

Fundamentação teórica

1.1 Balística

A Balística é a ciência que estuda o movimento dos projéteis e os fenômenos conexos. Essa ciência se divide em: a) Balística Interna que estuda os fenômenos físicos e químicos e os elementos que caracterizam o movimento do projétil desde a iniciação da carga de lançamento até a saída do cano da arma; b) Balística Externa que estuda a trajetória do projétil fora do cano da arma até o alvo; e c) Balística Terminal que estuda os efeitos sobre o projétil e sobre o alvo após o impacto.

Podemos ainda acrescentar que a Balística Externa é a parte da Mecânica que estuda o movimento dos projéteis que se deslocam livres no espaço em virtude de um impulso¹ inicial recebido.

Como corolário do conceito de Balística Externa, projéteis balísticos são corpos pesados² que se deslocam livres no espaço em virtude de um impulso inicial recebido. A diferença básica entre um projétil balístico e outro não balístico é que no projétil balístico a força de propulsão cessa assim que é lançado na atmosfera; ao passo que nos não balísticos a força de propulsão continua agindo através de foguetes instalados na cauda.

1.2 Arma de fogo e sua munição

Arma de fogo é aquele engenho mecânico que cumpre a função de lançar à distância com grande velocidade corpos pesados chamados projéteis, utilizando a energia explosiva da pólvora (carga de lançamento ou projeção).

1 O impulso é igual à força multiplicada pelo tempo de aplicação ($I = Ft$).

2 Corpos que possuem massa e, portanto, sujeitos à ação da gravidade: $P = mg$.

Em uma definição mais precisa, *arma de fogo* é uma máquina termodinâmica apta a lançar à distância, com grande velocidade, corpos pesados, chamados projéteis, utilizando o impulso resultante da força expansiva dos gases gerados pela queima do propelente, com energia suficiente para provocar graves ferimentos a pessoas ou danos a material.

Cada arma possui suas qualidades balísticas, quais sejam: a) distância máxima que é capaz de lançar o projétil; b) força viva, representada pela energia restante que possui o projétil no momento do impacto com o alvo; c) precisão da arma de realizar pequenas rosas de tiro³; d) justeza pela qual um tiro é tanto justo quanto mais o centro da rosa de tiro se aproxima do ponto visado; e) penetração e potencial lesivo ou ofensivo.

O cartucho é o conjunto dos elementos que constituem a munição das armas de percussão e retrocarga e compreende: a) estojo de latão, que condiciona os demais elementos; b) projétil, totalmente de chumbo ou encamisado; c) espoleta, com mistura iniciadora; e d) pólvora, que é a carga de lançamento.

1.3 A energia cinética e a Termodinâmica

A Termodinâmica estuda os processos de transformação da energia calorífica em energia cinética. No caso das armas de fogo, a carga de lançamento é constituída de uma quantidade de explosivo sob a forma de pólvora contida no cartucho, que inflamada pela ação da mistura iniciadora queima rapidamente, emitindo gases que se expandem devido ao calor gerado; surge então uma elevada pressão; o trabalho mecânico produzido empurra o projétil em direção à boca do cano, o qual adquire rapidamente velocidade.

1.4 Evolução histórico-científica do cálculo da trajetória

Um projétil que sai do cano de uma arma com a velocidade inicial v_0 , desacelera na subida por causa da gravidade e acelera enquanto cai, até atingir o solo; a velocidade final é menor do que a inicial por causa da perda de energia pela resistência do ar (durante a subida essa perda de energia diminui a altura final atingida pelo projétil). Há muitas perguntas que podemos fazer, por exemplo: Qual o alcance máximo do projétil? Qual sua velocidade? A que altura atinge? Por quanto tempo permanece no ar? Qual a forma geométrica de sua trajetória?

3 Rosa de tiro é o conjunto de pontos formados pela interceptação transversal de um fecho de trajetórias de uma série de tiros que impactam sobre o alvo.

A sua trajetória é determinada completamente por forças externas; uma vez conhecida a natureza dessas forças e o modo como influenciam o seu movimento, podemos calcular o seu percurso com uma dada velocidade inicial. A trajetória determinada contém então todas as informações que se possa querer sobre a altura atingida pelo projétil, distância máxima, a duração do voo e sua velocidade. (Kakalios, 2009).

Galileu (1564-1642) foi quem primeiro apresentou respostas a essas indagações, quando formulou a teoria do lançamento inclinado, segundo a qual a trajetória de um projétil, lançado nas imediações da superfície da Terra e através de um meio não resistente (vácuo), poderia ser definida como uma parábola,⁴ simétrica em relação à sua ordenada máxima, e ser traçada com exatidão. Nesse caso, despreza-se a resistência do ar, de modo que o movimento se daria apenas sob o efeito do impulso inicial recebido e da força gravitacional (Rabello, 1995). O movimento no vácuo ocorreria como se não existisse a atmosfera, cuja equação é obtida facilmente:⁵

$$y = \tan \alpha x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{(v_0 \cos \alpha)^2}$$

No entanto, a atmosfera influencia consideravelmente o movimento do projétil, de modo que a parábola teoricamente formulada é modificada em razão de a resistência do ar agir, retardando-o desde o instante inicial de lançamento, e em consequência a velocidade restante vai diminuindo ao longo do tempo até atingir o ponto de queda. Por isso, a trajetória real não é simétrica em relação ao vértice (ordenada máxima), seu comprimento no ramo descendente é menor do que no ramo ascendente.

Newton (1642-1727) formulou a lei quadrática da velocidade, segundo a qual a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade do projétil considerado. Posteriormente constatou-se que, para velocidades subsônicas, a resistência do ar se comporta aparentemente como proporcional à quadratura da velocidade, mas para velocidades superiores essa proporção não se verifica. (Florentiis, 1987).

4 Galileu tinha mostrado que uma pedra, ao cair, percorria distâncias proporcionais ao quadrado do tempo; e que uma bala de canhão seguia uma trajetória parabólica. Galileu, no entanto, desconhecia as leis físicas por trás desse tipo de movimento. (Guardaño, 2015).

5 Essa equação, que corresponde a uma parábola de eixo vertical, é devida a Galileu que formulou a primeira teoria do movimento dos projéteis, em 1638, desprezando, por julgá-la pouco importante, a resistência do ar.

É comum lermos em livros didáticos expressões semelhantes a “despreza-se a resistência do ar”; essa tendência simplesmente ignora a existência das Leis da Dinâmica estabelecidas por Isaac Newton,⁶ mormente a Lei da Ação e Reação.

Já na Antiga Grécia, Aristóteles (384-322 a.C.), familiarizado com o movimento na presença da resistência, como na queda livre dos corpos, defendia que todo movimento tem uma causa. Aristóteles ensinava que a velocidade de um corpo em queda é proporcional a seu peso. Embora ele não soubesse a razão, a resistência do ar ou de qualquer outro meio cercado um corpo em queda tem como efeito que a velocidade acabe se aproximando de um valor constante, a velocidade terminal, que de fato aumenta com o peso do corpo em queda. (Weinberg, 2015).

Huygens (1629-1695), por sua vez, entendia que os princípios científicos servem apenas de hipóteses que deveriam ser testadas, comparando suas consequências com a observação. (Weinberg, 2015).

1.5 Aceleração da gravidade nas imediações da superfície da Terra

Um projétil, lançado nas imediações da superfície da Terra, é submetido à força da gravidade P que atua na vertical, para baixo, com intensidade mg , isto é $P = mg$; sendo m a massa do projétil e g a aceleração da gravidade,⁷ que pode ser considerada constante em qualquer ponto da trajetória, não importando a direção do projétil.

A tabela seguinte mostra exemplos de valores da aceleração da gravidade referidos a algumas altitudes acima da superfície da Terra. Nota-se que a aceleração da gravidade no cume do Monte Everest, a 8,8 quilômetros de altitude, pouco se alterou em relação à superfície.

6 Em *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural) de 1687. In Flood, Raymond. Os grandes matemáticos. São Paulo: M.Books, 2013.

7 A aceleração da gravidade g foi mensurada pela primeira vez por Huygens, cujo resultado obtido foi de $32,2 \text{ ft/seg}^2 \approx 9,82 \text{ m/seg}^2$. (Weinberg. *Opus cit.*, pág. 249).

Tabela 1.1 Variação da aceleração da gravidade com a altitude.

Variação da aceleração da gravidade	Altitude	Aceleração
Exemplos	km	m/seg ²
Superfície média da Terra	0,0	9,83
Monte Everest	8,8	9,80
Recorde para um balão tripulado	36,6	9,71
Órbita do ônibus espacial	400,0	8,70

Fonte: Halliday & Resnick (2013)

De acordo com a Lei da Gravitação Universal,⁸ estabelecida por Isaac Newton, o módulo da força gravitacional (F_g) que a Terra exerce sobre um projétil que se move nas imediações de sua superfície é dado pela equação:

$$F_g = G \frac{Mm}{R^2}$$

Em que G é a constante gravitacional, M é a massa da Terra, m é a massa do projétil e R é o raio da Terra.

O projétil cai em direção ao centro da Terra sob a ação da força gravitacional, com aceleração a_g . De acordo com a segunda lei da Dinâmica, os módulos de F_g e a_g estão relacionados pela equação:

$$F_g = ma_g$$

A aceleração da gravidade se obtém através de manipulação algébrica, substituição de F_g e simplificando:

$$a_g = \frac{F_g}{m} = \left(G \frac{Mm}{R^2} \right) \left(\frac{1}{m} \right) = G \frac{M}{R^2} \approx 9,83 \text{ m/seg}^2$$

Sendo: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; e $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

Experimentalmente, verifica-se que o valor da aceleração da gravidade g medido em um ponto específico da superfície terrestre é diferente do valor calculado pela equação $a_g = \frac{GM}{R^2}$, para o mesmo ponto.

Se colocássemos o projétil em uma balança, no ponto considerado, obteríamos a força normal F_N exercida pela balança sobre o projétil dirigida para fora da Terra no sentido positivo do eixo Y e a força gravitacional mg dirigida para o centro da Terra. Ocorre que o projétil, mesmo em repouso em relação ao referen-

8 Assim enunciada: “Matéria atrai matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distância”.

cial inercial terrestre, descreve um arco de circunferência em torno do eixo de rotação da Terra e, portanto, possui uma aceleração centrípeta que atua no mesmo sentido em direção ao centro da Terra, $a_c = \omega^2 R$; onde ω (ômega) é a velocidade angular da Terra e R é o respectivo raio. Assim, podemos escrever para a segunda lei da Dinâmica, ao longo do eixo Y , a seguinte equação:

$$F_N = m(a_g - \omega^2 R)$$

Como o módulo da força normal F_N é igual ao peso mg indicado pela balança, substituindo, temos:

$$mg = m(a_g - \omega^2 R)$$

E cancelando m , obtemos a expressão que relaciona g e a_g , ou seja:

$$g = a_g - \omega^2 R$$

Assim, a rotação da Terra faz com que a aceleração do projétil a_g seja maior que a aceleração gravitacional g , no ponto considerado.

A diferença entre as acelerações a_g e g é igual a $\omega^2 R$ e é máxima no equador, já que o raio R da circunferência da Terra é maior. Supondo que o projétil está na posição θ_1 no instante t_1 e na posição θ_2 no instante t_2 , definimos a velocidade angular média do projétil como o deslocamento angular $\Delta\theta$, no intervalo de tempo Δt :

$$\omega_{méd} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Para uma rotação completa da Terra, temos o ângulo $\theta = 2\pi rad$ e o período $t = 24$ horas. Usando esses valores, convertendo horas para segundos, estimamos a diferença entre a_g e g , usando a equação da velocidade angular e o raio médio da Terra:

$$a_c = \omega_{méd}^2 R = \left(\frac{2\pi}{86400} \right)^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \approx 0,034 \text{ m/seg}^2$$

$$g = a_g - a_c = 9,83 - 0,034 \approx 9,8 \text{ m/seg}^2$$

Como essa diferença é pequena, normalmente se usa nos cálculos o valor de $g = 9,81 \text{ m/seg}^2$.

1.6 A atmosfera terrestre padrão

A atmosfera terrestre não é um meio homogêneo, está também submetida à ação da gravidade, cujo valor é inversamente proporcional ao quadrado da dis-

tância ao centro da Terra e, como decorrência, bem como em virtude da grande compressibilidade do ar atmosférico, as camadas inferiores são mais densas que as superiores. A troposfera, onde acontece a maior parte dos fenômenos atmosféricos, se estende desde o nível do mar até cerca de 5 km nos polos e até 18 km no equador; mais de 80% do ar está dentro dessa camada e a temperatura diminui de acordo com a altitude. A camada seguinte é a estratosfera, uma camada de ar onde o perfil de temperatura é invertido; se estende até 48 km acima do nível do mar. Há mais duas camadas superiores, a mesosfera e a termosfera, que contém apenas 0,1% do ar atmosférico.

1.6.1 A resistência do ar

A trajetória na atmosfera difere da parabólica no vácuo por causa da resistência do ar. Para calcular os elementos da trajetória real, precisamos conhecer os efeitos da resistência do ar, cuja teoria desta foi enunciada por Isaac Newton, partindo da hipótese de que as moléculas de ar, colididas pelo projétil, assumem um movimento em direção perpendicular àquela da superfície do projétil, com velocidade igual à componente da velocidade do projétil na mesma direção. As moléculas do ar adquirem então uma força viva, a qual é subtraída da energia cinética do projétil em movimento. O deslocamento das moléculas resulta do efeito da aplicação de uma força de resistência que se opõe ao movimento do projétil. Além disso, cada molécula de ar, a temperatura ambiente, atinge uma velocidade de cerca 335 *m/seg*, ou seja, a velocidade do som no ar (Kakalios, 2009); quando o projétil assume velocidades supersônicas, se forma a sua frente uma camada de ar de alta densidade, provocando ondas de choque.

Segundo a teoria de Isaac Newton, a força da resistência do ar é diretamente proporcional ao quadrado da intensidade da velocidade instantânea e expressa pela fórmula (válida para velocidades subsônicas):

$$F_R = \rho \frac{(d \cos \delta)^2 v_i^2}{2}$$

Sendo: ρ (rô) a massa específica do ar atmosférico; d o diâmetro do projétil; δ (delta) o ângulo que o eixo do projétil faz com a reta tangente à trajetória em um ponto genérico ($\delta_i = \alpha - \theta_i$); $(d \cos \delta)^2$ a área da seção do projétil, transversal à direção de seu movimento; v_i a velocidade instantânea no ponto considerado.

1.6.2 Densidade do ar

A densidade do ar depende da temperatura e da pressão atmosférica. Em locais de menor altitude, a pressão atmosférica é maior e o ar é mais denso e, por-

tanto, oferece maior resistência ao movimento dos projéteis; o mesmo vale para locais onde a temperatura é menor, o ar se torna mais denso dificultando mais ainda o deslocamento através dele. Devido à resistência do ar ser diretamente proporcional à sua densidade, o deslocamento do projétil será tanto mais fácil quanto mais afastado estiver da superfície da Terra.

Massa específica. A densidade do ar, ou massa específica ρ , é obtida isolando uma quantidade de volume do ar ΔV e medimos a massa Δm contida nesse volume; a massa específica é uma grandeza escalar, sua unidade no SI é o quilograma por metro cúbico, ou seja, a massa de ar contida em 1 m^3 .

Devido à grande compressibilidade do ar atmosférico, sua massa específica varia consideravelmente com a pressão, bem como com a temperatura e umidade relativa do ar. Assim:

- A massa específica do ar seco, a 0°C e pressão 760 mmHg é de:

$$\rho = \frac{m}{V} = 1,293 \text{ kg/m}^3$$

- Como o ar atmosférico contém uma quantidade de vapor d'água, que possui densidade menor do que o ar seco, a densidade resultante também é menor; em um metro cúbico de ar, à temperatura de 15°C , pressão 750 mmHg e 66% de umidade, a massa específica é de $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ (Florentiis, 1987).
- A massa específica do ar, a 20°C e 1 atm de pressão, é $\rho = 1,21 \text{ kg/m}^3$; a 20°C e 50 atm , é $\rho = 60,5 \text{ kg/m}^3$ (Halliday & Resnick, 2013).

1.6.3 Pressão atmosférica

Torricelli demonstrou, em 1640, que a pressão atmosférica é igual ao peso de uma coluna vertical de ar, subindo até o alto da atmosfera, dividida pela área transversal dessa coluna, isso é $p = \frac{P}{A}$, e equivale a uma coluna de mercúrio (Hg) contido em um tubo de vidro fechado vertido, que possa ser sustentada pelo ar atmosférico. Ao nível do mar essa coluna de mercúrio é de 760 mm e indicada por:

$$p = 760 \text{ mmHg} = 760 \text{ torr} = 1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 14,7 \text{ lb/in}^2$$

Um Pascal (Pa) é a pressão que produz uma força de um Newton, quando aplicada sobre uma área de um metro quadrado. A pressão atmosférica é exercida com a mesma intensidade em todas as direções no ponto considerado.

1.6.4 Vento

O ar atmosférico não sendo um meio homogêneo, não atua uniformemente sobre o projétil. Sensível às variações de pressão e temperatura e não sendo essa

uniforme em todos os pontos de um mesmo lugar, isso determina agitações constantes da massa de ar; continuamente se processam deslocamentos verticais das porções mais aquecidas (menos densas), as quais são substituídas por porções mais frias adjacentes; estabelecem-se, então, correntes de ar em direções e sentidos diversos, verticais, horizontais e transversais.

Uma corrente de vento, na mesma direção e em sentido contrário ao deslocamento do projétil, aumentará a resistência do ar; enquanto que uma corrente de vento favorável diminuirá a resistência do ar. Se a corrente de vento vier pela direita, o projétil se deslocará para a esquerda; se a corrente de vento vier pela esquerda, o projétil se deslocará para a direita. Se a corrente de vento for ascendente, aumentará os valores das componentes verticais das velocidades restantes; isto é, aumentará os valores das ordenadas da trajetória. Se o vento for descendente, a trajetória será achatada; isto é, os valores das componentes verticais das velocidades restantes serão diminuídos. Se a corrente de vento for transversal ao movimento do projétil, em qualquer direção e sentido, as velocidades restantes serão a somatória das velocidades vetoriais envolvidas.

1.7 Forças que determinam o movimento dos projéteis e as Leis da Dinâmica

Ao ser disparado, o projétil é submetido à força produzida pela expansão dos gases provenientes da queima do propelente contido no cartucho (munição), iniciando seu percurso no interior do cano da arma; como seu diâmetro é maior que o calibre real, o projétil é forçado contra as raiais do cano, adquirindo a rotação determinada pelos sulcos e a estabilidade necessária à sua trajetória.

O movimento do projétil é determinado por forças externas regidas pelas leis da Dinâmica estabelecidas por Isaac Newton. No instante de lançamento do projétil na atmosfera, isto é, quando deixa a boca do cano da arma, sua velocidade inicial é v_0 , com direção definida pelo ângulo α que o vetor velocidade faz com a horizontal. Devido ao princípio de inércia,⁹ o projétil tende a conservar o impulso recebido, em grandeza e direção, e a deslocar-se com movimento retilíneo e uniforme (MRU), à velocidade inicial adquirida e ao longo da reta determinada idealmente pelo prolongamento do eixo do cano (linha de tiro). Mas esse projétil é solicitado pela força da gravidade¹⁰ e sofre os efeitos da força de resistência do

9 Primeira lei da Dinâmica – também conhecida como princípio de inércia: “Todo ponto material em repouso, não atuando sobre ele qualquer força exterior, tende a permanecer em repouso; e nas mesmas condições, todo ponto material em movimento tende a conservar este movimento, que será retilíneo e uniforme”.

10 Segunda lei da Dinâmica – Lei da proporcionalidade entre as forças e as acelerações: “As forças são proporcionais às acelerações que imprimem a um mesmo ponto material”. O

ar¹¹ e, em virtude disso, sua velocidade se modifica e a sua direção se altera, encurvando-se progressivamente, atraído que é para o centro da Terra. Essa curva, denominada trajetória, constitui um dos exemplos mais típicos da validade da Lei da independência das forças simultâneas.¹²

1.8 A trajetória e seus elementos

No estudo da balística, trajetória é considerada a curva descrita pelo projétil em seu deslocamento no espaço, desde a origem $P_0(0,0)$ até o ponto de queda $P_f(x_f,0)$.

Referidos ao plano vertical, determinado pelos eixos ortogonais¹³ OX e OY , os elementos da trajetória, considerados em nosso estudo, são os seguintes:

- Origem $P_0(x_0, y_0) = (0, 0)$: é o ponto em que o projétil deixa o cano da arma e inicia seu deslocamento no espaço.
- Velocidade inicial (v_0): é a velocidade do projétil no início de sua trajetória.
- Plano horizontal: é o plano que passa pela origem.
- Linha de tiro: é a linha determinada pelo prolongamento do eixo do cano da arma.
- Linha de projeção ($xtana$): é a reta tangente à trajetória na origem; coincide com a linha de tiro, no momento do disparo.
- Alcance máximo ($Xmáx$): é a distância horizontal compreendida entre a origem e o ponto de queda.
- Altura máxima ($Ymáx$): é o ponto mais alto ou vértice da trajetória (ordenada máxima); divide a trajetória em dois ramos, ascendente e descendente.
- Ponto de queda $P_f(Xmáx,0)$: é o ponto em que o projétil retorna ao plano horizontal do qual foi lançado.
- Ângulo de projeção ou de tiro ($\alpha = \theta_0$): é o ângulo agudo que a reta tangente à trajetória, na origem, faz com o plano horizontal.

quociente do valor da força pelo da aceleração que a determina é constante para o ponto material considerado, ao qual se dá o nome de massa do ponto, podendo, assim, estabelecer a fórmula fundamental da Dinâmica: Força = massa x aceleração.

11 Terceira lei da Dinâmica – Lei da igualdade entre a ação e reação: “A ação, do ponto material A sobre o ponto material B, é igual e contrária à reação, do ponto material B sobre o ponto material A”.

12 Quarta lei da Dinâmica – Lei da independência das forças simultâneas: “A ação de uma força sobre um ponto material é independente das ações das demais forças que possam atuar simultaneamente sobre este mesmo ponto”.

13 Plano Cartesiano.

- j) Inclinação da trajetória em um ponto genérico $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$: é o ângulo agudo (θ_i) formado pela reta tangente à trajetória, no ponto considerado, e o plano horizontal que contém esse ponto.
- k) Ângulo de queda ($\beta = \theta_f$): é o ângulo agudo que a reta tangente à trajetória, no ponto de queda, faz com o plano horizontal.
- l) Duração da trajetória ($\Delta t = t_f - t_0$): é o tempo empregado pelo projétil no seu deslocamento da origem ao ponto de queda.

