

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
27	105,19	118,36	8,93	8,19	1,22	0,61
26	115,33	133,63	9,55	7,85	0,66	1,01
25	125,74	149,57	10,10	7,29	0,07	1,31
24	136,42	166,16	10,55	6,53	0,53	1,49
23	147,35	183,34	10,91	5,59	1,09	1,52
22	158,55	201,10	11,16	4,49	1,58	1,41
21	169,99	219,37	11,30	3,27	1,97	1,17
20	181,68	238,15	11,32	1,95	2,25	0,81
19	193,60	257,38	11,22	0,58	2,39	0,38
18	205,76	277,03	11,00	0,80	2,39	0,09
17	218,15	297,07	10,65	2,16	2,24	0,55
16	230,76	317,48	10,17	3,46	1,96	0,97
15	243,59	338,21	9,57	4,67	1,55	1,29
14	256,63	359,24	8,85	5,74	1,05	1,50

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
13	269,87	380,54	8,02	6,65	0,47	1,57
12	283,31	402,09	7,06	7,36	0,15	1,49
11	296,94	423,90	5,99	7,85	0,78	1,26
10	310,75	445,93	4,80	8,09	1,39	0,91
9	324,75	468,17	3,50	8,07	1,93	0,45
8	338,92	490,59	2,09	7,77	2,38	0,06
7	353,25	513,17	0,60	7,21	2,70	0,58
6	367,75	535,90	0,99	6,38	2,87	1,06
5	382,39	558,75	2,65	5,30	2,88	1,45
4	397,18	581,71	4,38	3,99	2,72	1,72
3	412,09	604,75	6,16	2,46	2,39	1,83
2	427,07	627,86	7,99	0,76	1,90	1,78
1	442,11	651,02	9,86	1,09	1,27	1,55
0	457,20	674,22	11,76	3,06	0,51	1,15

Tabela 7.20 – Estrutura 4: momento fletor na estrutura ($\zeta = 0,015$),

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições, vento médio e						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
39	13,45	8,71	8,88	8,90	8,95	8,97	8,98	20,66	25,39
38	27,61	18,85	19,27	19,31	19,43	19,47	19,49	42,35	52,07
37	42,48	30,37	31,13	31,20	31,39	31,44	31,48	65,01	79,98
36	58,04	43,25	44,40	44,51	44,77	44,83	44,87	88,59	109,08
35	74,30	57,44	59,06	59,20	59,52	59,59	59,63	113,03	139,30
34	91,24	72,90	75,05	75,22	75,59	75,67	75,70	138,27	170,60

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear						ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições, vento médio e							
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5			
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	
33	108,87	89,59	92,34	92,54	92,94	93,01	93,04	164,27	202,93	
32	127,18	107,47	110,87	111,10	111,52	111,58	111,60	190,98	236,23	
31	146,16	126,50	130,60	130,86	131,28	131,33	131,34	218,34	270,46	
30	165,81	146,64	151,49	151,78	152,18	152,22	152,22	246,32	305,56	
29	186,12	167,83	173,50	173,81	174,18	174,20	174,20	274,86	341,50	
28	207,09	190,06	196,58	196,90	197,23	197,24	197,24	303,93	378,22	
27	228,71	213,26	220,68	221,01	221,29	221,30	221,30	333,49	415,68	
26	250,97	237,41	245,76	246,10	246,33	246,33	246,33	363,49	453,84	

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear						ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições, vento médio e							
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5			
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	
25	273,88	262,46	271,79	272,12	272,30	272,30	272,30	393,91	492,65	
24	297,41	288,38	298,71	299,04	299,16	299,16	299,17	424,70	532,07	
23	321,58	315,11	326,48	326,80	326,88	326,89	326,89	455,84	572,06	
22	346,36	342,63	355,06	355,37	355,42	355,43	355,43	487,30	612,57	
21	371,76	370,90	384,42	384,71	384,73	384,74	384,74	519,04	653,58	
20	397,76	399,87	414,50	414,77	414,78	414,79	414,79	551,03	695,04	
19	424,36	429,50	445,27	445,52	445,52	445,53	445,53	583,25	736,92	
18	451,56	459,78	476,70	476,91	476,91	476,92	476,92	615,68	779,18	

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear						ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições, vento médio e							
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5			
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	
17	479,33	490,64	508,73	508,92	508,93	508,94	508,94	648,29	821,78	
16	507,69	522,07	541,34	541,50	541,52	541,53	541,53	681,06	864,71	
15	536,60	554,02	574,49	574,62	574,65	574,66	574,66	713,98	907,92	
14	566,08	586,47	608,14	608,24	608,29	608,29	608,29	747,01	951,39	
13	596,10	619,38	642,25	642,34	642,39	642,39	642,40	780,15	995,09	
12	626,66	652,73	676,82	676,88	676,95	676,95	676,95	813,38	1039,00	
11	657,76	686,50	711,82	711,86	711,93	711,93	711,94	846,68	1083,09	
10	689,38	720,68	747,23	747,25	747,32	747,33	747,33	880,05	1127,34	

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear						ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições, vento médio e							
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5			
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	
9	721,52	755,24	783,01	783,03	783,10	783,10	783,10	913,47	1171,73	
8	754,18	790,15	819,15	819,16	819,22	819,23	819,23	946,94	1216,24	
7	787,34	825,39	855,62	855,62	855,67	855,68	855,68	980,43	1260,86	
6	821,00	860,92	892,39	892,39	892,43	892,44	892,44	1013,96	1305,57	
5	855,14	896,73	929,43	929,43	929,46	929,46	929,47	1047,50	1350,36	
4	889,75	932,68	966,70	966,72	966,73	966,74	966,74	1081,04	1395,16	
3	924,79	968,76	1004,18	1004,21	1004,22	1004,22	1004,23	1114,59	1439,98	
2	960,10	1004,91	1041,80	1041,85	1041,86	1041,86	1041,86	1148,14	1484,80	

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições, vento médio e						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
1	995,66	1041,12	1079,54	1079,61	1079,61	1079,61	1079,61	1181,69	1529,62
0	1031,42	1077,36	1117,35	1117,45	1117,46	1117,46	1117,46	1215,24	1574,44
Relação	1,00	1,04	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	1,18	1,53
D kNm	0,00	45,94	85,93	86,03	86,04	86,04	86,04	183,82	543,02
D %	0,00%	4,45%	8,33%	8,34%	8,34%	8,34%	8,34%	17,82%	52,65%

(ADDL – Análise Dinâmica Discreta Linear, ADSL – Análise Dinâmica Simplificada Linear, ADSNL – Análise Dinâmica Simplificada Não-Linear).

No gráfico da Figura 7.25 podem ser encontrados os resultados obtidos para a ação do vento sobre a estrutura. No traço mais inferior estão os valores do momento para a análise estática. Os traços mais inferiores correspondem aos valores das análises dinâmicas discretas. Logo acima se encontram as curvas das análises dinâmicas simplificadas, linear e não-linear.

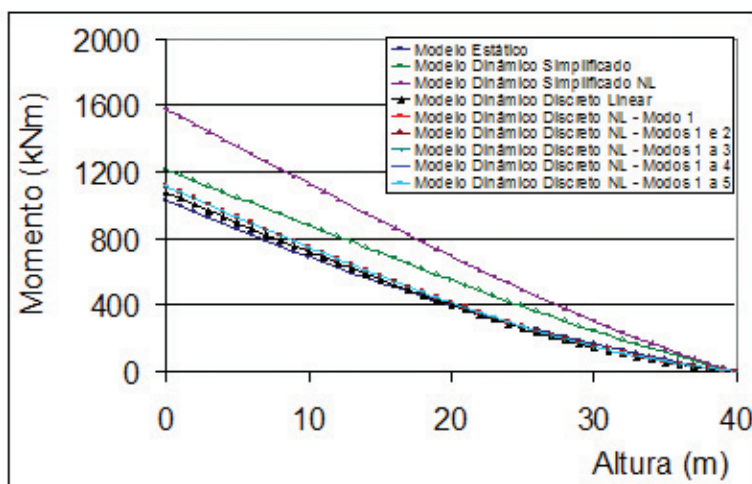


Figura 7.25 – Ação do vento na estrutura 4 ($\zeta = 0,015$).

As formas modais da NBR 6123/88, do Método dos Elementos Finitos e do Método proposto constam na Figura 7.26(a).

Uma melhor aproximação à forma modal não-linear é conseguida substituindo-se o expoente da expressão (6.6) por 1,77; tendo em vista que a curva definida com esse novo expoente oferece uma menor diferença entre seus pontos e os da curva da forma modal não-linear, como pode ser observado na Figura 7.26(b)

O expoente sugerido anteriormente distancia-se 34% do valor do recomendado pela NBR 6123/88.

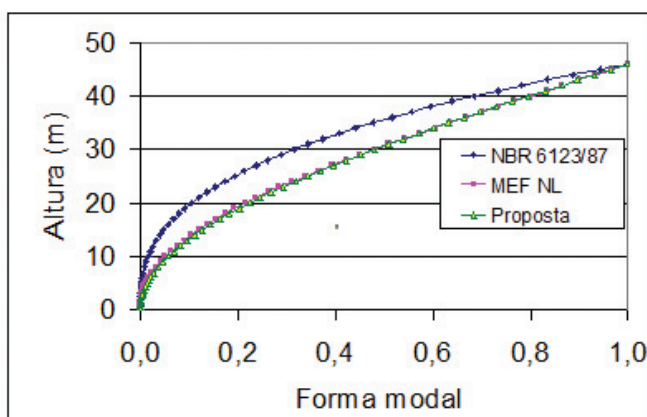
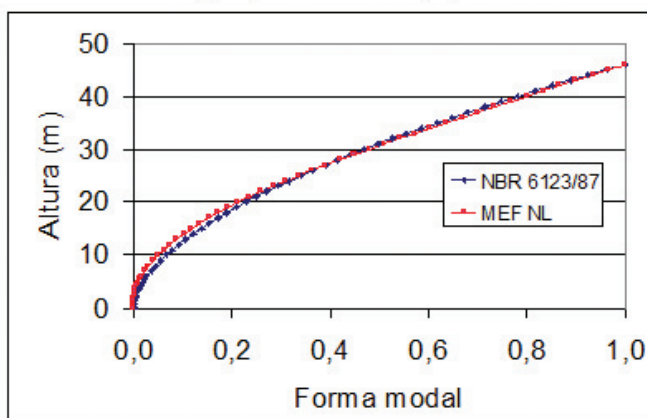
(a) expoente da forma: $\gamma=2,7$ (b) expoente da forma modal: $\gamma=1,77$

Figura 7.26 – Estrutura 4 – comparativo das formas modais: (a) usada na análise, (b) sugerida.

Ter-se-ia, entretanto, um panorama mais crítico que o anterior caso se adotasse uma razão de amortecimento crítico de 0,01. Nesse caso, o modelo dinâmico simplificado linear seria o correspondente à forma modal com expoente de 1,7 na Eq. (6.6), e essa opção levaria o período de oscilação do primeiro modo a ser calculado usando 1,5% da altura da estrutura, o que forneceria a frequência fundamental de 0,69 Hz. Nessa situação as flutuações do primeiro modo responderiam por 70% da resposta dinâmica da estrutura, quando superposta à contribuição do vento médio.

Seguindo-se com a análise para essa condição, a diferença produzida entre o valor do momento fletor máximo, do modelo discreto, do primeiro ao quinto modo, com as considerações não-lineares, tanto material quanto geométrica, chegariam a superar em 1,41 a análise das forças estáticas. E seria superior em 4,28% à análise discreta linear ao computar-se apenas o primeiro modo. Os resultados podem ser vistos na Tabela 7.22, na Tabela 7.23 e no gráfico da Figura 7.27.

Tabela 7.21 – Estrutura 4: momentos da análise discreta não-linear ($\zeta = 0,01$).

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
39	6,23	4,13	0,48	0,82	0,45	0,41
38	12,78	10,08	1,14	1,92	1,04	0,93
37	19,65	17,79	1,97	3,23	1,69	1,46
36	26,84	27,18	2,93	4,66	2,34	1,92
35	34,35	38,20	4,00	6,14	2,94	2,26
34	42,16	50,79	5,15	7,60	3,42	2,43
33	50,28	64,88	6,35	8,96	3,76	2,40
32	58,71	80,41	7,59	10,16	3,91	2,16
31	67,43	97,32	8,83	11,15	3,87	1,74
30	76,44	115,55	10,05	11,89	3,62	1,17

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
29	85,74	135,04	11,24	12,34	3,19	0,49
28	95,33	155,72	12,35	12,48	2,58	0,22
27	105,19	177,55	13,39	12,29	1,83	0,91
26	115,33	200,44	14,33	11,77	0,99	1,51
25	125,74	224,36	15,15	10,93	0,10	1,96
24	136,42	249,24	15,83	9,79	0,79	2,23
23	147,35	275,02	16,37	8,38	1,63	2,28
22	158,55	301,64	16,74	6,73	2,37	2,12
21	169,99	329,06	16,95	4,90	2,96	1,75
20	181,68	357,22	16,98	2,93	3,38	1,22
19	193,60	386,07	16,83	0,88	3,59	0,57
18	205,76	415,55	16,49	1,20	3,58	0,13
17	218,15	445,61	15,97	3,24	3,36	0,83
16	230,76	476,22	15,26	5,20	2,94	1,45
15	243,59	507,31	14,36	7,00	2,33	1,94

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
14	256,63	538,85	13,28	8,61	1,57	2,25
13	269,87	570,80	12,02	9,97	0,70	2,35
12	283,31	603,14	10,59	11,05	0,23	2,24
11	296,94	635,85	8,98	11,78	1,18	1,89
10	310,75	668,90	7,19	12,14	2,08	1,36
9	324,75	702,25	5,24	12,10	2,90	0,68
8	338,92	735,88	3,14	11,66	3,57	0,09
7	353,25	769,76	0,89	10,81	4,05	0,87
6	367,75	803,85	1,48	9,57	4,31	1,59
5	382,39	838,13	3,97	7,95	4,32	2,18
4	397,18	872,57	6,57	5,98	4,08	2,58
3	412,09	907,13	9,24	3,70	3,59	2,75
2	427,07	941,79	11,99	1,15	2,86	2,67
1	442,11	976,53	14,79	1,63	1,91	2,32
0	457,20	1011,33	17,64	4,59	0,77	1,72

Tabela 7.22 – Estrutura 4: momento fletor na estrutura ($\zeta = 0,01$),

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ASL	ASNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
39	13,45	9,97	10,23	10,26	10,34	10,36	10,38	24,93	32,03
38	27,61	21,93	22,57	22,63	22,81	22,86	22,90	51,11	65,69
37	42,48	35,82	36,96	37,06	37,35	37,42	37,48	78,46	100,91
36	58,04	51,59	53,33	53,48	53,87	53,97	54,03	106,90	137,63
35	74,30	69,18	71,62	71,82	72,30	72,41	72,48	136,38	175,79
34	91,24	88,52	91,76	92,02	92,58	92,69	92,74	166,82	215,31

z	Análise		ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ASL	ASNL
	Estática	Combinação das contribuições modais								
		Modo 1		1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5			
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
33	108,87		109,57	113,70	114,01	114,61	114,72	114,76	198,16	256,14
32	127,18		132,25	137,37	137,72	138,35	138,44	138,47	230,34	298,22
31	146,16		156,51	162,69	163,09	163,72	163,79	163,81	263,30	341,48
30	165,81		182,30	189,62	190,05	190,65	190,71	190,71	296,99	385,86
29	186,12		209,54	218,07	218,54	219,09	219,13	219,13	331,35	431,31
28	207,09		238,18	248,00	248,48	248,98	249,00	249,00	366,33	477,77
27	228,71		268,16	279,33	279,83	280,25	280,26	280,26	401,89	525,18
26	250,97		299,42	311,99	312,50	312,84	312,85	312,85	437,97	573,49

z	Análise		ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ASL	ASNL
	Estática	Combinação das contribuições modais								
		Modo 1		1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5			
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
25	273,88		331,90	345,94	346,45	346,71	346,71	346,72	474,53	622,65
24	297,41		365,55	381,10	381,60	381,79	381,79	381,80	511,54	672,59
23	321,58		400,30	417,42	417,90	418,03	418,03	418,04	548,95	723,27
22	346,36		436,10	454,83	455,29	455,36	455,37	455,38	586,72	774,63
21	371,76		472,90	493,27	493,70	493,74	493,75	493,75	624,82	826,64
20	397,76		510,64	532,68	533,08	533,09	533,11	533,11	663,22	879,23
19	424,36		549,27	573,01	573,38	573,38	573,40	573,40	701,88	932,38
18	451,56		588,73	614,21	614,53	614,53	614,55	614,55	740,78	986,02

z	Análise		ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ASL	ASNL
	Estática			Combinação das contribuições modais						
				Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)		(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
17	479,33		628,97	656,21	656,49	656,50	656,52	656,52	779,88	1040,12
16	507,69		669,94	698,96	699,20	699,23	699,24	699,24	819,17	1094,64
15	536,60		711,60	742,41	742,61	742,66	742,67	742,67	858,62	1149,54
14	566,08		753,89	786,51	786,68	786,74	786,75	786,75	898,21	1204,78
13	596,10		796,78	831,22	831,34	831,43	831,43	831,44	937,91	1260,33
12	626,66		840,23	876,50	876,59	876,69	876,69	876,70	977,72	1316,15
11	657,76		884,23	922,34	922,40	922,51	922,51	922,52	1017,61	1372,21
10	689,38		928,74	968,70	968,74	968,85	968,85	968,85	1057,57	1428,50

z	Análise		ADL	Análise Dinâmica Não-Linear							ASL	ASNL
	Estática			Combinação das contribuições modais								
				Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5				
(m)	(kNm)		(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)		
9	721,52		973,73	1015,54	1015,56	1015,66	1015,67	1015,67	1097,59	1484,97		
8	754,18		1019,16	1062,83	1062,83	1062,92	1062,93	1062,93	1137,66	1541,61		
7	787,34		1065,00	1110,52	1110,52	1110,59	1110,61	1110,61	1177,76	1598,40		
6	821,00		1111,21	1158,58	1158,58	1158,64	1158,65	1158,65	1217,89	1655,31		
5	855,14		1157,75	1206,98	1206,99	1207,02	1207,03	1207,04	1258,04	1712,33		
4	889,75		1204,49	1255,66	1255,68	1255,71	1255,71	1255,72	1298,19	1769,37		
3	924,79		1251,41	1304,59	1304,64	1304,65	1304,65	1304,66	1338,35	1826,43		
2	960,10		1298,42	1353,70	1353,77	1353,77	1353,78	1353,78	1378,51	1883,50		

z	Análise		ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ASL	ASNL
	Estática			Combinação das contribuições modais						
				Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)		(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
1	995,66		1345,52	1402,94	1403,05	1403,05	1403,05	1403,06	1418,67	1940,57
0	1031,42		1392,68	1452,28	1452,43	1452,44	1452,44	1452,44	1458,83	1997,63
Relação	1,00		1,35	1,41	1,41	1,41	1,41	1,41	1,41	1,94
D kNm	0,00		361,26	420,86	421,01	421,02	421,02	421,03	427,41	966,21
D %	0,00%		35,03%	40,80%	40,82%	40,82%	40,82%	40,82%	41,44 %	93,68%

(ADDL – Análise Dinâmica Discreta Linear, ADSL – Análise Dinâmica Simplificada Linear, ADSNL – Análise Dinâmica Simplificada Não-Linear).

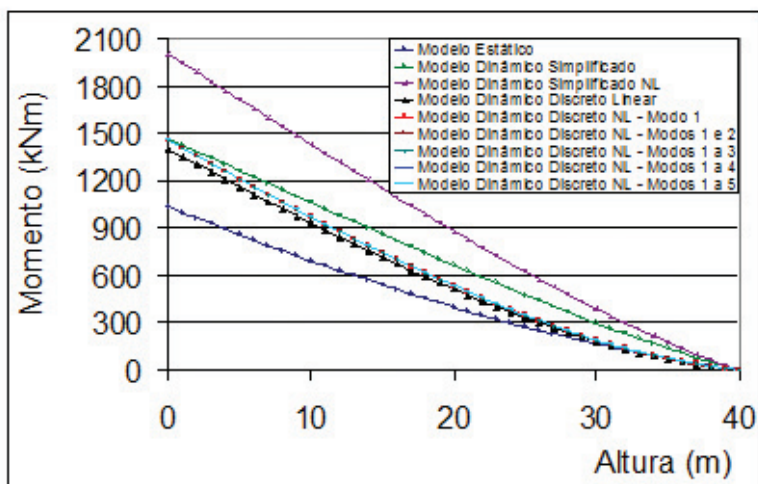
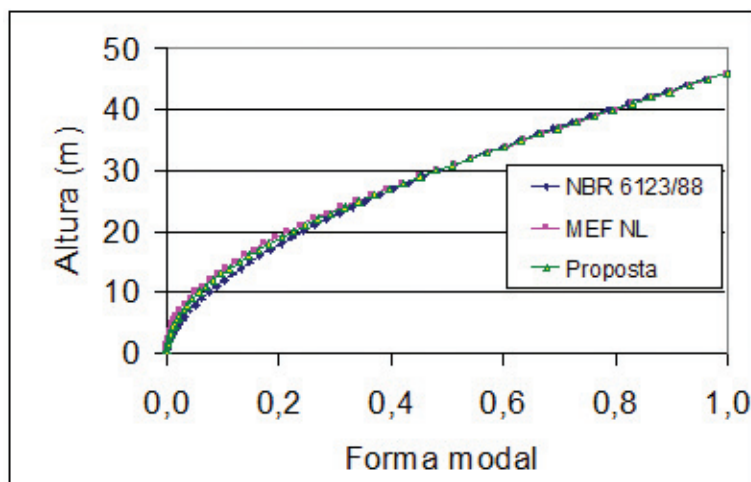


Figura 7.27 – Ação do vento na estrutura 4 ($\zeta = 0,01$).

A forma modal obtida pelo expoente da Eq. (6.6), aproxima-se bem da forma modal do modelo não-linear pelo MEF e da função proposta neste trabalho, como apresentado na Tabela 7.29.



Expoente da forma modal da NBR 6123/88: $\gamma = 1,7$

Figura 7.28 – Formas modais.

7.5 ESTRUTURA 5 – POSTE METÁLICO DE 30 M

Para a estrutura que se apresenta nesta seção, cabe destacar a investigação experimental de campo que foi realizada para a obtenção da frequência de fundamental da estrutura, realizada por meio da aquisição de uma série temporal de dados experimentais, cujo intuito foi aferir a solução proposta nesta Tese. O resultado obtido está descrito no item 7.5.2

7.5.1 Dados e geometria

Esta estrutura é um poste metálico troncônico com diâmetro superior igual a 52 cm e diâmetro inferior de 82 cm. Destina-se ao suporte do sistema irradiante do sinal de telefonia móvel celular. Possui 30 metros de altura e seção circular vazada de diâmetro externo (ϕ_{ext}) e espessura (e) variáveis com a altura. Está instalada na cidade de Aracajú, Sergipe.

Os dados da estrutura foram coletados no campo, tendo os diâmetros sido medidos com trena metálica e a espessura do copo com aparelho de ultra-som. Para um mesmo tramo vertical foram feitas diversas medidas da espessura, obtendo-se uma média relativa ao trecho. A união dos segmentos do corpo do poste é formada pelo encaixe sucessivo, por sobreposição e aparafusamento, das partes metálicas. Cada trecho sobreposto possui 20 cm de extensão. Na região dessas emendas, a espessura da seção transversal corresponde à soma das medidas feitas fora da zona de sobreposição. Na Tabela 7.23 e na Figura 7.29 podem ser encontradas as propriedades e a discretização utilizadas para modelar a estrutura. A esbeltez da estrutura é de 256.

A estrutura suporta duas plataformas de trabalho; uma situada a 20 m de altura e a outra na extremidade superior. Há ainda um conjunto de antenas localizadas a 27 m da base e fixadas ao corpo do poste por meio de suportes metálicos. As plataformas e os suportes obedecem à composição presente na Tabela 7.24, onde ϕ designa o diâmetro da plataforma.

Tabela 7.23 – Estrutura 5: dados da estrutura e discretização do modelo.

cota	fext	e	cota	fext	e	cota	fext	e
(m)	(cm)	(cm)	(m)	(cm)	(cm)	(m)	(cm)	(cm)
30,00	52,00	0,60	20,00	62,00	0,60	10,00	72,00	0,76
29,00	53,00	0,60	19,00	63,00	0,60	9,00	73,00	0,76
28,00	54,00	0,60	18,10	63,90	0,60	8,00	74,00	0,76
27,00	55,00	0,60	17,90	64,10	0,60	7,00	75,00	0,76
26,00	56,00	0,60	17,00	65,00	0,60	6,10	75,90	0,76
25,00	57,00	0,60	16,00	66,00	0,60	5,90	76,10	0,76
24,10	57,90	0,60	15,00	67,00	0,60	5,00	77,00	0,76
23,90	58,10	0,60	14,00	68,00	0,60	4,00	78,00	0,76
23,00	59,00	0,60	13,00	69,00	0,60	3,00	79,00	0,76
22,00	60,00	0,60	12,10	69,90	0,60	2,00	80,00	0,76
21,00	61,00	0,60	11,90	70,10	0,76	1,00	81,00	0,76
						0,00	82,00	0,76

Tabela 7.24 – Estrutura 5: composição da plataforma e suporte.

Plataforma f = 2,5 m	Massa (kg)
Chapa piso	116
Chapa lateral piso	46
Perfil U 150x12,2 – Guarda-Corpo	96
Cantoneira L 102x76x6,4 – Guarda-Corpo	68
Cantoneira L 102x76x6,4 - Transversais – Guarda-Corpo	77
Cantoneira L102x76x6,4 – Suporte do piso	43
Anel inferior da plataforma	14
Emendas	3
Parafusos do Guarda-Corpo	5
Cantoneira L 152x102x9,5 - Suporte inferior da plataforma	33
Total =	500
Conjunto suporte para antena	Massa (kg)
Tubo f = 1' (25,4 mm)	6
Cantoneira (L203x152x19)	50
Grampos U (f =1')	1
Chapa de topo	1
Total =	58

O levantamento feito no local revelou a presença de antenas de micro-ondas (MW) e de rádio-frequência (RF), que estão relacionadas juntamente com os demais acessórios da estrutura na Tabela 7.25. As informações relativas às antenas foram retiradas do catálogo do fabricante.

Todos os dispositivos mencionados anteriormente representam massas e forças concentradas adicionais à da estrutura, compostas conforme disposto na Tabela 7.25. A Tabela 7.26 apresenta os parâmetros estruturais e dos dispositivos existentes para o cálculo da ação do vento, o peso específico do material da estrutura, o carregamento axial distribuído e o localizado.

Tabela 7.25 – Estrutura 5: composição das massas nodais localizadas.

Dispositivo	Massa	1ª Plat (20m)		Suporte (27m)		2ª Plat (30m)	
	(kg/ unid)	Qtde	(kg)	Qtde	(kg)	Qtde	(kg)
Antena RF 2,6 m	19	2	37	3	56	1	19
Antena RF 1,23 m	4	1	4	0	0	1	4
Antena MW	19	2	38	0	0	0	0
Plataforma	500	1	500	0	0	1	500
Suporte para antenas	58	6	345	3	173	6	345
tubos $\phi = 1'$ (25,4 mm) (Balizador)	6	0	0	0	0	1	6
tubos $\phi = 3/4'$ (19 mm) (PR)	6	0	0	0	0	1	6
Total (kg) =			924		228		880

(PR = Pára-raios, MW = Micro-ondas, RF = rádio-frequência, Plat. = Plataforma)

Tabela 7.26 – Estrutura 5: carregamento axial localizado e características dos dispositivos.

Dispositivo	Área frontal	Ca	Cota	Peso, peso distribuído ou peso
Poste	Variável	0,6	de 0 a 30 m	77 kN/m ³
Escada	0,05 m ² /m	2,0	de 0 a 30 m	0,15 kN/m
Cabos	0,15 m ² /m	1,2	de 0 a 30 m	0,25 kN/m
1ª Plataforma	2,60 m ²	2,0	20 m	9,06 kN
Antenas da 1ª plataforma	1,99 m ²	1,0		
Antenas intermediárias	2,11 m ²	1,0	27 m	2,24 kN
Suportes intermediários	0,56 m ²	2,0		
2ª Plataforma	2,36 m ²	2,0	30 m	8,63 kN
Antenas da 2ª plataforma	0,90 m ²	1,0		

(Ca = Coeficiente de arrasto)

A geometria da estrutura e os dispositivos existentes foram esquematicamente representados na Figura 7.29. Da Figura 7.30 à Figura 7.36 são apresentadas imagens fotográficas do corpo, do carregamento instalado e do entorno da estrutura. A Figura 7.29 mostra detalhe da base da estrutura.

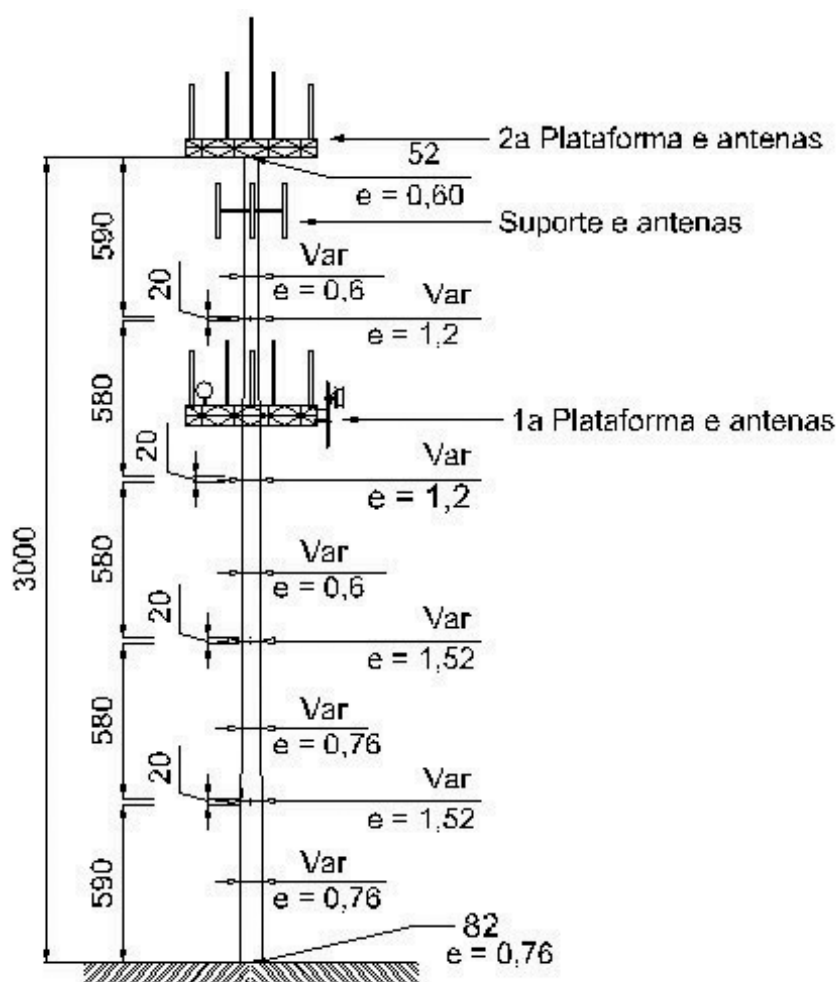


Figura 7.29 – Estrutura 5: geometria - Medidas em centímetro.

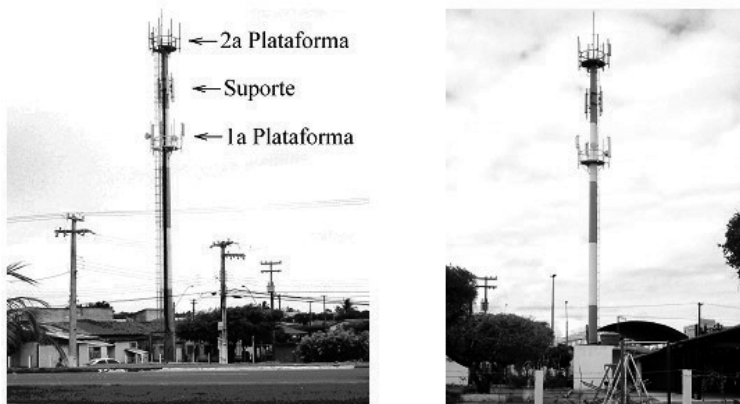


Figura 7.30 – Estrutura 5. Vista fotográfica geral.

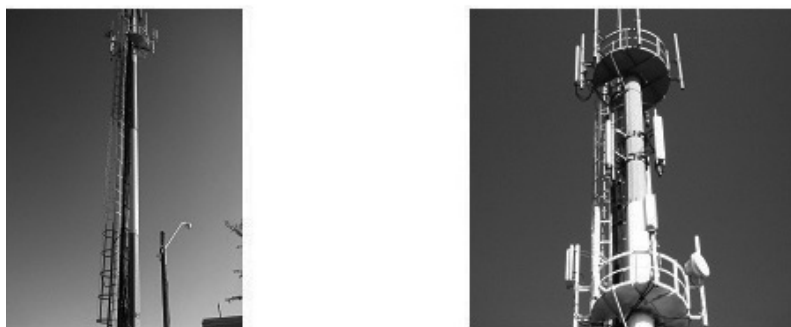


Figura 7.31 – Estrutura 5: Corpo da estrutura e carregamento.



(a) Micro-ondas



(b) Rádio Frequência

Figura 7.32 – Estrutura 5: detalhe das antenas instaladas.



(a) Vista para o Leste



(b) Vista para o norte



(c) Vista para o Oeste



(d) Vista para o Sul

Figura 7.33 – Estrutura 5: entorno da estrutura.



Figura 7.34 – Estrutura 5: detalhe da base.

7.5.2 Investigação experimental da frequência natural de vibração da estrutura

A investigação da frequência natural da estrutura, sob excitação ambiente, foi realizada utilizando acelerômetro do tipo piezoresistivo, fabricado pela Bruel & Kjaer, com resposta DC, com sensibilidade de 1021 mV/g, com cabo integrado, capaz de medir acelerações entre ± 2 g. Esse dispositivo foi fixado à superfície da extremidade superior do poste, conforme se vê na Figura 7.35.

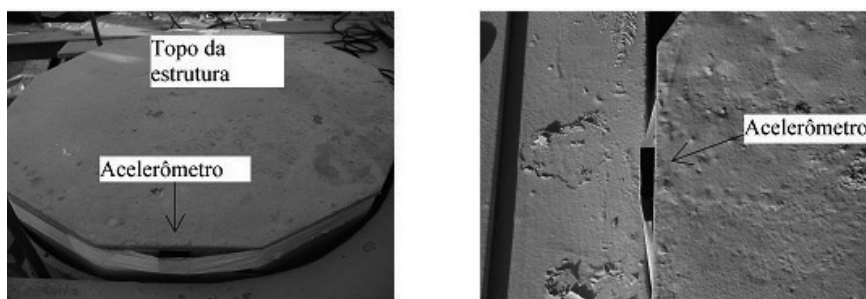


Figura 7.35 – Estrutura 5: instrumentação.

A aquisição dos dados foi feita pelo sistema ADS2000, AdDados, da Lynx informática, que estava conectado a um microcomputador portátil para gravação dos sinais. Os equipamentos foram conduzidos ao alto do poste, onde foram depositados sobre a superfície da plataforma de trabalho, conforme pode ser visto na Figura 7.36, e protegidos das intempéries. O sistema de energia elétrica da estação serviu como fonte para alimentar os equipamentos eletrônicos.



Figura 7.36 – Estrutura 5: sistema instalado na estrutura para aquisição dos dados.

A aquisição dos sinais foi realizada com taxa de 50 Hz e teve duração de 40 h 33 min 22 s, iniciando-se no dia 11 de dezembro de 2007, às 18 h 30 min 23 s. A série temporal da aceleração pode ser vista na Figura 7.37.

Percebeu-se que a estrutura estava sob suficiente excitação do vento, tendo inclusive ocorrido chuva e ventos fortes durante o período em que foi instrumentada.

A frequência fundamental da estrutura foi obtida a partir da série temporal da aquisição dos sinais pela Transformada de Fourier (FFT) no programa AqDAnalysis 7.02. O resultado obtido foi de 0,53 Hz. Na Figura 7.38 encontra-se a análise do sinal no domínio da frequência.

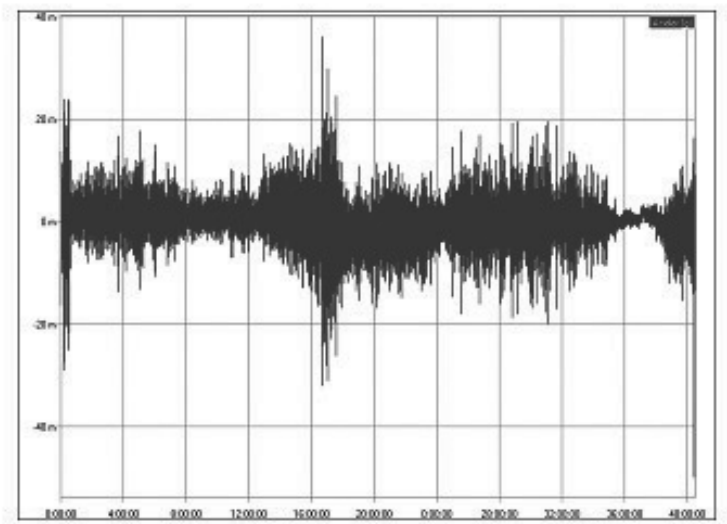


Figura 7.37 – Estrutura 5: série temporal de aceleração.

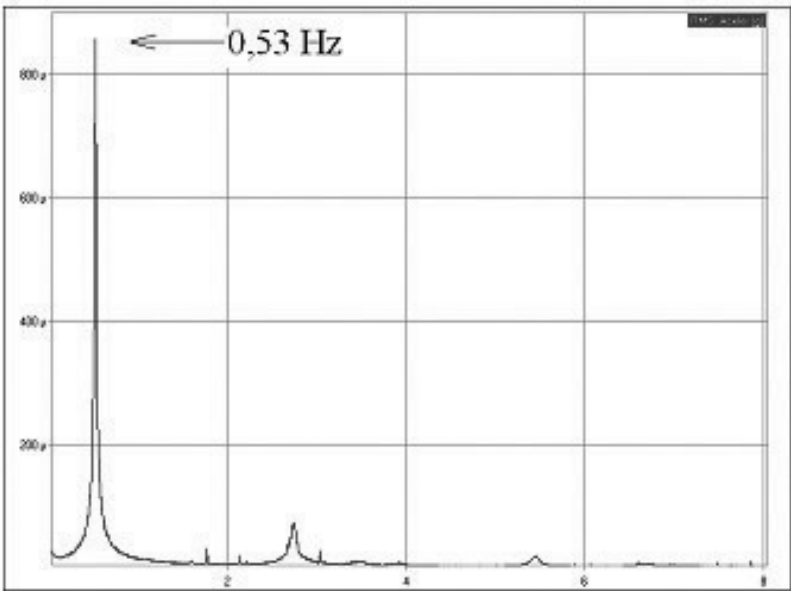
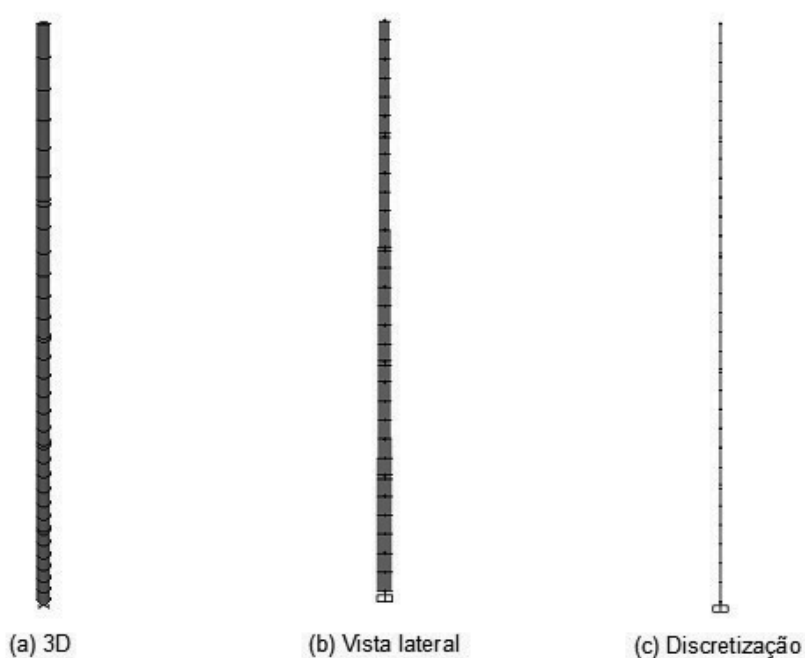


Figura 7.38 – Estrutura 5: sinal no domínio da frequência.

7.5.3 Modelagem por Elementos Finitos

A modelagem por Elementos Finitos acompanhou os critérios já utilizados nas estruturas precedentes. No entanto, há um importante detalhe que aparece na discretização deste modelo. As regiões de ligações foram tratadas como elementos de barra de seção variável de 0,2 m de comprimento e espessura correspondente à soma das espessuras das seções que estavam imediatamente acima e abaixo da zona de emenda.

Na Figura 7.39 se encontra o modelo em Elementos Finitos, com uma vista tridimensional, uma lateral e a discretização da estrutura que conta com 40 elementos de barra. Os modos de vibração e as frequências obtidas pelo Método dos Elementos Finitos são as constantes na Figura 7.40.



(NLG = Não-Linearidade Geométrica)

Figura 7.39 – Estrutura 5: modelo por Elementos Finitos.

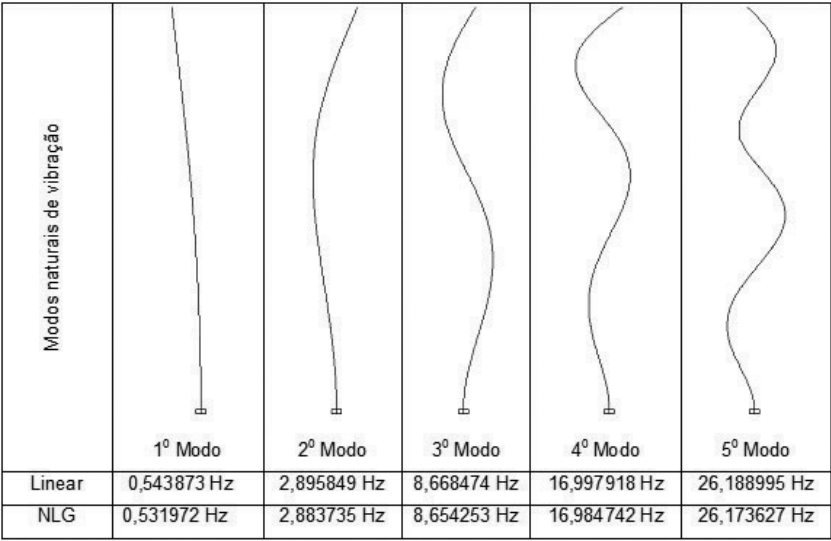


Figura 7.40 – Estrutura 5: modos naturais de vibração.

7.5.4 Aplicação do método proposto

7.5.4.1 Definição dos parâmetros

Os dados para aplicação do método são:

- módulo de elasticidade: $E = 205 \text{ GPa}$,
- densidade do aço: $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$,
- massa concentrada no topo: $m_0 = 880 \text{ kg}$;
- massa concentra a 27 m da altura: $m_{10} = 228 \text{ kg}$;
- massa concentrada a 20 m de altura: $m_{11} = 924 \text{ kg}$;
- massa distribuída: $m_e = 40 \text{ kg/m}$.

Em toda a estrutura o diâmetro externo varia linearmente com a altura seguindo a expressão

$$D(x) = \frac{D_9 - D_0}{L} x + D_0$$

onde D_9 é o diâmetro da extremidade superior e D_0 é o diâmetro da extremidade inferior.

As ordenadas e as espessuras das seções, dos trechos de interesse definidos na geometria são as seguintes.

Na base, quando $x = 0$, tem-se: $D_0 = 82 \text{ cm}$, $e_1 = 0,76 \text{ cm}$.

No primeiro segmento, da base do poste até $L_1 = 5,90 \text{ m}$, tem-se $e_1 = 0,76 \text{ cm}$.

No segundo segmento, entre L_1 e $L_2 = 6,10 \text{ m}$, define-se $e_2 = 1,52 \text{ cm}$.

No terceiro segmento, entre L_2 e $L_3 = 11,90 \text{ m}$, tem-se $e_3 = 0,76 \text{ cm}$.

No quarto segmento, entre L_3 e $L_4 = 12,10 \text{ m}$, tem-se $e_4 = 1,52 \text{ cm}$.

No quinto segmento, entre L_4 e $L_5 = 17,90 \text{ m}$, tem-se $e_5 = 0,60 \text{ cm}$.

No sexto segmento, entre L_5 e $L_6 = 18,10 \text{ m}$, tem-se $e_6 = 1,20 \text{ cm}$.

No sétimo segmento, entre L_6 e $L_7 = 23,90 \text{ m}$, tem-se $e_7 = 0,60 \text{ cm}$.

No oitavo segmento, entre L_7 e $L_8 = 24,10 \text{ m}$, tem-se $e_8 = 0,60 \text{ cm}$.

No nono segmento, entre L_8 e $L = 30,00 \text{ m}$, tem-se $e_9 = 0,60 \text{ cm}$.

As propriedades geométricas, como diâmetro interno, área e momento de inércia das seções, foram obtidas com as seguintes expressões gerais:

$$d_i(x) = D(x) - 2e_i$$

$$A_i(x) = \frac{\pi}{4} (D(x)^2 - d_i(x)^2)$$

$$I_i(x) = \frac{\pi}{64} (D(x)^4 - d_i(x)^4)$$

onde i caracteriza o segmento analisado.

7.5.4.2 Cálculo da massa generalizada

A massa generalizada oriunda das massas distribuídas de cada segmento, foi calculada fazendo-se

$$m_i = \int_{L_{i-1}}^{L_i} m_l(x) \phi(x)^2 dx, \text{ com } m_l(x) = A_i(x) \rho + m_e$$

com $i, i = 1, 2 \dots 9$.

E a generalização das massas concentradas foi obtida por

$$m_{10} = m_x \phi(x_{10})^2, \text{ com } x_{10} = 27,00 \text{ m};$$

$$m_{11} = m_{x1} \phi(x_{11})^2, \text{ com } x_{11} = 20,00 \text{ m};$$

A massa distribuída generalizada fica então

$$m_R = \sum_{i=1}^{11} m_i$$

E a massa generalizada total

$$M = m_0 + m_R$$

7.5.4.3 Cálculo da rigidez generalizada

Rigidez geométrica generalizada

Os esforços normais concentrados são dados por:

$$F_0 = m_0 g,$$

$$F_{11} = m_{XI} g$$

$$F_{10} = m_X g$$

E as forças normais devidas a massa distribuída dos segmentos, por

$$F_i = \int_{L_{i-1}}^{L_i} m_i(x) g dx$$

A força normal generalizada é, então:

$$F = \sum_{i=0}^{11} F_i.$$

Com isso as parcelas das rigidezes geométricas foram calculadas pelas seguintes expressões:

$$K_{g9} = \int_{L_8}^L \left[F_0 + F_{10} + m_{IX}(x)(L-x)g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right],$$

$$K_{g8} = \int_{L_7}^{L_8} \left[F_0 + F_{10} + F_9 + m_{VIII}(x)(L_8-x)g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right],$$

que se repete para os demais segmentos, de forma que se pode escrever

$$K_{gi} = \int_{L_{i-1}}^{L_i} \left[F_0 + \sum_{i=1}^{10} F_{i+1} + m_l(x)(L_i - x)g \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right)^2 \right] dx$$

Assim, a rigidez geométrica generalizada total é:

$$K_g = \sum_{i=1}^{11} K_{gi}$$

7.5.4.3.1 Rigidez elástica generalizada

Analogamente à rigidez geométrica, calcularam-se as parcelas das rigidezes convencionais generalizadas por

$$K_{oi} = \int_{L_{i-1}}^{L_i} EI_i(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right)^2 dx$$

e a rigidez elástica generalizada pelo somatório

$$K_0 = \sum_{i=1}^{11} K_{oi}$$

7.5.5 Cálculo da frequência

As frequências do primeiro modo de vibração da estrutura calculadas pelo método proposto neste trabalho são: modelo linear = 0,550271 Hz e modelo não-linear = 0,537826 Hz.

7.5.6 Ação do vento

7.5.6.1 Forças estáticas devidas ao vento

As anotações existentes na placa de identificação da estação indicam os parâmetros empregados na determinação das forças estáticas devidas a ação do vento e utilizados no dimensionamento da

estrutura, que são: fator topográfico $S_1 = 1,0$; fator de rugosidade do terreno S_2 correspondente à categoria II, classe B; fator estatístico $S_3 = 1,1$; velocidade básica do vento $V_0 = 30$ m/s.

7.5.6.2 Resposta dinâmica pelo modelo simplificado da NBR 6123/88

Os parâmetros usados na determinação da resposta dinâmica pelo modelo contínuo simplificado da NBR 6123/88 foram os seguintes: largura da edificação 0,670 m, altura da edificação 30 m, categoria do terreno, velocidade básica do vento e fatores estatísticos como descrito no item anterior.

Para o cálculo da frequência recorreu-se à recomendação contida na Tabela 6.4 (Tabela 19 da NBR 6123/88). Com a expressão $0,29\sqrt{h} - 0,4$ obtém-se uma frequência do modo fundamental igual a 0,841471 Hz, um resultado distante 35,37% do calculado linearmente pelo Método dos Elementos Finitos e distante 36,08% do cálculo desenvolvido pelo método proposto. Com esse resultado, a relação adimensional $V_p/(f_1 L)$ torna-se igual a 0,010. Adotando a taxa de amortecimento crítico ζ igual a 0,015 chega-se a um coeficiente de amplificação dinâmica ξ de 1,926. A forma de vibração do primeiro modo sugerida pela NBR 6123/88 tem, para a correspondente expressão da frequência, o expoente da expressão (6.6) igual 1,7.

A segunda avaliação, usando o modelo simplificado da NBR 6123/88, feita sob não-linearidade geométrica, teve como ponto de partida a frequência de 0,531970 Hz. Com isso, a relação adimensional $V_p/(f_1 L)$ fica em 0,024, o que conduziu a um fator de amplificação dinâmica $\xi = 2,180$.

7.5.6.3 Resposta dinâmica pelo modelo discreto da NBR 6123/88

A resposta dinâmica pelo modelo dinâmico discreto linear foi calculada com base na frequência e parâmetros citados no item precedente. Para esse procedimento de cálculo, a relação adimensional $V_p/(f_1 L)$ foi de 0,023 e o coeficiente de amplificação dinâmica de 2,158.

O cálculo da resposta dinâmica com a inclusão da não-linearidade geométrica foi feito levando-se em conta as contribuições até o 5º modo de vibração. Para o primeiro modo a relação adimensional e o coeficiente de amplificação dinâmica constam no item anterior. Para os modos de 2 a 5, a relação adimensional e o coeficiente de amplificação dinâmica são, respectivamente, 0,004 e 1,634; 0,001 e 1,508; 0,001 e 1,463; 0,0005 e 1,444.

7.5.7 Análise dos resultados

Os esforços normais na estrutura pelo método proposto e pelo Método dos Elementos Finitos podem ser vistos na Tabela 7.27.

Tabela 7.27 – Estrutura 5: esforço normal.

L	Proposto	MEF	Diferença	
(m)	(kN)	(kN)	Absoluta	(%)
30,00	8,624000	8,624000	0,0000	0,000000
24,10	17,820587	17,820587	0,0000	-0,000001
23,90	18,228409	18,228409	0,0000	-0,000001
18,10	34,636570	34,636570	0,0000	-0,000001
17,90	35,079190	35,079190	0,0000	-0,000001
12,10	42,936723	42,936724	0,0000	-0,000001
11,90	43,518196	43,518196	0,0000	-0,000001
6,10	53,486859	53,486860	0,0000	-0,000001
5,90	54,112409	54,112410	0,0000	-0,000001
0,00	64,908508	64,908509	0,0000	-0,000001

A frequência do primeiro modo de vibração obtida pelo método proposto, sem a consideração da não-linearidade geométrica, foi de 0,550271 Hz e pelo Método dos Elementos Finitos, de 0,543873 Hz, apresentando uma diferença de 1,18%. Pela expressão adotada da NBR 6123/88, essa frequência corresponde a 0,841471 Hz.

A diferença entre a frequência fundamental do modelo não-linear, calculada pelo método proposto de 0,537826 Hz, e a obtida pelo MEF de 0,531972 Hz, é de 1,10%. Ambas as frequências coincidem, com a frequência medida experimentalmente, o que valida a aplicação da solução proposta nesta Tese.

Verificou-se bom ajustamento da forma de vibração adotada pelo método proposto e a do modelo não-linear do MEF.

A frequência calculada pela aproximação do método proposto, usando a expressão (4.21), foi de 0,408091 Hz, apresentando uma diferença de 24,12 % em relação ao valor exato do método e de 36,08% em relação ao resultado obtido segundo a expressão sugerida pela NBR6123/88.

Os resultados críticos da ação do vento são encontrados na comparação entre a análise estática e a análise pelo modelo dinâmico discreto não-linear, quando a análise não-linear supera a análise estática em 1,56 vezes (55,69 %).

A análise dinâmica discreta linear fica 54,67% acima da análise estática. Já as resposta dinâmicas obtida com os modelos simplificados guardam entre si uma diferença de 8,47%, com superioridade da análise não-linear.

Comparando os resultados obtidos pelas análises discretas não-lineares, verifica-se novamente uma pequena influência da contribuição dos modos de vibração que estão acima do fundamental, resultando uma diferença de 0,01% entre a resposta dinâmica da estrutura com a consideração exclusiva do primeiro modo e a combinação que inclui também as contribuições do 2º modo.

Na resposta dinâmica da estrutura com superposição das contribuições do vento médio com as flutuações devidas ao primeiro modo de vibração, as flutuações do 1º modo são responsáveis por 66% da resposta dinâmica total da estrutura, conforme pode ser visto na Tabela 7.28.

A diferença entre a frequência fundamental do modelo linear e a do modelo não-linear, de 2,19%, elevou o coeficiente de amplificação dinâmica em 1,02%. Com isso, o momento fletor máximo na estrutura foi acrescido de 4,99 kNm, uma diferença de 0,65%.

A Tabela 7.29 traz o valor dos momentos máximos devidos à ação do vento das análises realizadas, comparando-as ao modelo estático.

Tabela 7.28 – Estrutura 5: momentos fletores da análise discreta não-linear.

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
30,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
29,00	2,61	6,78	0,47	0,26	0,28	0,08
28,00	5,46	14,35	0,99	0,53	0,56	0,16
27,00	8,55	22,70	1,54	0,79	0,79	0,21
26,00	13,27	33,15	2,13	0,97	0,81	0,18
25,00	18,23	44,29	2,71	1,11	0,74	0,11
24,10	22,91	54,88	3,23	1,20	0,61	0,03
23,90	23,98	57,31	3,34	1,21	0,57	0,01
23,00	28,98	68,57	3,82	1,23	0,35	0,08

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
22,00	34,77	81,64	4,32	1,20	0,06	0,17
21,00	40,80	95,23	4,77	1,11	0,26	0,24
20,00	47,07	109,32	5,16	0,97	0,58	0,29
19,00	56,06	127,10	5,03	0,56	0,65	0,16
18,10	64,37	143,45	4,86	0,18	0,68	0,03
17,90	66,25	147,13	4,81	0,09	0,68	0,01
17,00	74,86	163,91	4,55	0,29	0,64	0,11
16,00	84,66	182,88	4,20	0,70	0,55	0,22
15,00	94,69	202,16	3,77	1,06	0,39	0,28
14,00	104,95	221,71	3,26	1,37	0,20	0,30
13,00	115,44	241,50	2,69	1,60	0,02	0,26
12,10	125,07	259,50	2,12	1,74	0,22	0,19
11,90	127,24	263,52	1,99	1,76	0,27	0,17

z	Vento Médio	Flutuações				
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
11,00	137,16	281,75	1,35	1,79	0,45	0,06
10,00	148,40	302,18	0,57	1,71	0,61	0,08
9,00	159,84	322,77	0,26	1,53	0,72	0,21
8,00	171,50	343,49	1,15	1,24	0,75	0,32
7,00	183,36	364,31	2,07	0,85	0,71	0,38
6,10	194,20	383,11	2,93	0,44	0,60	0,39
5,90	196,64	387,30	3,12	0,33	0,57	0,38
5,00	207,72	406,17	4,01	0,16	0,38	0,32
4,00	220,21	427,18	5,01	0,76	0,12	0,20
3,00	232,88	448,22	6,03	1,40	0,19	0,03
2,00	245,70	469,28	7,06	2,06	0,53	0,17
1,00	258,66	490,34	8,08	2,73	0,89	0,39
0,00	271,74	511,40	9,11	3,41	1,25	0,61

Tabela 7.29 – Estrutura 5: momentos fletores na estrutura.

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
30,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
29,00	4,61	9,22	9,29	9,30	9,31	9,31	9,31	9,10	9,97
28,00	9,65	19,46	19,61	19,64	19,65	19,66	19,66	19,02	20,83
27,00	15,13	30,70	30,93	30,98	31,00	31,01	31,01	29,70	32,54
26,00	23,51	45,59	45,93	46,00	46,01	46,02	46,02	45,23	49,56
25,00	32,33	61,40	61,86	61,94	61,95	61,96	61,96	61,44	67,34
24,10	40,65	76,38	76,95	77,05	77,06	77,06	77,06	76,60	83,95

z	Análise		ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática	Combinação das contribuições modais								
		Modo 1		1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5			
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	
23,90	42,56	79,82	80,42	80,51	80,52	80,53	80,53	80,06	87,75	
23,00	51,47	95,79	96,50	96,61	96,62	96,62	96,62	96,03	105,24	
22,00	61,79	114,30	115,14	115,26	115,27	115,27	115,27	114,32	125,29	
21,00	72,56	133,57	134,55	134,67	134,68	134,68	134,68	133,15	145,91	
20,00	83,77	153,57	154,69	154,81	154,82	154,82	154,82	152,47	167,06	
19,00	100,04	179,85	181,15	181,25	181,25	181,25	181,25	177,02	193,79	
18,10	115,07	204,06	205,52	205,61	205,61	205,61	205,61	199,48	218,23	
17,90	118,47	209,52	211,02	211,10	211,10	211,10	211,10	204,53	223,72	

z	Análise		ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática	Combinação das contribuições modais								
		Modo 1		1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5			
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	
17,00	134,08	234,45	236,12	236,18	236,18	236,18	236,18	236,18	227,49	248,70
16,00	151,86	262,70	264,55	264,60	264,60	264,60	264,60	264,60	253,35	276,80
15,00	170,08	291,48	293,51	293,55	293,55	293,55	293,55	293,55	279,54	305,23
14,00	188,74	320,75	322,98	323,00	323,01	323,01	323,01	323,01	306,01	333,96
13,00	207,85	350,49	352,91	352,92	352,93	352,93	352,93	352,93	332,74	362,94
12,10	225,42	377,62	380,22	380,22	380,23	380,23	380,23	380,23	356,99	389,22
11,90	229,39	383,71	386,34	386,35	386,35	386,35	386,35	386,35	362,41	395,09
11,00	247,53	411,35	414,15	414,16	414,16	414,16	414,16	414,16	386,93	421,62

z	Análise		ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática	Combinação das contribuições modais								
		Modo 1		1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5			
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)
10,00	268,10	442,44	445,44	445,44	445,45	445,45	445,45	445,45	414,33	451,25
9,00	289,11	473,89	477,10	477,10	477,10	477,10	477,10	477,10	441,88	481,03
8,00	310,54	505,68	509,08	509,08	509,09	509,09	509,09	509,09	469,56	510,91
7,00	332,39	537,77	541,37	541,37	541,37	541,38	541,38	541,38	497,34	540,89
6,10	352,42	566,88	570,66	570,67	570,67	570,67	570,67	570,67	522,41	567,93
5,90	356,93	573,39	577,21	577,22	577,22	577,22	577,22	577,22	527,99	573,94
5,00	377,47	602,80	606,80	606,82	606,82	606,82	606,82	606,82	553,14	601,05
4,00	400,68	635,70	639,90	639,93	639,93	639,93	639,93	639,93	581,12	631,20

z	Análise	ADL	Análise Dinâmica Não-Linear					ADSL	ADSNL
	Estática		Combinação das contribuições modais						
			Modo 1	1 e 2	1 a 3	1 a 4	1 a 5		
(m)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	
3,00	424,28	668,79	673,19	673,23	673,23	673,23	673,23	609,14	661,38
2,00	448,25	702,06	706,65	706,70	706,71	706,71	706,71	637,18	691,57
1,00	472,56	735,46	740,26	740,32	740,33	740,33	740,33	665,23	721,77
0,00	497,18	768,99	773,98	774,06	774,07	774,07	774,07	693,28	751,97
Relação	1,00	1,55	1,56	1,56	1,56	1,56	1,56	1,39	1,51
D kNm	0,00	271,81	276,80	276,88	276,90	276,90	276,90	196,10	254,79
D %	0,00%	54,67%	55,68%	55,69%	55,69%	55,69%	55,69%	39,44%	51,25%

(ADDL – Análise Dinâmica Discreta Linear, ADSL – Análise Dinâmica Simplificada Linear, ADSNL – Análise Dinâmica Simplificada Não-Linear).

A Figura 7.41 condensa e apresenta os resultados obtidos das análises considerando a ação do vento sobre a estrutura, onde, de baixo para cima, estão, respectivamente, a análise estática; as análises dinâmicas simplificadas, linear e não-linear; e as análises dinâmicas discretas, linear e não-linear do 1º modo e modos superiores até o 5º, respectivamente.

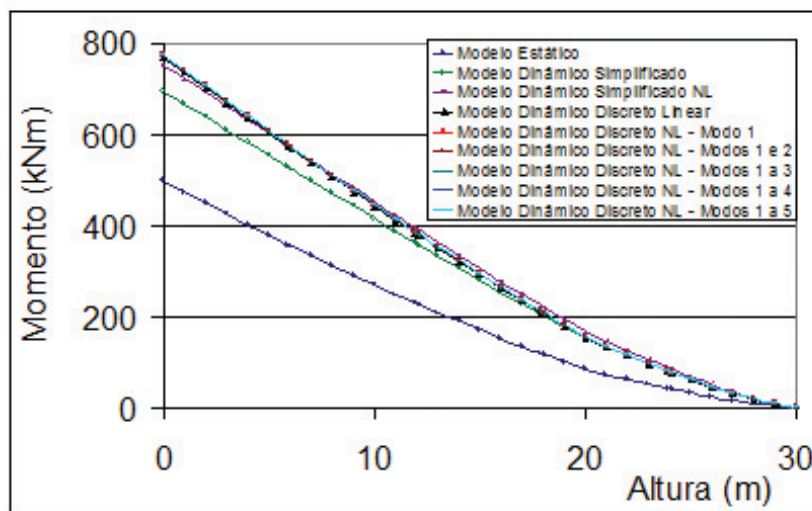


Figura 7.41 – Ação do vento na estrutura 5.

As formas modais da NBR 6123/88, a do Método dos Elementos Finitos e a do método proposto constam na Figura 7.42(a).

Uma melhor aproximação à forma modal não-linear é conseguida substituindo-se o expoente da expressão (6.6) por 1,85; tendo em vista que a curva definida com esse novo expoente oferece uma menor diferença entre seus pontos e os da curva da forma modal não-linear, como pode ser observado na Figura 7.42(b).

O expoente sugerido anteriormente distancia-se 9% do valor do recomendado pela NBR 6123/88.

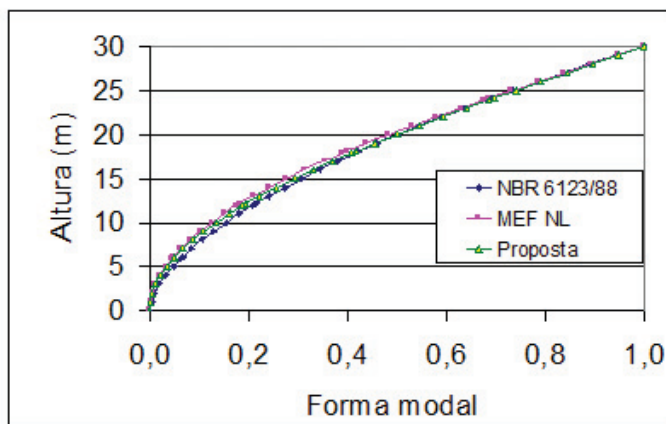
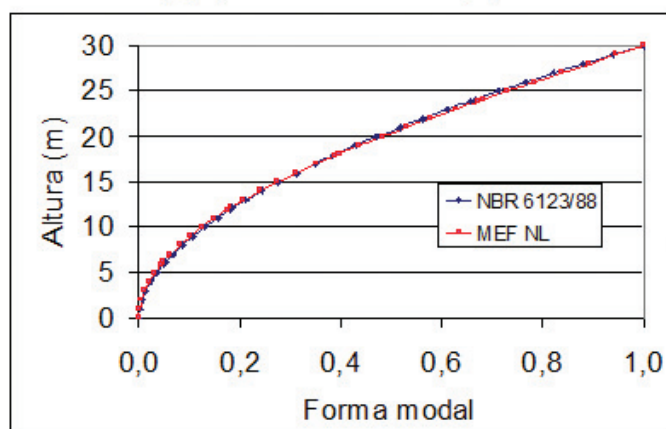
(a) expoente da forma modal: $\gamma=1,7$ (b) expoente da forma modal: $\gamma=1,85$

Figura 7.42 – Estrutura 5 – comparativo das formas modais: (a) usada na análise, (b) sugerida.

7.6 RESUMO

A Tabela 7.30 resume as frequências naturais das estruturas analisadas. Os fatores que nela são indicados se referem à relação entre os resultados da aplicação direta das Eq. (4.19) ou (4.21), denominada de solução aproximada do método proposto, com a solução completa do método e com o Método dos Elementos Finitos.

Tabela 7.30 – Frequências das estruturas reais analisadas.

Estrutura		L (m)	Método Proposto				M. Elementos Finitos			NBR
Nº	Tipo		Linear	NL	Aprox.	Fator	Linear	NL	Fator	
1	Poste metálico	48	0,569799	0,562350	0,403193	1,3947	0,492870	0,483026	1,1980	1,388889
2	Poste metálico	61	0,411504	0,403130	0,307058	1,3129	0,410567	0,402115	1,3096	1,096491
3	Poste de CA	40	0,238381	0,215715	0,189377	1,1391	0,225133	0,201796	1,0656	1,666667
4	Poste de CA*	46	0,218848	0,145517	0,115210	1,2631	0,216915	0,141285	1,2263	1,086957
5	Poste metálico	30	0,550271	0,537826	0,408091	1,3179	0,543873	0,531972	1,3036	0,841471
* Indica NLG e NLM					Média =	1,2855		Média =	1,2206	

(L = edificação, CA = concreto armado, NLG = Não Linearidade Geométrica, NLM = Não-Linearidade Material)

Puderam ser apreciados os expoentes γ da forma modal

$$x = \left(\frac{z}{h} \right)^\gamma,$$

prevista na NBR 6123/88, obtendo-se valores que melhor a aproximam à forma modal dos modelos não-lineares. Os resultados estão na Tabela 7.31. Para a estrutura 4 o expoente apresentado, correspondente à forma modal da NBR 6123/88, é relativo ao cálculo, cujos resultados foram mais desfavoráveis.

Tabela 7.31 – Expoente das formas modais.

Estrutura		Altura (m)	Previsto na NBR 6123/88	Sugerido por esta pesquisa	Diferença (%) em relação à NBR
Nº	Tipo				
1	Poste metálico	48	1,7	1,965	-16
2	Poste metálico	61	1,7	1,775	-4
3	Poste de CA	40	1,7	1,600	6
4	Poste de CA	46	1,7	1,770	-4
5	Poste metálico	30	1,7	1,850	-9

Para a determinação da ação do vento empregaram-se os processos normativos vigentes, assim denominados: análise estática, análise dinâmica simplificada e análise dinâmica discreta. Fez-se a introdução de mais um modelo de cálculo que ficou denominado de análise dinâmica simplificada não-linear, por estar baseada na frequência e na forma de vibração do modelo não-linear.

Foram feitas duas análises dinâmicas discretas. Uma tinha caráter puramente linear, tanto do ponto de vista geométrico quanto ma-

terial, enquanto que a outra possuía caráter não-linear geométrico e não-linear material quando indicado. No modelo dinâmico não-linear foram computadas as contribuições do 1º ao 5º modo de vibração na parcela relativa às flutuações sobre a velocidade média.

Foi visto que o 1º modo de vibração é o que aporta maior contribuição na resposta da estrutura dentre os outros modos de vibração. Supera, nos casos analisados, sempre a contribuição do vento médio na resposta dinâmica total.

Foram apreciadas as diferenças produzidas na determinação do momento em relação à base das estruturas pelos processos de cálculo mencionados. A Tabela 7.32 traz os momentos fletores máximos nas estruturas em relação à análise estática. Para a estrutura 4 os resultados apresentados são os referentes à taxa de amortecimento crítico de 0,01

A relação entre a as análises dinâmicas discretas pode ser vista na última coluna da Tabela 7.32.

Tabela 7.32 – Relação do momento máximo na estrutura.

Estrutura		Categ.	Classe	V _o		AE	ADDL [†]	ADDNL ^{††}	ADSL	ADSNL	ADDL/ ADDNL
Nº	Tipo			m/s							
1	Poste metál	III	C	45		1,00	1,33	1,34	1,49	1,46	1,0097
2	Poste metal.	III	B	40		1,00	1,58	1,61	2,14	2,22	1,0156
3	Poste de CA	IV	B	35		1,00	1,23	1,32	1,23	1,61	1,0785
4	Poste de CA*	IV	B	35		1,00	1,35	1,41	1,41	1,41	1,0428
5	Poste metal.	II	B	30		1,00	1,55	1,56	1,39	1,51	1,0065
	* NLG e NLM			† 1º modo			†† do 1º ao 5º modo				

(AE = análise estática, ADDL = análise dinâmica discreta linear, ADDNL = análise dinâmica discreta não-linear, ADS = análise dinâmica simplificada linear, ADSNL = análise dinâmica simplificada não-linear).

Conclusões

Para estudar os efeitos não-lineares e levar em conta a influência do esforço axial na resposta dinâmica das estruturas sujeitas à ação do vento foi elaborada uma solução analítica simplificada com base em uma técnica do tipo Rayleigh, que foi empregada como proposta para o cálculo da frequência fundamental de vibração das estruturas em balanço. Além disso, foram avaliados os modelos para o cálculo da ação do vento, segundo as prescrições da NBR 6123/88 – Forças devidas ao vento em edificações, com a frequência das estruturas sendo calculadas sob condições lineares e não-lineares.

É possível concluir, portanto, que as investigações experimentais, conduzidas em laboratório e no campo, permitiram ates-

tar a natureza não-linear dos sistemas estruturais esbeltos e a validade das postulações analíticas desenvolvidas neste trabalho para a consideração da influência do esforço axial na rigidez e na frequência natural das estruturas. Os resultados numéricos apontaram no mesmo sentido.

A importância da inclusão da não-linearidade geométrica no cálculo da resposta dinâmica devido à turbulência atmosférica dependerá das propriedades elásticas, geométricas e da distribuição de massa da estrutura, podendo ter significativo efeito redutor na capacidade dos postes de telecomunicações possuírem área de exposição ao vento para a instalação de antenas.

Resumem-se a seguir as principais conclusões.

- A solução proposta neste trabalho foi aferida favoravelmente por meios experimentais, em laboratório e no campo; e numericamente, por meio do valor da carga crítica dada pela solução de Euler e Euler-Greenhill, e pelo Método dos Elementos Finitos, por meio de análises dinâmicas.
- As análises feitas utilizando como referência os modelos físicos de laboratório levaram à comprovação de que a consideração do esforço normal na rigidez dos sistemas estruturais modifica as suas frequências de vibração.
- Os sensores utilizados nos testes de laboratório, extensômetros elétricos e acelerômetros, mostraram-se eficientes na determinação das frequências naturais dos modelos.
- Quando limitados aos pequenos deslocamentos, a média das diferenças entre os resultados experimentais e os da solução proposta neste trabalho, para modelos solicitados axialmente por uma força de compressão aplicada na sua extremidade superior, foi de 3,17%.
- A análise numérica comparativa foi desenvolvida computacionalmente via Método dos Elementos Finitos. Foram encontradas frequências distintas entre os modelos lineares e os não-lineares. A diferença entre ambas cresce rapidamente com a esbeltez do sistema.

- Contrariamente à análise linear, a análise não-linear geométrica pelo Método dos Elementos Finitos, feita por meio do conceito de rigidez geométrica, apresenta diferenças desprezíveis tanto em relação aos resultados experimentais quanto em relação aos resultados analíticos da solução ora proposta.
- Verificou-se que modelos lineares possuem reduzida sensibilidade à maneira de como são discretizados, pois as diferenças não superaram 2,28%. Entretanto, sistemas não-lineares apresentaram diferença de 25,18% entre modelos com a maior e a menor discretização. Para os modos de vibração acima do 2º essa diferença é pouco representativa.
- Quando aplicado às estruturas de telecomunicações, o método proposto neste trabalho mostrou-se bastante apropriado ao cálculo da frequência fundamental. Quando realizada por intervalos de integração, os resultados encontrados foram compatíveis com os apresentados pelo Método dos Elementos Finitos.
- Ainda no campo das estruturas reais, a formulação desenvolvida neste trabalho foi aferida por meio de atividade experimental de campo, com a medida da frequência de um poste metálico de telecomunicações.
- A aplicação direta da equação (4.19) ou sua adaptação, equação (4.21), com a inércia sendo calculada com as propriedades da estrutura com algum critério de ponderação conduziu a uma frequência mais baixa, tanto em relação ao valor exato do método quanto em relação ao MEF, em torno de 78%. Portanto, a aplicação direta da equação proposta neste trabalho deve ser feita multiplicando-se a frequência obtida pela Eq.(4.19) ou (4.21) por um fator médio de ajuste de 1,22.
- A aplicação da expressão (4.19) ou (4.21), considerando a altura acima do solo é uma maneira prática e eficiente de se calcular a frequência fundamental das estruturas em balanço, equivalendo-se ao uso de recursos computacionais sofisticados.

- Além da não-linearidade geométrica, já captada por essas expressões, ainda é possível introduzir a não-linearidade material, adequado a cada caso. Nesse sentido, a pesquisa sobre o valor do produto de rigidez EI a ser utilizado, seja para os postes de concreto armado empregados no sistema telefonia móvel celular ou outro tipo de estrutura, é um ponto de investigação que necessita ser ampliado.
- As expressões para o cálculo do período fundamental de vibração, propostas pela NBR 6123/88 – Forças devidas ao vento em edificações, não se aplicam confortavelmente aos postes destinados ao suporte de sistemas irradiantes do sistema de telefonia móvel celular, utilizados em larga escala no Brasil. As soluções propostas neste trabalho mostraram-se mais eficientes que as da norma brasileira para o cálculo da frequência fundamental dessas estruturas.
- A forma modal $\mathbf{x} = \left(\frac{z}{h}\right)^\gamma$, prevista na NBR 6123/88 com o expoente igual a 1,7 situa-se 5% abaixo da média dos expoentes que possibilitam uma melhor aproximação à forma modal não-linear.
- Além das estruturas destinadas ao serviço de telefonia celular, as expressões (4.19) ou (4.21) prestam-se ao cálculo da frequência fundamental de qualquer estrutura que possa ser modelada como elemento de barra simplesmente engastado, podendo ser utilizada com facilidade pelos engenheiros.
- Foi visto que o 1º modo de vibração é o que aporta maior contribuição da resposta dinâmica da estrutura dentre os outros modos de vibração. Supera a contribuição do vento médio na resposta dinâmica total. Na maioria dos casos, a contribuição dos modos superiores ao primeiro podem ser desprezadas, indo de encontro aos resultados apresentados por Galindez (1989).
- A utilização do modelo dinâmico simplificado com a frequência da estrutura calculado sob não-linearidade geométri-

ca conduziu a resultados muito elevados quando comparados aos resultados da análise dinâmica discreta não-linear, configurando-se em um processo de cálculo improcedente para a determinação da resposta dinâmica de estruturas como as de telecomunicações.

- O cálculo da ação do vento realizado como previsto no item 4 da NBR 6123/88 – Forças devidas ao vento em edificações, processo utilizado pelos engenheiros para projetar as estruturas analisadas, apresenta esforços que podem ser superados em mais 50%.
- Para as estruturas metálicas estudadas, a relação entre a análise dinâmica discreta linear e a análise dinâmica discreta não-linear alcança quase 2%. Percentual que se aproxima de 8%, quando se trata de postes de concreto armado. Para estruturas cujo fim é a transmissão do sinal de telecomunicações, esse diferencial pode representar um importante decréscimo no conjunto de antenas a serem instaladas.

Referências bibliográficas

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT);
NBR 6123, Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro, dez. 1987.

_____; NBR 6118/04, Projeto de Estruturas de Concreto Armado. Rio de Janeiro, mar. 2003.

_____; NBR 8681, Ações e segurança nas estruturas. Rio de Janeiro, dez. 2003.

_____; NBR 8800/96 - Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios. Rio de Janeiro, abr. 96.

- AqDados 7.02 – **Programa de Aquisição de Sinais**: Manual do usuário, ver. 7. Lynx Tecnologia Eletrônica Ltda. São Paulo, set. 2003.
- AqDAnalysis 7 – **Programa de Análise de Sinais**: Manual do usuário, rev 6. Lynx Tecnologia Eletrônica Ltda. São Paulo, out. 2004.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**; Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall, 1996.
- BIANCOLINI, M.E.; BRUTTI, C.; RECCIA, L. **Approximate solution for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates**, *Journal of Sound and Vibration*, v. 288, Issues 1-2, 22, p. 321-344, nov 2005.
- BLESSMANN, J. **Ação do Vento em edifícios**. 2 ed., rev. Ed. Universidade/UFRGS. Porto Alegre, 1989.
- _____. **Acidentes causados pelo vento**. 4 ed, Ed da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2001.
- _____. **Introdução ao Estudo das Ações Dinâmicas do Vento**, 2 ed, Ed. da UFRGS. Porto Alegre, 2005.
- _____. **Ação e efeitos do vento em estruturas esbeltas de concreto armado**. Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto armado. São Paulo, 1989.
- BRUEL & KJAER. **Accelerometers & Conditioning**. Product Catalogue, February 2005. [Nærum – Denmark], 2005.
- _____. by SERRIGDE, M.; LICHT, T.R. **Piezoelectric accelerometer and vibration preamplifier Handbook: Theory and application Handbook**. [Nærum – Denmark]. Revision November 1987.
- BRASIL, M. L. R. F. R. **Não-linearidade geométrica de estruturas aporticadas planas: um tratamento pelo Método dos Elementos Finitos**. 1990. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo 1990.

- _____. O Fenômeno de Localização de Modos em Dinâmica e Estabilidade de Estruturas Moduladas de comportamento Linear ou Não-Linear. 1995. Tese (Livre-Docência) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 1995.
- _____. SILVA, M.A. RC large displacements: Optimization applied to experimental results. *Journal of Computers & Structures* 84 (2006) 1164-1171, Ed ELSEVIER, 2006.
- _____; _____. WAHRHAFTIG, A.M.. Non-Linear Dynamic Analysis Based on Experimental Data of RC telecommunication Towers to Wind Loading. Twelfth International Conference On Wind Engineering (12icwe). Cairns, Austrália, 2007.
- _____. Dinâmica das Estruturas. Curso de Atualização. São Paulo, 2004.
- CARRIL JÚNIOR, C. F.. Análise Numérica e Experimental do Efeito Dinâmico do Vento em Torres Metálicas Treliçadas para Telecomunicações (2000). Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2000.
- CARNEIRO, F. L.. Análise dimensional e teoria da semelhança e dos modelos físicos, ed 2. Ed. UFRJ, Rio de Janeiro, 1996.
- CHEUNGA, Y. K.; Zhou D.. Vibration of tapered Mindlin plates in terms of static Timoshenko beam functions, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 260, Issue 4, p. 693-709.27, fev. 2003.
- CHIBA, M.; SUGIMOTO, T.. Vibration characteristics of a cantilever plate with attached spring-mass system, *Journal of Sound and Vibration*, v 260, Issue 2, 13, p. 237-263, fev. 2003.
- CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. Dynamic of Structures. Taiwan: McGraw Hill International Editions, Second Edition, 1993.

- COOK, R. D. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. John Wiley and Sons, Inc., NJ, USA, 1974.
- _____. PLESHA, D. S. M., WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. John Wiley and Sons, Inc., NJ, USA, 2002.
- DYRBYE C.;HANSEN, S.O. **Wind Loads on Structures**. England, John Wiley & Sons, 1996.
- EXCEL SENSORES. **Extensômetros elétricos (Strain Gages): acessórios para extensometria**. Catálogo. São Paulo, 2006.
- FONSECA, A. **Vibrações**, Ed. Ao livro técnico S.A. Rio de Janeiro, 1964.
- FUSCO, P.B. **Estruturas de Concreto, Solicitações Normais**, Ed. Livros Técnicos e Científicos. Rio de Janeiro, 1981.
- GAMBHIR, M. L. **Stability Analysis and Design of Structures**. Patiala – Índia, Springer, 2004.
- GALINDEZ, E. E. **Resposta Dinâmica de Estruturas na Direção da Velocidade Média do Vento**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 1979.
- GÉRADIN, M. RIXEN, D. **Mechanical Vibration**, Jhon Wiley & Sons. New York, 1998.
- HU X. X.; SAKIYAMA, T.; MATSUDA, H.; MORITA C. **Fundamental vibration of rotating cantilever blades with pre-twist**, *Journal of Sound and Vibration*, v. 271, Issues 1-2, 22, p. 47-66, mar 2004
- PHILIPPI, P. C.; HAVERROTH, G. E. **Formação e interferência de esteiras de vórtices provocadas por obstáculos sólidos**. Florianópolis, 2205.
- LAZANHA, E.C. **Análise Dinâmica Elasto-plástica de Estruturas Metálicas sob Excitação Aleatória de Vento**. 2003. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

- LAURA, P.A.A.; MASIÁB, U.; AVALOS, D.R.; Small amplitude, transverse vibrations of circular plates elastically restrained against rotation with an eccentric circular perforation with a free edge, *Journal of Sound and Vibration*, v. 292, Issues 3-5, 9, p. 1004-1010, may 2006.
- KANDASAMY, S.; SINGH, A. V. Free vibration analysis of skewed open circular cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, v. 290, Issues 3-5, 7, p. 1100-1118, mar 2006.
- KOULOUSEK, V., FISCHER, O., NAPRSTEK, J. Wind Effects on Civil Engineering Structures, Elsevier. New York, 1984.
- LEVY, R.; SPLLIRES, W. R. Analysis Of Geometrically Nonlinear Structures, Chapman & Hall. New York, , 1995.
- LEISSA, A.W. The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 287, Issues 4-5, 4 November 2005, pages 961-978.
- MAZZILLI, C. E.N; Sobre a instabilidade de estruturas elásticas sensíveis à imperfeições, 1979. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 1979.
- MEDEIROS, S. R. P.; FRANÇA, R.L.S. Um programa para Análise Não-linear Geométrica em Microcomputadores, Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, USP. São Paulo, ago 1989.
- MORAIS, V. S. A Interferência no escoamento de um fluido (Simulado numericamente) imposto pela presença de um par de cilindros de base quadrada, dispostos em diferentes situações de geometrias cartesianas, Tese (Doutorado), 2007. Campinas, 2007.
- NAVARA, A. Dinâmica de Estruturas, LNEC – Laboratório Nacional de Engenharia Civil. Lisboa, nov. 1969.

- PAULETTI, R. M. O. **História, Análise e Projeto das Estruturas Retesadas**, 2003. Tese (Livre Docência) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.
- RATZERSDORFER, J. **Flabagem. Barras Prismáticas**. 2 vol, Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT). São Paulo, 1954.
- RAYLEIGH, J. W. S. **The Theory of Sound**, v.1, 1877, ed. 2, revised and enlarged by Dover Publications. Toronto, 1945.
- RUTEMBERG A. **Simplified P-Delta Analyses for Asymmetric Structures**. *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.108, N0 ST9. New York, 1982.
- SAP2000, **Integrated Software for Structural Analysis and Design**, Analysis Reference Manual, Computer and Structures, Inc. Berkeley, California, USA, 2002.
- SACS, P. **Wind Forces in Engineering**, Pergamon Press. New York, 1972.
- SANTOS, C.M.P. **Análise das estruturas Offshore sujeitas a vibrações induzidas por vórtices**, 2005, Tese (Doutorado), Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2005.
- SILVA, M.A.; BRASIL R.M.L.R. **Non-Linear Dynamic Analysis Based on Experimental Data of RC Telecommunication Towers Subject to Wind Loading**, Mathematical Problems in Engineering, Hindaawi Publishing Corporation, 2206.
- SIMIU, E.; SCALAN, R.H. **Wind Effects on Structures – Fundamentals and Applications Design**, John Wiley & Sons. New York, 1996.
- SOUZA LIMA; VEMÂNCIO FILHO. **Considerações sobre a não-linearidade geométrica em estruturas reticuladas**, Escola de Matemática Aplicada – Laboratório de Computação Científica (CNPq). Rio de Janeiro, 1982.

TEMPLE G.; BICKLEY, W.G. **Rayleigh's Principle and its applications to Engineering**, Oxford University Press. London, Humphrey Milford, 1933.

TIMOSHENKO, S. **Theory of Elastic Stability**, McGraw W-HILL, BOOK COMPANY, Inc. New York and London, 1936.

VENÂNCIO FILHO, Fernando (Instituto Tecnológico da Aeronáutica). **Análise matricial de estruturas (Estática, Estabilidade, Dinâmica)**, Almeida Neves – Editores. Rio de Janeiro, 1975.

WILSON E.L.; HABIBULLAH, A. **Static and Dynamics Analysis of Multi-Story Buildings, Including P-Delta Effects**. *Earthquake spectra*, v. 3, N° 2, 1987.

