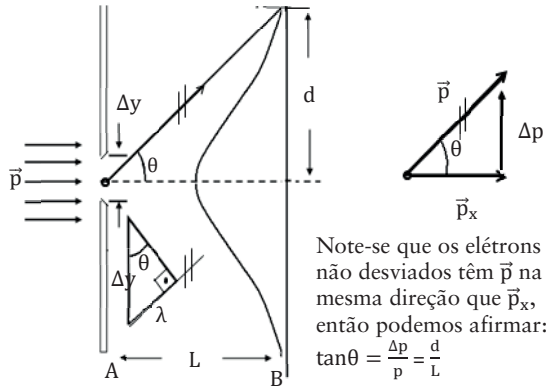


A6 PRINCÍPIO DA INCERTEZA DE HEISENBERG À LUZ DO PRINCÍPIO DA AÇÃO MÍNIMA

A6.1 Introdução



Seja um feixe incidente de luz que encontra um anteparo, A com fenda de comprimento: Δy .

A maior parte dos fótons incide no centro do anteparo B, conforme o gráfico de distribuição normal ou de Gauss, mas uma quantidade mínima incide no 1º mínimo, distante d do centro.

Observação: A distância L é muito maior que a fenda, portanto o ângulo θ é no máximo da ordem de 5° a 6° . Ver a seguir a ordem de grandeza das aproximações:

<i>graus</i>	<i>rad</i>	<i>senθ</i>	<i>erro %</i>	<i>tangθ</i>	<i>erro %</i>	<i>erro %</i>
5	0,0873	0,08716	0,16	0,08749	0,22	0,38
6	0,1038	0,10453	0,70	0,150510	1,25	0,55

$$\left. \begin{array}{l} 3,1416 \text{ rad} \longrightarrow 180^\circ \\ x \longleftarrow 5^\circ \\ y \longleftarrow 6^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \frac{5 \cdot 3,1416}{6 \cdot 3,1416} = 0,0872 \text{ rad} \\ y = \frac{6 \cdot 3,1416}{180} = 0,1038 \text{ rad} \end{array}$$

Então teremos:

$\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{\Delta y}$ λ comprimento de onda \vec{p} quantidade de movimento, é conservada e desviada de um ângulo, θ .

Se θ for pequeno, podemos substituir $\text{sen}\theta$ por θ e escrever: $\theta \cong \frac{\lambda}{\Delta y}$.

E como $\tan\theta = \frac{\Delta p}{p} \cong \theta$, em rad, temos que θ cresce mais rápido que $\text{sen}\theta$, cujo max é 1, enquanto θ cresce até $\pi/2$ quando $\text{sen}\theta = 1$, e também $\tan\theta$ cresce até ∞ quando $\theta = \pi/2$.¹ Sendo Δp componente da quantidade de movimento p na direção perpendicular ao feixe.

Recorde-se que além do 1º mínimo, temos outros, intervalados por feixes de luz.

$$\therefore \tan\theta = \frac{\Delta p}{p} \geq \text{sen}\theta = \frac{\lambda}{\Delta y} \quad \text{quantidade de movimento } p = mv$$

Será igual quando for pequeno. Para valores maiores, a desigualdade torna-se válida. Quanto $> \theta$, mais mínimos teremos.

$$\text{Dos exemplos ilustrativos das Equações 2a e 2b, Seção 7.9.1: } E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ e } p = \frac{Ev}{c^2}.$$

Como $v = c$, no caso da luz: $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$, (a) pois $c = \lambda \nu$ (observar Equação 3 Seção. 7.9.1, ao pé da pág.) $E = h\nu$ (0) hipótese de Planck, energia da radiação térmica, h = constante de Planck, para explicar a energia média:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_0}{e^{\epsilon_0/kt-1}} \quad \text{onde} \quad \epsilon_0 = h\nu \quad \text{quantum de energia, isto é, a menor parcela de energia possível.}$$

¹ Isto é, $\Delta p/p = \dots = \tan\theta \geq \lambda/\Delta y = \text{sen}\theta$, estamos supondo \vec{p} na sua direção não desviada, isto é, na direção de \vec{p}_x . Portanto, quando Δy diminui, θ aumenta, intuindo a existência de um fator constante limitando como mínimo, que será visto a seguir.

Foi o início da Mecânica quântica. (0a)

Introduzindo na desigualdade:

$$\frac{\Delta p}{p} \geq \frac{h}{p \Delta y} \Rightarrow \Delta y \cdot \Delta p \geq h, \text{ pois } \lambda = h/p, \text{ equação (a)} \quad h \text{ Constante de Planck} \quad (1)$$

Essa relação é qualitativa; mais adiante, será apresentada a relação quantitativa, isto é, rigorosa (ver Determinação do princípio da incerteza de Heisenberg, Secção A6. 6.1.1 Equação 3 e “Em outras palavras”, Equação 4 Secção A6.4.1 e Equação final (1) em Uma prova simples do princípio da incerteza de Heisenberg) Secção A6.9.

Trata-se do princípio da incerteza de Werner Heisenberg (1901-1976), enunciado em 1927.

Significado de h : se o produto $\Delta y \cdot \Delta p$ fosse zero, as noções clássicas sobre partículas e órbitas estariam corretas. Seria possível medir com precisão a posição e a quantidade de movimento. A constante h significa que as ideias clássicas não são totalmente corretas. O valor de h informa em que circunstâncias os conceitos clássicos devem ser substituídos pelos quânticos.

Exemplo: um elétron tem velocidade de 300 m/s medida com precisão de $0,01\%$. Qual é a precisão máxima para determinar sua posição?

$$p = mv = (9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}) (300 \text{ m/s}) = 2,7 \times 10^{-28} \text{ kgm/s}$$

$$\Delta p = (0,0001) (2,7 \times 10^{-28} \text{ kgm/s}) = 2,7 \times 10^{-32} \text{ kgm/s}$$

$$\text{Incerteza mínima na posição: } \Delta x = \frac{h}{\Delta p} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{ joule} \cdot \text{s}}{2,7 \times 10^{-32} \text{ kgm/s}} = 2,4 \text{ cm}$$

Não há a menor possibilidade de se conhecer a posição melhor com exatidão, ou seja, de cerca de 1 pol.

Exemplo: um projétil tem velocidade de 300 m/s com precisão de $0,01\%$. Qual é a precisão máxima para determinar sua posição se a massa da partícula é $50 \text{ g} = 0,05 \text{ kg}$?

$$p = mv = (0,05 \text{ kg}) (300 \text{ m/s}) = 15 \text{ kgm/s}$$

$$\Delta p = (0,0001) (15 \text{ kgm/s}) = 1,5 \times 10^{-3} \text{ kgm/s}$$

$$\Delta x = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{ joule} \cdot \text{s}}{1,5 \times 10^{-3} \text{ kgm/s}} = 4,4 \times 10^{-31} \text{ m}$$

Está longe de poder ser medido. Um núcleo tem diâmetro da ordem de 10^{-15} m . Pode-se afirmar que, para objetos pesados, como um projétil, o princípio da incerteza não impõe qualquer limitação no processo de medida. O princípio da correspondência indica como a Física quântica se reduz à Física clássica em circunstâncias adequadas.

A seguir, mais exemplos elucidativos da natureza dualística dos objetos da natureza e que a Mecânica quântica ajudou a esclarecer.

Conforme Louis de Broglie:

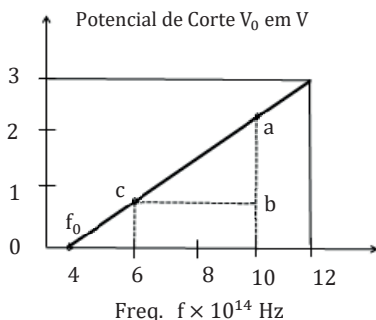
$$\lambda = h/p = h/mv \quad (1a)$$

Para se ter ideia das ordens de grandeza, consideremos, por exemplo, uma bola de tênis de 100g com velocidade de 50 km/h , a onda associada tem um comprimento $\lambda = 4,8 \times 10^{-24} \text{ Å}$ em que 1 Å é da ordem do raio de um átomo, sendo portanto desprezível para nossas percepções. Se tomarmos um elétron com a mesma velocidade, o comprimento de onda será $\lambda = 5,2 \times 10^5 \text{ Å}$, muito maior que o da bola de tênis. Por esse motivo, nosso corpo não sofre difração ao atravessar uma porta, mas um elétron ou um fóton sofre difração se atravessar uma fenda ou uma estrutura cristalina, como verificado por Davisson e Germer, em 1927, e Thomson, um ano mais tarde (ver experiência de feixes de elétrons difratados sobre cristal de Ni ou feixe monoenergético de raios X, ou elétrons sobre película metálica de microcristais orientados ao acaso).

Referência: Ferreira, L.A. em Física

Quântica: o estranho comportamento do mundo microscópico, do Universo sem Mistério, e Halliday – Resnick – Walker em Ótica e Física Moderna.

Vimos que a natureza da luz é dualística, comportando-se sob certas circunstâncias como onda, e sob outras, como partícula ou fóton. Da equação do efeito fotoelétrico de Einstein, obtemos, após alguns ajustes: $V_0 = \frac{h}{e}f - \frac{E_0}{e}$, uma relação linear entre V_0 e f . A inclinação da reta h/e é obtida experimentalmente. Sendo f a frequência.



$$\frac{h}{e} = \frac{ab}{bc} = \frac{(2,2-0,65)V}{(10-6)10^{14}\text{Hz}} = 3,9 \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}$$

Multiplicando pela carga do elétron: $h = (3,9 \times 10^{-15} \text{ V})(1,6 \times 10^{-19} \text{ C}) = 6,2 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Com análise mais cuidadosa e uso de superfícies de Li, Millikan chegou a:

$$h = 6,57 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \text{ com precisão de } 0,5\%.$$

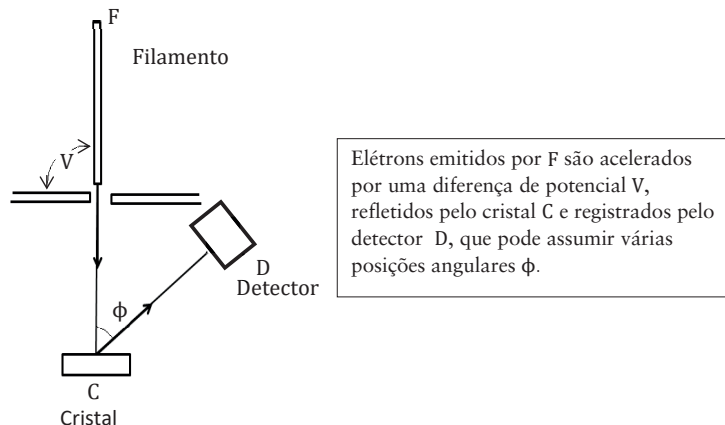
Em 1905, Einstein introduziu o conceito de fóton e realizou uma explicação quantitativa do efeito fotoelétrico.

Em 1924, Louis de Broglie, na França, raciocinou da seguinte forma: como a luz tem uma natureza dualística de onda e corpúsculo, talvez a matéria também a tenha. Como a matéria fora considerada composta de partículas, de Broglie sugeria que se procurasse um comportamento ondulatório para a matéria.²

De Broglie prognosticou que o comprimento de onda das ondas da matéria seria a mesma válida para a luz: $\lambda = h/p$ (1b). A natureza dualística da luz está clara nessa equação e também na equação: $E = hf$. Cada expressão contém um conceito ondulatório (f e λ) e um conceito de partícula (E e p), em que p seria a quantidade de movimento da partícula da matéria, e f a frequência.

Davisson e Germer, em 1927, demonstraram experimentalmente, por meio da medição dos comprimentos de onda de elétrons lentos, nos Estados Unidos.

Observação importante: A matéria, como a luz também tem comportamento dual, isto é, como uma moeda, tem duas faces. Sempre mostra uma única face e nunca as duas, ao mesmo tempo. Convém ressaltar ainda que se usássemos na experiência da página inicial, feixe de elétrons em vez de luz, ao deduzirmos a fórmula: $\Delta y \cdot \Delta p \geq h$, devemos empregar: $p = h/\lambda$, pois o feixe de elétrons está se comportando como onda e não materialmente como vemos pela experiência a seguir:



Para elétrons lentos, podemos desprezar correções relativísticas $\lambda = h/mv$. A velocidade dos elétrons é determinada pelo potencial V aplicado ao tubo de raios catódicos: $\frac{1}{2}mv^2 = eV$.

² Se a luz tem um caráter duplo, enquanto a matéria parecia ser exclusivamente corpuscular, essa diferença não combinava ao fato da luz e a matéria serem formas de uma entidade que se transformam entre si. De Broglie pensou que a matéria, como por exemplo os elétrons, poderiam ter propriedade ondulatórias.

Portanto, $\lambda = h / \sqrt{2 m e V}$. Substituindo por:

$e = 4,8 \times 10^{-10}$ u e s, unidade eletrostática statcoulomb (Ferenç e Lemon, Kaplan)

$m = 9,1 \times 10^{-28}$ g, $h = 6,62 \times 10^{-27}$ erg.s, obtemos

$$\lambda = \left(\sqrt{150/V} \right) \text{ \AA}$$

Para V em volt. A um potencial acelerador de 10.000V, temos $\lambda = 0,122 \text{ \AA}$ aproximadamente na região de raios X penetrantes.

Referência: Ferenç Jr, Halliday-Resnick, Max Born

A6.2 COMPORTAMENTO ESTRANHO DO MUNDO MICROSCÓPICO

Expressando o Princípio de Heisenberg: $\Gamma x \wedge \Gamma v \geq h/m$, onde Γx , posição, Γv , incertezas na velocidade e m , massa do corpo, h cte de Planck.

Observe que o produto das incertezas é inversamente proporcional à massa. Como h é muito pequeno, as incertezas são relevantes para corpos microscópios, como átomos ou moléculas e respectivas partículas. Assim, para uma caneta de 10g, a precisão chega a $10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$, cerca do tamanho do átomo. Mas a incerteza na velocidade será $\approx 10^{-22} \text{ m/s}$, o que significa a caneta demorar 100.000 *anos* para percorrer a distância de um átomo.

Mas no caso do elétron, cuja massa é $9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, se medirmos com boa precisão sua posição com $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$, teremos uma incerteza de velocidade de 10^7 m/s , velocidade suficiente para o mesmo ir da Terra à Lua em alguns segundos.

Conclui-se então que a massa do corpo é o divisor entre fenômenos descritos pela Física clássica e os descritos pela Física quântica. O que determina o que é grande e o que é pequeno é, como vimos, a constante de Planck.

Relações relativísticas úteis:

Quantidade de movimento: $p = \varphi m_o v$, onde $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\beta = \frac{v}{c}$ m_o = massa de repouso, massa relativística: $m = \varphi m_o$

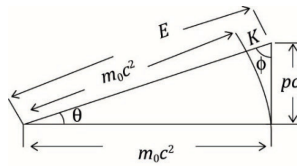
Energia cinética: $K = m_o c^2 (\varphi - 1)$

Energia total: $E = \varphi m_o c^2 = m_o c^2 + K$

Na Mecânica clássica, temos: $p^2 = 2Km \diamond K = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$

Relativisticamente: $(pc)^2 = K^2 + 2Km_o c^2 \diamond$ resulta: $E^2 = (pc)^2 + (m_o c^2)^2$

Mnemonicamente temos a fórmula Pitagórica: onde $\text{sen} \theta = \beta$ e $\text{cosec} \theta = 1/\varphi$



Daqui obtemos para um fóton: $E = hf$, f = frequência e $m_0 = 0$, o fóton propagando com velocidade da luz, tem massa nula.

Logo: $hf = pc$ como $c = \frac{\lambda}{\phi}$ resulta $p = \frac{h}{\lambda}$ λ = comprimento de onda

É um comportamento ondulatório.

A6.3 TEORIA ATÔMICA DE BOHR

Publicada em 1913, baseada na descoberta de Rutherford de que os átomos têm núcleos maciços, positivamente carregados, com enxames de elétrons girando ao redor como um diminuto sistema planetário.

Estudando o átomo de hidrogênio, o mais simples que existe, tendo somente um elétron ao redor do núcleo, propôs o seu modelo atômico.

A primeira dificuldade encontrada é de os átomos não poderem existir, pela Física clássica, mais de uma fração desprezível de segundo. O elétron deslocando-se em sua órbita é equivalente a uma oscilação elétrica, tendendo a emitir oscilações eletromagnéticas, perdendo rapidamente energia. Mover-se-iam em trajetórias espiraladas e cairiam no núcleo em centésimos de milésimos de segundo. Mas, com certeza, isso não ocorre, pois os átomos são configurações muito estáveis. A situação era paradoxal.

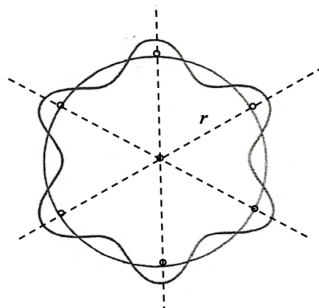
Raciocinou, se a energia radiante só pode existir em certas quantidades mínimas ou seus múltiplos, conforme Planck descobriu em 1900, porque não fazer a mesma suposição com energia dos elétrons girando em torno do núcleo?

Então, o movimento dos elétrons no estado normal do átomo, corresponderia a quantidades mínimas de energia, enquanto os estados excitados corresponderiam a variações desses “quanta” de energia.

Sob certos aspectos, se comportaria como uma caixa de mudanças de um carro. Engrenamos primeira, segunda e terceira, mas nunca velocidades intermediárias. Estando o movimento de elétrons e a luz emitida, quantificados, a transição do elétron de um nível superior para outro inferior resultaria na emissão de “quantum” de luz com hf igual à diferença de energia entre os dois níveis.

Inversamente, se a luz incidente com um “quantum” hf for igual à diferença de energia entre os estados estáveis e excitado do átomo, o “quantum” de luz será absorvido e o elétron se moverá do nível mais baixo para o mais alto. Expressamos isso como: $hf = E_k - E_j$ (1a).

Onde hf é o “quantum” de energia do fóton durante a transição e E_j e E_k , os níveis de energia do átomo nos seus estados estacionários antes e depois da transição.



As condições quânticas de Bohr³ também resultam da natureza ondulatória da matéria. Como exemplo simples, consideremos um elétron no átomo de H como uma onda permanente (estável) estendendo-se em um círculo em torno do núcleo. Para que a onda do elétron possa preencher a circunferência do círculo, ela deve conter um número inteiro de comprimentos de onda: $2\pi r = n\lambda$ ⁴, em que r é o raio do círculo e n é um número inteiro.

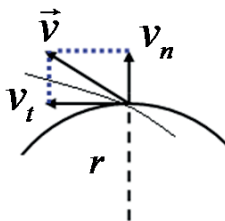
Considerando a velocidade \vec{v} do elétron, temos dois componentes: a tangencial v_t e a normal v_n .

A quantidade de movimento: mv_t será a efetiva.

A quantidade de movimento angular $mv_t r$, que chamaremos de L . A velocidade angular será ω .

A velocidade angular

$$\omega = 2\pi \nu \quad \text{em que } \nu \text{ é a frequência.}$$



³ Niels Bohr (1885-1962), físico dinamarquês.

⁴ De fato, tomando-se a equação $E = nh\nu = L\omega$, em que L é quantidade de movimento angular $L = pr$ e

$p = \frac{h}{\lambda}$ (ver Equação a em Introdução) $\therefore nh\nu = \frac{h}{\lambda} r\omega$ e $E = nh\nu = \frac{h}{\lambda} \omega r = \frac{h}{\lambda} 2\pi \nu r$ $\lambda = \text{comprimento de onda}$
 $\omega = 2\pi\nu$, logo $2\pi r = n\lambda$, isto é, uma volta compreende n ondas.

Então, temos: $L\omega$ Energia. Se igualarmos essa energia no postulado de Planck⁵ sobre a quantização da energia:

$$E = nh\nu$$

$$L\omega = nh\nu \Rightarrow L(2\pi\nu) = nh\nu \quad \therefore L = n \frac{h}{2\pi}$$

Essa é a quantização da quantidade de movimento angular, estabelecida por Bohr em 1913.

$$\text{Outra forma é chamar: } \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (0a)^6$$

Teremos $L = n \hbar$ (0b) encontrada em muitos autores (por exemplo, LANDAU, em *Mécanique Quantique*).

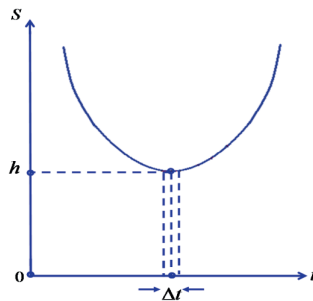
Recordemos o postulado de Bohr: para haver emissão ou absorção de energia pelo átomo, é necessária uma transição entre dois estados estacionários:

$$h\nu = E_1 - E_2 \quad (1)$$

Temos então que a ação: $S = \Delta y \times \Delta p \geq h$ (ver Anexo 3), pois como vimos: $dS = p dx$. Ver Anexo 3, Equação 2b Secção A3.1.1 (1)

Recordemos o princípio da ação mínima ou de Hamilton: em todo sistema mecânico existe uma função ação S com um mínimo para o movimento efetivo, cuja variação δS é consequentemente nula.

$$\delta S = \delta \int_{x_1}^{x_2} p dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta p dx = 0$$



⁵ Max Planck (1858-1947), físico alemão, estabeleceu o postulado em 1900.

⁶ Vamos verificar na Equação 2 do momento angular (Anexo secção A9.6), que \hbar é justamente o momento angular do elétron no átomo de hidrogênio, em que $n = 1$, pois é o menor valor possível de energia, chamado de “estado fundamental”.

Da Seção 7.4, Equação 1a, e Seção 7.9.1, Equação 2b, temos: $p = \frac{E}{c}$ e $ct = y$

$$\therefore \Delta p = \frac{\Delta E}{c} \quad \text{e} \quad \Delta y = c\Delta t$$

$$\therefore S = c\Delta t \cdot \frac{\Delta E}{c} = \Delta t \cdot \Delta E \geq h$$

Já vimos, no Anexo 3, Equação 2b, que:

$dS = Ldt$, em que L é energia.

$$\therefore \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} Ldt = \int_{t_1}^{t_2} \delta Ldt = 0, \text{ ver fig.}$$

h é o mínimo da função $S = \Delta E \cdot \Delta t = \Delta p \cdot \Delta x$ (2), satisfazendo a condição do princípio da ação mínima. Logo, o princípio da incerteza satisfaz o princípio da ação mínima, em que $\delta S = 0$ (ver Anexo 3, Equação 3).

De fato, $h = S_{\min} = 6,55 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{seg}$, valor em que $\delta S \rightarrow 0$.

Observemos que h tem um valor extremamente pequeno, por isso permaneceu desconhecido, até que Planck o tivesse descoberto e Heisenberg o tivesse utilizado.

Ref.: Landau em Teoria do Campo, Yavorski.

A6.4 EQUAÇÃO DA ONDA DE SCHRÖDINGER⁷

Conforme Alonso e Finn (1972), a descrição matemática da propagação $\xi(x, t)$ é uma função senoidal ou harmônica: $\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt)$, ver Seção 5.23, Equação a e a Figura correspondente.

Significado de k : substituindo x por $x + \frac{2\pi}{k}$, obtemos o mesmo valor para $\xi(x, t)$.

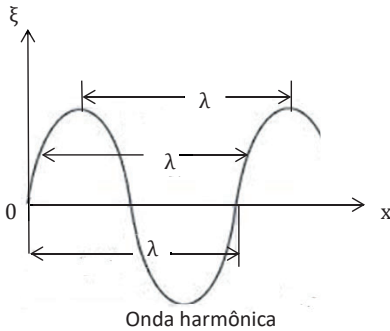
$$\begin{aligned} \xi\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) &= \xi_0 \sin k\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) = \xi_0 \sin [k(x - vt) + 2\pi] = \\ &= \xi(x - vt) \end{aligned}$$

$\therefore \lambda = \frac{2\pi}{k}$, (λ) comprimento de onda, período espacial.

A curva se repete a cada comprimento de onda λ .

$\therefore k = \frac{2\pi}{\lambda}$ representa o número de comprimentos de onda na distância angular 2π .

⁷ Erwin Schrödinger (1887-1961), físico austríaco, estabeleceu a equação em 1926, e recebeu o Prêmio Nobel de Física em 1933.



Também pode ser escrita:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}$ (a1), número de ciclos ou frequência angular da onda, velocidade angular, secção 2.1.3

$$\omega = 2\pi \gamma \Rightarrow \gamma = \omega/2\pi \quad (b)$$

γ frequência, pois $\lambda \gamma = v$

Análise de Fourier do movimento ondulatório:

$$\xi = f(x - vt) = a_0 + a_1 \cos k(x - vt) + a_2 \cos 2k(x - vt) + \dots + b_1 \sin k(x - vt) + b_2 \sin 2k(x - vt) + \dots \quad c$$

Isto é, qualquer movimento periódico pode ser expresso como superposição de movimentos harmônicos simples de frequências angulares $\omega, 2\omega, \dots, n\omega$ ou períodos $P, P/2, \dots, P/n$.

ξ se repete em tempos $P, 2P, \dots, nP$, sendo

$$P = 2\pi/\omega = 1/\gamma$$

Ou seja: $\xi = f(x - vt) = f[x - v(t \pm P)] = f(x - vt \mp vP)$

Equação diferencial do Movimento Ondulatório:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \text{ Solução geral: } \xi(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Para onda senoidal: $\xi = \xi_0 \sin k(x - vt)$

Derivadas parciais: $\frac{\partial \xi}{\partial x} = k\xi_0 \cos k(x - vt)$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 \xi_0 \sin k(x - vt)$

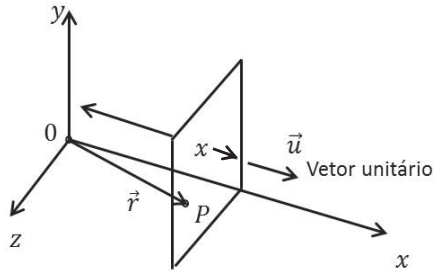
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -k\xi_0 v \cos k(x - vt), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -k^2 v^2 \xi_0 \sin k(x - vt)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (0), \text{ comparando as duas equações.}$$

Frente de onda: $\xi = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$

$$\xi = \xi_0 \sin k(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

Para onda harmônica ou senoidal.



Definindo o vetor-propagação.

$\vec{k} = k\vec{u}$, comprimento (módulo):

$$k = 2\pi/\lambda = \omega/v \quad (1)$$

$$\therefore \omega = kv$$

$$\xi = \xi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \xi = \xi_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$$

$$k_x, k_y, k_z \text{ componentes de } \vec{k}: \vec{k} \cdot \vec{r} = (k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k})(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\text{Satisfazendo: } k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2/v^2 \text{ (Teorema de Pitágoras)}$$

Propagação no espaço tridimensional, equação do feixe de partículas derivada por Schrödinger:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1a) \quad \psi(x, y, z, t)$$

Referência: Max Born: Movimento de uma partícula livre

$$\psi = e^{i(kx - \omega t)} = e^{(2\pi i/h)(px - Et)} \quad (2) \text{ Ver resolução da equação da onda Seção A6.8 equação 11}$$

Onde: $\lambda = \frac{h}{p}$ (ver Equação a na Introdução seção A6.1) $h = \text{constante}$ $E = h \nu$ de Planck

Referência: Piskounov: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ Equação de Euler

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \therefore z = r e^{i\varphi}$$

Deduzindo por Mecânica quântica: $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$ (Lei da comutação de Born-Jordan)

$\left(-\frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{4\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi = 0$ ⁸ Equação da onda de Schrödinger, ver Equação 3, “Em outras palavras”, Secção A6.4.1

Exemplo: equações da onda eletromagnética, Secção 5.2.3, Equações 7 e 8.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2}$$

Campo elétrico: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x - ct)$

Campo magnético: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x - ct)$

$\mathbf{E} = E_0 \sin k(x - ct) = E_0 \sin(kx - \omega t)$

$\mathbf{B} = B_0 \sin k(x - ct) = B_0 \sin(kx - \omega t)$

Recordemos: $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = k E_0 \cos k(x - ct)$ e $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -k B_0 \cos k(x - ct)$

Pela lei de Faraday-Henry temos: $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, logo: $E_0 = c B_0$

$\therefore E = c B$ $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ velocidade da luz

A6.4.1 Em outras palavras

Sendo \vec{k} o vetor propagação da luz, que fornece a direção de propagação da onda $\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k}$

O módulo de \vec{k} é $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$, λ comprimento de onda

Velocidade da luz c

Velocidade angular ou frequência angular: $\omega = 2\pi \nu$ ν = frequência $\therefore \omega = 2\pi/T$, pois

$T = 1/\nu$ Sendo T o período.

Na propagação da luz temos: $c^2 k^2 = \omega^2 \Rightarrow k \cdot c = \omega$. Ver equação a1 na Secção A6.4 equação Schrödinger (0), $k = 2\pi/\lambda$

$$\therefore \frac{2\pi c}{\lambda} = 2\pi \nu \quad \therefore c = \lambda \nu$$

análise dimensional: $[L/T] = [L]/[T]$

⁸ E, energia; V, energia potencial e q coordenada generalizada.

Substituindo k por $\frac{1}{i}\nabla$ e ω por $i\frac{\partial}{\partial t}$ (1), e operando sobre a função de onda ψ , obtemos:⁹

$$c^2 \left(\frac{1}{i}\nabla \right)^2 \psi = \left(i\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi, \text{ ver equação 1a na Secção A6.4.}$$

Recordemos: ∇ é o operador gradiente $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$, ou seja:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0 \quad \text{Explicitamente: } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2)$$

∇^2 é chamado Laplaciano.

A equação das ondas pode ser expressa com o operador:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ em que } \Delta = \nabla^2 \text{ Laplaciano} \quad (2a)$$

\square é chamado operador de d'Alembert, em que $icdt = d\tau$ é a 4ª variável. Podemos escrever, abreviadamente: $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

A equação das ondas se torna: $\square \Psi = 0$

Tomando-se a equação da conservação de energia relacionada com a quantidade de movimento:

$E = \frac{p^2}{2m} + V(r)$ em que $\frac{p^2}{2m}$ é energia cinética, e V é energia potencial.

$$\text{Como } E = h\nu \Rightarrow E = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu \quad \therefore E = \frac{h}{2\pi} \omega, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

⁹ Nota-se que k é desenvolvimento angular na unidade de comprimento λ , e ω é desenvolvimento angular na unidade de tempo

T. Temos: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e $\omega = \frac{2\pi}{T}$, pois $\nu = 1/T$. Por outro lado, temos uma variação espacial: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ e uma

variação temporal: $\partial/\partial t$, que estão correlacionados com k e ω . T é período em seg. Observe que o fóton liberado pelo elétron em sua suposta órbita circular visto anteriormente terá a mesma frequência e comprimento de onda do elétron. Por isso, n deve ser inteiro. Ou seja, assim como $k\lambda$ e ωT têm 2π como constante de proporcionalidade, d/dx e d/dt também terão. Pois:

$$\omega^2/k^2 = c^2, \quad \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 / \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = c^2 \text{ Logo: } \left(i\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 / \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 = c^2$$

Tome-se: $y = y_0 \sin k(x - ct) \Rightarrow \left(\frac{d^2 y}{dt^2} / \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = c^2$, confirmando, derivando y em x e em t e relacionando, ver equação 0 na Sec. A6.4. Aliás é óbvio que acontecesse, pois: $dx = cdt$.

pois $\omega = 2\pi\nu$ e $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi\nu}{c}$

$\therefore p = \hbar k$ desde pois que $k = \omega/c$

Substituindo como fizemos em (2), obteremos:

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad p = \hbar k$$

Substituindo na equação da conservação de energia:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(r)$$

e fazendo a substituição como em (2): $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi$

Daqui, obtemos a equação de Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi = 0, \quad (3)$$

(Não deve ser tomada como uma multiplicação simples, na verdade é um operador.)

Equação diferencial de 2ª ordem cuja solução é: $\psi = e^{(2\pi i/\hbar)(px - Et)}$ no caso unidimensional.

No caso tridimensional, em vez de px , teremos: $p_x x + p_y y + p_z z = p_i x_i$, levando em conta a convenção de Einstein. Logo, ψ se torna: $\psi = e^{(2\pi i/\hbar)(p_i x_i - Et)}$ (3a)

Derivando em relação a x , no caso unidimensional, temos: $\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial x} = p\psi$ e, no caso tridimensional: $p = \frac{\hbar}{2\pi i} \nabla$.

Derivando em relação a t , obtemos: $-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi$, como obtido anteriormente.

Calculando $p^2\psi$, temos: $p^2\psi = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \nabla^2 \psi$ e dividindo por $2m$, obtemos o 1º termo da equação de Schrödinger, o 3º termo: $-E\psi$ também se obtém.

Assim verificamos que a expressão de ψ apresentada anteriormente satisfaz essa equação.

Podemos também expressar a equação de Schrödinger como faz Landau em *Mécanique Quantique*, lembrando que: $\psi = e^{(i/\hbar)(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \hbar = h/2\pi \quad e$$

Recordemos o comprimento de onda de Broglie: $\lambda = h/p$, ligando λ , comprimento de onda e h , constante de Planck e p quantidade de movimento, ambos ligados à noção de partícula, pois de Broglie, em 1924, levantou a hipótese de a matéria também ser ondulatória. (Hipótese comprovada experimentalmente por Davisson e Germer, em 1927, com a difração dos elétrons pelos cristais.)

Calculemos: $px - xp$, em mecânica clássica seria comutativo: $px - xp = 0$, porém, em mecânica quântica não. Verifiquemos:

$$\text{Então temos: } px - xp = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \text{ e aplicando à função de onda } \psi:$$

$$\frac{h}{2\pi i} \left[\frac{\partial(x\psi)}{\partial x} - x \frac{\partial\psi}{\partial x} \right] = \frac{h}{2\pi i} \psi^{10} \quad \text{Torna } \Psi, \text{ uma função periódica dependente de "h" (4)}$$

A6.4.1.1 Comutação no produto matricial

Seja o arranjo de elementos escalares a_{ij}

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{array} \right\} \quad \text{Simbolicamente: } A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$$

Podemos atribuir a operação de produto de matrizes a:

$$\{a_{ij}\}_{m \times n} \{b_{ij}\}_{n \times p} = \{c_{ij}\}_{m \times p} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n a_{i\alpha} b_{\alpha j}$$

Em geral, o produto matricial não é comutativo, isto é: $AB \neq BA$

O espaço pode ser definido pela matriz: $\{x_i\}_{1 \times 3}$, e a quantidade de movimento, por: $\{p_i\}_{3 \times 1}$.¹¹

Então o produto matricial xp não é comutativo, isto é, $xp \neq px$.

¹⁰ Explicitando: $\frac{h}{2\pi i} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x) - (x) \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi = \frac{h}{2\pi i} \left(\frac{\partial x}{\partial x} \psi - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$, e: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$

¹¹ Resulta em: $\{x_i\}_{1 \times 3} \cdot \{p_i\}_{3 \times 1} = \{x_i p_i\}_{1 \times 1}$, como um produto interno ou contraído e, nesse caso em particular, um produto escalar.

Recordemos, como exemplo, o cálculo do produto externo:

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = \{A_1 A_2 A_3\} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} (A_1 B_1) & (A_1 B_2) & (A_1 B_3) \\ (A_2 B_1) & (A_2 B_2) & (A_2 B_3) \\ (A_3 B_1) & (A_3 B_2) & (A_3 B_3) \end{pmatrix}$$

O produto interno seria:

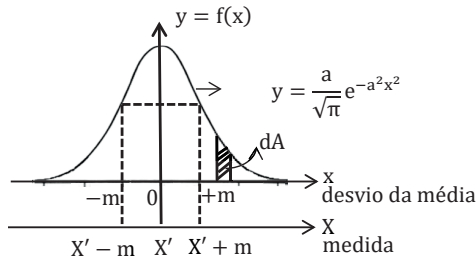
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \{A_1 A_2 A_3\} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} = \{A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3\} = A_i B_i \quad (1)$$

Isto é, corresponde ao traço da matriz acima de nove elementos, ou seja, soma dos elementos da diagonal principal, se obtém do produto externo, igualando os dois índices $i = j$: $A_i B_j \Rightarrow A_i B_i$, chamado de contração.

Ref.: Sielawa, Putnoki

Então, $px - xp$ age como um operador que se pode aplicar a uma função. É a chamada Lei da Comutação de Born e Jordan de 1925.¹²

Para avaliar o grau de desvio das grandezas medidas x e p com relação a seus valores médios, valemos dos “desvios quadráticos médios” da teoria das medições, denominadas $\overline{\Delta x^2}$ e $\overline{\Delta p^2}$. Os traços sobre os elementos significam valores médios, e Δ , os desvios. Recordemos, chamando: $x_i = X' - X_i$ desvio entre valor mais provável e medição X_i , sendo o valor mais provável: $X' = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum X_i}{n}$, também chamado de valor médio.



Definindo o “desvio quadrático médio” como a média da soma dos quadrados dos desvios: $m^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}$, (1b) considerando uma frequência de n_i desvios quadráticos x_i^2 , temos: $m^2 = \frac{n_1}{n} x_1^2 + \frac{n_2}{n} x_2^2 + \dots \left(\frac{n_i}{n}\right) x_i^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n}$, em que $n = \sum n_i$ (1c)

¹² Podemos expressar matricialmente a Lei da Comutação: $px - xp = i\hbar/2\pi i$, onde I é a matriz unitária: $I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Ou seja:

$\vec{p} \cdot \vec{x} = p_i x_i$, ver eq 1, isto é: $p_i x_i \neq x_i p_i \Rightarrow p_i x_i - x_i p_i = -i\hbar \Rightarrow \Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$, ver eqs. 3 e 4.

Na Figura anterior, temos a curva de Gauss com equação:

$$y = f(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 x^2}$$

Integrando entre $-\infty$ e $+\infty$, teremos a área A sob a curva que, segundo Gauss, representa 100% de probabilidade de cometer um erro (desvio), ou seja, $A = 1$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 x^2} dx = 1$, mas sabemos que $\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$. Ver dedução da Equação 1, em Teoria dos erros de Gauss.

Como a integral é o limite da somatória Σ quando o número de termos n for muito grande, $\frac{dA}{A} = \frac{n_1}{n}$, pois $A = \Sigma dA$, $A = 1$, logo:

$$m^2 = \frac{\Sigma n_1 x_1^2}{n} = \int_0^{\infty} \frac{2a}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-a^2 x^2} dx, \text{ pois } dA = y dx \quad 13$$

E obtemos: $m^2 = \frac{1}{2a^2}$ ou $m = \pm \frac{1}{a\sqrt{2}}$, em que m é inversamente proporcional ao “índice de precisão” a (ou achatamento).

Derivando $y = f(x)$, duas vezes, teremos: $y' = -\frac{2a^3}{\sqrt{\pi}} x e^{-a^2 x^2}$ e

$$y'' = \frac{2a^3}{\sqrt{\pi}} (2a^2 x^2 - 1) e^{-a^2 x^2}, \text{ quando } x^2 = m^2 = \frac{1}{2a^2},$$

$y'' = \frac{2a^3}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2a^2}{2a^2} - 1 \right) e^{-1/2} = 0$, logo, para $x = \pm m$, teremos dois pontos de inflexão afastados m da origem O no eixo das abscissas x . Daí se conclui que quanto maior m , menor o índice de precisão a , isto é, mais achatada é a curva de Gauss, e menor a precisão.

Para levar em conta a simetria da curva de Gauss, usamos o produto do complexo $A + iB\lambda$ por seu conjugado $A - iB\lambda$, fazendo $A = X'$ e $m = iB\lambda$. B é a outra variável independente que, multiplicada por $i\lambda$, se transforma em m . Assim, uma equação leva em conta as duas variáveis independentes A e B , pois a curva de Gauss é válida qualquer que seja a variável independente.

Além do mencionado, a expressão é apropriada pelos seguintes motivos:

- 1- O produto $A \times B$, que será px , visto na Introdução, Equação 1 e Anexo 3, Equação 2, tem a dimensão da “Ação” S .
- 2- Como vimos, tem um mínimo, que é justamente h , ver Equação 2 da secção A6.3.
- 3- Por ter um mínimo, sua concavidade será voltada para cima.
- 4- A função mais simples possível deve ser uma parábola par de 2º grau.

¹³ Da tabela de integrais definidas, por Halliday, Resnick e Walker (1996):

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \text{ com } n = 1: \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} = \frac{1}{2a^2}$$

Ver tabelas matemáticas em Spiegel (1969): $\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma(m+1/2)}{2a^{(m+1/2)}}$, onde $\Gamma(m+1/2) = \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi}$, função Gama $\Gamma(m+1/2)$.

5- O mínimo é h .⁽¹⁴⁾ Os outros valores da função $\Delta p \cdot \Delta x$ devem ser positivos, como visto na Introdução e no Anexo 3, e maiores do que h .

Então, temos: $x_i = X' + m$ e $-x_i = X' - m$.

Portanto: $(x_i)(-x_i) = (X' + m)(X' - m) = (X')^2 - (X'm - mX') - m^2$

Como: $X'm - mX' = \frac{h}{2\pi i}$, por não ser comutativo, não se anula (ver anterior).

Substituindo, obtemos:

$$(A + iB\lambda)(A - iB\lambda) = A^2 - i(AB - BA)\lambda + B^2\lambda^2 = \\ = A^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)\lambda + B^2\lambda^2 \geq 0 \quad ^{15}$$

Referência: Sears, v.4; Laboratório de Física do ITA; Yavorski.

Verificação da homogeneidade do binômio complexo: $(A + iB\lambda)$ Se A for L.

$iB\lambda \Rightarrow i = \sqrt{-1}$ cte B será p quantidade de movimento $p = mv = MLT^{-1}$

$$\lambda = i \frac{AB-BA}{2B^2} = i \left(\frac{AB}{2B^2} - \frac{BA^*}{2B^{2*}} \right) = \left(\frac{A}{2B} - \frac{A^*}{2B^*} \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{A}{B} - \frac{A^*}{B^*} \right) \\ iB\lambda = iB \left[\frac{i}{2} \left(\frac{A}{B} - \frac{A^*}{B^*} \right) \right] = -\frac{1}{2}(A - A^*) \quad \therefore \text{também } A$$

Denotamos com asterisco para levar em conta o Princípio da não comutação. A expressão de λ será deduzida a seguir.

Dado o trinômio: $y = ax^2 + bx + c$, o mínimo do trinômio será quando: $x = -\frac{b}{2a}$ para $a > 0$, isto é, concavidade para cima. O mínimo deve estar na parte mais baixa da curva, a parábola par mais simples possível, simétrica com relação ao eixo vertical, passando por $x = -\frac{b}{2a}$, além disso, a inequação apresentada é de 2º grau em λ .

Derivando y e igualando a zero:

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Quando $a > 0$, temos um mínimo, a concavidade é para cima (ver Figura).

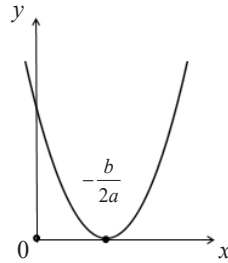
Quando $a < 0$, temos um máximo, a concavidade é para baixo.

Para ser mínimo, a derivada 1ª é crescente (ver Figura) se $a > 0$ e a 2ª, positiva.

Referência: Bezerra, Putnoki

¹⁴ É a constante de Planck, que a descobriu enquanto investigava o fenômeno da “Radiação térmica”, que a energia é constituída de quantidades elementares, denominadas *quanta*, plural de *quantum*. Por isso, se diz “quantização” da energia. Cada *quantum* é: $E = h \gamma$ sendo γ a frequência da radiação.

¹⁵ Como veremos posteriormente, $\lambda > 0$.



Resolvendo a equação, pela expressão do seu mínimo anteriormente exposto:

$$\lambda = i \frac{AB - BA}{2B^2} > 0, \text{ fazendo } A = p \text{ e } B = x, \text{ teremos } AB - BA = \hbar/2\pi i: \quad (3)$$

Note que AB é diferente de BA , e não são comutativos nesse caso (ver anterior).

Substituindo na desigualdade anterior:

$$A^2 + B^2 \frac{i^2 (AB - BA)^2}{4 B^4} - i(AB - BA) \frac{i (AB - BA)}{2 B^2} \geq 0$$

$$A^2 - \frac{(AB - BA)^2}{4B^2} + \frac{(AB - BA)^2}{2B^2} = A^2 + \frac{(AB - BA)^2}{4B^2} \geq 0$$

$\therefore A^2 B^2 \geq -\frac{1}{4} (AB - BA)^2$ Fazendo $A = \Delta p$ e $B = \Delta x$, aplicando (3) anteriormente, obtemos:

$$(\Delta p)^2 (\Delta x)^2 \geq \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{4\pi^2} = \frac{1}{16} \frac{\hbar^2}{\pi^2} \quad \therefore \Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{4\pi} = \frac{1}{2} \hbar \quad (4)$$

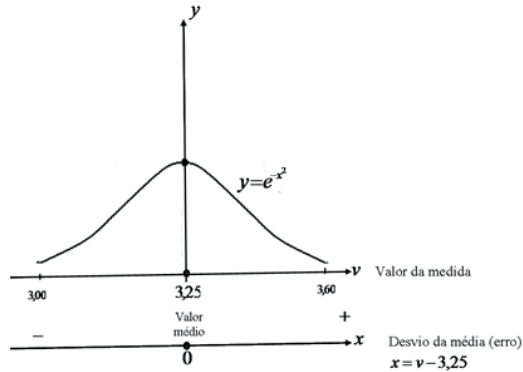
Lembrando que $\hbar = \hbar/2\pi$

É a lei da incerteza de Heisenberg na forma matemática.

Essa relação não é qualitativa como a da Equação 1 da Introdução, mas sim quantitativa, isto é, rigorosa.

A6.5 TEORIA DOS ERROS DE GAUSS

A6.5.1 Distribuição gaussiana



y é a frequência de medidas (n° de medidas iguais).

(Pode-se fazer um histograma com medidas semelhantes às frequências iguais ou separar em faixas de medidas.) Ver "Estatística", em Alonso e Finn (1972).

A frequência y decresce exponencialmente com o quadrado do desvio x . A integração fornece a área sob a curva $y = e^{-x^2}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Referência: Alonso-Finn vol. 1

Como exemplo, a medida do período de um pêndulo.

Tomando como referência Courant: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

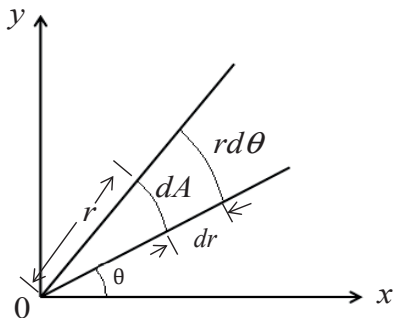
Seja I_a a integral de $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-\rho^2}$

No círculo de raio ρ , temos: $0 \leq \rho \leq a$

$$\text{Então: } I_a = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-a^2} \right) d\phi$$

Pois:

Em coordenadas polares:



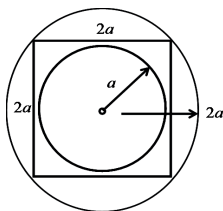
$dA = r d\theta dr$ fazendo:

$$u = \rho^2 \Rightarrow du = 2\rho d\rho$$

$$\therefore d\left(\frac{u}{2}\right) = \rho d\rho$$

$$e: \int e^{-u} du = e^{-u}$$

$$\therefore I_a = \pi(1 - e^{-a^2})$$



O quadrado formado por: $-a \leq \rho \leq a$, $-a \leq y \leq a$ contém o círculo: $0 \leq \rho \leq a$, sendo contido no círculo $0 \leq \rho \leq 2a$. O integrando $e^{-(x^2+y^2)}$ é sempre positivo.

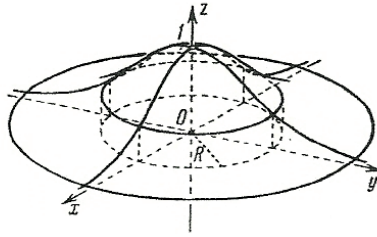
Logo:

$$\pi(1 - e^{-a^2}) = I_a \leq \int_{-a}^a (e^{-x^2-y^2} dy) dx \leq I_{2a} = \pi(1 - e^{-4a^2})$$

$$\int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} dy \right) dx = \int_{-a}^a e^{-x^2} \left(\int_{-a}^a e^{-y^2} dy \right) dx = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$\therefore \pi(1 - e^{-a^2}) \leq \left(\int e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi(1 - e^{-4a^2})$$

$$\text{Quando } a \rightarrow \infty, \text{ temos: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



Repetimos a operação para: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$

Logo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) dx = \pi$$

Por outro lado, se tivermos: $x^2 = at^2$, obteremos como

for fácil de ver: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. (1) ver tabela matemática Spigel e Born Física atômica

$$\text{Logo: } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-by^2} dx dy = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}$$

Ver interpretação espacial da integral Figura anterior.

Referência Piskounov

Tomando-se as ações espacial: $S_e = px$ e temporal: $S_t = -Et$ $S = S_e + S_t$ (2) ver Equação 2 da “Equação da onda de Schrödinger”, Secção A6.5.

A equação de onda se torna: $\Psi = e^{(2\pi i/\hbar)(S_e+S_t)}$, uma forma semelhante à adotada por Landau em Mecânica Quântica:

$$\psi = ae^{(i/\hbar)S}$$

A6.6 DETERMINAÇÃO DO PRINCÍPIO DA INCERTEZA DE HEISENBERG

A6.6.1 Integral e transformadas de Fourier

Pela identidade de Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Desenvolvendo em série: e^x , $\sin x$ e $\cos x$, obtemos:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

(Wilfred Kaplan, v. 2)

A série de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Ver Equação c da “Equação da Onda de Schrödinger”, isto é, qualquer movimento harmônico pode ser expresso como superposição de movimentos harmônicos de simples frequência $\omega, 2\omega, 3\omega \dots n\omega$, entregando a série original de Fourier

$$\text{A expressão pode ser escrita: } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{\ell} x + b_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x$$

$$\text{Em que: } a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{\ell} t dt \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} t dt$$

$$\text{Introduzindo: } \alpha_1 = \frac{\pi}{\ell}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{\ell} \dots \alpha_k = \frac{k\pi}{\ell} \quad \text{e} \quad \Delta\alpha_k = \frac{\pi}{\ell}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \alpha_k (t-x) dt \right] \Delta\alpha_k$$

levando $\ell \rightarrow \infty$ e observando que:

$$\left| \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt \right| \leq \int_{-\ell}^{\ell} |f(t)| dt < \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = Q \rightarrow 0$$

Obtemos: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t-x) dt \right] d\alpha$, denominado “Integral de Fourier”.

Como: $\cos \alpha (t-x) = \cos \alpha t \cos \alpha x + \sin \alpha t \sin \alpha x$, teremos:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right] \cos \alpha x d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right] \sin \alpha x d\alpha$$

Forma complexa: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t-x) dt \right] d\alpha$, da integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t-x) + i \sin \alpha (t-x) dt \right] d\alpha$$

$$\text{Em que: } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(t-x)} dt \right] d\alpha \quad (0)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt \right] e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Portanto: $F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt$, Transformada de Fourier

e: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$, Transformada inversa de Fourier

A6.6.1.1 Determinação

Tomando-se a função de erro de Gauss: $f(x) = Ae^{-x^2/a^2}$ (1)

Utilizando a média quadrática, obtemos a semi-largura do feixe de ondas:

$$\Delta x = \sqrt{\overline{(x^2)}} = \sqrt{\left[\frac{\int x^2 f^2(x) dx}{\int f^2(x) dx} \right]} = \frac{1}{2}a \quad (2) \text{ ver equação 1a e 1b da secção A.6.4.1.1,}$$

equação 1 da secção A6.5 e Born

Usando a integral de Fourier, na forma:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{2\pi i k x} dk, \text{ onde: } \varphi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

Introduzindo: $\rho = k/2\pi$, temos:

$$\varphi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx, f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{2\pi i k x} dk, \text{ em que:}$$

$$\varphi(k) = \sqrt{\pi} g(2\pi k) \quad {}^{16}$$

Ref.: Courant, v. 2.

$\varphi(k)$ é a amplitude de uma onda harmônica parcial com o número de ondas k .

Substituindo $f(x)$ de 1 em $\varphi(k)$:

$$\varphi(k) = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2/a^2 + 2\pi i k x)} dx = A e^{-(\pi k a)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x/a + \pi i k a)^2} dx$$

Fazendo: $x/a + \pi i k a = y$, $dx = a dy$ transformamos em uma integral de Gauss:

$$a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = a\sqrt{\pi}, \text{ portanto: } \varphi(k) = Aa\sqrt{\pi} e^{-(\pi k a)^2} = Aa\sqrt{\pi} e^{-k^2/b^2}$$

Em que: $b = 1/\pi a$, distribuição que constitui feixe de ondas $f(x)$ é ainda função de Gauss com semilargura $\Delta k = \frac{1}{2}b$

$$\text{Portanto: } \Delta x \cdot \Delta k = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4\pi}$$

$$E = h \cdot \nu$$

Sabemos que sob o ponto de vista da relatividade, a energia e quantidade de movimento são entidades da mesma espécie. A quantidade de movimento é a parte espacial de um quadrvetor cuja componente temporal é a energia, e é óbvia a sugestão de expressar por coerência: $p = hk$. Se ν representa o número de vibrações por unidade de tempo, k será o número de ondas por unidade de comprimento, portanto, $p = hk$.

¹⁶ Lembrar que: $g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$ e $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dx$ transformadas de Fourier: substitui-se α por $2\pi\alpha$ e leva-se em conta que: $d(2\pi\alpha) = 2\pi d\alpha$, na Equação 0.

Havíamos deduzido que $p = \hbar k$, mas como $\hbar = h/2\pi$, após 2π rad, como o movimento é periódico, as oscilações retornam à mesma posição, portanto, espacialmente idêntico. Multiplicando então por h , obtemos:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{4\pi} = \hbar/2 \quad (3)$$

Que é o princípio de Heisenberg, já obtido, desta vez como igualdade, sendo a desigualdade já comprovada como o mínimo da função S .

Ver Equação 4, no final de “Em outras palavras”, Secção A6.4.1.

Essa relação é quantitativa, isto é, rigorosa.¹⁷

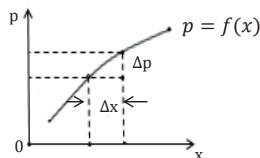
Ref.: Max Born

Em termos da teoria dos erros de Gauss, confirmamos o apresentado anteriormente: a curva obtida na difração é de probabilidade, distribuição gaussiana, em que o máximo ocorre no centro e, nas extremidades, tende assintoticamente a zero.

A condição de mínimo, como visto no Anexo 3, Equação 3, é que $dS = 0$ ou seja: $dS = dS_e + dS_t = 0$

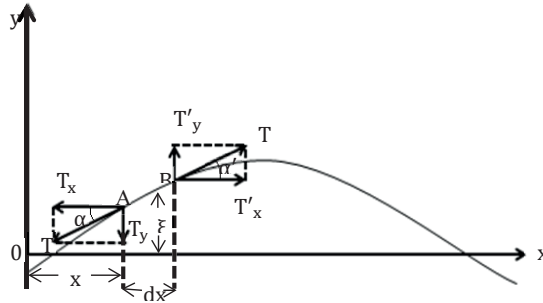
$\therefore d(px) = d(Et)$ e como: $\frac{E}{p} = c$ e $\frac{x}{t} = c$, obtemos uma identidade: $c = c$. Isso significa que a energia E que se desloca com a velocidade da luz, se transmite e se comunica com a velocidade da luz (isto é, se transfere).

¹⁷ Observação importante: $\Delta S = \Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2 = h/4\pi$.



Ver Equação 2 da Teoria Atômica de Bohr, Secção A6.3.

A6.7 ONDAS TRANSVERSAIS EM UM FIO



$$T'_y = T \operatorname{sen} \alpha'$$

$$T_y = -T \operatorname{sen} \alpha$$

ξ é o deslocamento do fio da posição de equilíbrio

Força vertical sobre secção AB do fio:

$$F_y = T'_y - T_y = T (\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha)$$

Se a curvatura não for muito grande, os ângulos α e α' serão pequenos e podem ser substituídos por sua tan:

$$F_y = T (\tan \alpha' - \tan \alpha) = T d(\tan \alpha) = T \frac{\partial}{\partial x} (\tan \alpha) dx$$

Estamos considerando, por exemplo, uma corda vibrante.

Porém, $\tan \alpha$ depende tanto da posição x quanto do tempo t . Contudo, $\tan \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x}$

$$\therefore F_y = T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

Força igual à massa da secção AB vezes aceleração para cima $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

Sendo m a densidade linear do fio expressa em kg/m

$$\text{Massa da secção AB: } m dx: (m dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\text{Análise dimensional: } T = [F], m = \left[\frac{M}{L} \right] \therefore F = [M] \left[\frac{L}{T^2} \right]$$

$$\therefore \frac{T}{m} = \frac{[M][L/T^2]}{[M/L]} = [L^2/T^2] = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{T/m}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Assim, chegamos à equação da onda típica¹⁸, diferencial de 2ª ordem já obtida na Seção 5.23, como preâmbulo das equações dos campos \vec{E} e \vec{B} que definem a onda eletromagnética.¹⁹

A questão é como resolvê-la partindo da equação diferencial. Então, veremos a seguir que ao utilizar o método da separação de variáveis, chegamos à solução das expressões na forma trigonométrica ou exponencial, evidenciando que a recíproca é verdadeira, no caso em questão, ao partir da equação diferencial para se chegar às amplitudes.

Quando a amplitude for grande, em relação ao tamanho da onda, a equação para ondas transversais se torna: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]$, equação que não é linear e se reduz à equação anterior quando $(\partial \xi / \partial x)^2$ for desprezível. Note-se que: $\text{sen} \alpha = \tan \alpha / \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \tan \alpha - \frac{1}{2} \tan^2 \alpha + \dots$, desenvolvendo em série. Essa é a ressalva.

A6.8 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA

A equação da onda unidimensional: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ (1), equação diferencial parcial de 2ª ordem, pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis ou de Fourier.

Temos: $\xi = \xi(x, t)$, fazemos: $\xi = X(x) \cdot T(t)$

$$\therefore \frac{\partial \xi}{\partial t} = X(x) \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = T(t) \frac{\partial X}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = X(x) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = T(t) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad \text{substituímos em (1):}$$

$$X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = v^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

Separando as variáveis: $\frac{\partial^2 T / \partial t^2}{v^2 T} = \frac{\partial^2 X / \partial x^2}{X} = -k^2$, número de comprimentos de onda que é uma constante de separação. (2)

Tomando: $\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$, onde: $\omega = vk(3)$, ver equação de Schrödinger, equação 1, Seção A6.4, “Equação da onda de Schrödinger”.

Seja a equação diferencial de 2ª ordem: $\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$, p e q constantes

Tomando uma solução particular: $y = e^{rx}$, derivando:

$$\frac{dy}{dx} = r e^{rx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = r^2 e^{rx}, \quad \text{substituindo e dividindo por } e^{rx}: e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0$$

$r^2 + pr + q = 0$, chamada equação auxiliar da equação diferencial.

A equação auxiliar tem duas raízes distintas r_1 e r_2 , então: $y = e^{r_1 x}$ e $y = e^{r_2 x}$, logo, a solução geral será: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

¹⁸ Utilizada em diversos fenômenos físicos como: ondas elásticas em bastão sólido, ondas de pressão em coluna de gás, ondas superficiais em um líquido etc.

¹⁹ Partindo das amplitudes de \vec{E} e \vec{B} para chegar à equação diferencial.

Tem duas constantes arbitrárias e a equação diferencial é satisfeita pela solução geral.

Portanto, $\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$, a equação auxiliar é: $r^2 + \omega^2 = 0 \therefore r = \pm \omega\sqrt{-1} = \pm \omega i$

Logo, as raízes são imaginárias: $r_1 = +\omega i$ e $r_2 = -\omega i$

$$e^{r_1 t} = e^{+\omega i t} \quad e \quad e^{r_2 t} = e^{-i\omega t} \quad \therefore y = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (5)$$

$$\text{Usando a fórmula de Euler: } e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad e \quad e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t \quad (5a)$$

Fazendo $A = C_1 + C_2$ e $B = (C_1 - C_2)i$ obtemos:

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (6)$$

Retomando as equações (2) e (3):

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -v^2 k^2 = -\omega^2, \quad \text{pois} \quad \omega = vk \therefore \xi_t = e^{-i\omega t} \text{ uma solução particular}$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 \quad \therefore \xi_e = e^{ikx} \text{ uma solução particular}$$

$$\text{Logo: } \xi = \xi_e \cdot \xi_t = e^{ikx} \cdot e^{-i\omega t} = e^{i(kx - \omega t)} \quad (4)$$

$$2\pi/\lambda = k \quad e \quad h/p = \lambda$$

$$\therefore 2\pi p/h = k, \text{ ver equação a da Seção Introdução, A6.1, "Equação da onda de Schrödinger"} \quad (7)$$

Se a onda for tridimensional:

$$\text{A equação } \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi}{c^2 \partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \xi - \frac{\partial^2 \xi}{c^2 \partial t^2} = 0 \quad (7a), \text{ em que:}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8) \quad \text{Aqui, } v = c$$

$$\text{Usando a notação de D'Alembert: } \square = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}$$

$\square \xi = \nabla^2 \xi - \frac{\partial^2 \xi}{c^2 \partial t^2}$, na verdade, é uma equação quadridimensional, $\xi = \xi(x, y, z, ct)$, em que a 4ª dimensão é ct , c = velocidade da luz e t , tempo.

Então, a solução se torna: $\xi = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, Equação (4), equação 3a da Seção A6.4.1, "Em outras palavras".

Para exemplificar, citamos:

$$\text{Equação do pêndulo simples: } \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \text{ ver MHS, (9) Seção 2.1.4, Equação 6.}$$

$$\text{Fazendo } \omega^2 = g/L \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0, \omega \text{ é constante} \quad g = \text{aceleração da gravidade,}$$

L = comprimento do pêndulo $\omega = d\theta/dt$ arco $s = L\theta$ θ = ângulo descrito pelo pêndulo.

Façamos $\theta = e^{rt}$, derivando duas vezes: $\frac{d\theta}{dt} = re^{rt}$ e $\frac{d^2\theta}{dt^2} = r^2e^{rt}$

Teremos, substituindo na equação: $r^2e^{rt} + \omega^2e^{rt} = 0 \Rightarrow e^{rt}(r^2 + \omega^2) = 0$

Equação auxiliar: $r^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow r = \pm \omega i$, em que $i = \sqrt{-1}$

Raízes da equação: $r_1 = \omega i$ e $r_2 = -\omega i$ $p = 0$ e $q = \omega^2$

Equação auxiliar: $r^2 + pr + q = 0$

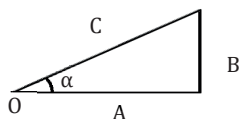
Solução geral: $\theta = C_1e^{\omega it} + C_2e^{-\omega it}$ ver Equação (5)

Em forma trigonométrica: $\theta = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ (ver equação 5a, aplicando a fórmula de Euler: $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$

$$e^{-ikt} = \cos kt - i \sin kt$$

Ver Equação (6)

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$



$$\cos \alpha = \frac{A}{C} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{B}{C}$$

$$\therefore \theta = C \left(\frac{A}{C} \cos \omega t + \frac{B}{C} \sin \omega t \right)$$

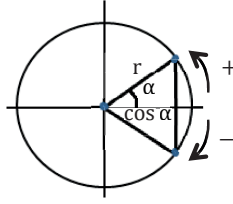
$$\theta = C(\cos \alpha \cos kt + \sin \alpha \sin kt)$$

$$\theta = C \cos(kt - \alpha) = C \cos(\alpha - kt), (10)^{20}$$

$\cos \alpha = \cos(-\alpha)$, pois:

$\cos(\omega t - kx) = \cos kx \cos \omega t + \sin kx \sin \omega t$, e assim retomamos a equação do MHS, vista na Seção 2.1.3, pela recíproca, isto é, partindo da equação diferencial conseguimos a amplitude. Verifica-se também que ao tomar a equação diferencial parcial, resolvendo por separação de variáveis, cada uma das equações separadas é semelhante à equação do MHS.

²⁰ Veja-se MHS, Seção 2.1.3, Equação 4b2.



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \Rightarrow \theta = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

ver Equação (5)

Referência Maurer

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad e \quad 2\pi/\lambda = k \quad \therefore 2\pi p/h = k, \quad 2\pi \nu = \omega \quad h\nu = E \quad 2\pi E/h = \omega$$

Ver Equação a na Introdução, Equação 1 em Equação da Onda de Schrödinger, e Equação 0 a, “Em outras palavras”.

$\psi = e^{(2\pi i/h)(px - Et)} = e^{(2\pi i/h)px} \cdot e^{-(2\pi i/h)Et} = \psi_e \psi_t$ (11), como vimos na Equação 2, é a solução da equação da onda de Schrödinger, na secção de mesmo nome.

$$\psi_e = e^{(2\pi i/h)px}$$

$$(2\pi ix) / (h/p) = (2\pi/\lambda)ix, \text{ como } 2\pi/\lambda = k \quad e \quad h/p = \lambda \Rightarrow \psi_e = e^{ikx}$$

$$\psi_t = e^{-(2\pi i/h)Et}, \text{ como } E = h\nu \quad e \quad (2\pi \nu h/h)it = 2\pi i \nu t$$

$$\omega = 2\pi \nu \Rightarrow \psi_t = e^{-i\omega t}$$

Referência: Sielawa

Se o espaço for tridimensional:

$$\text{Onda plana: } \xi = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt) \Rightarrow \xi = \xi_0 \sin k(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt) \quad (8a) \quad \vec{u} = \text{vetor unitário}$$

Vetor propagação $\vec{k} = k\vec{u} \Rightarrow \text{comprimento } k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ na direcção da propagação.

$\xi = \xi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \xi_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$, como visto na equação da onda de Schrödinger.

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = (k_x \vec{e}_i + k_y \vec{e}_j + k_z \vec{e}_k) \cdot (x_i \vec{e}_i + x_j \vec{e}_j + x_k \vec{e}_k) \quad (4)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2/v^2, \text{ módulo do vetor } \vec{k} \text{ (por Pitágoras).}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \xi \quad \text{ver equação 7a (equação da onda em coordenadas cartesianas)}$$

Fazendo: $\xi = X(\vec{r}) \cdot T(t)$ por separação de variáveis (método de Fourier)

Como visto no início da Resolução da equação da onda.

$$\text{Substituindo } T \cdot \nabla^2 X = \frac{1}{v^2} X \frac{d^2 T}{dt^2} \Rightarrow \frac{\nabla^2 X}{X} = \frac{1}{v^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2$$

$$\text{Em que: } \omega = vk \Rightarrow k = \frac{\omega}{v}$$

Referência: Alonso- Finn e Sietawa

Outra resolução interessante é a devida a Landau- Lifchitz.

Para ondas denominadas planas (ver Equação 0 em “Equação da onda de Schrödinger”), as equações do campo têm a forma: $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, em que f é qualquer componente dos vetores \vec{E} ou \vec{H} .

$$\text{Para resolver, colocamos na forma: } \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0$$

Introduzindo as novas variáveis²¹,

$$\text{Isto é, variáveis independentes: } \xi = t - \frac{x}{c} \quad \text{e} \quad \eta = t + \frac{x}{c} \quad \begin{cases} 2t = \xi + \eta \\ 2\frac{x}{c} = \eta - \xi \end{cases}$$

Ou seja, $\xi \rightarrow$ avança no tempo e η recua.

$$\text{De maneira que: } t = \frac{1}{2}(\eta + \xi) \quad \text{e} \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi)$$

De fato, retomando a Seção 5.23, Equação a: $f = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, chamando $\xi = t - \frac{x}{c}$, teremos:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \quad \text{etc. obtemos: } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{c^2 \partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\text{Logo: } \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\text{E a equação assume a forma: } \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Integrando em relação a ξ : $\frac{\partial f}{\partial \eta} = F(\eta)$, função arbitrária.

Integrando outra vez: $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, f_1 e f_2 , funções arbitrárias.

Portanto: $f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$, solução geral, e os termos contendo f_1 e f_2 , soluções particulares.

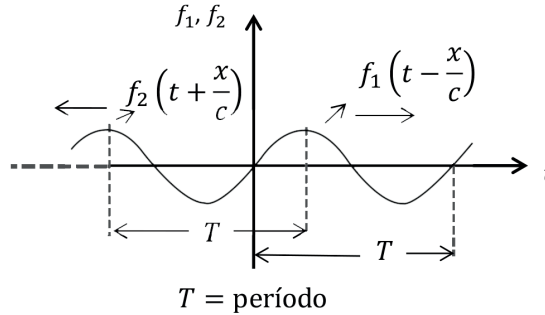
Do Alonso-Finn.

²¹ Isto é, a função f que era: $f = f(x, t)$, se torna $f = f(\xi, \eta)$, portanto:

$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) f = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) f(\xi, \eta) = 0$, ver Observação indicada em 5, mais adiante.

²² Da mesma forma, com $\eta = x + ct$, teremos $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \eta}{\partial t} = +c$, etc. Obtemos também $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Nesse caso, ξ seria avanço espacial e η , recuo.



Assim $f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$ (12), representa uma onda plana propagando-se no sentido positivo do eixo t e $f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$, onda plana se propagando no sentido negativo.

Essa resolução é muito satisfatória, simples e compacta.

Como se depreende, f é uma função periódica. Se for harmônica, será do tipo MHS, como visto nas páginas anteriores, e será expressa:

$f = f_0 \sin k(x - vt)$ (8b), função senoidal, podendo também ser expressa, como já visto, por uma função exponencial: $f = e^{i(kx - \omega t)}$ por intermédio da fórmula de Euler: $e^{\pm ikt} = \cos kt \pm i \sin kt$

Observação: (5)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x/c} \right) = \left(\frac{\partial(\partial x/c - \partial t)}{\partial t \partial x/c} \right) = - \left(\frac{\partial[\partial(t - x/c)]}{\partial t \partial x/c} \right) = - \left(\frac{\partial(\partial \xi)}{\partial t \partial x/c} \right) \text{ invertendo}$$

$$- \frac{\partial t \partial x/c}{\partial(\partial \xi)} \quad 23$$

$$\partial t = 1/2 (\partial \eta + \partial \xi) \text{ e } \partial x/c = 1/2 (\partial \eta - \partial \xi) \quad \therefore \partial t \partial x/c = 1/4 (\partial^2 \eta - \partial^2 \xi) =$$

$$= f(\eta, \xi)$$

$$\text{Idem para: } \frac{\partial t \partial(x/c)}{\partial(\partial \eta)} \quad \therefore \left(\frac{\partial t \partial x/c}{\partial(\partial \xi)} \right) \left(\frac{\partial t \partial x/c}{\partial(\partial \eta)} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial(\partial \xi)} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial(\partial \eta)} \right) f(\eta, \xi)$$

Integrando em η e depois em ξ obtemos $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$ e, como já vimos anteriormente, integrando novamente em ξ e η , se obtém: $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, f_1 e f_2 , funções arbitrárias.

$$\therefore \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) f, \text{ justificando } \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right), \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \text{ e } \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\text{Da relação de de Broglie: } E = \hbar \omega \quad \text{e} \quad p = \hbar k \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\text{Substituindo por: } k \Rightarrow \frac{1}{i} \nabla \quad \text{e} \quad \omega \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{ver equação 1 da secção A6.4.1}$$

²³ Pois: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$

$$\therefore E = \hbar i \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow p_i = \hbar \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow$$

$$dS_t = -Edt = -\frac{\hbar}{i} \quad dS_e = p_i dx_i \quad (\text{ver equação 2, Teoria dos erros de Gauss, Secção A6.5})$$

$$\text{Integrando:} \quad \therefore S_t = -Et \quad \therefore S_e = p_i x_i$$

$$e^x = y \quad \ln y = x \quad \text{Ex: } 10^2 = 100 \quad \log_{10} 100 = 2$$

$$e^{(i/\hbar)S_e} = \Psi_e \Rightarrow \ln \Psi_e = \left(\frac{i}{\hbar}\right) S_e \quad \ln \Psi_t = \left(\frac{i}{\hbar}\right) S_t \quad (\text{ver equação 2, Equação da Onda de Schrödinger, Secção A6.4})$$

$$\ln \Psi_e = \left(\frac{i}{\hbar}\right) p_i x_i \quad \ln \Psi_t = -\left(\frac{i}{\hbar}\right) Et^{24} \quad (\text{ver equação 11, Resolução da equação da onda, Secção A6.8})$$

$$\text{Somando: } \ln \Psi_e + \ln \Psi_t = \ln(\Psi_e \cdot \Psi_t) = \left(\frac{i}{\hbar}\right) (p_i x_i - Et)$$

$$\therefore \Psi = \Psi_e \cdot \Psi_t = e^{(i/\hbar)(p_i x_i - Et)}$$

$$\text{Ou melhor: } E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -Et = \frac{\hbar}{i} \quad S_t = -Et$$

$$\Psi = e^{(i/\hbar)(p_i x_i - Et)} \quad \text{derivando em t: } \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right) E \Psi$$

$$\text{Ou } E \Psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Rightarrow E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \ln \Psi_t = -Et \left(\frac{i}{\hbar}\right)$$

$$\therefore \Psi_t = e^{-Et(i/\hbar)} \quad \text{q.e.d.}$$

A6.9 UMA PROVA SIMPLES DO PRINCÍPIO DA INCERTEZA DE HEISENBERG

Seja um oscilador harmônico linear, por exemplo, o do Capítulo 2, sobre o MHS.

Partindo da expressão clássica da energia: $E = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} kx^2$, k Constante elástica, ver equação 3c da Secção 2.1.3, $k = m\omega_0^2$

Introduzindo a condição quântica da lei da comutação:

$$px - xp = \frac{\hbar}{2\pi i} = \frac{\hbar}{i}$$

$$E = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega_0^2 x^2)$$

Conforme a mecânica ondulatória:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E - \frac{1}{2} kx^2 \right) \right] \Psi = 0, \text{ ver equação 3 da Secção A.6.4.1.}$$

²⁴ Justificando o sinal negativo em Et . Além do mais, pode-se verificar na equação 12 que:

$f = f_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)$, a onda se propaga no sentido positivo de t e para $f = f_1 \left(t + \frac{x}{c} \right)$, a onda se propaga no sentido negativo de t , isto é, a onda retrocede.

$$\lambda = \frac{8\pi^2 m E}{h^2} \quad \alpha = \frac{2\pi m \omega_0}{h} = \frac{4\pi^2 m \lambda_0}{h} \quad (1) \quad \omega_0 = 2\pi \lambda_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\therefore \left[\frac{d^2}{dx^2} + \lambda - \alpha^2 x^2 \right] \psi = 0 \quad \alpha = \frac{\lambda}{2} \quad \frac{1}{2} \alpha x^2 = \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 m \lambda_0}{h} x^2 = 2\pi^2 m \lambda_0 \frac{x^2}{h}$$

$$\text{Recordemos: } \psi_e = e^{(2\pi i/h)px}, \frac{1}{2} \alpha x^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{4\pi^2 m \lambda_0}{h} x^2 = 2\pi^2 m \lambda_0 \frac{x^2}{h}$$

$$\psi = a_0 e^{-1/2 \alpha x^2} = a_0 e^{-2\pi^2 m \lambda_0 x^2 / h}$$

$$\omega_0 = 2\pi \lambda_0$$

$$E_0 = \frac{h^2 \alpha}{8\pi^2 m} = \frac{1}{2} h \lambda_0$$

Em mecânica clássica o estado mínimo de energia de um oscilador é zero na posição de repouso ou equilíbrio. Porém, em mecânica ondulatória, o estado fundamental tem energia finita $E_0 = \frac{1}{2} h \lambda_0$ e a função própria é a função de erro de Gauss

$$\psi_0 = a e^{-1/2 \alpha x^2} \text{ em que: } \alpha = \frac{4\pi^2 m \lambda_0}{h} \text{ e } \lambda_0 \text{ frequência própria do oscilador.}$$

Pelo desvio quadrático médio da coordenada (visto $\bar{x} = 0$):

$$\overline{\delta x^2} = \overline{x^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi_0 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0 dx} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{h}{8\pi^2 m \lambda_0} \quad (25), \text{ de 1: } \alpha = \frac{4\pi^2 m \lambda_0}{h}$$

$$\text{Recorde-se: } \frac{d}{dx} \ell n u = \frac{du/dx}{u}$$

$$\text{Equação da energia} \quad \therefore E = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} m (2\pi \lambda_0)^2 x^2$$

Desvio quadrático médio da quantidade de movimento:

$$\overline{\delta p^2} = m^2 (2\pi \lambda_0)^2 \overline{\delta x^2} = \frac{1}{2} h \lambda_0 m \quad m \omega_0 x = m (2\pi \lambda_0) x = mv \Rightarrow dp = mdv$$

$$dv_0 = \omega_0 dx, \omega_0 = \text{cte.}^{26}$$

$$\therefore \overline{\delta x^2} \overline{\delta p^2} = \frac{h^2}{16\pi^2} = \frac{1}{4} \hbar^2 \quad \text{com: } (\Delta x)^2 = \overline{\delta x^2} \quad (\Delta p)^2 = \overline{\delta p^2}$$

$$\Delta x \Delta p = \frac{h}{4\pi} = \frac{1}{2} \hbar \quad (1) \quad \text{forma exata do princípio da incerteza de Heisenberg}$$

²⁵ $\lambda = 2\alpha, I_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, I_2 = \frac{dI_0}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx} = \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}} (1/2) \quad \overline{x^2} = \frac{2I_2}{2I_0} = \frac{1/4 \sqrt{\pi/\lambda^3} (1/2)}{1/2 \sqrt{\pi/\lambda}} \frac{1}{2} \left(\frac{1/2}{1/2\alpha} \right) = \frac{1}{2\alpha}, \text{ Ref.: Max}$

Born, Anais ESA Luiz de Queiroz.

²⁶ Recorde-se que $v = R\omega$, ver Equação 3b do MHS no Capítulo 2.

Agora, se torna óbvio o motivo de $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, isto é, no mínimo a metade de \hbar , pois como visto na primeira demonstração, deveria ser menor que \hbar , pois \hbar está relacionado com a menor porção de energia possível: $\epsilon_0 = \hbar \cdot \gamma$

Em seguida, demonstramos quantitativamente que deveria ser no mínimo $\frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$, porque \hbar se refere à onda elementar de energia. Se tomarmos um eixo de coordenadas como origem, metade fica do lado positivo e a outra metade no lado negativo, isto é, resulta em: $\frac{1}{2} (\frac{h}{2\pi})$ de cada lado, uma vez que a onda, como sabemos, tem 2π radianos.

Nota-se que \hbar é exatamente (ou justamente) a quantidade de movimento angular mínima do elétron em torno do núcleo, ver equação 3 da secção A9.4, movimento angular.

Sendo L esse momento angular, $2\pi L = 2\pi\hbar = h$, constante de Planck, quantidade mínima de energia na natureza, é o “Quantum” de Planck.

Também se torna claro o porquê da estabilidade do átomo, que não funciona exatamente como um sistema planetário, pois embora haja uma atração entre o núcleo e os elétrons, os quais têm cargas opostas, a velocidade c , consequentemente, a energia dos elétrons (recorde-se que: $\Delta p = mv$), é tão grande que o núcleo não consegue reter o elétron, provocando um efeito repulsivo contrabalançando a atração eletrostática, isto é, o efeito dinâmico do elétron torna o átomo estável. Retorne-se à hipótese de De Broglie, confirmada por Davisson Germer nas páginas iniciais deste Anexo, para uma melhor compreensão desse efeito quântico (ver as Equações 1a e 1b), isto é, de a matéria também ter um comportamento ondulatório.

Para responder como Planck chegou ao “Quantum” h , anexamos a Secção A6.11.

A6.11. COMO MAX PLANCK DESCOBRIU A FÓRMULA DA IRRADIAÇÃO DO CORPO NEGRO, QUE DEU INÍCIO À FÍSICA QUÂNTICA.

Em 1896, Wien afirmou que o espectro da radiação do corpo negro correspondia a um equilíbrio térmico, que seria completamente determinado pelo Princípio da máxima entropia, mas não o fez. Em vez disso, adotando um modelo de radiação em analogia com a distribuição de velocidade de Maxwell, obteve a formula:

$$u(o, T) = f_1(o) \exp[-f_2(o)/T]$$

Onde $f_1(o) = c_1/o^a$, c_1 e a ctes.

$f_2(o)$ a determinar

A fim de satisfazer a Lei de Stefan-Boltzmann $W = \sigma T^4$, da densidade de energia ⁽²⁷⁾, é necessário que $\alpha = 5$ e $f_2(o)/T$ seja função de oT , dando uma expressão à Lei de deslocamento de Wien: $f_2(o)/T = c_2/oT$ onde c_2 cte. ⁽²⁸⁾

Resulta: $u(o, T) = c_1 o^{-5} \exp[-c_2/oT]$, conhecida como fórmula de Wien. (4)

Daqui resulta comprimento de onda máximo o_m : $o_m T = c_2/5$

Estava em concordância com observações de Paschen de 1896: $c_2 = 5 o_m T = 14.445/\mu K$ ou $o_m T = 2,891 \times 10^3 mK$ (K temperatura absoluta em graus Kelvin).

Desde 1897, Planck decidiu realizar o intento de Wien e em 1899, atraído pelas medições de Lummer e Pringsheim de que a distribuição espectral não dependia da constituição dos corpos e sim unicamente da temperatura.

Inicialmente, pelo princípio das Ondas estacionárias em Cavidades ressonantes, ver A1. Finn v2 p. 455, obteve: $u(\lambda, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \bar{\epsilon}$, onde $\bar{\epsilon}$ energia média de um oscilador à temperatura T , f , frequência.

Seguindo sugestão de Wien, decidiu relacionar $\bar{\epsilon}$ com a entropia e não com a temperatura, pelo seu faro em Termodinâmica, pois, temos que: $dS = \frac{\delta Q}{T}$, e pelas relações de Maxwell, temos: 1º Princípio da Termodinâmica: $TdS = dU + pdV$, sendo U energia interna, obtemos: $\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T$, isto é, a volume V cte.

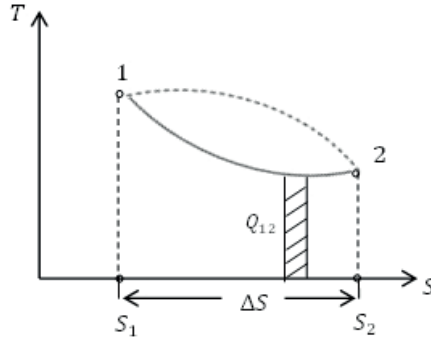
Aliás, a esse propósito, convém salientar que T é um fator integrante, que transforma a diferencial não exata de calor δQ em uma diferencial exata de entropia dS , isto é, uma diferencial que não depende do caminho percorrido. O símbolo δ define uma diferencial não exata. A diferencial exata só depende dos estados inicial e final.

$$\int_1^2 \delta Q = \int_1^2 T dS = Q_{12}$$

Vemos que o valor de Q depende do processo desenvolvido, mas $S_2 - S_1$ não depende. Ou seja, o processo com a linha inteira dá um determinado valor para Q_{12} que é diferente do processo com a linha tracejada, (ver figura).

²⁷ Energia por unidade de área.

²⁸ $\frac{W_1}{T_1^4} = \frac{W_2}{T_2^4} \Rightarrow \frac{W_1}{W_2} = \frac{T_1^4}{T_2^4} \Rightarrow \frac{W_1 \lambda_2 T_2}{W_2 \lambda_1 T_1} = \frac{T_1^4}{T_2^4} \Rightarrow \frac{W_{\lambda 1}}{W_{\lambda 2}} = \frac{T_1^5}{T_2^5} \therefore \frac{W_{\lambda}}{T^5} = cte$, por considerações termodinâmicas, Wien comprovou: $\frac{T}{T_0} = \frac{o}{o_0} \circledast oT = cte$, recorde-se $W_o = \frac{W}{o}$, fluxo de energia por comprimento de onda unitário. Lummer e Pringsheim o comprovaram experimentalmente. Wien tratou a irradiação como uma máquina termodinâmica. Considerou que a irradiação exerce pressão nas paredes do recinto. O que aconteceria se uma expansão adiabática ocorresse. Encontrou que a relação entre λ e T , antes e depois, seria: $T/T_0 = \frac{o}{o_0} \circledast oT = cte$.



As áreas desenvolvidas pelos 2 processos são diferentes.

Voltando à relação de Maxwell:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \frac{1}{T}$$

Tomando a Lei de Wien (eq. 4) e renomeando as constantes, obtemos; explicitando U : $U = b f e^{-a/T}$, $u_f = U f$

$$\ell n\left(\frac{U}{bf}\right) = -\frac{af}{T}, \text{ como } \int \frac{dx}{x} = \ell n x \Rightarrow \frac{d}{dx} \ell n x = \frac{1}{x} \quad (\text{operação inversa})$$

$$\text{Logo: } \ell n\left(\frac{U}{bf}\right) = -\frac{af}{T} \Rightarrow \frac{1}{af} \ell n\left(\frac{U}{bf}\right) = -\frac{1}{T}$$

$$\therefore \ell n\left(\frac{U}{bf}\right)^{1/(af)} = -\frac{1}{T}$$

Insertando a relação de Maxwell:

$$\frac{\partial S}{\partial U} = -\frac{1}{af} \ell n\left(\frac{U}{bf}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right) = -\frac{1}{af} \frac{bf}{U} = -\frac{b}{a} \frac{1}{U}$$

Ou seja: $\frac{d^2 S}{dU^2} \propto \frac{1}{U}$, isto é, proporcional a $\frac{1}{U}$.

Mas esta relação surpreendentemente simples se revelou insustentável com as medições, revelando ser inadequada como forma geral.

Se chamarmos: $R = (\partial^2 S / \partial U^2)^{-1}$, confrontando com as medições realizadas por H. Rubens e F. Kurlbaum, revelaram que a radiação infravermelha emergente de cristais de fluorita e salgema para energia e comprimento de onda longo, revelaram que o R era proporcional à

energia ao quadrado: $\frac{d^2 S}{dU^2} \propto \frac{1}{U^2}$, válida para frequências baixas.

Então, para tomar a fórmula geral, sendo válida para ondas longas e curtas, Planck modificou para:

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{1}{U(U+b)} \Rightarrow \frac{d}{dU} \left(\frac{dS}{dU}\right) = -\frac{1}{U(U+b)} \Rightarrow d\left(\frac{dS}{dU}\right) = -\frac{dU}{U(U+b)}$$

Integrando: $\frac{dS}{dU} = \frac{1}{b} \ell n \frac{U+b}{U}$ Das tabs de integrais: $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b} \ell n \frac{ax+b}{x} + C$

Com a definição da temperatura:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{b} \ell n \frac{U+b}{x} \quad (29), \text{ explicitando } U: U = \frac{b}{e^{b/T}-1}$$

Voltando a equação de Planck:

$$u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \left(\frac{b}{e^{b/T}-1} \right)$$

Esta fórmula foi revelada na Sociedade Física de Berlim em 19 de outubro de 1900.

Explicuemos o raciocínio de Planck:

Como inicialmente, tínhamos:

$$R = \frac{1}{d^2 S / dU^2} = -\frac{a}{b} U, \text{ depois das experiências de Rubens e Kurlbaum, se obteve:}$$

$$R = \frac{1}{d^2 S / dU^2} = -U^2$$

Combinando com os dois e fazendo: $c = a/b$, obtemos:

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{1}{cU+U^2} = -\frac{1}{U(c+U)} \quad (30), \text{ na equação acima chamamos } c \text{ de } b, \text{ são constantes.}$$

Medições posteriores feitas por Rubens, confirmaram a validade da fórmula para ondas longas e curtas.

Na ocasião, Planck não soube explicar pela Física clássica, a razão de ser da fórmula. Resolveu fazer um estudo probabilístico da entropia total do Sistema S_n , com n osciladores com energia média U e frequência f , energia total $U_n = nU$, assumindo um número inteiro P de elementos de energia ε : $U_n = P\varepsilon$.

Pelo 2º Princípio da termodinâmica: $S_n = k \ell n \Omega$, dependendo do número Ω de formas possíveis de distribuição dos P elementos de energia ε entre os n osciladores:

$$\Omega = \frac{(n+P-1)!}{(n-1)!P!}, \text{ obedecendo a fórmula combinatória: } \binom{n+P-1}{n-1}$$

Obedecendo ideias de Boltzmann.

$$\text{Obtém-se: } \frac{1}{T} = \frac{k}{\varepsilon} \ell n \left(1 + \frac{\varepsilon}{U} \right) \Rightarrow \frac{U}{e^{\varepsilon/(kT)}} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{U} \right)$$

$$\therefore U = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/(kT)}-1}$$

Esta equação deve ser compatível com a 1ª Lei de Wien, isto é, ε deve ser proporcional a f : $\varepsilon = hf$.

²⁹ $1 = \frac{1}{b} \ell n \frac{U+b}{x} \Rightarrow 1 = \ell n \left(\frac{U+b}{x} \right)^{T/b} \Rightarrow \left(\frac{U+b}{x} \right)^{T/b} = e \Rightarrow \frac{U+b}{U} = e^{b/T}$
 $U e^{b/T} = U + b \Rightarrow U(e^{b/T} - 1) = b \Rightarrow U = \frac{b}{e^{b/T}-1}$

³⁰ $R_1 = -cU, R_2 = U^2 \Rightarrow R = -cU - U^2 = -U(c+U) \quad \therefore \frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{1}{U(c+U)}$

Em lugar de fazer a demonstração probabilística conforme Boltzmann, faremos como Maxwell, postulando como Planck que em lugar de a energia ter valores contínuos de 0 a ∞ , teria valores de números inteiros: 0, ε_0 , $2\varepsilon_0$, $3\varepsilon_0$, ... $n\varepsilon_0$, onde ε_0 , é uma quantidade finita chamada “quantum”. O valor médio $\bar{\varepsilon}$ será dado por:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-\beta n\varepsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}} = -\frac{d}{d\beta} \ell n \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0} = -\frac{d}{d\beta} \ell n \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}} \\ &= \frac{\varepsilon_0 e^{-\beta\varepsilon_0}}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\beta\varepsilon_0} - 1}, \text{ sendo } \beta = 1/(kT)\end{aligned}$$

Recorde-se que: $S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon_0}}$ para $q < 1$ da soma de uma série geométrica, quando $n \rightarrow \infty$. Sendo a_1 , 1º elemento da série e q , razão da série.

$$\text{Resulta: } uf = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/(kT)} - 1}, \text{ fazemos: } \varepsilon_0 = hf \quad (^{31})$$

Isto é, energia “quantizada”, esse foi o início da Física quântica, embora Planck não tivesse consciência disso. Somente em 1905, quando Einstein demonstrou o efeito fotoelétrico, considerando a energia composta de partículas, depois denominadas “fótons”, ficou estabelecido, pois Planck ainda acreditava que a irradiação fosse fenômeno ondulatório e que a demonstração acima fosse um artifício.

Em dezembro de 1900, Planck deduziu por probabilidade a fórmula acima.

³¹ Esse é um trecho de nosso artigo “Irradiação térmica” a ser publicado. Apenas colocamos aqui uma explicação da constante de Planck h .