

Cálculo dos elementos da trajetória na atmosfera

Passaremos a calcular os elementos que determinam a trajetória dos projéteis balísticos na atmosfera, quais sejam: a) o alcance máximo e a altura que o projétil atinge; b) a velocidade instantânea em qualquer ponto da trajetória; c) o tempo que o projétil permanece no ar; e d) a forma geométrica da trajetória e seu comprimento.

4.1 Alcance máximo e altura que o projétil atinge – fórmula geral

4.1.1 Alcance máximo

O alcance máximo é definido como a distância ao longo da horizontal, compreendida entre a boca do cano da arma e o ponto de queda, quando o projétil cruza o plano horizontal do qual foi lançado. O valor do alcance máximo ($x_{máx}$) é obtido experimentalmente em testes de tiro em campos de prova e registrado em tabelas; o alcance máximo depende da arma, comprimento do cano, munição utilizada (velocidade inicial e coeficiente balístico¹ do projétil) e ângulo de tiro,² sendo que a maior distância atingida é obtida com ângulos que se aproximam de 30°. (Franco Atirador, 2014).

-
- 1 O cálculo do coeficiente balístico envolve a forma, massa, densidade do projétil e o diâmetro da seção transversal oposta à resistência do ar. Quanto maior for o coeficiente balístico, melhor será sua aerodinâmica, isto é, cortará com mais facilidade as capas de ar.
 - 2 Ângulo de tiro é o ângulo que o vetor velocidade faz com a horizontal, no instante que o projétil abandona a boca do cano da arma, é medido a partir da reta tangente ao ponto $P_0(x_0, y_0)$.

Para o cálculo do alcance máximo do projétil, no vácuo, inserimos os dados na equação formulada por Galileu e fazemos $y = 0$. A solução da equação possui duas raízes, $x_0 = 0$ e $x_f = x_{máx}$, como segue:

- Velocidade inicial: $v_0 = 253 \text{ m/s}$
- Aceleração da gravidade: $g = 9,81 \text{ m/seg}^2$
- Ângulo que o vetor velocidade faz com a horizontal: $\alpha = 30^\circ$
- Tangente: $\tan \alpha = 0,57735$
- Cosseno: $\cos \alpha = 0,86603$

E obtemos um alcance máximo teórico no vácuo³ de 5651 metros. Ocorre que, devido à resistência do ar, a velocidade do projétil não é constante, se altera, instantaneamente, em função da distância percorrida pelo projétil, no tempo. Então, temos que substituir v_0 por $v_i = v_0 - rx$ na equação original e obtemos:

$$y = \tan \alpha x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{((v_0 - rx) \cos \alpha)^2}$$

que é a equação da trajetória na atmosfera. O fator r , para efeito de cálculo, é considerado uma constante que multiplicada por x representa a retardação, levando-se em consideração os fatores envolvidos.

Para se encontrar o valor do fator de retardação r , algebricamente, substituímos x por 1521 metros (obtido numericamente) na equação da trajetória na atmosfera e igualamos $y = 0$. O valor de r também pode ser calculado numericamente, com auxílio do computador, através de aproximações sucessivas, obtendo-se $r = 0,08002003$.

4.1.2 Altura que o projétil atinge

Substituindo os valores de x e v_i na equação da trajetória na atmosfera, obtêm-se os valores de y em função de x , isso é $y(x)$.

4.2 Demonstração do cálculo numérico do alcance máximo do projétil .45ACP

Demonstração do cálculo numérico do alcance máximo do projétil .45ACP, calibre 11,43mm e massa 14,9g, BC = 0,138 (Chuck Hawks, 2014), fabricado pela Companhia Brasileira de Cartuchos, com velocidade inicial de 253 m/seg .

3 Observação: no vácuo, a distância teórica máxima atingida seria obtida com ângulo de tiro de 45° , para a mesma arma e projétil; ou seja, 6525 metros.

Conforme já exposto, o alcance máximo dos projéteis é obtido em testes de tiro em campos de prova e registrado em tabelas; na fonte pesquisada (Informativo Técnico CBC, 2005) não consta o valor do alcance máximo do projétil em estudo; então, tivemos que calcular numericamente.

Consideremos a equação da trajetória dos projéteis balísticos na atmosfera:⁴

$$f(x) = \tan \alpha x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{((v_0 - rx) \cos \alpha)^2}$$

Desejamos determinar a solução $x_{m\acute{a}x}$, tal que:

$$f(x_{m\acute{a}x}) = \tan \alpha x_{m\acute{a}x} - \frac{g}{2} \frac{x_{m\acute{a}x}^2}{((v_0 - rx_{m\acute{a}x}) \cos \alpha)^2} = 0$$

Métodos numéricos são desenvolvidos para a solução da equação na forma $f(x) = 0$, onde $f(x)$ é uma função de uma variável; para tanto, necessitamos de um valor inicial aproximado x_0 . A partir desse valor inicial, geramos uma sequência de aproximações cada vez menores que convergem para a solução desejada, raiz da equação. (Arenales, 2012).

Para obter a aproximação inicial, nas imediações da raiz, recorremos a outra fonte (Franco Atirador, 2014), onde encontramos o valor de 1501m como alcance máximo para o projétil genérico .45ACP, com velocidade inicial de 249m/seg.

4.2.1 Cálculo de r para $v_0 = 249m/seg$ e $x_{m\acute{a}x} = 1501m \pm 0,4m$

1) Valores adotados:

$$v_0 = 249m/seg$$

$$x_{m\acute{a}x} = 1501,4m$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\tan \alpha = 0,57735$$

$$\cos \alpha = 0,86603$$

$$g = 9,81 m/seg^2$$

4 Fórmula geral, deduzida a partir de modelagem matemática, que equaciona os principais elementos da trajetória dos projéteis balísticos lançados nas imediações da superfície da Terra (atmosfera padrão).

2) O cálculo de r é feito através da equação deduzida:

$$r = \frac{v_0 - \frac{\sqrt{\frac{(x_{m\acute{a}x})g}{2\tan\alpha}}}{\cos\alpha}}{x_{m\acute{a}x}}$$

3) Calculamos o fator de retardação r para a munição genérica⁵ que contém o projétil .45ACP (calibre 11,43mm, massa 14,9g e BC = 0,138), com velocidade inicial $v_0 = 249m/seg$ e $x_{m\acute{a}x} = 1501m \pm 0,4m$ e obtivemos o valor de $r = 0,07898887$, com aproximação de $\varepsilon < |0,5| m$.

4.2.2 Cálculo do alcance máximo para $v_0 = 253m/seg$

- 1) Temos que o alcance máximo é diretamente proporcional à velocidade inicial; e também, pela Lei da ação e reação, a retardação é diretamente proporcional à velocidade inicial.
- 2) Então, adotamos 1501,4m, com $\varepsilon < 0,5m$, como valor inicial (x_0) e 0,07898887 como fator de retardação inicial (r_0), mas agora para a velocidade inicial de $v_0 = 253m/seg$.

Algoritmo⁶ com aproximação na ordem crescente de unidades (metros) a partir de x_0 , até o limite de $f(x_i, r_i) = f(x_i) = 0$; sendo

$$f(x_i, r_i) = \tan\alpha x_i - \frac{g}{2} \frac{x_i^2}{((v_0 - r_i x_i) \cos\alpha)^2}$$

Como segue:

$$v_0 = 253m/seg$$

$$x_0 = 1501,4m \quad \wedge \quad r_0 = 0,07898887$$

$$x_1 = 1502m \quad \wedge \quad r_1 = r_0 \left(\frac{x_1}{x_0} \right) = 0,07902044$$

$$x_2 = 1503m \quad \wedge \quad r_2 = r_1 \left(\frac{x_2}{x_1} \right) = 0,07907305$$

...

$$x_{20} = 1521m = x_{m\acute{a}x} \wedge r_{20} = r_{19} \left(\frac{x_{20}}{x_{19}} \right) = 0,08002003 = r \Rightarrow f(x_{20}) = f(x_{m\acute{a}x})$$

5 Sem especificação de fabricante.

6 A palavra algoritmo deriva do nome do matemático *Al-Karismi* (c. 783-c. 850 d.C) e significa um procedimento passo a passo para resolver problemas. (Flood, 2013).

3) Assim, a partir de uma aproximação inicial (x_0), nas imediações da raiz⁷ ($x_{máx}$), calculamos os diversos valores de r_i , por aproximações sucessivas, através de um método simplificado, a duas variáveis (x_i e r_i); sendo que x_i segue a ordem crescente de unidades (metros) a partir de x_0 ; e r_i , também na ordem crescente, se obtém por interpolação a partir de valores sequenciais de x_i , até o limite de $f(x_i, r_i) = f(x_i) = 0$, ponto de queda $P_f(x_{máx}, 0)$, cuja fórmula geral para se obter o fator de retardação é $r_i = r_{i-1} \left(\frac{x_i}{x_{i-1}} \right)$.

4.2.3 Construção da tabela com os dados numéricos do alcance máximo

Construção da tabela com os dados numéricos do alcance máximo do projétil .45ACP, por aproximações sucessivas nas imediações da raiz, na seguinte conformidade:⁸

- 1) Na primeira coluna colocamos os valores de x_i , na ordem crescente de unidades (metros), a partir do valor inicial ($x_0 = 1501$) nas imediações da raiz;
- 2) A segunda coluna é somente auxiliar para construção do gráfico;
- 3) Na terceira coluna colocamos os valores de $f(x_i)$, nas imediações da raiz;
- 4) Na quarta coluna constam os valores de $f(x_i, r_i)$ que se aproximam da raiz;
- 5) Na quinta coluna constam os valores de r_i , obtidos por interpolação;
- 6) Na sexta coluna anotamos os valores das velocidades instantâneas (v_i);
- 7) Na sétima coluna, os valores das tangentes ($\tan\theta_i$);
- 8) Na oitava, os ângulos em radianos $\theta(\tan) = \text{atan}\theta$;
- 9) Na nona, os ângulos convertidos em graus;
- 10) Na décima coluna, o tempo decorrido em cada instante (t).

7 Parâmetros: $\Delta x = x_{20} - x_0 \approx 20\text{m}$; $\Delta\theta = \theta_{20} - \theta_0 \approx |2^\circ|$; e $\Delta t = t_{20} - t_0 \approx 0,15\text{seg}$.

8 O alcance máximo, por aproximações sucessivas, foi obtido a partir da planilha de cálculo 4.1, através da qual foi gerado o gráfico de localização do alcance máximo nas proximidades da raiz.

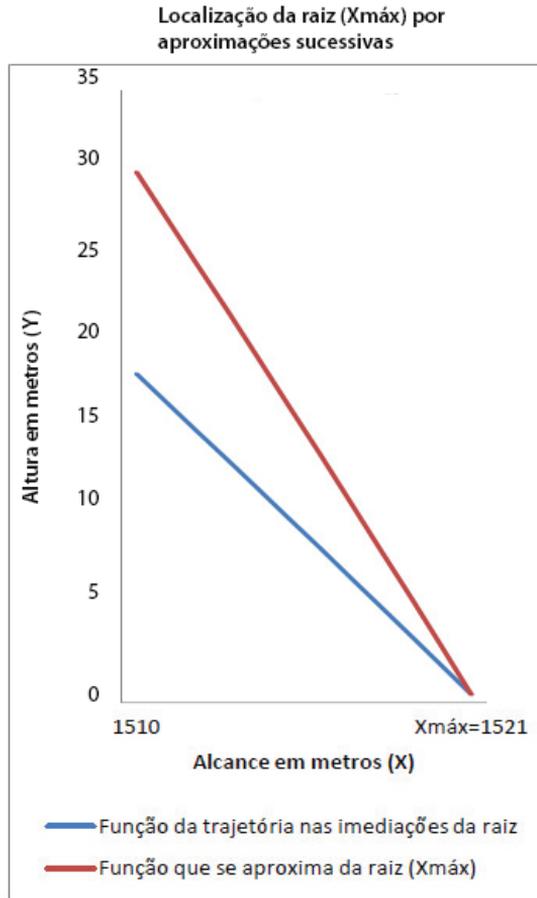
Tabela 4.1 Dados numéricos do cálculo do alcance máximo do projétil.

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, r_i)$	r_i	$v(x_i) = v_i - r x_i$	$y'(x_i)$	θ_i	θ_i	$t = \ln(v_0/v(x_i))/r$
m	m	m		m/s	$\tan\theta_i$	radianos	graus	seg
0	0			253,00	0,57735	0,52360	30	0,0
...
1501	32	51	0,07898887	132,86	-1,54131	-0,99527	-57	8,0
1502	31	49	0,07902044	132,81	-1,54446	-0,99620	-57	8,1
1503	29	47	0,07907305	132,73	-1,54972	-0,99775	-57	8,1
1504	28	44	0,07912566	132,65	-1,55499	-0,99929	-57	8,1
1505	26	42	0,07917827	132,57	-1,56027	-1,00083	-57	8,1
1506	24	39	0,07923088	132,49	-1,56557	-1,00237	-57	8,1
1507	23	37	0,07928349	132,41	-1,57088	-1,00391	-58	8,1
1508	21	34	0,07933610	132,33	-1,57621	-1,00544	-58	8,1
1509	20	32	0,07938871	132,25	-1,58155	-1,00697	-58	8,1
1510	18	29	0,07944132	132,17	-1,58691	-1,00850	-58	8,1
1511	17	27	0,07949393	132,09	-1,59228	-1,01002	-58	8,1
1512	15	24	0,07954654	132,01	-1,59767	-1,01154	-58	8,1
1513	13	22	0,07959915	131,93	-1,60307	-1,01306	-58	8,1
1514	12	19	0,07965176	131,85	-1,60848	-1,01457	-58	8,1

(continua)

Tabela 4.1 Dados numéricos do cálculo do alcance máximo do projétil. (continuação)

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, r_i)$	r_i	$v(x_i) = v - r x_i$	$y'(x_i)$	θ_i	θ_i	$t = \ln(v_0/v(x_i))/r$
1515	10	16	0,07970437	131,77	-1,61391	-1,01608	-58	8,2
1516	9	14	0,07975698	131,69	-1,61936	-1,01759	-58	8,2
1517	7	11	0,07980959	131,61	-1,62482	-1,01909	-58	8,2
1518	5	8	0,07986220	131,53	-1,63030	-1,02059	-58	8,2
1519	4	6	0,07991481	131,45	-1,63579	-1,02209	-59	8,2
1520	2	3	0,07996742	131,37	-1,64129	-1,02358	-59	8,2
1521	0	0	0,08002003	131,29	-1,64682	-1,02508	-59	8,2

Gráfico 4.1 Localização do alcance máximo nas proximidades da raiz.⁹

4.3 Cálculo do alcance máximo do projétil .45ACP com uso de tabela balística

Cálculo do alcance máximo, com uso de tabela balística,¹⁰ do projétil .45ACP (calibre 11,43mm e massa 14,9g) fabricado pela CBC. Dados disponíveis:

Velocidade inicial: $v_0 = 253\text{m/seg}$;

Coefficiente Balístico: $c = 0,138$;

Ângulo de lançamento: $\alpha = 30^\circ$;

⁹ Gráfico gerado pela planilha de cálculo 4.1.

¹⁰ Florentiis, 1987.

Tangente: $\tan\alpha = 0,57735$;

Cosseno: $\cos\alpha = 0,86603$;

Aceleração da gravidade: $g = 9,81\text{m/seg}^2$

O método consiste em calcular numericamente, com auxílio do computador, os valores de $x_f = x_{m\acute{a}x}$ e $v_i = v_f$ que, substituídos na função da trajetória na atmosfera, satisfaçam a condição para $y = 0$, ou seja:

$$y = \tan\alpha x_f - \frac{g x_f^2}{2(\cos\alpha)^2 v_f^2} = 0$$

Dividimos o eixo X em intervalos de 100 em 100 metros e calculamos as velocidades correspondentes, a partir da fórmula dos espaços:

$$f(v_i) = f(v_0) - \frac{x}{c}$$

$f(v_0)$ e $f(v_i)$ são funções, a partir das quais se pode calcular as velocidades instantâneas v_i correspondentes às distâncias x_i , conhecida a velocidade inicial v_0 e o coeficiente balístico c , usando a tabela dos espaços,¹¹ na seguinte conformidade:

- 1) Inicialmente temos que calcular $f(v_0)$ já que não consta da tabela; para tanto, recorreremos a uma interpolação entre os valores correspondentes às duas velocidades assinaladas antes e após $v_0 = 253$:

$$v_{-1} = 260 \Leftrightarrow f(v_{-1}) = 30579,5$$

$$v_0 = 253 \Leftrightarrow f(v_0) = \text{calcular}$$

$$v_1 = 240 \Leftrightarrow f(v_1) = 29060,6$$

$$260 - 240 = 20 \Leftrightarrow 30579,5 - 29060,6 = 1518,9$$

$$260 - 253 = 7 \Leftrightarrow f(v_0) = 30579,5 - \frac{7(1518,9)}{20} = 30047,9$$

Portanto $f(v_0) = 30047,9$

- 2) Cálculo de $f(v_{100})$, isto é a função da velocidade v_i quando a abscissa da posição do projétil é de $x = 100\text{m}$:

$$f(v_{100}) = f(v_0) - \frac{x}{c} = 30047,9 - \frac{100}{0,138} = 29323,3$$

11 Tabela 4.2: Tábua dos espaços.

- 3) Como 29323,3 não está na tabela, temos também que fazer uma interpolação entre os valores correspondentes às duas funções assinaladas antes e após $f(v_{100}) = 29323,3$:

$$f(v_{100-1}) = 30579,5 \Leftrightarrow v_{100-1} = 260$$

$$f(v_{100}) = 29323,3 \Leftrightarrow v_{100} = \text{calcular}$$

$$f(v_{100+1}) = 29060,6 \Leftrightarrow v_{100+1} = 240$$

$$30579,5 - 29060,6 = 1518,9 \Leftrightarrow 260 - 240 = 20$$

$$30579,5 - 29323,3 = 1256,2 \Leftrightarrow v_{100} = 260 - \frac{20(1256,2)}{1518,9} = 243,46$$

Assim, $v_{100} = 243,46 \text{ m/seg}$ é a velocidade correspondente a $x = 100 \text{ m}$.

E continuamos calculando as velocidades correspondentes às demais distâncias (200, 300, ...1500, 1510, ...1520, ... $x_f = x_{\text{máx}}$).

Observação: (100 - 1) e (100 + 1) são índices, indicando que as velocidades foram tomadas uma posição antes (-1) e uma posição após (+1) constantes da tabela (tábua dos espaços).

Em seguida substituímos os valores de x_i e v_i na equação abaixo e calculamos os valores de y_i :

$$y_i = \tan \alpha x_i - \frac{g x_i^2}{2(\cos \alpha)^2 v_i^2}$$

Assim, com auxílio da planilha de cálculo, obtemos os respectivos pontos da trajetória $P_i(x_i, y_i)$ até atingir, por tentativas sucessivas, o ponto $P_f(x_f, 0)$; quando obtivermos o ponto $P_i(x_i, y_i) = P_f(x_f, 0)$, teremos encontrado a velocidade final v_f e o alcance máximo $x_{\text{máx}} = 1521 \text{ m}$.

Fazendo $v_f = v_0 - r x_{\text{máx}}$, podemos calcular o valor de r_f :

$$r_f = \frac{v_0 - v_f}{x_{\text{máx}}} = r = 0,08002003$$

Uma vez calculado r_i , o substituímos na equação $v(x) = v_0 - r_i x$ e recalculamos os valores de $v(x_i)$ e $y(x_i)$. E encontramos valores aproximados de $v(x)$ e $y(x)$; isso devido ao fato de que na verdade r_i não é constante, é diretamente

proporcional à velocidade, mas para velocidades subsônicas essa diferença não é significativa.¹²

Tabela 4.2 Tábua dos espaços.

Velocidades (v_i)	Função: $f(v_i) = f(v_0) - x/c$				
	0	20	40	60	80
m/seg					
100	15268,0	17756,4	20006,6	22071,2	23986,1
200	25777,2	27463,8	29060,6	30579,5	32029,8
300	33353,9	34512,4	35534,8	36406,6	37058,3
400	37548,3	37964,2	38342,4	38687,6	39004,1
500	39298,3	39582,5	39858,1	40125,7	40385,7
600	40638,6	40884,9	41124,9	41359,0	41587,9
700	41813,3	42035,6	42254,8	42471,0	42684,4
800	42895,1	43103,2	43308,8	43511,9	43712,5
900	43910,1				

Fonte: Florentiis (1987).

4.3.1 Construção da tabela com os dados numéricos da trajetória a partir da planilha de cálculo

Construção da tabela com dados numéricos comparativos das trajetórias traçadas com fator de retardação variável e constante:¹³

- 1) Na primeira coluna constam os valores de x ;
- 2) Na segunda coluna, os valores de $y = x \tan \alpha$;
- 3) Na terceira coluna, os valores de y_i em função de v_i , com fator r_i variável;
- 4) Na quarta coluna, os valores de $y(x)$, com fator r constante;

¹² Essa conclusão está de acordo com a Lei quadrática da velocidade, formulada por Newton.

¹³ O alcance máximo com uso de tabela balística foi obtido a partir da planilha 4.2, onde também constam dados comparativos entre as velocidades e os alcances atingidos pelo projétil, considerando o fator de retardação variável e constante. Os dados numéricos da trajetória na atmosfera foram obtidos a partir da planilha de cálculo 4.3.

- 5) Na quinta coluna, os valores de v_i calculados com auxílio de tabela balística ($c = 0,138$);
- 6) Na sexta coluna, os valores de $f(v_i)$
- 7) Na sétima coluna, os valores do fator variável r_i ;
- 8) Na oitava coluna, os valores da velocidade instantânea $v(x)$;
- 9) Na nona coluna, os valores de $\tan\theta_i$;
- 10) Na décima coluna, os ângulos θ_i em radianos; e
- 11) Na décima primeira coluna, os ângulos θ_i em graus.

Tabela 4.3 Dados numéricos das trajetórias traçadas com fator de retardação variável e constante.

X	$y(\alpha, x)$	$y(v_i)$	$y(x)$	V_i	Função	Fator	$v(x) = v_o - rx$	y'	θ_i	θ_i
				$c = 0,138$	$f(v_i) = f(v_o) - x/c$	$r_i = (v_o - v_i)/x$	$r = 0,08002003$			
m	m	m	m	m/s	$c = 0,138$		m/s	$\tan\theta_i$	radianos	graus
0	0	0	0	253,00	30047,9	0,10000000	253,00	0,57735	0,52360	30
100	58	57	57	243,46	29323,3	0,09540000	245,00	0,55485	0,50656	29
200	115	111	111	234,21	28598,6	0,09395000	237,00	0,52763	0,48551	28
300	173	162	162	225,14	27874,0	0,09286667	228,99	0,49467	0,45938	26
400	231	209	210	216,27	27149,3	0,09182500	220,99	0,45470	0,42676	24
500	289	251	253	207,68	26424,7	0,09064000	212,99	0,40610	0,38576	22
600	346	287	290	199,14	25700,1	0,08976667	204,99	0,34684	0,33385	19
700	404	316	322	191,05	24975,4	0,08850000	196,99	0,27430	0,26771	15
800	462	337	345	182,96	24250,8	0,08755000	188,98	0,18512	0,18305	10
900	520	347	358	175,20	23526,2	0,08644444	180,98	0,07493	0,07479	4
1000	577	345	359	167,63	22801,5	0,08537000	172,98	-0,06200	-0,06192	-4
1100	635	326	344	160,06	22076,9	0,08449091	164,98	-0,23332	-0,22922	-13
1200	693	291	311	153,04	21352,2	0,08330000	156,98	-0,44927	-0,42225	-24
1300	751	232	253	146,02	20627,6	0,08229231	148,97	-0,72384	-0,62655	-36
1400	808	146	163	139,08	19903,0	0,08137143	140,97	-1,07636	-0,82216	-47
1500	866	30	34	132,64	19178,3	0,08024000	132,97	-1,53399	-0,99309	-57
1521	878	0	0	131,27	19024,4	0,08002003	131,27	-1,64815	-1,02544	-59

4.4 Velocidade restante, duração da trajetória e integral da velocidade

4.4.1 Velocidade restante em função de x

A dedução da velocidade final é imediata, $v_f = v_0 - rx_f$. Numericamente, por tentativas sucessivas, obtemos os pontos da trajetória $P_i(x_i, y_i)$, até atingir o ponto $P_f(x_f, 0)$; quando tivermos o ponto $P_i(x_i, y_i) = P_f(x_f, 0)$, teremos encontrado a velocidade final v_f . A velocidade instantânea se obtém substituindo o valor de r em $v(x) = v_0 - rx$, isto é, v_i em função de x , em qualquer ponto da trajetória.

Componentes da velocidade: sendo v_i a velocidade instantânea resultante em qualquer ponto da trajetória, temos $v_x = v_i \cos \theta$ e $v_y = v_i \sin \theta$.

4.4.2 Velocidade instantânea em função do tempo

Devido à resistência do ar, a velocidade do projétil muda no decorrer do tempo. Δt é um curto período de tempo durante o qual a velocidade é constante. Δx representa o deslocamento no tempo Δt , isto é: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Quanto Δt for infinitesimal, a velocidade é instantânea:

$$v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Assim, podemos definir a velocidade como a derivada da distância, no tempo.

Se a velocidade inicial v_0 de um projétil, lançado na atmosfera, sofrer uma retardação (aceleração negativa) r por segundo, em 1 segundo a velocidade instantânea v_1 será:

$$v_1 = v_0 - v_0 r = v_0(1 - r)^1$$

Seguindo esse raciocínio para uma sequência de segundos, temos:

$$v_1 = v_0(1 - r)^1$$

$$v_2 = v_0(1 - r)^2$$

...

$$v_t = v_0(1 - r)^t$$

Então, depois de t segundos a velocidade instantânea será $v(t) = v_0(1 - r)^t$. Em cada período Δt , a retardação será $\frac{r}{n}$ e existem nt períodos de retardação em t segundos, de modo que o valor da velocidade será $v(t) = v_0 \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{nt}$. Se $n \rightarrow \infty$, a retardação será contínua e a velocidade instantânea:

$$v_i = v(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_0 \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Manipulação algébrica e mudança para a base e :

$$\left(1 - \frac{r}{n}\right)^{nt} = \left(1 + \frac{-r}{n}\right)^{nt} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{-r}}\right)^{\frac{n}{-r}}\right]^{-rt} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{-r}}\right)^{\frac{n}{-r}} = e$$

E temos a fórmula da velocidade em função do tempo:

$$v(t) = v_0(e^{-rt}) = v_0\left(\frac{1}{e^{rt}}\right)$$

4.4.3 Retardação instantânea

A retardação em um determinado instante ($-a_i$) é igual ao limite da variação da velocidade Δv , no intervalo de tempo $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, quando $\Delta t \rightarrow 0$; isto é, a retardação instantânea é a derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$-a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Assim, como a equação $v(t) = v_0 e^{-rt}$ é uma função exponencial que exprime a velocidade instantânea v_i em função do tempo, a retardação (aceleração negativa) é obtida pela equação diferencial:

$$v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[v_0 e^{-rt}] = v_0(-r e^{-rt}) = -r(v_0 e^{-rt}) = -rv(t)$$

que é a retardação instantânea em função do tempo ($v'(t) = -a(t) = -a_i$). Como $v_0 = 253m/seg$ e $r = 0,08002003$, temos que: $-a_0 \approx -20,25m/seg^2$.

Nota: Para derivar e^{-rt} , multiplicamos por $-r$:

$$\frac{d}{dt}[e^{-rt}] = (-r)(e^{-rt})$$

4.4.4. Duração da trajetória

Como $v(t_i) = v(x_i)$, podemos obter a fórmula para o cálculo do tempo que o projétil permanece no ar, desde a origem $P_0(x_0, y_0)$ e $t_0 = 0$, substituindo $v(t)$ por $v(x)$ e, através de manipulação algébrica, deduzimos a fórmula do tempo, isto é, função de função:

$$t(v(x)) = \frac{\ln\left(\frac{v_0}{v(x)}\right)}{r}$$

Uma vez calculado o tempo, podemos recalcular a velocidade instantânea em função do tempo $v_i = v(t)$.

4.4.5 Cálculo do alcance do tiro pela integral da velocidade

Também, deduzida a fórmula para o cálculo da velocidade em função do tempo $v(t) = v_0 \left(\frac{1}{e^{rt}}\right)$, podemos obter a função primitiva $X(t) = v_0 \left(-\frac{1}{re^{rt}}\right)$.

Temos que a velocidade é a derivada da distância percorrida e que como corolário a distância percorrida é a integral da velocidade; então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos recalcular o alcance do tiro:

$$X = \int_0^t v(t) dt = X(t) - X(0) = 253 \left(\left(-\frac{1}{re^{rt}}\right) - \left(-\frac{1}{r}\right) \right)$$

Nota: Para integrar e^{-rt} (integral indefinida), dividimos por $-r$ e somamos C:

$$\int (e^{-rt}) dt = \left(\frac{1}{-r}\right) (e^{-rt}) + C$$

4.5 Inclinação da trajetória

Ao sair da boca do cano da arma, o projétil conserva sempre a mesma inclinação do seu eixo, enquanto a inclinação da trajetória θ_i varia continuamente. Assim, o eixo do projétil não coincide com a trajetória nem com a reta tangente, mas forma com essa um ângulo continuamente variável ($\delta_i = \alpha - \theta_i$) (Florentiis, 1987).

Vamos considerar o deslocamento de um projétil ao longo da trajetória, desde a posição inicial de lançamento $P_0(x_0, y_0)$ até o ponto de queda $P_f(x_f, 0)$. Como o projétil está submetido aos efeitos da força da resistência do ar e da

força da gravidade, a intensidade da velocidade vai diminuindo exponencialmente em função do espaço percorrido, no tempo, e a direção e sentido do deslocamento vai se alterando progressivamente. Isto é, a inclinação da reta tangente à trajetória, ou derivada nos pontos $P_i(x_i, y_i)$, vai variando, na seguinte conformidade: à medida que o projétil vai subindo, sua função $y(x) > 0$ vai crescendo e sua inclinação e derivada são positivas $\theta > 0$ e $y'(x) = \tan\theta > 0$; ao atingir o vértice da trajetória $y_{máx}$, a inclinação é igual à zero $\theta = 0$, assim como a tangente também é igual à zero $\tan\theta = 0$; quando começa a descer, a função $y(x) > 0$ vai decrescendo e a inclinação e derivada são negativas $\theta < 0$ e $y'(x) = \tan\theta < 0$.

4.5.1 Equação da reta tangente à trajetória

Para a obtenção da equação da reta tangente à trajetória em um ponto genérico, derivamos a função $y(x)$, cuja equação diferencial é:

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \left[\tan \alpha x - \frac{g}{2\cos^2 \alpha} \cdot \frac{x^2}{(v_0 - rx)^2} \right]$$

Desenvolvendo, utilizando a regra da soma (subtração), a regra do quociente e a regra da cadeia, temos:

$$y'(x) = \tan \alpha - \frac{g}{2\cos^2 \alpha} \left(\frac{2x(v_0 - rx)^2 - 2x^2(v_0 - rx)(-r)}{(v_0 - rx)^4} \right)$$

E simplificando, chegamos à função derivada, que é a equação da reta tangente à trajetória em um ponto genérico $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$:

$$y'(x) = \tan \alpha - \frac{g}{2\cos^2 \alpha} \left(\frac{v_0 x}{(v_0 - rx)^3} \right) = \tan \theta$$

4.5.2 Cálculo da inclinação da trajetória

A inclinação é dada pelo ângulo θ em qualquer ponto da trajetória: com a função $\theta(\tan) = \tan\theta$, se obtém os ângulos em radianos, que são convertidos em graus; veremos que para um ângulo de lançamento $\alpha = 30^\circ$, temos um ângulo de queda que se aproxima de $\beta = -60^\circ$.

4.6 Comprimento da trajetória

O comprimento da trajetória S foi obtido inicialmente através de medição geométrica¹⁴ e, após, calculado dividindo o alcance máximo ($x_{máx}$) pelo cosseno do ângulo de lançamento ($\cos\alpha$), chegando-se ao seguinte resultado:

$$S = \frac{x_{máx}}{\cos \alpha} = \frac{1521}{0,86603} = 1757m$$

Essa constatação mostrou-se válida para o ângulo $\alpha = 30^\circ$.

Para efeito de comprovação e conferência do resultado, efetuamos o cálculo através de integração numérica; para tanto, utilizamos a Regra do Ponto Médio, soma de Riemann, chegando-se ao resultado aproximado de $S \approx 1736m$, para $n = 200$, e concluímos que quando $n \rightarrow \infty$, $S \rightarrow 1757m$, cuja fórmula é a seguinte:¹⁵

$$S(x, y) = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \Delta x [f(x_1^*) + \dots + f(x_n^*)]$$

Sendo:

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ extremos dos subintervalos

$x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{ponto médio de cada subintervalo}$

$b - a = \text{intervalo de integração}$

$n = 200$ (número de subintervalos)

Assim:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{x_{máx} - x_0}{n} = \frac{1521}{200}$$

14 René Descartes (1596-1650) em seu *Discours de La Méthode* (Discurso sobre o Método), publicado em 1637, afirmou ser capaz de resolver problemas geométricos com a álgebra e que as soluções de equações algébricas também poderiam ser obtidas com construções geométricas. (Flood, 2013).

15 Os dados da integração numérica do comprimento da trajetória foram obtidos a partir da planilha de cálculo 4.4.

4.7 Planilha de cálculo com os dados numéricos da trajetória

Deduzidas as fórmulas que permitem o cálculo dos elementos que determinam a trajetória do projétil .45 ACP, passamos a elaborar a tabela com os dados numéricos obtidos a partir da planilha de cálculo,¹⁶ na seguinte conformidade:

- 1) Estabelecemos os valores de x , de 100 em 100 metros, e inserimos na primeira coluna, acrescentando também os valores de x para o vértice da trajetória (957 m) e de x máximo (1521 m);
- 2) Nas células da segunda coluna, inserimos a fórmula que permite o cálculo de y em função de x , para o movimento retilíneo uniforme (MRU), ou seja: $y = x \tan \alpha$;
- 3) Nas células da terceira coluna, inserimos a fórmula que permite o cálculo da velocidade em função de x ;
- 4) Nas células da quarta coluna, inserimos a fórmula do cálculo da trajetória para atmosfera e obtemos os diversos valores de y , em função de x ;
- 5) Nas células da quinta coluna, inserimos a função derivada que permite calcular a tangente em qualquer ponto da trajetória;
- 6) De posse dos valores das tangentes, calculamos os ângulos respectivos em radianos, que são convertidos em graus e inseridos na sexta coluna;
- 7) Na sétima coluna, constam os valores das componentes horizontais das velocidades instantâneas;
- 8) Na oitava coluna, constam os valores das componentes verticais das velocidades instantâneas;
- 9) Na nona coluna, calculamos o tempo decorrido desde a origem, em função de $v(x)$;
- 10) Uma vez calculado o tempo, podemos recalcular a velocidade instantânea em função do tempo, isto é $v(t)$, e inserimos os valores na décima coluna;
- 11) Na décima primeira coluna, calculamos os valores da função primitiva da velocidade, que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, permitirá calcular as distâncias x em cada instante;
- 12) Na décima segunda coluna, calculamos os valores de S (comprimento da trajetória), dividindo os valores X pelo cosseno do ângulo de lançamento.

16 Os dados numéricos da trajetória na atmosfera foram obtidos a partir da planilha de cálculo 4.3.

Tabela 4.4 Dados numéricos da trajetória na atmosfera.

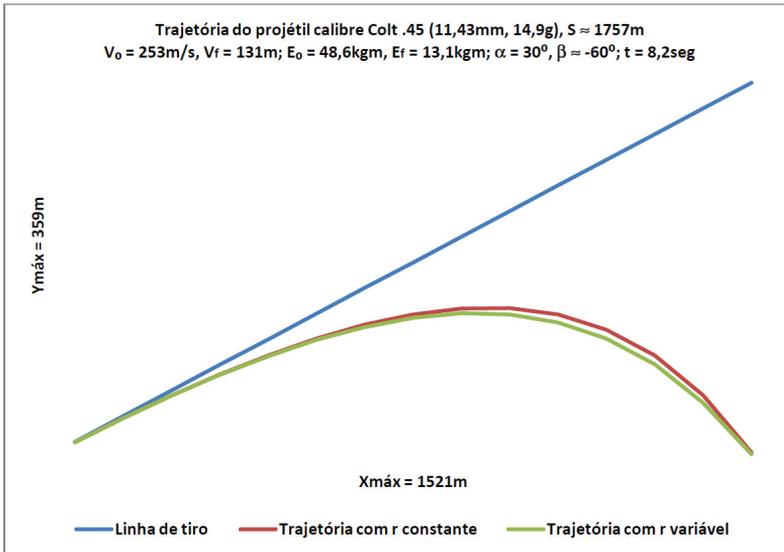
X	Y(α, x)	V(x)	Y(x)	Y'	θ_i	Vx	Vy	t(v(x))	V(t)	X(t)	S = X/cosα
m	m	m/s	m	tanθ_i	graus	m/s	m/s	seg	m/seg	primitiva	m
0	0	253	0	0,57735	30	219	126	0,0	253	-12,49687	0
100	58	245	57	0,55485	29	214	119	0,4	245	-12,10161	115
200	115	237	111	0,52763	28	210	111	0,8	237	-11,70636	231
300	173	229	162	0,49467	26	205	102	1,2	229	-11,31110	346
400	231	221	210	0,45470	24	201	91	1,7	221	-10,91584	462
500	289	213	253	0,40610	22	197	80	2,2	213	-10,52059	577
600	346	205	290	0,34684	19	194	67	2,6	205	-10,12533	693
700	404	197	322	0,27430	15	190	52	3,1	197	-9,73007	808
800	462	189	345	0,18512	10	186	34	3,6	189	-9,33482	924
900	520	181	358	0,07493	4	180	14	4,2	181	-8,93956	1039
957	553	176	360	0,00000	0	176	0	4,5	176	-8,71256	1106
1000	577	173	359	-0,06200	-4	173	-11	4,8	173	-8,54430	1155
1100	635	165	344	-0,23332	-13	161	-37	5,3	165	-8,14905	1270
1200	693	157	311	-0,44927	-24	143	-64	6,0	157	-7,75379	1386
1300	751	149	253	-0,72384	-36	121	-87	6,6	149	-7,35853	1501
1400	808	141	163	-1,07636	-47	96	-103	7,3	141	-6,96327	1617
1500	866	133	34	-1,53399	-57	73	-111	8,0	133	-6,56802	1732
1521	878	131	0	-1,73205	-60	66	-114	8,2	131	-6,48406	1757

4.8 Traçado da trajetória e forma geométrica

O sistema de coordenadas tem sua origem posicionada no local do lançamento, com o eixo X na horizontal, e seu sentido positivo está de acordo com o sentido da componente horizontal da velocidade inicial, e o eixo Y é vertical com seu sentido positivo para cima, tal que $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. As componentes da velocidade inicial são: $v_{ox} = v_o \cos \alpha$ e $v_{oy} = v_o \sin \alpha$.

Estabelecemos os valores de x , graduando arbitrariamente o eixo X de 100 em 100 metros, a partir de $P_0(x_0, y_0) = (0,0)$. O traçado da trajetória é obtido unindo-se os pontos $P_i(x_i, y_i)$, que representam graficamente a posição do projétil em cada instante. A forma geométrica da trajetória é um arco de parábola modificada, com o ramo descendente menor do que o ramo ascendente. É a inclinação (ângulo θ) que determina a forma geométrica da trajetória.

Gráfico 4.2 Trajetórias comparativas, com fator de retardação variável e constante.¹⁷



4.9 Cálculo da energia cinética no momento de impacto com o alvo

Um projétil de massa m lançado na vertical com velocidade inicial v_0 possui uma energia cinética¹⁸ E_c proporcional ao quadrado de sua velocidade instantânea

¹⁷ Gráfico gerado a partir da planilha de cálculo 4.2.

¹⁸ A Energia Cinética (E_c) é calculada em função da velocidade instantânea (v_i) e massa (m) do projétil; a unidade de medida de energia cinética no SI é o joule ($1\text{J} = 1\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}^2}$).

nea, expressa pela fórmula $E_c = \frac{1}{2}mv_i^2$. Na subida, a velocidade do projétil é desacelerada pela força gravitacional, ou seja, a energia cinética do projétil diminui.

Podemos usar a equação $W = Fd\cos\theta$ para expressar o trabalho realizado durante um deslocamento d . No lugar de F , usamos mg , o módulo de F_g ; assim, o trabalho W_g realizado pela força gravitacional F_g é $W_g = mgd\cos\theta$.

Durante a subida, a força F_g tem o sentido contrário ao do deslocamento d ; então $\theta = 180^\circ$ e a fórmula fica assim:

$$W_g = mgd \cos 180^\circ = mgd(-1) = -mgd$$

O sinal negativo indica que durante a subida a força gravitacional absorve energia cinética mgd do projétil; por isso o projétil perde velocidade na subida.

Depois que o projétil atinge a altura máxima e começa a descer, o ângulo θ entre a força F_g e o deslocamento d é zero; como $\theta = 0^\circ$, a fórmula fica assim:

$$W_g = mgd \cos 0^\circ = mgd(+1) = mgd$$

Vamos considerar que F_y representa a força resultante agindo sobre o projétil na dimensão y ; o trabalho resultante é $W = \int F_y dy$. Uma vez que a velocidade varia com a posição e a posição varia com o tempo, pode-se usar a regra da cadeia para descrever $\frac{dv_y}{dt} = \left(\frac{dv_y}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$ e a força resultante escrita assim:

$$F_y = ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{dv_y}{dy} \frac{dy}{dt} = m \frac{dv_y}{dy} v_y = mv_y \frac{dv_y}{dy}$$

Assim, o trabalho resultante na dimensão y pode ser escrito pela fórmula:

$$W_y = \int F_y dy = \int mv_y \frac{dv_y}{dy} dy = \int mv_y dv_y$$

E a energia cinética total é a integral da quantidade de movimento (mv_i):

$$E_c = \int_0^{v_i} (mv_i) dv_i = \frac{1}{2}mv_i^2$$

4.9.1 Construção da tabela com os dados numéricos da energia cinética do projétil

Construção da tabela com os dados numéricos da energia cinética do projétil .45ACP (11,43mm; 14,9g; $BC = 0,138$; $v_0 = 253m/seg$; $\alpha = 30^\circ$) em cada ponto da trajetória, na seguinte conformidade:¹⁹

- 1) Na primeira coluna inserimos os valores de x ;
- 2) Na segunda, os valores de y ;
- 3) Na terceira, os valores da velocidade instantânea em função de x ;
- 4) Na quarta, os valores da função derivada ($\tan\theta_i$);
- 5) Na quinta, os ângulos θ_i em radianos;
- 6) Na sexta, os ângulos θ_i em graus;
- 7) Na sétima, os senos de θ_i ;
- 8) Na oitava, os cossenos de θ_i ;
- 9) Na nona, os valores das componentes horizontais da velocidade (v_x);
- 10) Na décima, os valores das componentes verticais da velocidade (v_y);
- 11) Na décima primeira, os valores da energia cinética, em joules (J);
- 12) Na décima segunda, os valores da energia cinética, em quilogramas (kgm).

¹⁹ Na planilha 4.5, foram calculados os dados numéricos da energia cinética, no momento de impacto com o alvo, nas distâncias consideradas.

Tabela 4.5 Dados numéricos da energia cinética do projétil .45ACP.

X	Y(x)	V _i = V _o - rX	Y'	θ _i	θ _i		Adj	Op	Vx = Vcosθ _i		Vy = Vsenθ _i	Ec = mv ² /2	Ec = (mv ² /2)/g
					inclinação	rad			grau	horizontal			
m	m	m/s	tan θ				cos θ	sen θ	m/s	m/s	m/s	J	kgm
0	0	253	0,57735	0,52360	30	0,86603	0,50000	0,50000	219	126	126	477	49
100	57	245	0,55485	0,50656	29	0,87442	0,48517	0,48517	214	119	119	447	46
200	111	237	0,52763	0,48551	28	0,88444	0,46666	0,46666	210	111	111	418	43
300	162	229	0,49467	0,45938	26	0,89633	0,44339	0,44339	205	102	102	391	40
400	210	221	0,45470	0,42676	24	0,91031	0,41392	0,41392	201	91	91	364	37
500	253	213	0,40610	0,38576	22	0,92651	0,37626	0,37626	197	80	80	338	34
600	290	205	0,34684	0,33385	19	0,94479	0,32769	0,32769	194	67	67	313	32
700	322	197	0,27430	0,26771	15	0,96438	0,26453	0,26453	190	52	52	289	29
800	345	189	0,18512	0,18305	10	0,98329	0,18203	0,18203	186	34	34	266	27
900	358	181	0,07493	0,07479	4	0,99720	0,07472	0,07472	180	14	14	244	25
1000	359	173	-0,06200	-0,06192	-4	0,99808	-0,06188	-0,06188	173	-11	-11	223	23
1100	344	165	-0,23332	-0,22922	-13	0,97384	-0,22722	-0,22722	161	-37	-37	203	21
1200	311	157	-0,44927	-0,42225	-24	0,91217	-0,40981	-0,40981	143	-64	-64	184	19
1300	253	149	-0,72384	-0,62655	-36	0,81006	-0,58635	-0,58635	121	-87	-87	165	17
1400	163	141	-1,07636	-0,82216	-47	0,68064	-0,73261	-0,73261	96	-103	-103	148	15
1500	34	133	-1,53399	-0,99309	-57	0,54610	-0,83772	-0,83772	73	-111	-111	132	13
1521	0	131	-1,64815	-1,02544	-59	0,51873	-0,85494	-0,85494	68	-112	-112	128	13

Referências

Arenales, Selma. *Cálculo numérico*. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

Carneiro, Carlos E. I. *Introdução às técnicas do cálculo diferencial e integral*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

Chuck Hawks. *Handgun Trajectory Table*. Disponível em: <http://www.chuckhawks.com/handgun_trajectory_table.html>. Acesso em: 16 de outubro de 2014.

Companhia Brasileira de Cartuchos. *Munições para armas curtas*. Informativo Técnico nº 43. Ribeirão Pires: CBC, 2005. Disponível em: <<http://www.cbc.com.br/upload/informativos/6.pdf>>. Acesso em 10 de novembro de 2014.

Flood, Raymond. *As descobertas e a propagação do conhecimento através da vida dos Grandes Matemáticos*. São Paulo: M.Books, 2013.

Florentiis, Giuseppe. *Tecnologia delle armi da fuoco portatili, ottava edizione*. Milano: Hoelpli, 1987.

Franco Atirador. Disponível em: <<http://www.geocities.ws/francoatiradorwp/calibres.html>>. Acesso em: 19 de outubro de 2014.

Guardaño, Antonio J. Durán. National Geographic, edição especial *Newton e a Lei da gravidade, a força mais atrativa do Universo*. Lisboa: RBA Revistas, 2015.

- Halliday & Resnick. *Fundamentos da Física*, volume I (mecânica), volume II (gravitação, ondas e termodinâmica). Traduzido do original *Fundamentals of physics, 9th Ed.* por Ronaldo Sérgio de Biasi (reimpressão). Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- Kakalios, James. *The Physics of Superheroes, spectacular second edition*. New York: Gotham Books, 2009.
- Mathias, José Joaquim e Barros, Saulo Rêgo. *Manual Básico de Armas de Defesa*, 1ª edição. São Paulo: Magnum, 1997.
- Miller, Jr., G. Tyler. *Ciência ambiental*. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- Murolo, Afrânio Carlos. *Matemática aplicada à administração, economia e contabilidade*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- Nitta, Hideo. *Guia Manga de Física*. São Paulo: Novatec, 2010.
- Puopolo, Gerardo. *Armi da fuoco e tiro per difesa personale*. Avellino (Italia): Edizioni La Fiaccola, 1991.
- Rabello, Eraldo. *Balística Forense*, 3ª edição. Porto Alegre: Sagra Luzzatto, 1995.
- Resnick, Robert e outros. *Física 1*, 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
- Stewart, James. *Cálculo, volumes I e II*; traduzido do título original *Calculus*, 6ª edição norte americana. São Paulo: Cengage Learning, 2012.
- Vesilind, P. Arne. *Introdução à engenharia ambiental*. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- Vieira, Sonia. *Estatística básica*. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- Weinberg, Steven. *Para explicar o mundo: a descoberta da ciência moderna*. São Paulo: Companhia das Letras, 2015.

Sobre o autor

Otaviano de Almeida Júnior

Iniciou os estudos de cálculo da trajetória dos projéteis balísticos em 1988, através de notas de aula do Curso de Matemática I, II e II da Faculdade de Administração da Universidade Cidade São Paulo.

Estudou no Istituto Italiano di Cultura San Paolo e obteve a certificação de italiano como língua estrangeira em 2009, pela Università per Stranieri di Siena, Itália.

Possui pós-graduação em Educação Matemática (2014) pela Universidade Nove de Julho; apresentou, ao término do curso, um artigo científico intitulado “Cálculo da Trajetória dos Projéteis Balísticos na Atmosfera”.

Possui prática em campos de tiro, visita ao *stand* de provas e à fábrica de munições da Companhia Brasileira de Cartuchos (CBC).



Apêndice A: planilhas de cálculo do Microsoft Office Excel

Para a elaboração das planilhas de cálculo foi utilizado o aplicativo Microsoft Office Excel 2007. Ink (2,55kb), conforme descrição no texto do livro, como segue:

- 1) Os dados numéricos da trajetória do projétil no vácuo foram obtidos a partir da planilha de cálculo 2.1.
- 2) A distribuição normal dos alcances dos tiros foi obtida a partir da planilha de cálculo 3.1.
- 3) A integração numérica da Função Densidade de Probabilidade obtida a partir da planilha de cálculo 3.2.
- 4) O alcance máximo do projétil, por aproximações sucessivas, foi obtido a partir da planilha de cálculo 4.1.
- 5) O alcance máximo com uso de tabela balística foi obtido a partir da planilha 4.2, onde constam também dados comparativos entre as velocidades e os alcances atingidos pelo projétil, considerando o fator r variável e constante.
- 6) Os dados numéricos da trajetória na atmosfera foram obtidos a partir da planilha 4.3.
- 7) Os dados da integração numérica do comprimento da trajetória foram obtidos a partir da planilha de cálculo 4.4.
- 8) E, finalmente, constam na planilha 4.5, os dados numéricos da energia cinética, no momento de impacto sobre o alvo, nas distâncias consideradas.

