

## Otimização de um modelo de via férrea com vistas à minimização de vibrações

Gabriel Gomes Silva<sup>1</sup>

Romes Antônio Borges<sup>2</sup>

**Resumo:** Vibrações transmitidas no solo oriundas da passagem de trens em vias férreas tem sido foco de diversos estudos na atualidade na busca por soluções que visem à minimização dos efeitos causados por esta dinâmica, como desconforto nos passageiros, danos na própria via férrea e em estruturas próximas a mesma. O presente trabalho busca, a partir de análise de um modelo de via férrea, minimizar os deslocamentos na fundação do sistema. O modelo da via férrea consiste em um acoplamento entre trilhos, dormentes e fundações, sendo o movimento dos trens representado por força de impulso pontual sobre os trilhos. Técnicas numéricas como as da família de Newmark foram utilizadas para resolução do modelo matemático. A partir das respostas de vibração obtidas utilizou-se do algoritmo de colônia artificial de abelhas com objetivo de otimizar o sistema, permitindo encontrar valores ótimos para as variáveis de projeto que atenuaram significativamente os deslocamentos nas fundações.

**Palavras-chave:** Vibrações, Vias Férreas, Otimização.

### Introdução

A busca pelo entendimento acerca de vibrações mecânicas vem sendo continuamente investigadas por boa parte dos pesquisadores. De acordo com Inman (2001), vibrações em dispositivos de engenharia muitas vezes são fatores limi-

---

1 Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Unidade Acadêmica Especial de Engenharias. Contato: gabriel\_gomess@hotmail.com.

2 Universidade Federal de Goiás – UFG. Regional Catalão, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia. Contato: kvrtborges@gmail.com.

tantes para o seu desempenho. Assim as vibrações podem estar inseridas em um contexto que as tornam prejudiciais, devendo ser evitadas.

Em vias férreas, as vibrações na estrutura da via e no solo, devido à passagem de trens sob altas velocidades podem causar inúmeros problemas, como danos na estrutura férrea, danos em estruturas próximas (edifícios, casas, equipamentos etc), desconforto nos passageiros, ruídos entre outros, assim, um modelo representativo para uma via férrea pode ser bastante útil quando se busca reduzir vibrações causadas pela dinâmica do sistema férreo.

Usualmente considera-se um modelo simplificado do sistema de modo que o comportamento global do sistema físico complexo possa ser determinado de uma maneira mais rápida e prática (RAO, 2011). Porém, no caso de vibrações em ferrovias, um modelo matemático representativo envolve diversos mecanismos interdependentes, o que nem sempre permite uma simplificação (OLIVEIRA, 2012).

Kouroussis (2011) propôs um modelo de múltiplas fundações o qual pode ser bastante útil para representar de maneira adequada a transmissão das vibrações no solo, porém este também é um modelo complexo, onde é fundamental que se tenha uma boa relação entre o modelo numérico e o sistema real. Neste modelo, tem-se o acoplamento entre os elementos de massa que representam a fundação, de modo a garantir a sua interação dinâmica.

Um modelo acoplado de trilhos, dormentes e múltiplas fundações foi então proposto, baseado no modelo de Kouroussis (2011), onde a previsão dos deslocamentos ocasionados pela passagem dos trens sob as linhas férreas pôde ser determinado, permitindo assim definir as medidas mais adequadas com vista à redução ou eliminação dos efeitos das vibrações.

Analisando os deslocamentos no domínio do tempo do modelo acoplado, um estudo voltado para otimização também pôde ser proposto, visando à redução dos deslocamentos na fundação. Para a otimização, utilizou-se o algoritmo colônia artificial de abelhas, buscando alcançar valores ótimos das variáveis de projeto, de modo a atenuar ao máximo os efeitos das vibrações na fundação em um sistema férreo.

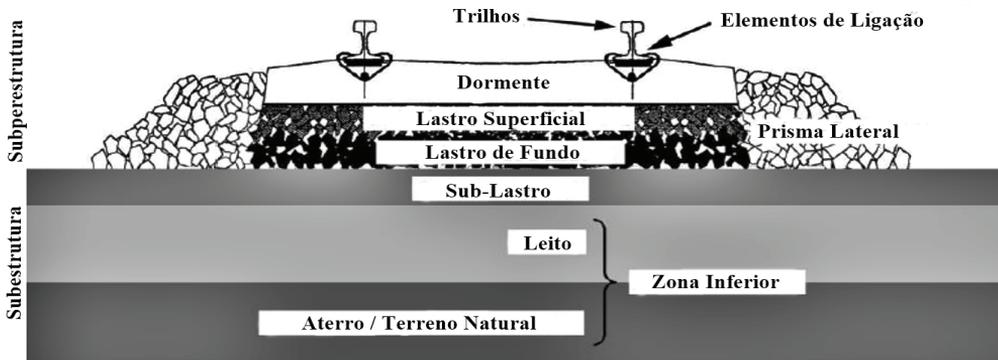
Logo, este trabalho tem por objetivo apresentar a otimização das respostas de deslocamentos no domínio do tempo para um modelo acoplado de trilhos, dormentes e múltiplas fundações de um sistema férreo, visando reduzir os efeitos causados pelas vibrações.

## **1 Elementos da via férrea**

De modo a descrever o sistema, serão apresentados alguns conceitos referentes aos principais elementos constituintes de uma via férrea balastrada.

Segundo Oliveira (2012), uma via balastrada, também denominada via convencional ou tradicional, tem esta designação por apresentar em sua constituição lastro, que nada mais é que um material de granulometria granular, basicamente um agregado britado o qual confere um comportamento elástico a via.

Analisando os componentes de uma via-férrea tradicional têm-se sua divisão em subestrutura e superestrutura, como ilustrado pela Figura 26.1.



**Figura 26.1** Estrutura de uma via balastrada, adaptado de Oliveira (2012).

A subestrutura consiste de um conjunto de componentes de via que lhe agregam comportamento estável, ou seja, permite que a circulação dos veículos seja feita de forma cômoda e segura. A sua principal função é suportar os elementos e cargas acima da mesma. Já a superestrutura consiste de todos os elementos situados acima da camada de sub-lastro, como o lastro de fundo, lastro superficial, os dormentes, os trilhos e os respectivos elementos de fixação.

Segundo Quesado (2010), Oliveira (2012) e Esveld (2001) a principal função do lastro é absorver as tensões de compressão, dadas através de seu atrito interno, ou seja, ele tende a atenuar e distribuir de maneira uniforme os esforços e vibrações provindos da ação dinâmica da interação veículos, trilhos e dormentes. Os dormentes, ou travessas, têm objetivo de distribuir uniformemente os esforços gerados pelas cargas verticais impostas pelos trens para os lastros, enquanto que os trilhos são os elementos responsáveis por guiar as rodas do veículo e pela transmissão das forças que lhe são impostas aos dormentes.

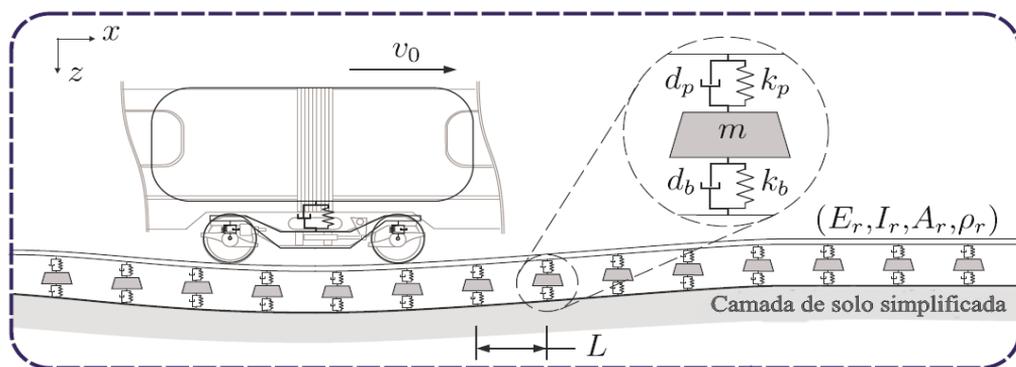
De acordo com Departamento Nacional de infraestrutura e Transporte (DNIT) os trilhos são classificados em tipo conforme sua massa por metro, em kg/m. No presente trabalho faz-se a modelagem do sistema acoplado trilhos, dormentes e múltiplas fundações utilizando como base os parâmetros apresentados pelos trilhos do tipo UIC 60.

Alguns elementos complementares também merecem atenção, pois auxiliam na redução de custos e na melhoria das características das vias férreas, além de atenuar os problemas causados pelas vibrações. Estes elementos têm como principal função fornecer elasticidade extra à via-férrea dissipando o ruído e as vibrações, normalmente estão localizados sob o trilho (palmilhas de trilhos ou *railpads*), sob os dormentes (palmilhas de dormentes ou de travessas) ou ainda sob a camada de lastro (manta de lastro).

## 2 Metodologia

O modelo proposto baseia-se em um sistema de massa concentrada, ou seja, apenas os movimentos verticais são estudados neste modelo, devido a sua grande influência na geração de vibrações no solo. Desse modo um modelo 2D é perfeitamente capaz de representar com boa precisão o sistema como um todo. De acordo com Kouroussis (2011) e Knothe (1993), esta representação é suficiente para prever o comportamento do sistema ferroviário, para calcular as forças que atuam na superfície do solo, e para avaliar as vibrações no solo da vizinhança induzidas pela passagem de um veículo.

O modelo geral é representado na Figura 26.2.



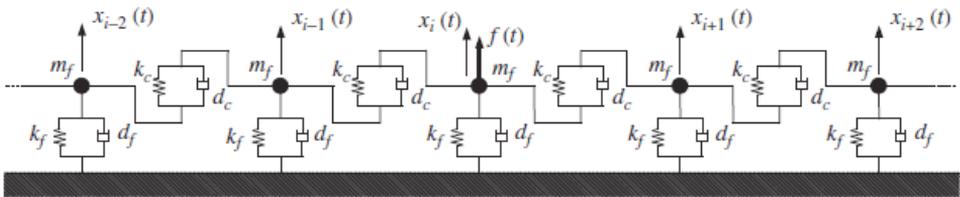
**Figura 26.2** Modelo veículo/trilhos, adaptado de Kouroussis (2011).

Como a aproximação do modelo é baseada na simulação pelo domínio do tempo, as evoluções de tempo do movimento ferroviário também são de interesse, logo o modelo é baseado em um carregamento transiente aplicado em uma superfície quadrada acima dos trilhos, sendo definida por uma função de decaimento, onde os parâmetros foram ajustados para se aproximar de um carregamento por impulso, correspondente a um peso caindo sobre uma superfície, o que permitiu a representação da dinâmica de um trem sobre uma via acima da fundação (KOUROUSSIS 2014). A função de decaimento é representada da seguinte forma:

$$f_{entrada} = \begin{cases} 0, & \text{se } t < t_0 \\ Ae^{-(t-t_0)/t_d}, & \text{se } t \geq t_0 \end{cases} \quad (1)$$

onde o parâmetro A relaciona-se a amplitude máxima e  $t_d$  é ajustado para cobrir uma excitação com uma faixa de frequência adequada.

O modelo de múltiplas fundações proposto por Kouroussis (2011) é ilustrado na Figura 26.3 e consiste no acoplamento de massas, molas e amortecedores discretos. Desenvolvido a partir do modelo análogo de Lysmer, que propõe uma modelagem discreta da fundação, tem-se neste que, cada fundação é ligada a fundação adjacente por molas (parâmetro  $k_c$ ) e amortecedores (parâmetro  $d_c$ ).



**Figura 26.3** Modelo de múltiplas fundações de solo - interação fundação-fundação através de amortecedores e molas, adaptado de Kouroussis (2011).

Considerando que a força  $f(t)$  é aplicada no elemento  $i$ , a equação do movimento pode ser escrita como:

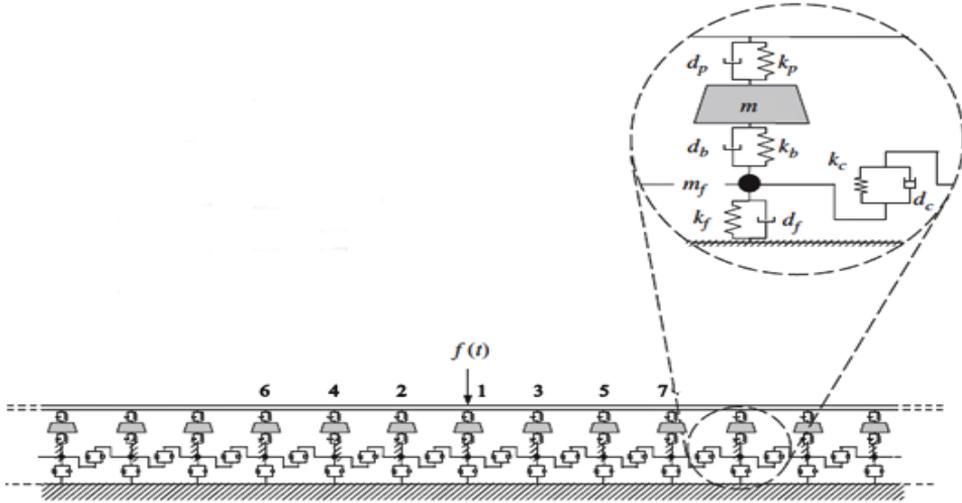
$$f(t) = m_f \ddot{x}_i + d_f \dot{x}_i + k_f x_i + d_c (\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + k_c (x_i - x_{i-1}) + d_c (\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) + k_c (x_i - x_{i+1}) \quad (2)$$

Generalizando a equação do movimento para os demais sistemas de fundação, temos que:

$$0 = m_f \ddot{x}_j + d_f \dot{x}_j + k_f x_j + d_c (\dot{x}_j - \dot{x}_{j-1}) + k_c (x_j - x_{j-1}) + d_c (\dot{x}_j - \dot{x}_{j+1}) + k_c (x_j - x_{j+1}) \text{ com } (\forall j \neq i) \quad (3)$$

Onde o termo  $i$  refere-se à fundação onde se tem aplicada uma carga  $f(t)$  e o termo  $j$  refere-se às fundações acopladas à fundação carregada, com  $j = -\infty$  à  $+\infty$ ;

O modelo de múltiplas fundações de uma via férrea foi desenvolvido considerando 7 fundações acopladas, ou seja, com  $i = 1, 2, \dots, 5, 7$ . Parte do sistema geral (fundações acopladas com os sistemas de dormentes) é mostrada na Figura 26.4.



**Figura 26.4** Modelo generalizado de múltiplas fundações de solo acopladas ao sistema de trilhos e dormentes, adaptado de Kouroussis (2011).

O sistema de equações representativas do modelo considerando 7 fundações acopladas pode ser descrito por:

$$f(t) = m_f \ddot{x}_1 + d_f \dot{x}_1 + k_f x_1 + d_c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_c (x_1 - x_2) + d_c (\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + k_c (x_1 - x_3) \quad (4)$$

$$0 = m_f \ddot{x}_2 + d_f \dot{x}_2 + k_f x_2 + d_c (\dot{x}_2 - \dot{x}_4) + k_c (x_2 - x_4) + d_c (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_c (x_2 - x_1) \quad (5)$$

$$0 = m_f \ddot{x}_3 + d_f \dot{x}_3 + k_f x_3 + d_c (\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + k_c (x_3 - x_1) + d_c (\dot{x}_3 - \dot{x}_5) + k_c (x_3 - x_5) \quad (6)$$

$$0 = m_f \ddot{x}_4 + d_f \dot{x}_4 + k_f x_4 + d_c (\dot{x}_4 - \dot{x}_6) + k_c (x_4 - x_6) + d_c (\dot{x}_4 - \dot{x}_2) + k_c (x_4 - x_2) \quad (7)$$

$$0 = m_f \ddot{x}_5 + d_f \dot{x}_5 + k_f x_5 + d_c (\dot{x}_5 - \dot{x}_3) + k_c (x_5 - x_3) + d_c (\dot{x}_5 - \dot{x}_7) + k_c (x_5 - x_7) \quad (8)$$

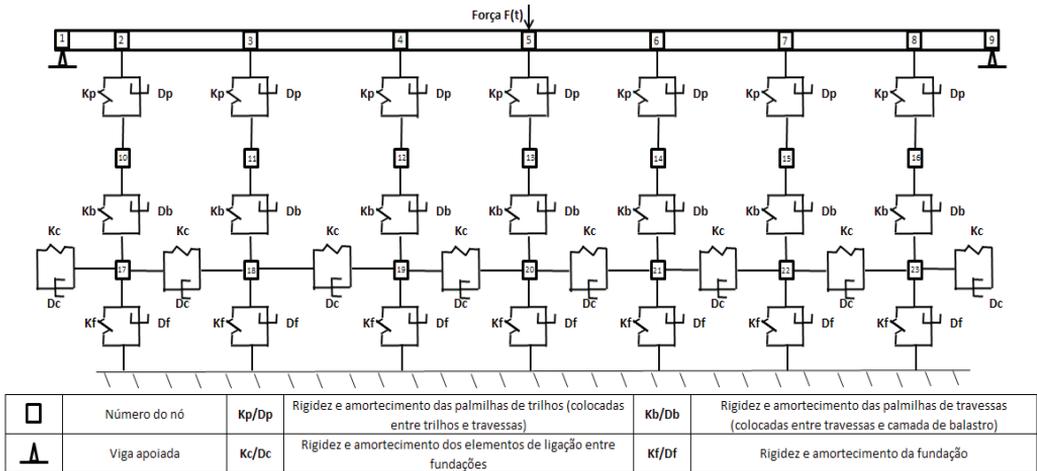
$$0 = m_f \ddot{x}_6 + d_f \dot{x}_6 + k_f x_6 + d_c (\dot{x}_6) + k_c (x_6) + d_c (\dot{x}_6 - \dot{x}_4) + k_c (x_6 - x_4) \quad (9)$$

$$0 = m_f \ddot{x}_7 + d_f \dot{x}_7 + k_f x_7 + d_c (\dot{x}_7 - \dot{x}_5) + k_c (x_7 - x_5) + d_c (\dot{x}_7) + k_c (x_7) \quad (10)$$

A partir do sistema de equações diferenciais, um estudo das repostas dos deslocamentos, velocidades e acelerações no domínio do tempo em cada um dos elementos de massa da fundação seria possível.

Kouroussis (2011) cita em seu trabalho que, para evitar problemas de defasagem no tempo de propagação das ondas conforme as mesmas vão sendo transmitidas de elemento de massa da fundação a elemento de massa na fundação, alguns procedimentos devem ser adotados, como por exemplo, a possibilidade de se adotar valores negativos para o amortecimento do elemento de ligação entre as fundações ( $d_c$ ). Quando o amortecimento estrutural é atribuído na modelagem do sistema de múltiplas fundações, o termo  $d_c$  contém uma contribuição de atraso na transmissão das ondas vibracionais (defasagem do tempo de propagação real e modelado) podendo assim assumir valores negativos.

Definido o modelo de múltiplas fundações foi possível analisar e desenvolver um modelo completo representativo de uma via férrea, ou seja, pode-se propor um modelo acoplado entre trilhos, dormentes e múltiplas fundações, o qual é apresentado na Figura 26.5.



**Figura 26.5** Modelo do sistema acoplado trilhos, dormentes e múltiplas fundações.

O modelo acoplado foi desenvolvido a partir de uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada (MELLO, 2014), que representa os trilhos, abaixo dos mesmos têm-se os parâmetros  $k_p$  e  $d_p$ , que são a rigidez e amortecimento dos elementos de palmilhas aplicadas entre os trilhos e os dormentes. Sob os dormentes têm-se os parâmetros  $k_b$  e  $d_b$ , que são a rigidez e amortecimento dos elementos de palmilhas aplicadas entre os dormentes e a fundação. A fundação é acoplada ao solo rígido pelos parâmetros  $k_f$  e  $d_f$ , que representam a rigidez e amortecimento da fundação.

A fim de representar mais fielmente a resposta da fundação quando sujeita a vibrações, elementos de rigidez  $k_c$  e amortecimento  $d_c$  interligam os elementos de massa da fundação – múltiplas fundações acopladas.

A força aplicada pela passagem do trem sobre os trilhos é representada como um esforço concentrado aplicado no elemento central da viga de Euler-Bernoulli.

O modelo matemático foi desenvolvido a partir do método de elementos finitos considerando como condições de contorno acoplamentos nos limites externos do trilho, ou seja, uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada, onde os deslocamentos verticais seriam nulos (flexão nula e rotação não nula), enquanto que nos nós internos consideraram-se como condições de contorno apenas deslocamentos verticais permissíveis (flexão não nula e rotação nula).

Conhecendo o modelamento matemático, têm-se as equações do movimento do sistema acoplado representadas genericamente como:

$$[M]_{30 \times 30} \ddot{X}(t) + [D]_{30 \times 30} \dot{X}(t) + [K]_{30 \times 30} X(t) = F(t) \quad (11)$$

Devido a maior complexidade do sistema apresentado, o modelo proposto foi resolvido através da integração numérica pelo método de Newmark.

A resolução do modelo matemático foi obtida considerando como base de cálculo os valores dos parâmetros apresentados na Tabela 26.1.

**Tabela 26.1** Parâmetros utilizados para resolução do modelo matemático da via férrea.

Parâmetros Utilizados	Valores
Massa da fundação ( $m_f$ )	1000,00 kg
Massa do dormente ( $m_d$ )	150,00 kg
Constante de amortecimento – fundação ( $d_f$ )	1000,00 Ns/m
Constante de rigidez – fundação ( $k_f$ )	50000,00 N/m
Constante de amortecimento – ligação entre fundações ( $d_c$ )	-200 Ns/m
Constante de rigidez – ligação entre fundações ( $k_c$ )	200000,00 N/m
Constante de amortecimento – palmilha entre trilhos/dormentes ( $d_b$ )	72,00 Ns/m
Constante de rigidez – palmilha entre trilhos/dormentes ( $k_b$ )	47000,00 N/m
Constante de amortecimento – palmilha entre dormentes/fundação ( $d_p$ )	4,00 Ns/m
Constante de rigidez – palmilha entre dormentes/fundação ( $k_p$ )	120000,00 N/m
Área da seção transversal do trilho	76,88 cm <sup>2</sup>

*Continua*

**Tabela 26.1** Parâmetros utilizados para resolução do modelo matemático da via férrea. (Continuação)

Parâmetros Utilizados	Valores
Momento de inércia do trilho	3055,00 cm <sup>4</sup>
Espaçamento entre os dormentes	0,60 m
Módulo de elasticidade dos trilhos	210,00 Gpa
Densidade dos trilhos	7850 Kg/m <sup>3</sup>

A partir da análise do modelo generalizado da via férrea, pode-se realizar a otimização do modelo, buscando encontrar os valores ótimos para os parâmetros de rigidez e amortecimento dos elementos de palmilhas alocados entre os trilhos e dormentes e entre os dormentes e os lastros da fundação, além dos valores ótimos de massa dos dormentes, de modo a encontrar soluções que minimizassem os deslocamentos causados pela passagem de um trem sobre os trilhos.

A otimização foi realizada por simulações numéricas no software Matlab® utilizando o Algoritmo Colônia de Abelhas Artificiais. Este algoritmo é inspirado no comportamento social observado em colônias de abelhas reais, baseado em Enxames Inteligentes propostos para a solução de problemas de otimização numérica multidimensional e multimodal.

A função objetivo do problema foi obtida a partir das respostas de deslocamentos no domínio do tempo da equação do movimento apresentada pela equação (11).

As variáveis de projeto que foram avaliadas de modo a obter-se valores ótimos são representadas pelos parâmetros de rigidez e amortecimento dos elementos localizados acima do elemento de massa da fundação, ou seja, os parâmetros  $k_p$  e  $d_p$ ,  $k_b$  e  $d_b$ , além da massa dos dormentes  $m_t$  (nós 10 à 16 representados na Figura 26.6).

As restrições são dadas a partir dos valores máximos e mínimos que as variáveis de projeto podem assumir, que são:

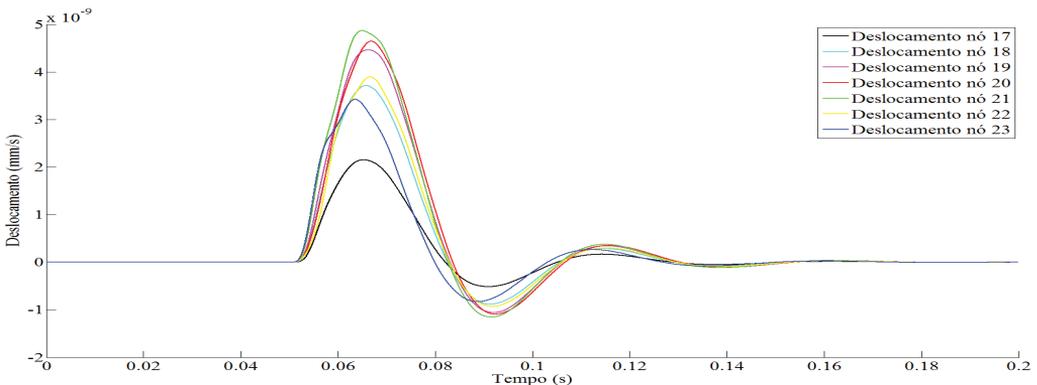
- $1 \text{ Ns/m} \leq d_p \leq 50 \text{ Ns/m}$ ;
- $10000 \text{ N/m} \leq k_p \leq 160000 \text{ N/m}$ ;
- $20 \text{ Ns/m} \leq d_b \leq 120 \text{ Ns/m}$ ;
- $10000 \text{ N/m} \leq k_b \leq 90000 \text{ N/m}$ ;
- $0.900 \text{ Kg} \leq m_t \leq 500 \text{ Kg}$ ;

### 3 Discussão e resultados

Com base no modelo matemático da via férrea, apresentado na 26.6, obtido pela formulação matemática via elementos finitos, puderam-se determinar os

resultados referentes aos deslocamentos em cada um dos nós do modelo quando sujeito a esforços verticais. Assim, os resultados apresentados referem-se aos deslocamentos no domínio do tempo nos nós da fundação (nós 17 a 23) devido à aplicação de uma força de impulso concentrada no nó central da viga (nó 5).

A Figura 26.6 apresenta as respostas dos deslocamentos no domínio do tempo para os elementos de massa da fundação (nós 17 a 23). Pode-se perceber pela figura que as respostas de deslocamentos apresentam valores muito baixos, o que é usual de ocorrer em solos e em fundações para vias férreas (KOUROUSSIS 2011). Como a força de impulso começa a agir apenas no momento de 0,05 segundos, percebe-se que as respostas também apresentam valores não nulos apenas a partir deste momento, tendendo a atenuá-los com o tempo. Como a força está aplicada no elemento central da viga (nó 5), as respostas próximas ao elemento central da fundação apresentam um maior deslocamento com relação aos demais nós da fundação, onde nós equidistantes deste elemento central da fundação tendem apresentar resultados de deslocamento próximos, com exceção com os deslocamentos apresentados nos nós externos (nó 17 e nó 23). Um dos prováveis motivos pelo qual os nós posteriores ao nó central apresentarem deslocamentos ligeiramente maiores aos nós dos elementos localizados a uma mesma distância do centro de aplicação da força reside no fato da consideração de amortecimentos dos elementos de interligação entre fundações poder assumir valores negativos, devido a consideração de defasagem na transmissão das ondas vibracionais entre elementos de fundação.



**Figura 26.6** Resposta de deslocamentos no domínio do tempo nos nós da fundação considerando uma força de impulso aplicada no nó central da viga (nó 5).

Buscando reduzir os valores das respostas de deslocamentos no domínio do tempo para o sistema acoplado, o modelo matemático foi otimizado pelo método de colônias artificiais de abelhas variando-se os valores das variáveis de projeto: massa dos dormentes, rigidez e amortecimento das palmilhas de trilhos, rigidez e amortecimento das palmilhas de dormentes.

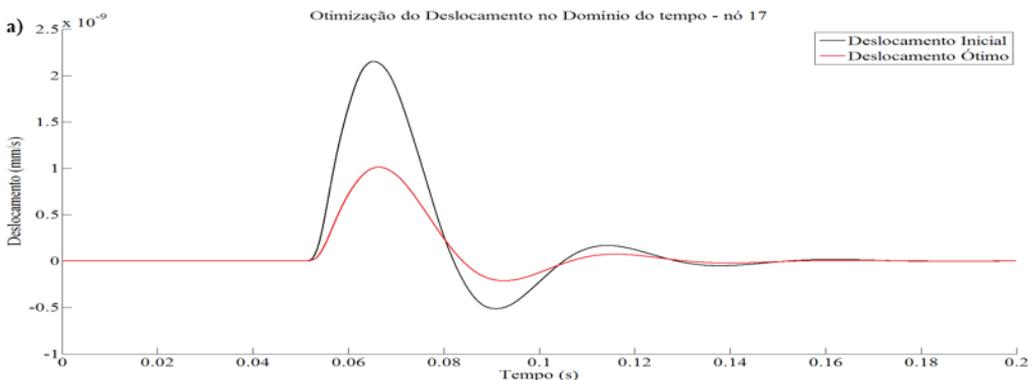
Utilizou-se como parâmetros iniciais para o algoritmo uma quantidade de 50 iterações, considerando uma população inicial de 100 indivíduos.

Os valores das variáveis de projeto antes da otimização e os valores ótimos encontrados pelo método colônia artificial de abelhas estão apresentados na Tabela 26.2.

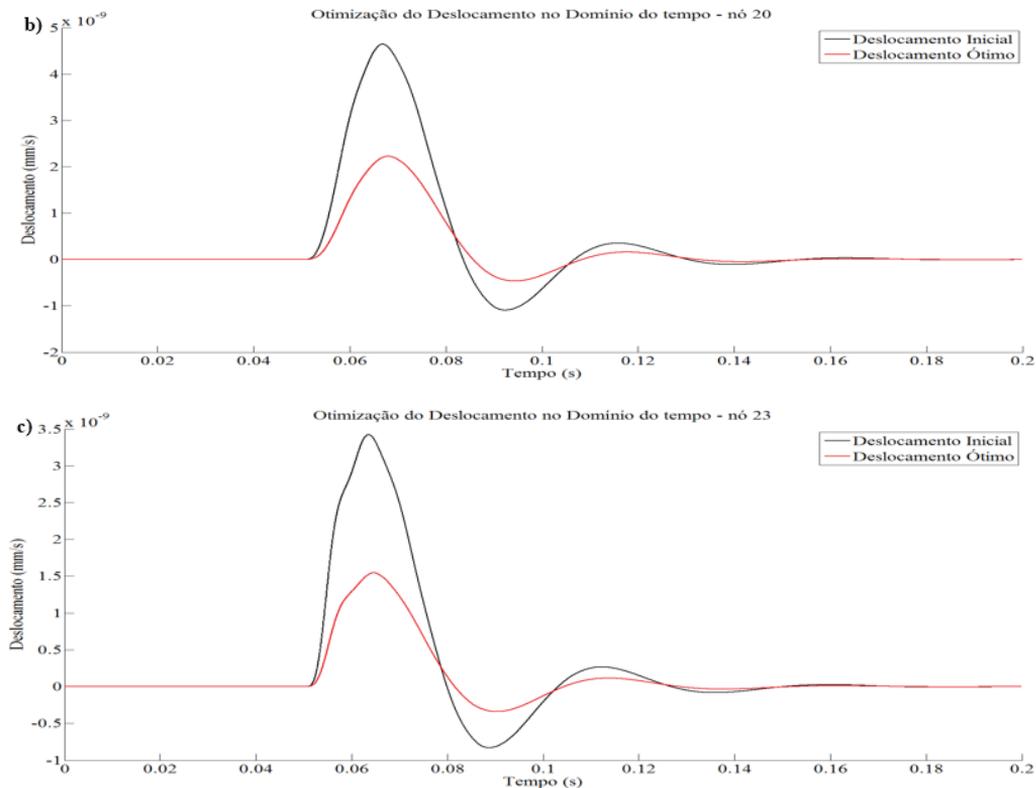
**Tabela 26.2** Soluções das variáveis de projeto otimizadas para o modelo de via férrea

Variáveis de Projeto	Valores iniciais	Valores Ótimos
Massa do dormente (mt)	150,00 kg	112,51 Kg
Constante de amortecimento – palmilha entre trilhos/dormentes (db)	72,00 Ns/m	29,91 Ns/m
Constante de rigidez – palmilha entre trilhos/dormentes (kb)	47000,00 N/m	69293,86 N/m
Constante de amortecimento – palmilha entre dormente/fundação (dp)	4,00 Ns/m	16.66 Ns/m
Constante de rigidez – palmilha entre dormente/fundação (kp)	120000,00 N/m	17789,17 N/m
<b>Função Objetivo</b>	Redução em 51,06% do valor do deslocamento no elemento central da fundação para a função objetivo.	

A Figura 26.7 apresenta os resultados dos deslocamentos no domínio do tempo do ótimo da função objetivo para os elementos de massa da fundação (nós 17, 20 e 23). Percebe-se que foi possível obter reduções significativas nos valores dos deslocamentos, além de permitir que a resposta entrasse em regime de estabilidade mais rapidamente, uma grande vantagem quando se busca atenuar vibrações. Logo, o objetivo do trabalho foi obtido com êxito, sendo as vibrações transmitidas no solo e nas fundações devido à dinâmica de uma via férrea minimizados significativamente através do método de otimização.



**Figura 26.7** Resposta ótima dos deslocamentos no domínio do tempo nos nós 17 (a), 20 (b) e 23 (c) da fundação considerando uma força aplicada no nó central da viga (nó 5). (Continua)



**Figura 26.8** Resposta ótima dos deslocamentos no domínio do tempo nos nós 17 (a), 20 (b) e 23 (c) da fundação considerando uma força aplicada no nó central da viga (nó 5). (Continuação)

## Conclusões

Neste trabalho foi realizado um estudo voltado à investigação das vibrações causadas pela passagem de trens sobre vias férreas. Buscou-se obter reduções nas vibrações transmitidas ao solo e as fundações por meio da otimização de um modelo proposto para o sistema férreo.

Através do uso do método de elementos finitos pode-se propor um modelo matemático para o sistema acoplado trilhos, dormentes e múltiplas fundações.

A análise do comportamento dinâmico das fundações do sistema no domínio do tempo foi obtida através da resolução do modelo matemático previamente proposto com auxílio do método de Newmark, que permitiu rápida solução para o equacionamento realizado pelo método de elementos finitos.

A otimização através do uso do algoritmo de colônia de abelhas permitiu encontrar valores para as variáveis de projeto (massa dos dormentes e os

parâmetros de rigidez e amortecimento das palmilhas de trilhos e dormentes) que reduzissem os valores de deslocamento no domínio do tempo para os elementos situados na fundação de maneira significativa. Como resultado do projeto ótimo, obteve-se redução dos valores dos deslocamentos na fundação de 51,06%.

Para estudos futuros pretende-se buscar novas metodologias para redução das vibrações em solos e fundações, como a utilização de medidas de atenuação entre a via férrea e estruturas próximas, como barreiras, poços, muros etc. Além da análise no domínio da frequência e modelagem a partir de outros *softwares*.

## Referências

- DNIT.; Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes. Disponível em <http://www.dnit.gov.br/download/ferrovias/consulta-publica/101-pim-trilho.pdf>. Acesso em: 03 set. 2016.
- ESVELD, C.; **Model Railway Track**. 2<sup>a</sup> ed. Delft: MRT-Productions. ISBN 90-800324-3-3, 2001
- INMAN, D. J.; **Distributed Parameter Systems**. In: \_\_\_\_\_. **Engineering vibration**. 2.ed. Upper Saddle River: Printice Hall, 2001.
- KNOTHE K.; Grassie S. L. **Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies**. Vehicle System Dynamics, 1993.
- KOUROUSSIS G, Van Parys L., Conti C., Verlinden O. **Using three-dimensional finite element analysis in time domain to model railway-induced ground vibrations**. Advances in Engineering Software 70, 63–76, 2014
- KOUROUSSIS G., Gazetas G., Anastasopoulos I., Conti C., Verlinden O.; **Discrete modelling of vertical track-soil coupling for vehicle-track dynamics**. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 31(12): 1711–1723, 2011.
- KOUROUSSIS G, Verlinden O, Conti C.; **Ground propagation of vibrations from railway vehicles using a finite/infinite-element model of the soil**. Proceedings of the IMechE, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, 2009.
- LYSMER J.; Kuhlemeyer R. L. **Finite dynamic model for infinite media**. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE, 1969.

OLIVEIRA, A. F. F. P.; **Via Balastrada versus Via Não Balastrada**. Lisboa: Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na Área de Especialização em Vias de Comunicação e Transportes. Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, 2012.

QUESADO, A. M. S.; **Análise e Mitigação de Vibrações Induzidas por Tráfego Ferroviário na Vizinhança de Vias de Alta Velocidade**. Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal, 2010.