

4

Proposta para o cálculo da frequência natural de vibração sob não-linearidade geométrica

A formulação analítica que leva em conta a rigidez geométrica dos sistemas elásticos no cálculo de suas frequências, e que servirá de referência neste trabalho, está baseada no Método de Rayleigh (1877). Aplicações da técnica de Rayleigh à problemas de vibrações de sistemas mecânicos são encontradas em Bianco-
lini, Brutti e Reccia (2005); Cheunga e Zhou (2003); Chiba e Sugimoto (2003), Hu et al (2004); Laura, Masiáb and Avalos (2006); e Kandasamy, Singh (2006).

O conceito básico que está por detrás desse método é o Princípio da Conservação da Energia dos sistemas mecânicos (Clough, 1993) e, portanto, aplicável a estruturas lineares ou não. De acordo com Temple (1933) o princípio fundamental desenvolvido por Rayleigh é aplicado não só a sistemas com um número finito de graus de liberdade, mas também a sistemas contínuos, e se destina tanto à determinação do período fundamental de vibração quanto às análises da estabilidade dos sistemas elásticos, com a precisão demandada pelos problemas da engenharia.

O Princípio da Conservação da Energia estabelece que a energia mecânica total de um sistema em vibração mantém-se constante e distribui-se por duas parcelas, correspondentes à energia cinética e à energia potencial. Cada uma das parcelas é variável no tempo. Aos máximos e mínimos da energia cinética correspondem respectivamente mínimos e máximos da energia potencial (RAVARA, 1969).

Fonseca (1964) relata que Rayleigh encontrou dificuldade para aplicação do Teorema da Conservação da Energia, quando se considerava a massa distribuída da mola. Isso decorreu do fato de que, tanto a determinação da energia potencial quanto a da energia cinética dependiam do conhecimento da configuração do sistema, a qual não era previamente conhecida. Rayleigh, primordialmente, contornou essa dificuldade admitindo, em primeira aproximação, que a energia potencial não era afetada pela pequena mudança de configuração ocasionada pela distribuição da massa da mola, calculava a energia potencial de deformação como se a mola fosse desprovida de massa, em seguida recalculava a energia cinética admitindo uma razoável configuração para o sistema em vibração. Essa dificuldade deixa de existir com a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, expresso em termos de coordenadas generalizadas.

A energia potencial de qualquer sistema estrutural, em alguma configuração real, é definida como o trabalho realizado por todas as forças atuantes, caso o sistema seja movido da configuração real para a configuração descarregada. Portanto, a energia potencial é o trabalho realizado por todas as forças atuantes quando a estrutura é movida de sua configuração com carga para uma posição sem carregamento.

Na aplicação do Princípio da Conservação da Energia, as forças atuantes na estrutura consistem em cargas externas e forças internas, sendo as últimas tensões resultantes. A energia potencial das forças internas é a energia de deformação, armazenada na estrutura carregada. Se a estrutura for descarregada, a quantidade de trabalho recuperado será igual à energia de deformação. O trabalho das forças externas é negativo porque a carga na estrutura realiza trabalho negativo caso retorne da posição carregada para a descarregada. Logo, o trabalho virtual das forças externas, realizado pelas cargas atuantes, deve ser igual ao trabalho virtual das forças internas.

No desenvolvimento da expressão para o cálculo da frequência fundamental não amortecida de estruturas em balanço, proposta neste trabalho, o Princípio dos Trabalhos Virtuais foi escrito em termos da coordenada generalizada, convenientemente escolhida no topo barra, e de uma função de forma que descreve o primeiro modo de vibração. A precisão obtida por esse método depende inteiramente da função de forma assumida para representar o modo de vibração livre, Leissa (2005). Em princípio, qualquer função que satisfaça as condições de contorno pode ser escolhida. Ao final do processo, a equação do movimento aparece em termos da coordenada generalizada e da qual se podem extrair as propriedades elásticas e geométricas generalizadas do sistema.

Considere-se o sistema contendo apenas o grau de liberdade horizontal e em movimento livre não amortecido, com os parâmetros apresentados na Figura 4.1 . Admita-se que esse sistema seja composto por uma barra prismática, constituída de material elástico-linear, engastada na base, suportando, além do seu peso próprio, uma massa na extremidade livre, representativa dos corpos fixados ao seu topo. Considere-se também que o movimento do sistema não altera a orientação da força normal $F(x)$.

A estrutura representada pela Figura 4.1 constitui uma barra em flexão. Assim, o trabalho virtual das forças internas δW_1 é realizado pelo momento fletor $M(x, t)$, agindo sobre a curvatura virtual $\delta \left[\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right]$ da barra. O Princípio dos Trabalhos Virtuais requer que o trabalho virtual das forças externas seja igual ao trabalho virtual das forças internas.

$$\delta W_E = \delta W_I \quad (4.1)$$

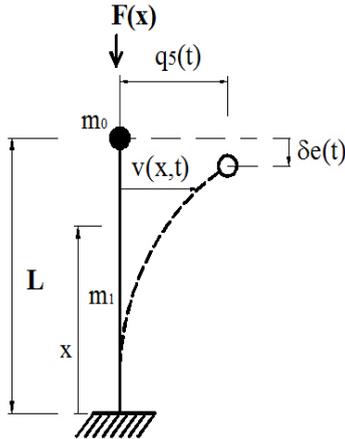


Figura 4.1 – Parâmetros do modelo para desenvolvimento do método.

O trabalho virtual das forças externas é

$$\delta W_E = -\int_0^L f_1(x) \delta v(x) dx + F(x) \delta e, \quad (4.2)$$

onde $f_1(x) = m_1(x) \ddot{v}(x, t)$ representa a força inercial.

O trabalho virtual das forças internas é dado por

$$\delta W_I = \int_0^L M(x, t) \delta v''(x) dx, \quad (4.3)$$

$$\text{onde } \delta v''(x) = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}.$$

Para encontrar o deslocamento axial $e(t)$ é preciso tomar um elemento infinitesimal ds da curvatura da barra, logo o encurtamento do eixo devido ao deslocamento axial será

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 - dv^2} - dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - dx. \quad (4.4)$$

Pelo desenvolvimento binomial tem-se que

$$\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{1/2} = 1 + \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^4}{8} + \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^6}{16} - \dots$$

Como os termos de ordem superior a $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$ são muito pequenos comparados à unidade, pode-se fazer

$$\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{1/2} = 1 + \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}{2},$$

permitindo reescrever a Eq. (4.4) de forma a ter-se

$$ds - dx = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right] - dx = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx. \quad (4.5)$$

Integrando a expressão (4.5) sobre toda a viga, obtém-se

$$e = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (4.6)$$

Como os parâmetros necessários à solução do problema podem ser expressos em função da coordenada generalizada q_5 e de uma função de forma $\phi(x)$, tem-se

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \phi(x)q_5(t) & \delta v(x, t) &= \phi(x)\delta q_5(t) \\ v'(x, t) &= \phi'(x)q_5(t) & \delta v'(x, t) &= \phi'(x)\delta q_5(t) \\ v''(x, t) &= \phi''(x)q_5(t) & \delta v''(x, t) &= \phi''(x)\delta q_5(t) \\ \ddot{v}(x, t) &= \phi(x)\ddot{q}_5(t) & & \\ \dot{v}'(x, t) &= \phi'(x)\dot{q}_5(t) & \delta e &= \int_0^L v'(x, t)\delta v'(x)dx \end{aligned} \quad (4.7)$$

as quais, sendo substituídos nas Eq. (4.2) e (4.3), chega-se à equação do movimento livre não amortecido em termos da coordenada generalizada:

$$M\ddot{q}_5(t) + K_0q_5(t) - K_gq_5(t) = 0, \quad (4.8)$$

onde M , K_0 e K_g são a massa e as rigidezes generalizadas, que são apresentadas a seguir.

A função trigonométrica (4.9), ora arbitrada, pode ser encontrada em Clough (1993) e Timoshenko (1936), representa, de forma exata, o primeiro modo de flambagem do modelo, o que sugere que a sua validade está restrita à vizinhança da configuração de referência.

Tome-se a função de forma da expressão (4.9).

$$\phi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \quad (4.9)$$

A massa generalizada M será dada por

$$M = m_0 + m_2, \quad (4.10)$$

com

$$m_2 = \int_0^L m_1 \phi(x)^2 dx, \quad (4.11)$$

onde m_1 é a massa por unidade de comprimento e m_0 é a massa concentrada no topo da barra.

A massa generalizada total, nesse contexto, é dada por

$$M = m_0 + \frac{1}{2} L m_1 \frac{3\pi - 8}{\pi}. \quad (4.12)$$

que, simplificando, leva a

$$M = m_0 + 0,227 m_1 L \quad (4.13)$$

A rigidez elástica generalizada é dada por

$$K_E = \int_0^L EI \left(\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (4.14)$$

e a matriz de rigidez geométrica, por sua vez, é dada por

$$K_G = \int_0^L F(x) \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (4.15)$$

Para o modelo da Figura 4.1 $F(x) = [m_0 + m_1(L-x)]g$, com $F(x)$ sendo a força normal interna distribuída produzida pelo carregamento externo e pelo peso próprio da barra.

A rigidez generalizada total do sistema, considerando positiva a força axial de compressão, é, então,

$$K = K_E - K_G \quad (4.16)$$

com

$$K_E = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \quad (4.17)$$

e

$$K_G = \frac{1}{16} g \frac{2\pi^2 m_0 + (\pi^2 - 4)m_1 L}{L} \quad (4.18)$$

Calculando as expressões anteriores, e simplificando a solução para o grau de liberdade horizontal, chega-se à expressão da frequência que leva em conta a influência do esforço axial, em Hertz:

$$f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\frac{\pi^4 EI}{32 L^3} - \left[\frac{\pi^2}{16} \left(\frac{2m_0 + m_1 L}{L} \right) - \frac{1}{4} m_1 \right] g}{m_0 + \frac{1}{2} L m_1 \frac{3\pi - 8}{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

Na expressão (4.19) E é o módulo de elasticidade do material, L é o comprimento da barra, I é o momento de inércia da seção em relação ao eixo perpendicular ao movimento e g é a aceleração da gravidade, cujo sinal coincide com o da força de compressão.

Havendo massas localizadas m_i ocupando posições x_i ao longo da altura, e não somente no topo da barra, como mostrado na Figura 4.2, a massa generalizada M deve levar em conta a influência dessas outras massas, devendo ser representada pela expressão (4.20).

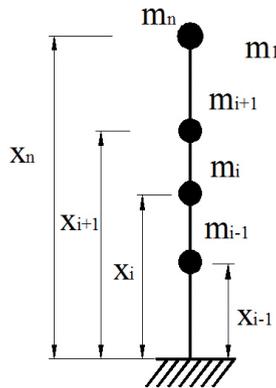


Figura 4.2 – Modelo de barra com distribuição geral de massa.

$$M = \int_0^L m_1 \phi(x)^2 + \sum m_i \phi(x_i)^2, \quad (4.20)$$

Nesse caso, a expressão (4.19) deve ser escrita da seguinte forma

$$f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\frac{\pi^4 EI}{32 L^3} - \left[\frac{\pi^2}{16} \left(\frac{2m_R + m_1 L}{L} \right) - \frac{1}{4} m_1 \right] g}{m_R + \frac{1}{2} L m_1 \frac{3\pi - 8}{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.21)$$

onde

$$m_R = \sum m_i \left[1 - \cos \left(\frac{\pi x_i}{2L} \right) \right]^2. \quad (4.22)$$

com m_i e x_i sendo as massas concentradas e suas posições, incluindo a do topo.

A rigidez da estrutura pode ser escrita como

$$K = \frac{\pi^4 EI}{32 L^3} - \left(\frac{1}{16} g \frac{2\pi^2 m_0 + (\pi^2 - 4) m_1 L}{L} \right), \quad (4.23)$$

que de forma mais simples é

$$\mathbf{K} = 3,044 \frac{EI}{L^3} - \left(1,234 \frac{F_0}{L} + 0,367 \frac{F_1}{L} \right), \quad (4.24)$$

com $F_0 = m_0 g$ e $F_1 = m_1 L g$.

A carga crítica de flambagem é obtida fazendo nula a rigidez na Eq. (4.23), o que leva a

$$F_{cr} = \frac{\pi^4 EI}{4L^2} - 0,297 m_1 L g, \quad (4.25)$$

que representa a solução de Euler com 5,85% de defasagem, conforme os dados presentes na Tabela 3.1.

Para uma comparação com o Método dos Elementos Finitos, Eq. (3.31), é preciso recordar que no MEF os esforços são relacionados aos nós do elemento. Esse tratamento é semelhante, no presente método, a considerar na expressão (4.15), $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{g}$, sendo M a massa generalizada da Eq.(4.12). Logicamente F será nodal, pois é o resultado da extrapolação, ou generalização, da força axial distribuída, obtida pela Eq. (4.11), mais a força aplicada no correspondente nó da coordenada generalizada.

Resolvendo a expressão (4.15) com a condição anterior, obtém-se

$$\mathbf{K}_g = 1,145 \frac{F}{L}, \quad (4.26)$$

que é 1,7% diferente da expressão desenvolvida pelo MEF para a rigidez geométrica. Já a rigidez elástica, primeira parcela da Eq. (4.24), está 1,5% acima da parcela correspondente da Eq. (3.31).

É possível reescrever a equação (4.19) como uma função do comprimento e calcular as frequências naturais dos sistemas estruturais levando em conta apenas o produto de rigidez e as massas envolvidas. Na aplicação direta da expressão (4.19) a aceleração da gravidade será tomada com o mesmo sinal adotado para a força de compressão.

Adotando-se os parâmetros elásticos e geométricos dos corpos-de-prova utilizados nos ensaios de laboratório (espessura de 1/8 da polegada (12,7 mm) e largura de 1/2 da polegada (3,175 mm); massa específica de 8190 kg/m³; módulo de elasticidade longitudinal de 205 GPa; massa concentrada no topo da barra de 1,595 Kg; e fazendo-se variar o comprimento de 0,15 m a 5 m, em pequenos intervalos, foi possível traçar os gráficos relativos às frequências, em Hertz, para as três situações de mudança de rigidez que foram investigadas em laboratório. A primeira trata dos efeitos da força normal de compressão, a segunda dos efeitos da força normal de tração e a última investiga a ausência de esforço normal.

Reunidas no gráfico da Figura 4.3, as frequências obtidas pela Eq. (4.19) permitem conhecer a influência do esforço axial na frequência natural do primeiro de vibração dos sistemas.

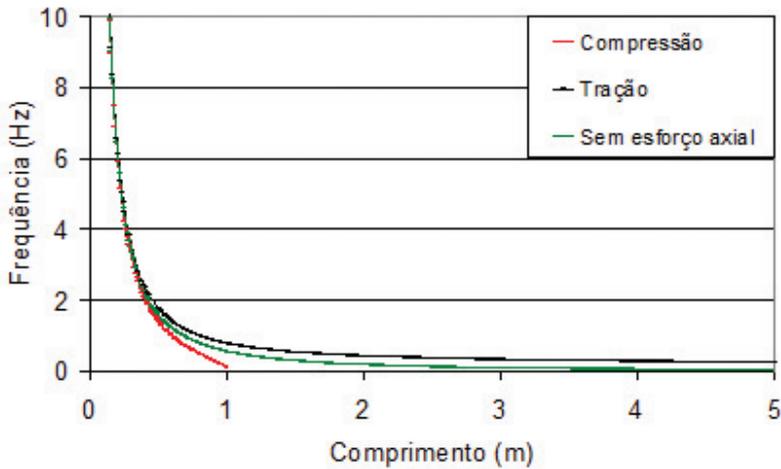


Figura 4.3 – Análise pela solução analítica proposta.

O aspecto relevante dessa simulação está em notar a condição crítica de estabilidade, que ocorre quando a frequência tende a zero. A condição crítica, admitindo-se a influência do esforço de compressão, acontece quando o comprimento atinge 1,01 m. A correspondente carga crítica obtida pela Eq. (4.25) é de 15,823 N, enquanto que pelo Método de Euler-Greenhill essa carga é de 15,766 N, 0,36% abaixo.

Se fosse desconsiderado o efeito da força de compressão sobre a rigidez geométrica da barra, a curva seguiria assintoticamente ao eixo horizontal, como pode ser observado no traçado “Linear” da Figura 4.4a. Isso revela que os sistemas estruturais sob compressão possuem um limite definido de estabilidade quando se considera o efeito da carga axial.

No caso do esforço de tração (Figura 4.4b) é diferente, já que esse esforço age favoravelmente na rigidez, estabilizando o sistema. Na ausência do esforço normal, a rigidez da estrutura não é modificada (Figura 4.4c), como esperado.

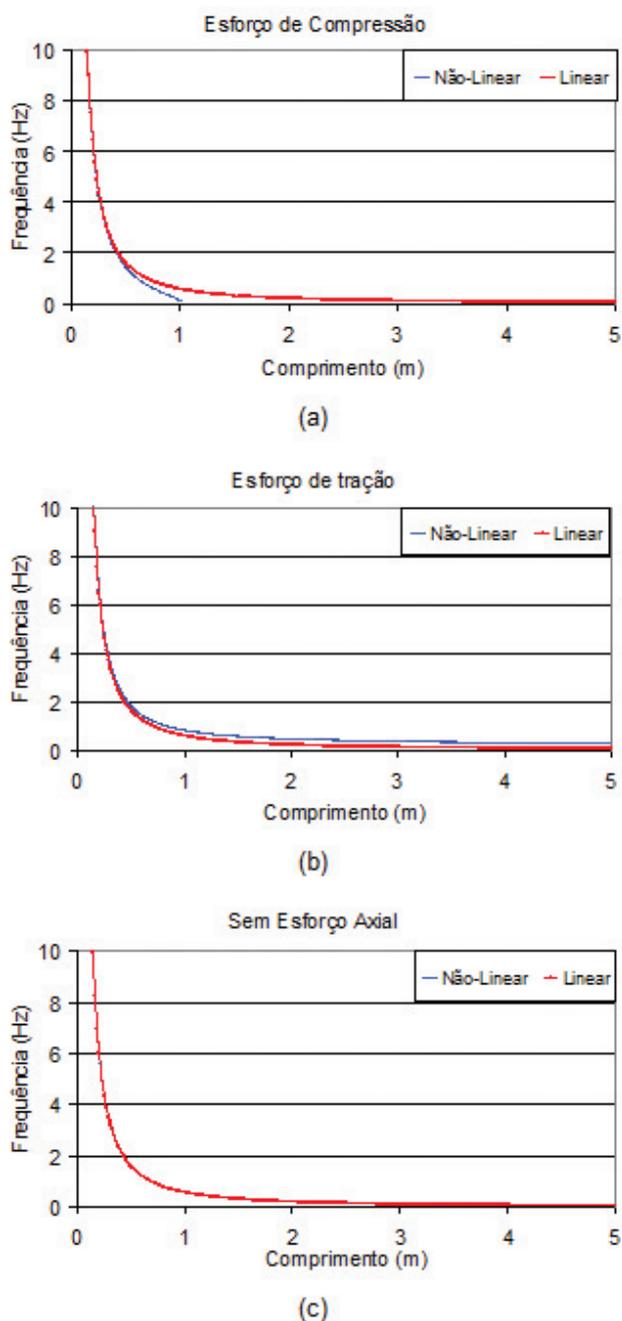


Figura 4.4 – Frequências dos modelos pelo método proposto.