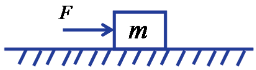
3 ANEXO

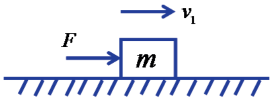
A3.1 PRINCÍPIO DA AÇÃO MÍNIMA OU DE HAMILTON



Pela 2ª lei de Newton, um corpo de massa m, sujeito a uma força F, sofrerá uma aceleração a, conforme a equação: $F = ma$.

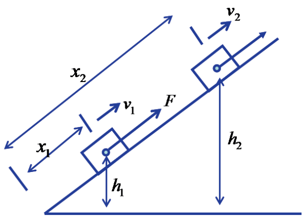
Sabemos que a aceleração é a variação da velocidade com o tempo, expressa pela fórmula: $a = \frac{dv}{dt}$. Substituindo na fórmula anterior, temos: $F = m\frac{dv}{dt}$.

Por outro lado, considerando a massa m, sujeita à força F, provocando uma variação da velocidade de v_1 para v_2, no intervalo de tempo t_1 a t_2:



$\int_{v_1}^{v_2} mdv = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$, deduzida da fórmula anterior, por integração, isto é, a variação da quantidade de movimento mdv é igual à impulsão da força exercida sobre o corpo Fdt.

A3.1.1 Trabalho e energia

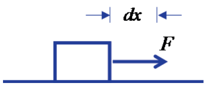


Seja o corpo de massa m, sujeito à força F, com velocidade variando de v_1 a v_2, elevando-se da altura h_1 até h_2. Podemos escrever, fazendo um balanço de trabalho e energia:

$$\left(\frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2\right) + \left(mgh_2 - mgh_1\right) = F\left(x_2 - x_1\right) \qquad (1)$$

Em palavras: a variação da energia cinética (1º parênteses) mais a variação da energia potencial (2º parênteses) é igual ao trabalho realizado sobre o corpo.

Isso comprova uma equivalência entre trabalho e energia.



Definindo então um trabalho elementar $dW = Fdx$, equivalente a uma variação de energia elementar dE: $dW = Fdx = dE$ (1a), que pode ser genericamente a variação de energia cinética e/ou potencial.

Fazendo: $\int_{x_1}^{x_2}\int_{v_1}^{v_2} mdvdx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} Fdtdx \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} pdx = \int_{t_1}^{t_2} Ldt = S$ (2)

Chamamos a quantidade de movimento elementar: $dp = mdv$ e a quantidade de impulsão elementar: $dI = Fdt$. Se definirmos a energia L, podemos denominar uma grandeza que chamaremos ação elementar: $dS = pdx$ que também pode ser definida como: $dS = Ldt$, pois $Fdx = dE$. Temos então: $pdx = Ldt$, portanto: $L = pv$, e daqui deduzimos uma energia elementar: $dL = pdv$ e a importante fórmula: $p = \frac{dL}{dv}$ (2a)

$dS = pdx = Ldt$ (2b) $\therefore p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$ $\qquad -ds^2 = dx_i dx_i - c^2dt^2$ [1] $\therefore p_\alpha = -\frac{\partial S}{c\partial t} = -i\frac{E}{c}$, pois

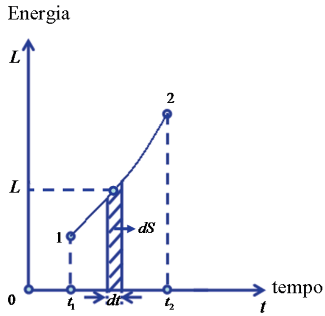
(unidimensional)

(tridimensional)

$L = E = \frac{dS}{dt}$

[1] Ver Fórmula (1) na Seção 7.2: dx_i, componente espacial e cdt, componente temporal.

Também temos, em consequência, o quadrivetor energia-quantidade de movimento, utilizado em Mecânica relativística.



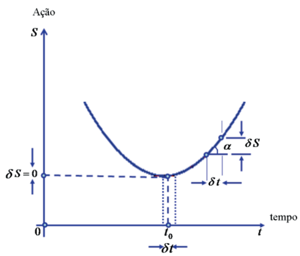
Componentes espaciais: $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial x_i}$ e componente temporal: $p_\alpha = -\dfrac{\partial S}{c\partial t} = -i\dfrac{\partial S}{\partial \tau}$ em que c é a velocidade da luz $\tau = ict$ ou $\therefore d\omega = icdt$ $p_\alpha = -i\dfrac{E}{c}$ em que p_i é a quantidade de movimento e p_α é quantidade de movimento em função da energia.

Como a ação elementar é: $dS = Ldt$.

Integrando: $S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt$

Condição para um mínimo: $\tan\alpha = \lim\limits_{\delta t \to 0} \dfrac{\delta S}{\delta t} = 0$

Ver Figura a seguir.



$$\alpha \text{ varia de } \alpha < 0 \text{ para } \alpha = 0 \text{ e torna-se } \alpha > 0$$

Condição para um mínimo:

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} Ldt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = 0 \qquad (3)$$

δ aqui é variação.

Como $L = L(x, \dot{x}, t)$ $\delta L = \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}$ (4)

E: $F = \frac{\partial L}{\partial x}$ $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial v}$ (4a)

$pdx = Ldt = dS$

Quando $\delta t \to 0$

$\delta x \to 0$ também

Observe que δS é infinitésimo de ordem maior que δx e δt, pois do contrário, não poderíamos ter a derivada $\frac{\delta S}{\delta t} = 0$. Se fossem da mesma ordem de grandeza, teríamos uma indeterminação do tipo: $\frac{\delta S}{\delta t} = \frac{0}{0}$. Isto é: δS tende ao 0 mais rápido que δx e δt.

Então: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2}(F\delta x + p\delta v)dt = 0$

Na condição de mínimo $t_1 \to t_2$ e como $x = x(t)$, devemos ter: $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$

Logo: $F\delta x = 0$ e $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} p\delta v dt = 0$

Sendo que: $\delta v = \delta \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\delta x$

Portanto: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} p \frac{d}{dt} \delta x dt$

Integrando $\int_{t_1}^{t_2} p\delta v$ por partes

$\int udv = uv - \int vdu$

$\therefore \int p\delta v = pv\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} vdp$ como $t_1 \to t_2$

$v_1 = v_2$ no limite.

$\therefore pv\Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad \therefore \delta S = \int_{t_1}^{t_2} F\delta x dt - \int_{t_1}^{t_2} vdpdt = 0$

$$\therefore \quad \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x}\delta x dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta x}{\delta t} d\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x dt = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0}$$ q.e.d.

Outra forma das Equações 3 e 4, derivando em ∝:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha}\right)dt = 0 \qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \eta \qquad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dt}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d\eta}{dt} \right) dt \qquad \eta(t_1) = \eta(t_2)$$

Integrando o 2º termo por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\eta}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt = \eta \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} d\eta = \eta \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta d\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

pois $\int u dv = uv - \int v du$ Como $\eta(t_2) = \eta(t_1)$ e $\partial L/\partial \dot{x} = \partial L/\partial v = p = mv$

$v_1 = v_2$ no limite $\therefore m(\eta_2 v_2 - \eta_1 v_1) = 0$, o 1º termo se anula.

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \eta dt = 0$$, pois: $$\eta \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \bigg|_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial L}{\partial x}\partial t \bigg|_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial L}{\partial \alpha}\partial t \bigg|_{t_1}^{t_2} = 0$$

e $\partial t \to 0$

Também:

Multiplicando por $\delta\alpha$, usando $\eta\delta\alpha = \delta x\Diamond$ $$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \, dt = \delta\alpha \left[\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \delta S = 0$$

Quando $\propto = 0$, a derivada ${}^{\delta S}/_{\delta \propto} = 0 \quad \therefore \delta S = 0$, ver Figura ao lado da Equação 3.

Ver: Arfken-Weber e Landau (Mecânica)

$$\therefore \boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0}$$ q.e.d.

Em consequência: $F = \frac{d}{dt}p = \frac{d}{dt}(mv)$, pois ${}^{\partial L}/_{\partial \dot{x}} = p$, ver Equações 4a e 2a:

Que é a 2ª lei de Newton.

Também: $Fdt = d(mv)$

No intervalo de tempo dt, temos dm elementar, e m pode ser considerado constante no intervalo elementar dt $\therefore Fdt = mdv$. Obtemos: $mdv = Fdt$.

Retomando a fórmula da impulsão e quantidade de movimento: a variação da quantidade de movimento mdv é igual à impulsão da força exercida sobre o corpo.

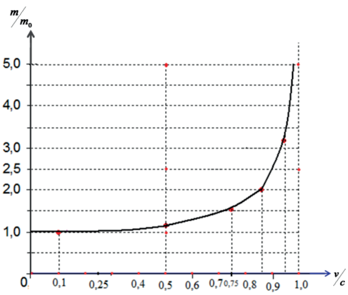
Integrando: $\int_{v_1}^{v_2} m dv = \int_{t_1}^{t_2} F dt$

Também podemos considerar m constante no intervalo de tempo dt correspondente ao intervalo de velocidade dv.

Em mecânica relativística, $m = f(v)$, a massa é função da velocidade. Quando integramos, devemos levar em conta essa variação, pois $\Delta t \neq 0$, enquanto, $dt \to 0$ (isto é, $t_1 \to t_2$).

Em baixas velocidades m pode ser considerada constante. Em altas velocidades a massa varia com a velocidade, cujo limite é a velocidade da luz.

No Capítulo 7, Seção 7.5, Equação 2, sobre relatividade da massa: $m = \gamma\, m_0$ em que m_0 massa de repouso e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = {}^{v}\!/\!{}_{c}$ γ é o fator de Lorentz (ver equação 0 da Secção 7.2). Assim, temos:



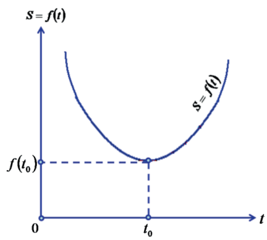
Quando ${}^{v}\!/\!{}_{c} \to 1$ $\quad {}^{m}\!/\!{}_{m_0} \to \infty$

O limite é assintótico.

v/c	m/m0
0,1	1,005
0,5	1,15
0,75	1,50
0.87	2,00
0,95	3,20

Referência: Alonso-Finn 1° vol.

Para saber se o ponto crítico é um mínimo, devemos examinar como a derivada varia ligeiramente antes e depois do extremo. Se a derivada antes for negativa e depois do extremo for positiva, teremos um mínimo. Toda função $S = f(t)$ passa por um “mínimo” (relativo) em um ponto t_0, quando se pode determinar uma vizinhança de t_0, tal que, para todo t diferente de t_0 dessa vizinhança, temos: $f(t) > f(t_0)$, essa condição define o “Princípio da ação mínima”. (5) Ver figura adiante.



O contrário determina um máximo.

Os pontos máximo e mínimo de uma função recebem o nome genérico de extremos.

Referência: Maurer, v.1

O filósofo e matemático inglês Bertrand Russel (1872-1970) cita o astrônomo e físico inglês Arthur S. Eddington (1882-1944), um dos primeiros a compreender e explicar a teoria da relatividade em seu livro *The mathematical theory of relativity*.

Em 1919, participou da expedição para observar e fotografar o eclipse solar na Ilha do Príncipe, próxima da costa da Guiné espanhola. Com uma expedição em Sobral, no Ceará, confirmou-se a previsão de Einstein quanto à deflexão da luz das estrelas ao passarem próximas do Sol.

Voltando ao assunto inicial: depois da massa e da energia, há uma quantidade física com papel muito importante na Física moderna, especialmente na teoria da relatividade: a “Ação”. Não se deve confundir com a “ação e reação” de Newton. Se quisermos falar sobre a matéria presente em qualquer ponto do espaço-tempo em um dado instante, devemos usar o termo densidade. A densidade multiplicada pelo volume nos dá a massa ou seu equivalente, a energia. Do ponto de vista espaço-tempo, é muito mais importante o que se obtém multiplicando a densidade não pelo volume espacial, porém, por um volume tetradimensional de espaço-tempo: obtemos, assim, a “Ação”, que é a massa ou energia multiplicada pelo tempo, mais importante que os anteriores.

Eis aqui a primeira conexão entre a relatividade e a teoria dos *quanta*: em ambas, a “Ação” tem a maior importância.

De fato, pela Equação 1 da Seção 7.8: $dE = c^2dm = c^2\rho dV$

Da Equação 2 do Anexo 3: $Edt = dS$, teremos: $c^2\rho dVdt = dS$, e como: $dVdt = d\Omega$,

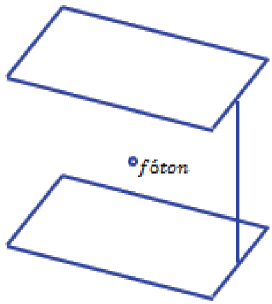
$c^2\rho d\Omega = dS$

Em que V, volume, m, massa, Ω, espaço tetradimensional, ρ, densidade e S, Ação.

A3.2 RELATIVIDADE DO TEMPO

A3.2.1 Relógio de luz

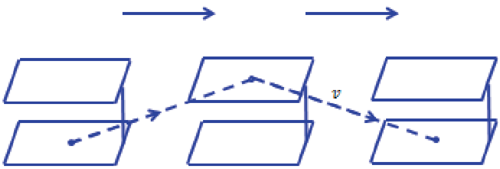
Dois espelhos paralelos com um fóton oscilando entre ambos. O relógio faz "tique-taque" toda vez que o fóton completa uma viagem de ida e volta.



Os espelhos estão a 15 cm de distância. O fóton leva um bilionésimo de segundo para fazer um percurso de ida e volta, um bilhão de "tique-taques" perfaz um segundo.

O que foi apresentado vale para um sistema estacionário.

Suponhamos outro relógio que passa com velocidade constante. O tempo registrado pelo segundo relógio, com relação ao primeiro, será o mesmo?



Velocidade do fóton:

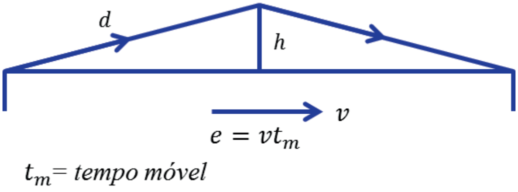
$$v = \frac{percurso}{tempo} \quad \therefore tempo = \frac{percurso}{velocidade}$$

Como a velocidade do fóton é constante (igual à da luz), e o percurso aumentando, provocará um tempo maior.

Logo, o relógio móvel pulsará mais lentamente, pois o tempo de pulsação aumenta.

Ref.: Brian Greene – O Universo elegante: supercordas, dimensões ocultas e a busca da teoria definitiva (The elegant universe: superstrings, hidden dimensions and the quest for the ultimate theory).

A3.2.2 Demonstração matemática



Tempo estacionário: $t_{est} = \frac{2h}{c}$ $\qquad h = c\frac{t_{est}}{2}$, pois: $c = 2\frac{h}{t_{est}}$

h = 15 cm

t_{est} = 1 bilionésimo de s

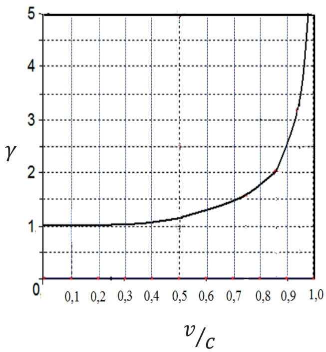
1 bilhão de tique-taques = 1s

$d = \sqrt{\left({}^{1}\!/_{2}\, vt_m\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left({}^{1}\!/_{2}\, vt_m\right)^2 + \left({}^{1}\!/_{2}\, ct_{est}\right)^2} = c\frac{t_m}{2}$ (conforme Pitágoras)

$d^2 = \frac{1}{4}v^2{t_m}^2 + \frac{1}{4}c^2{t_{est}}^2 = \frac{1}{4}c^2{t_m}^2 \Rightarrow {t_m}^2(c^2 - v^2) = c^2 t_{est}^2$

$t_m = \sqrt{\frac{c^2 t_{est}^2}{c^2 - v^2}} \Rightarrow t_m = \frac{t_{est}}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$ $\qquad \beta = \frac{v}{c}$ Parâmetro de velocidade.

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ Fator de Lorentz, ver Seção 7.2, Equação 0.



Quanto $> v^2$, $> t_m$[2], pois $\frac{v^2}{c^2}$ aumenta:

$\therefore \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}$ diminui $\therefore t_m$ aumenta, pela equação 1a da secção 7.2, o intervalo d´t → 0, o tempo próprio torna-se lento até parar.

No limite para $v = c$, $\gamma \rightarrow \infty$

Isto é, o tempo pararia; é o que ocorre em um buraco negro (por efeito gravitacional que aumenta a velocidade até $v \rightarrow c$).

[2] Quanto maior v^2, maior t_m.