

10

CAPÍTULO

ANÁLISE DE UM MODELO DE LOCALIZAÇÃO DE INSTALAÇÕES COM APLICAÇÃO DE UMA ABORDAGEM ROBUSTA

Raina Ribeiro Marques

Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Tecnologia.
raina-marques@hotmail.com

Thiago Alves de Queiroz

Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Tecnologia.
taq@ufg.br

RESUMO

O problema de localização de instalações aparece tanto em aplicações dos setores público e privado como na determinação de postos policiais, hospitais, escolas, fábricas, depósitos etc. Este trabalho investiga um modelo de programação inteira cujo objetivo é minimizar o custo de instalação de ambulâncias e pontos de atendimento (estações) de forma a garantir um nível mínimo de confiabilidade do serviço prestado. Também é desenvolvido um modelo aplicando técnicas de otimização robusta, com o intuito de trabalhar a incerteza presente nos dados de entrada. Os modelos obtidos foram comparados com outros trabalhos da literatura, bem como com o pacote de otimização usado para a resolução. Ao trabalhar com a abordagem robusta, o modelo resultante teve resultados piores quando comparado com a solução original (sem incerteza nos dados), o que era de se esperar.

Palavras-chaves: Problema de localização de instalações, programação linear inteira, otimização robusta.

1 INTRODUÇÃO

A aplicação de técnicas de resolução dos problemas de localização de instalações compõe uma importante área da Pesquisa Operacional. Esses problemas tratam a questão de determinar a melhor localização para instalar um objeto (ou objetos), denominado facilidade (ou instalações), e que pode se tratar de fábricas, depósitos, escolas etc. Cada facilidade interage com clientes, que podem ser depósitos, unidades de vendas, estudantes, e podem ter localizações fixas. Alguns casos associam informações de demandas e capacidade de serviços (ARENALES et al., 2007).

Problemas de localização de instalações ganharam maior interesse a partir da década de 1960, quando foram publicados trabalhos sobre a localização de postos de serviços em redes (HAKIMI, 1964) e postos policiais (HAKIMI, 1965). Outras aplicações reais ocorrem em Silva e Sucena (2009), para uma empresa da região sudeste do Brasil, que buscava fazer a distribuição de seus produtos farmacêuticos por via aérea, e em Nogueira (2011), que trabalhou com um modelo de programação linear inteira que buscava realocar as bases de operação do Serviço de Atendimento Móvel de Saúde (SAMU) no intuito de reduzir o tempo de resposta para o atendimento à população na cidade de Belo Horizonte, Minas Gerais.

Alguns trabalhos da literatura envolvendo modelos de programação linear inteira e problemas de localização incluem: Goldberg (2004), Galvão e Morabito (2008), Reville, Eiselt e Daskin (2008) e Mohaymany et al. (2012), que estudaram o problema de localização envolvendo serviços de emergência. As estratégias utilizadas por esses autores foram baseadas em dois modelos: o do Problema de Localização de Conjunto de Cobertura e o do Problema de Localização de Cobertura Máxima, introduzidos por Toregas et al. (1971) e Church e Reville (1974), respectivamente. Porém, devido às restrições relacionadas ao uso das ambulâncias e às questões de manutenção, tais modelos não oferecem um bom desempenho.

Outros trabalhos envolveram modelos de cobertura múltipla, como em Hogan e Reville (1986), Batta e Marmur (1990), Narasimham, Pirkul e Schilling (1992) e Gendreau, Laporte e Semet (1997). Todavia, esses modelos buscam maximizar a cobertura múltipla apenas para um conjunto de pontos de demanda com tendência para cobrir os pontos com maiores demandas, sem garantias quanto à disponibilidade das ambulâncias.

Ao analisar problemas de localização na área da saúde, nota-se que existem dados de entrada que são incertos, como: o tempo de resposta da ambulância, o tempo de atendimento, a distância de cobertura, entre outros. Pensando nos problemas reais que envolvem incerteza nos dados tecnológicos, têm-se algumas abordagens que podem ser aplicadas, caracterizando o que se denomina por otimização robusta (SOYSTER, 1973). Como a incerteza está constantemente presente nos dados recolhidos, a solução computada para um modelo inicial, sem

assumir a incerteza, pode não condizer com a realidade, sendo necessário desenvolver um modelo que possa retornar soluções robustas.

Na literatura de otimização robusta envolvendo modelos de programação linear e inteira, tem-se o trabalho pioneiro de Soyster (1973), que considera o pior caso para os dados incertos da matriz de restrição. Na abordagem proposta por Ben-Tal e Nemirovski (2000), tem-se um modelo resultante não linear. Por outro lado, Bertsimas e Sim (2004) assumem que apenas alguns dados podem assumir o pior caso, mas garantem que a solução robusta ainda é viável com alta probabilidade.

Trabalhos envolvendo a aplicação de otimização robusta incluem o de Alem e Morabito (2012), Munhoz e Morabito (2014) e Paiva e Morabito (2014). Os autores partiram de modelos definidos para problemas envolvendo dados incertos na matriz de restrições e/ou função objetivo, assim como aplicaram a abordagem de Bertsimas e Sim (2004) para obter soluções robustas em face das incertezas presentes no problema real.

Este trabalho lida com o problema de localizar ambulâncias e estações necessárias para atender, a um custo mínimo, diferentes pontos em uma região, além de garantir um nível mínimo de disponibilidade do serviço. Basicamente, segue-se o modelo proposto por Mohaymany et al. (2012) que, primeiramente, é comparado frente a duas implementações diferentes, uma utilizando as bibliotecas do IBM ILOG CPLEX e a outra utilizando o GUROBI OPTIMIZER. Em seguida, aplica-se a abordagem de Bertsimas e Sim (2004) sobre esse modelo, assumindo que o tempo para atender os pontos de demanda é um dado incerto.

A organização do trabalho envolve: a Seção 2 com a apresentação do modelo em estudo; a Seção 3 discute a aplicação da abordagem de otimização robusta sobre o modelo investigado; a Seção 4 traz os experimentos computacionais realizados; e, as conclusões e direções para trabalhos futuros são dados na Seção 5.

2 MODELO DA LITERATURA

O modelo proposto por Mohaymany et al. (2012) é chamado de UBUL (*Upper-Bound Unavailability Location*) e busca resolver um problema de localização com cobertura completa dos pontos, visando a determinar o menor número de ambulâncias e estações necessárias para atender a demanda requisitada. Para garantir o atendimento da demanda, os autores assumem que existe um nível de confiabilidade do serviço.

O nível de confiabilidade indica a quantidade de ambulâncias que são necessárias para atender a demanda imposta. A partir desse nível, tem-se uma restrição relacionada à indisponibilidade das ambulâncias, que considera o tempo gasto para atender as demandas de acordo com o uso de cada ambulância. A formula-

ção completa por programação inteira do modelo UBUL é dada adiante, envolvendo diferentes conjuntos e dados de entrada.

Conjuntos:

- I : conjunto de pontos de demanda ou clientes (elementos de I são dados por i).
- J : conjunto de estações (elementos de J são dados por j).
- A : conjunto de ambulâncias (elementos de A são dados por a).
- A_j : conjunto de ambulâncias que podem ser localizadas na estação j , sendo A_j subconjunto de A .
- N_i : conjunto de ambulâncias que atendem o ponto de demanda i .
- B_a : conjunto de pontos de demanda atendidos pela ambulância a , isto é, que estão dentro do raio de cobertura da ambulância.

Dados de entrada:

- q_i : tempo médio gasto (em horas/dia) para atender as solicitações do ponto de demanda i .
- S : raio de cobertura para uma ambulância localizada em uma dada estação.
- α : nível de confiabilidade mínimo para assegurar a cobertura especificada.
- f : número mínimo de ambulâncias necessário para cobrir cada ponto de demanda respeitando α .
- r : fração máxima de uso imposta para cada ambulância. Ela é obtida da equação $r = \sqrt[3]{(1 - \alpha) - 0,01}$ conforme Reville e Hogan (1989).
- L : número máximo de ambulâncias que podem atender qualquer ponto de demanda.
- β : custo de implantação das ambulâncias.
- γ : custo de implantação das estações.
- M : número inteiro grande.

Formulação do modelo:

- $x_a = \begin{cases} 1, & \text{se ambulância } a \text{ é usada.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- $w_j = \begin{cases} 1, & \text{se pelo menos uma ambulância é posicionada na estação } j. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- $y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ ambulâncias atendem o ponto de demanda } i. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$$\text{Minimizar } Z = \beta \sum_{a \in A} x_a + \gamma \sum_{j \in J} w_j$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in B_a} (q_i \sum_{k=1}^L y_{ik} \frac{1}{k}) + (x_a - 1)M \leq 24r, \forall a \in A \quad (1)$$

$$\sum_{a \in N_i} x_a = \sum_{k=1}^L y_{ik} k, \forall i \in I \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^L y_{ik} = 1, \forall i \in I \quad (3)$$

$$\sum_{a \in N_i} x_a \geq f, \forall i \in I \quad (4)$$

$$Mw_j \geq \sum_{a \in A_j} x_a, \forall j \in J \quad (5)$$

$$x_a, w_j, y_{ik} \in \{0, 1\} \forall a \in A, \forall j \in J, \forall i \in I, k = 1, 2, \dots, L \quad (6)$$

A função objetivo está relacionada com a minimização do custo envolvendo a localização das ambulâncias e estações. As restrições em (1) estão relacionadas com o uso da ambulância, uma vez que a demanda requisitada não pode exceder a disponibilidade da ambulância, ou seja, qualquer ambulância a instalada deve ter a sua fração máxima de ocupação respeitada ao atender as solicitações dos diferentes pontos de demanda i . As restrições em (2) e (3) estão relacionadas com o ponto de demanda i sendo coberto por exatamente k ambulâncias. As restrições em (4) exigem o atendimento do ponto de demanda i por no mínimo f ambulâncias. As restrições em (5) impõem que as ambulâncias implantadas devam ser posicionadas em estações abertas para evitar abrir novas estações desnecessariamente. Por fim, o domínio das variáveis é dado em (6).

O parâmetro L , que envolve o número máximo de ambulâncias para atender qualquer ponto de demanda, pode ser uma superestimativa do valor realmente necessário, fazendo com que o modelo UBUL tenha mais variáveis do que o realmente necessário (observe a definição das variáveis y_{ik}). Observa-se que é preciso considerar separadamente o número máximo de ambulâncias disponíveis para atender cada ponto de demanda i , pois esse número pode ser diferente para um outro ponto i' , uma vez que depende do raio de cobertura S . Segue que o modelo UBUL foi modificado para conter um parâmetro L_i para cada ponto de demanda i .

A partir disso, considera-se como modelo UBUL-M (UBUL-Modificado), o modelo UBUL em que as restrições (1), (2), (3) e (6) foram reescritas substituindo L por L_i . Acredita-se que tal mudança possibilite diminuir o tempo de otimiza-

ção, uma vez que permite diminuir o número de variáveis, sem afetar o valor da solução ótima.

3 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA SOBRE O MODELO UBUL-M

O modelo UBUL-M assume que os dados fornecidos na entrada são fixos e não estão sujeitos a qualquer tipo de incerteza. Todavia, é possível observar que alguns dados, como o raio de cobertura S de uma ambulância ou o tempo médio gasto q_i para atender a demanda de um ponto podem estar sub ou superestimados de acordo com realidade de onde o modelo está sendo aplicado. O interesse é avaliar o quanto o modelo UBUL-M responde à incerteza presente nos dados associados ao tempo médio gasto para atender os pontos de demanda.

Naturalmente, o tempo de atendimento pode variar substancialmente entre diferentes pontos de demanda, sendo influenciado diretamente pela natureza do atendimento prestado, pela distância até o local e pela disponibilidade das ambulâncias. Diante disso, aplica-se a abordagem de Bertsimas e Sim (2004) sobre o modelo UBUL-M a fim de obter soluções que sejam robustas diante das incertezas no parâmetro q_i .

A abordagem de Bertsimas e Sim (2004) parte do princípio de que nem todos os parâmetros incertos assumem o pior caso, conseqüentemente não afetando em demasiado a função objetivo do problema. Assim, existe um grau de conservadorismo \tilde{A}_a que indica quantos coeficientes do termo (da função objetivo ou restrição) podem assumir o pior caso. Esse grau assume um valor no intervalo $[0, |\mathbb{J}_a|]$, sendo \mathbb{J}_a o conjunto contendo os parâmetros que podem ter incerteza e tem tamanho inteiro não negativo. Assim, caso $\tilde{A}_a = |\mathbb{J}_a|$, então todos os parâmetros vão sofrer modificações (estão sujeitos a incerteza) resultando na abordagem de Soyster (1973), enquanto $\tilde{A}_a = 0$ resulta no modelo original.

Assume-se que \tilde{A}_a é um inteiro não negativo (caso ele não o seja, trunca-se o número pegando apenas a correspondente parte inteira). Assim, o parâmetro q_i aparece apenas nas restrições em (1) e, conforme Bertsimas e Sim (2004), tem-se:

$$\sum_{i \in B_a} \left(q_i \sum_{k=1}^{L_i} y_{ik} \frac{1}{k} \right) + \max_{\{\mathbb{S}_a | \mathbb{S}_a \subseteq \mathbb{J}_a, |\mathbb{S}_a| = \tilde{A}_a\}} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{S}_a} \left(q_i \sum_{k=1}^{L_i} y_{ik} \frac{1}{k} \right) \right\} + (x_a - 1)M \leq 24r, \forall a \in A \quad (7)$$

em que \hat{q}_i é o desvio máximo do valor esperado q_i com relação a um valor aleatório \tilde{q}_i ; e \mathbb{S}_a representa o subconjunto associado aos q_i que podem assumir incerteza, ou seja, ele contém os pontos de demanda i (cada um tem um q_i) atendidos pela ambulância a e que vão ser influenciados pela incerteza. A probabilidade de violação de cada restrição $a \in A$ é limitada superiormente por $k = \exp \left\{ \frac{-\Gamma_a^2}{2|\mathbb{J}_a|} \right\}$, seguindo o Teorema 2 de Bertsimas e Sim (2004).

A segunda parcela das restrições em (7) é chamada de função de proteção da restrição. Em outras palavras, sabendo que a solução y^* é sempre não negativa, pois y_{ik} é uma variável inteira, a função de proteção da a -ésima restrição pode ser escrita como:

$$\beta_a(y^*, \Gamma_a) = \max_{\{S_a | S_a \subseteq \mathbb{J}_a, |S_a| = \Gamma_a\}} \left\{ \sum_{i \in S_a} \left(q_i \sum_{k=1}^{L_i} y_{ik}^* \frac{1}{k} \right) \right\} \quad (8)$$

Segundo Bertsimas e Sim (2004), a função de proteção em questão, para uma dada restrição a , pode ser substituída pelo seguinte problema de programação linear, a saber:

$$\beta_a(y^*, \Gamma_a) = \text{Maximizar} \sum_{i \in \mathbb{J}_a} (\hat{q}_i \sum_{k=1}^{L_i} y_{ik}^* \frac{1}{k}) z_{ai}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in \mathbb{J}_a} z_{ai} \leq \tilde{a} \tilde{A}_a \quad (9)$$

$$0 \leq z_{ai} \leq 1, \forall i \in \mathbb{J}_a \quad (10)$$

O próximo passo é obter o dual do modelo apresentado para a função de proteção, de forma que as restrições em (7) tornem-se expressões lineares (ou seja, sem a parcela do *max*). Logo, sendo λ_a e ρ_{ai} as variáveis duais, tem-se o dual de $\beta_a(y^*, \tilde{A}_a)$, para a restrição a , dado por:

$$\text{Minimizar} \sum_{i \in \mathbb{J}_a} \rho_{ai} + \tilde{A}_a \lambda_a$$

Sujeito a:

$$\lambda_a + \rho_{ai} \geq \hat{q}_i \sum_{k=1}^{L_i} y_{ik}^* \frac{1}{k}, \forall i \in \mathbb{J}_a \quad (11)$$

$$\rho_{ai} \geq 0, \forall i \in \mathbb{J}_a \quad (12)$$

$$\lambda_a \geq 0, \forall a \quad (13)$$

Segue que o modelo UBUL-M, com as restrições em (7) no lugar das restrições em (1), é não linear. Mas, a partir do dual da função de proteção, dado nas Equações (11)-(13), pode-se reescrevê-lo substituindo a função de proteção pela sua respectiva dual (veja o Teorema 1 de Bertsimas e Sim (2004)), resultando no modelo UBUL-R (UBUL-Robusto) que considera a incerteza no parâmetro q_i .

$$\text{Minimizar } Z = \beta \sum_{a \in A} x_a + \gamma \sum_{j \in J} w_j$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in B_a} \left(q_i \sum_{k=1}^{L_i} y_{ik} \frac{1}{k} \right) + \sum_{i \in J_a} \rho_{ai} + \Gamma_a \lambda_a + (x_a - 1)M \leq 24r, \forall a \in A \quad (14)$$

$$\sum_{a \in N_i} x_a = \sum_{k=1}^{L_i} y_{ik} k, \forall i \in I \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^{L_i} y_{ik} = 1, \forall i \in I \quad (16)$$

$$\sum_{a \in N_i} x_a \geq f, \forall i \in I \quad (17)$$

$$Mw_j \geq \sum_{a \in A_j} x_a, \forall j \in J \quad (18)$$

$$\lambda_a + \rho_{ai} \geq \hat{q}_i \sum_{k=1}^{L_i} y_{ik} \frac{1}{k}, \forall a \in A, i \in \mathbb{J}_a \quad (19)$$

$$\rho_{ai} \geq 0 \forall a \in A, i \in \mathbb{J}_a \quad (20)$$

$$\lambda_a \geq 0, \forall a \in A \quad (21)$$

$$x_a, w_j, y_{ik} \in \{0, 1\}, \forall a \in A, \forall j \in J, \forall i \in I, k = 1, 2, \dots, L_i \quad (22)$$

4 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

O modelo UBUL-M foi codificado usando a linguagem C++. Para resolver o modelo, fez-se o uso das bibliotecas do pacote de otimização IBM ILOG CPLEX[®] 12.5 e, para efeitos de comparação, também se fez uma implementação com o GUROBI OPTIMIZER[®] 5.6.3. O computador usado nesses testes tem processador Intel Xeon X3430 2.40 GHz com 8 GB de memória RAM, para a execução no sistema operacional Linux e usando apenas um único *core*. Ambos os pacotes de otimização fornecem um *framework* para codificar modelos de programação inteira e resolvê-los usando um algoritmo *Branch-and-Cut*.

4.1 Resultados para o modelo UBUL-M

Os testes numéricos ocorreram sobre instâncias com 79 pontos, as quais foram utilizadas em Serra (1989) e Borrás (2000). Um total de três cenários fo-

ram considerados de acordo com as quantidades de chamadas por dia para cada ponto de demanda, em que cada chamada tem duração média de 45 minutos. O raio de cobertura foi considerado como $S = 1,5$ milhas e nove valores para o nível de confiabilidade foram usados, seguindo Mohaymany et al. (2012). Além disso, assumem-se os custos na função objetivo como sendo $\beta = 1$ e $\gamma = 0$, ou seja, deseja-se apenas determinar o número mínimo de ambulâncias, sem interesse na quantidade/custo de estações instaladas. Os valores relacionados à fração de ocupação e ao número mínimo de ambulâncias podem ser obtidos diretamente em Mohaymany et al. (2012).

A Tabela 10.1 traz os resultados para uma comparação entre as duas implementações realizadas, uma utilizando o CPLEX e a outra com o GUROBI, para a execução limitada em uma hora para cada instância. Assim, não foi possível obter a solução ótima para algumas das instâncias dentro do tempo limite imposto (observe, por exemplo, o cenário 03 para $\alpha = 92,5\%$ até $\alpha = 99\%$), porém foi possível observar que o GUROBI teve notório desempenho em frente ao CPLEX com relação ao valor da solução encontrado e ao tempo gasto para a otimização. Vale destacar que a solução e o tempo apresentados na Tabela 10.1 correspondem aos melhores valores encontrados durante a resolução da respectiva instância para uma variação no parâmetro f de 1 até 3.

Nota-se que o tempo de otimização requerido pela implementação usando o GUROBI foi menor que o demandado pelo CPLEX, mas com diferença pequena. No GUROBI, foi preciso um total de 6,75 horas, enquanto o CPLEX usou 6,98 horas de computação para resolver todas as instâncias. Por outro lado, o GUROBI apresentou tempo de otimização maior do que o do CPLEX para algumas instâncias (ver cenário 01 para $\alpha = 80\%$ e $\alpha = 97,5\%$).

Maior destaque é dado ao número de ambulâncias encontradas considerando todas as instâncias, uma vez que com o GUROBI teve-se um total de 408 ambulâncias implantadas, enquanto com o CPLEX 425 ambulâncias seriam necessárias. Essa diferença é significativa, pois o custo de uma ambulância é relativamente alto na prática. Para ilustrar as soluções obtidas, as Figuras 1 e 2 trazem a solução do cenário 02 para $\alpha = 80\%$ e $\alpha = 97,5\%$, respectivamente, dada a implementação com o CPLEX e o GUROBI.

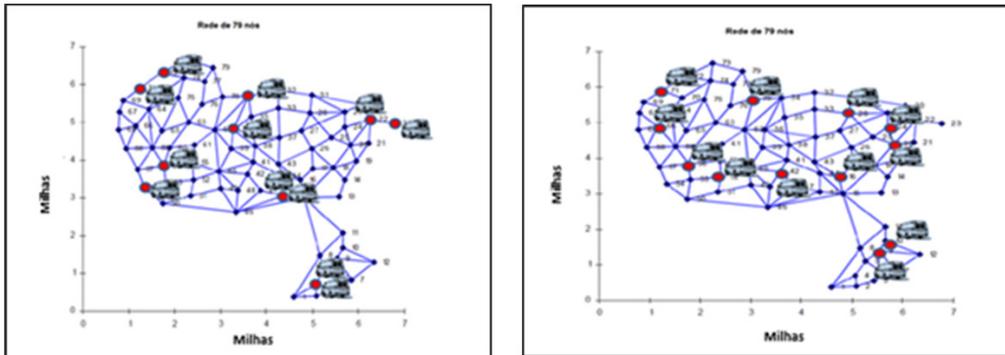
A partir das Figuras 1 a 2 é possível notar que a quantidade de estações e ambulâncias instaladas varia conforme o nível de confiabilidade, uma vez que a indisponibilidade das ambulâncias depende desse nível. Assim, quando se exige um nível maior, tem-se uma maior quantidade de ambulâncias para que sejam atendidos os pontos de demanda. Note também as soluções retornadas variam conforme cada implementação, apesar de terem o mesmo valor ótimo.

A partir do teste comparativo entre os pacotes de otimização, os resultados que se seguem envolvem a implementação usando o GUROBI. Assim, a Tabela

10.2 considera os resultados sobre os mesmos cenários anteriores, trazendo a quantidade de ambulâncias instaladas para os modelos UBUL-M e mais três outros modelos da literatura.

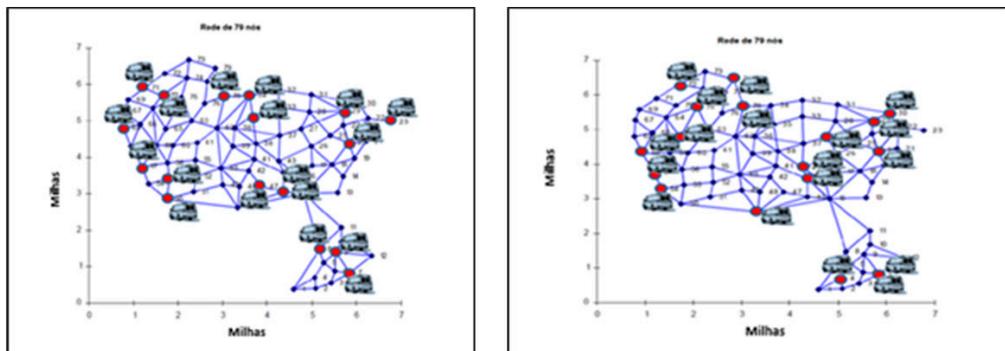
Tabela 1 Comparação entre as implementações feitas usando o CPLEX e o GUROBI

Cenários	α (%)	ILOG CPLEX		GUROBI OPTIMIZER	
		# Ambulâncias	Tempo de otimização (s)	# Ambulâncias	Tempo de otimização (s)
01	80	9	149,71	9	183,36
	82,5	10	2.348,60	10	2.241,35
	85	12	3.600	12	3600
	87,5	12	0,81	12	0,61
	90	12	1,49	12	1,90
	92,5	12	1,34	12	0,67
	95	12	1,59	12	0,68
	97,5	12	2,61	12	8,07
	99	17	3.600	17	3.600
02	80	12	5,82	12	1,72
	82,5	12	69,03	12	1,65
	85	12	10,45	12	1,70
	87,5	12	11,74	12	6,62
	90	12	4,06	12	1,42
	92,5	12	125,05	12	51,02
	95	13	61,73	13	23,07
	97,5	18	55,40	18	2,27
	99	18	25,05	18	11,33
03	80	18	104,23	18	14,01
	82,5	18	108,49	18	30,37
	85	18	107,83	18	29,80
	87,5	18	108,25	18	29,85
	90	19	234,93	19	86,34
	92,5	22	3600	22	3600
	95	23	3600	22	3600
	97,5	22	3600	22	3600
	99	38	3600	22	3600



a) Solução com o CPLEX.

b) Solução com o GUROBI.

Figura 1 Solução computada para o cenário 02 e com $\alpha = 80\%$.

a) Solução com o CPLEX.

b) com o GUROBI.

Figura 2 Solução computada para o cenário 02 e com $\alpha = 97,5\%$.

Assim, os modelos usados para efeitos de comparação com o UBUL-M são dados adiante e que mais detalhes podem ser obtidos em Borrás (2000) e Borrás e Pastor (2002), a saber:

- BRLSCP (*Binomial Reliability Location Set Covering Problem*), em que é tomado um tempo médio para o atendimento e o número de veículos usados segue uma distribuição Binomial;
- PRLSCP (*Poisson Reliability Location Set Covering Problem*), em que as chamadas de emergência seguem uma distribuição de *Poisson* e existe um limite superior para o tempo de serviço;
- QRLSCP (*Queueing Reliability location set covering problem*), em que as chamadas de emergência seguem uma distribuição de *Poisson*.

Os resultados para o modelo original, UBUL, sobre os mesmos cenários, podem ser obtidos em Mohaymany et al. (2012). Algumas soluções diferem ao comparar com a retornada pelo modelo UBUL-M, pois aqui foi imposto um tempo limite para a otimização e o valor de f variou entre 1, 2 e 3, pegando aquele que resultou em melhor solução para a respectiva instância (essas soluções que diferem foram destacadas em negrito na coluna do UBUL-M).

Os resultados da Tabela 10.2 indicam que a quantidade de ambulâncias requeridas pelo modelo PRLSCP, para garantir o respectivo nível de confiança, é demasiadamente alta comparada à das demais soluções.

Tabela 2 Comparação entre os modelos UBUL-M, BRLSCP, QRLSCP e PRLSCP com relação ao valor da função objetivo

Cenários	α (%)	UBUL-M	BRLSCP	QRLSCP	PRLSCP
01	80	9	11	10	10
	82,5	10	11	10	11
	85	12	12	11	12
	87,5	12	13	13	13
	90	12	13	13	13
	92,5	12	14	13	13
	95	12	14	14	14
	97,5	12	14	17	17
	99	17	18	19	19
02	80	12	13	13	13
	82,5	12	14	13	14
	85	12	14	13	14
	87,5	12	14	14	14
	90	12	14	14	14
	92,5	12	14	15	15
	95	13	15	16	17
	97,5	18	18	20	20
	99	18	20	22	22
03	80	18	18	18	20
	82,5	18	19	18	21
	85	18	20	20	21
	87,5	18	20	21	22
	90	19	21	21	23
	92,5	22	22	23	25
	95	22	23	25	28
	97,5	22	25	30	30
	99	22	28	33	35

Tanto o BRLSCP quanto o UBUL-M retornam a mesma solução para o cenário 01, para $\alpha = 85\%$, e o cenário 02, para $\alpha = 97,5\%$. Nas demais instâncias, o UBUL-M foi sempre melhor, uma vez que precisou de menos ambulâncias. Em alguns casos, a diferença chega a ser de duas ambulâncias (ver o cenário 02 para $\alpha = 82,5\%$ até $\alpha = 92,5\%$).

O modelo QRLSCP teve o mesmo resultado que o PRLSCP e o BRLSCP para quatorze e nove instâncias, respectivamente. Ao compará-lo com o UBUL-M, observa-se uma diferença de até treze ambulâncias, que é o caso do cenário 03, para $\alpha = 99\%$. Somente no cenário 01, para $\alpha = 85\%$, que o modelo QRLSCP é melhor do que o UBUL-M. Ao comparar o total de ambulâncias requeridas observando todas as instâncias, o UBUL-M demandou 408, o BRLSCP demandou 452, o QRLSCP demandou 469, e o PRLSCP demandou 490 unidades. Ao comparar esse total, a diferença entre a quantidade demandada pelo modelo PRLSCP e à demandada pelo modelo UBUL-M chega a 82 unidades, que é um valor considerável quando se pensa numa aplicação real.

4.2 Estudo de caso para o modelo UBUL-R

O estudo de caso a ser analisado consiste em aplicar os modelos UBUL-M e UBUL-R na realocação dos serviços médicos de emergência nas estradas rurais da província de Teerã, Irã. Este estudo foi proposto por Mohaymany et al. (2012).

O serviço de saúde da província é responsável por atender as demandas relacionadas a acidentes que venham a ocorrer nas estradas vicinais e outras demandas de áreas residenciais. Os pontos de demanda estão divididos em duas categorias e são representados na Figura 3:

- P1 a P12: correspondem a 12 zonas residenciais distantes cerca de 7,5 km das estradas axiais.
- D11 a D22: correspondem a 12 trechos de estrada com aproximadamente 4 km.

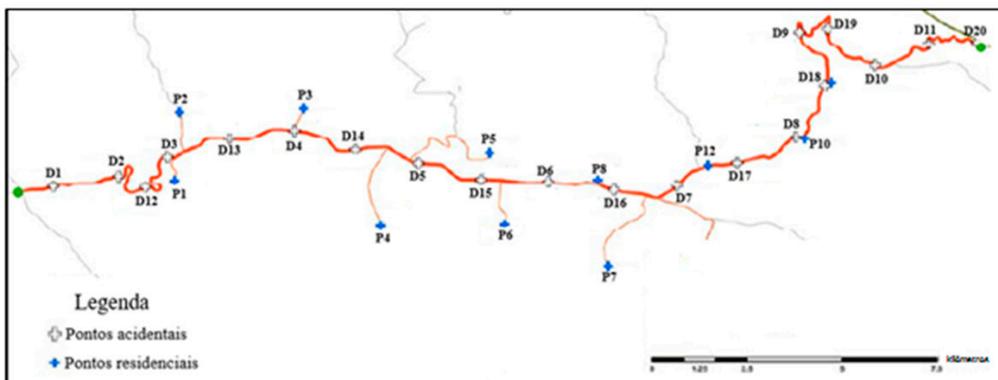


Figura 3 Representação dos pontos de demanda para o estudo de caso.

Fonte: adaptada de Mohaymany et al. (2012).

Os possíveis pontos para instalar novas estações (estações potenciais) bem como a localização das instalações atuais, já em funcionamento, estão representados na Figura 4, tal que os pontos:

- E1 a E6: representam estações já em atividade, sendo as bases de E3 a E6 consideradas fixas.
- B1 a B25: representam locais onde novas estações podem ser abertas. Considera-se que a cada 2 km (raio de cobertura S) é possível instalar uma estação, mas desde que haja pelo menos uma ambulância alocada.

De acordo com Mohaymany et al. (2012), o tempo de serviço médio estimado para atender um acidente é de 3,5 horas, enquanto outras demandas têm tempo médio de atendimento por volta de 1,5 hora. Outros parâmetros considerados foram: nível mínimo de confiabilidade $\alpha = 85\%$; fração de indisponibilidade $r = 0,38$, número mínimo de ambulâncias por estação $f = 2$ e raio de cobertura S de 2 quilômetros. Além disso, três cenários foram testados:

- Cenário 1: uma chamada por dia para cada 5 mil pessoas.
- Cenário 2: uma chamada por dia para cada 10 mil pessoas.
- Cenário 3: uma chamada por dia para cada 15 mil pessoas.



Figura 4 Representação dos pontos de estação para o estudo de caso.

Fonte: adaptada de Mohaymany et al. (2012).

O número de chamadas por dia, de acordo com a população existente na província, está descrito na Tabela 10.3. Por outro lado, a Tabela 10.4 traz o registro relacionado ao número de acidentes ocorridos nos trechos de estrada D1 a D20.

O modelo UBUL-R requer que o grau de conservadorismo \tilde{A}_a seja determinado a priori, sendo estabelecido para cada uma das restrições em (14). Ele indica a quantidade de parâmetros q_i que são incertos e, assim, vão assumir o pior caso.

Durante a resolução, foi considerado que sempre os primeiros q_i , para $i = 1, \dots, \tilde{A}_a$. A Tabela 10.5 traz os valores de \tilde{A}_a encontrados a partir da resolução da equação que delimita a probabilidade de violação, aplicando o método da bisseção e considerando que a violação permitida para a restrição é de 1%. Vale comentar que o valor usado para \tilde{A}_a consiste na parte inteira do valor apresentado na Tabela 10.5.

Tabela 3 Demanda associada aos pontos residenciais

Pontos de demanda		Número de chamadas por dia		
Pontos residenciais	População	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3
P1	5122	1,0244	0,5122	0,3415
P2	1521	0,3042	0,1521	0,1014
P3	2275	0,4550	0,2275	0,1517
P4	2708	0,5416	0,2708	0,1805
P5	25374	5,0748	2,5374	1,6916
P6	1528	0,3056	0,1528	0,1019
P7	539	0,1078	0,0539	0,0359
P8	43023	8,6046	4,3023	2,8682
P9	1928	0,3856	0,1928	0,1285
P10	1396	0,2792	0,1396	0,0931
P11	2641	0,5282	0,2641	0,1761
P12	19832	3,9664	1,9832	1,3221

Tabela 4 Número de acidentes para os trechos de estradas D1 a D20

Trechos de estrada	Nº de acidentes por ano	Nº de acidentes por dia
D1	32	0,0877
D2	48	0,1315
D3	19	0,0521
D4	22	0,0603
D5	8	0,0219
D6	48	0,1315
D7	13	0,0356
D8	10	0,0274
D9	3	0,0082
D10	4	0,0110
D11 a D20	2,5	0,0068

Tabela 5 Valor de \tilde{A}_0 considerando até 32 parâmetros q_i como incertos na restrição

J_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\tilde{A}_0	0	3,03	4,29	5,25	6,07	6,79	7,43	8,03	8,58	9,10	9,6
J_0	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
\tilde{A}_0	10,06	10,51	10,94	11,35	11,75	12,14	12,51	12,88	13,23	13,57	13,91
J_0	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
\tilde{A}_0	14,23	14,55	14,87	15,17	15,47	15,77	16,06	16,34	16,62	16,90	17,17

Testes preliminares mostraram que o modelo UBUL-R, para o estudo de caso, é muito sensível à quantidade de parâmetros incertos. Por isso, foi assumido um parâmetro \mathcal{D} entre $[0, 1]$ para indicar a porcentagem de parâmetros que são incertos em cada restrição e o desvio máximo \hat{q}_i foi tomado como um percentual do respectivo valor esperado q_i .

Os resultados obtidos pelo modelo UBUL-R considerando $\mathcal{D}=0,2$ e um percentual de 10% do valor esperado de q_i estão descritos nas Tabelas 10.6 e 10.7, assim como os resultados obtidos para o modelo original UBUL-M.

Nota-se pelas Tabelas 10.6 e 10.7 que o modelo UBUL-R requereu o mesmo número de ambulâncias que o modelo UBUL-M. Isso ocorre devido à perturbação dos parâmetros incertos ter sido muito pequena, a ponto de não influenciar nos resultados. Soma-se a isso que a porcentagem de parâmetros considerados incertos em cada restrição é pequena, apenas de 2%.

Pela Tabela 10.6 observa-se que houve uma diferença entre as estações abertas para o UBUL-M e para o UBUL-R, uma vez que algumas estações coincidem e outras não, mas o número de estações abertas permaneceu igual para ambos. Por outro lado, os resultados da Tabela 10.7 mostram que as mesmas estações foram abertas para ambos os modelos.

Tabela 6 Resultados obtidos considerando todos os pontos potenciais como possíveis bases

Cenário	Modelos	Nº de ambulâncias	Estações abertas
1	UBUL-M	5	P5, P9, P17, E2, E5
	UBUL-R	5	P4, P7, P19, P21, P23
2	UBUL-M	4	P5, P9, P16, P18
	UBUL-R	4	P8, P9, P22, P23
3	UBUL-M	4	P5, P8, P20, P25
	UBUL-R	4	P2, P16, P21, E2

Tabela 7 Resultados ótimos considerando que as bases E3 a E6 são bases fixas

Cenário	Modelos	Nº de ambulâncias	Estações abertas
1	UBUL-M	6	P9, E2
	UBUL-R	6	P9, E2
2	UBUL-M	6	P8, P9
	UBUL-R	6	P8, P9
3	UBUL-M	6	P1, P8
	UBUL-R	6	P1, P8

Visando a analisar o impacto da perturbação, testes foram realizados variando os valores do tempo de atendimento (ϵ), para o intervalo de 0 a 10%. Da mesma forma, variou-se a porcentagem de dados incertos \mathcal{D} entre 0 e 20%. Assim, para cada porcentagem de dados incertos, fez-se a variação em todo o intervalo de q_i . A Tabela 10.8 mostra os resultados obtidos para o Cenário 1, enquanto a Tabela 10.9 traz os resultados obtidos para os Cenários 2 e 3, visto que estes últimos tiveram resultados iguais. Nesses testes assumiu-se que todas bases estão disponíveis para serem abertas.

Tabela 8 Resultados obtidos pelo modelo UBUL-R para o Cenário 1

0	\mathcal{D} (%)										
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
0,5	5	5	5	5	5	15	20	23	26	28	31
1,5	5	5	5	5	5	15	20	23	26	28	31
2,5	5	5	5	5	5	15	20	23	26	28	31
3,5	5	5	5	5	5	15	20	23	26	28	31
4,5	5	5	5	5	5	15	20	23	26	28	31
5,5	5	5	5	5	5	15	20	23	26	28	31
6,5	5	5	5	5	5	15	20	23	26	28	31
7,5	5	5	5	5	5	15	20	23	26	28	31
8,5	5	5	5	5	5	15	20	23	26	28	31
9,5	5	5	5	5	5	15	20	23	26	28	31
10	5	5	5	5	5	15	20	23	26	28	31

Tabela 9 Resultados obtidos pelo modelo UBUL-R para os Cenários 2 e 3

0	\mathfrak{D} (%)										
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
0	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
0,5	4	4	4	4	4	15	20	23	26	28	31
1,5	4	4	4	4	4	15	20	23	26	28	31
2,5	4	4	4	4	4	15	20	23	26	28	31
3,5	4	4	4	4	4	15	20	23	26	28	31
4,5	4	4	4	4	4	15	20	23	26	28	31
5,5	4	4	4	4	4	15	20	23	26	28	31
6,5	4	4	4	4	4	15	20	23	26	28	31
7,5	4	4	4	4	4	15	20	23	26	28	31
8,5	4	4	4	4	4	15	20	23	26	28	31
9,5	4	4	4	4	4	15	20	23	26	28	31
10	4	4	4	4	4	15	20	23	26	28	31

As Tabelas 10.8 e 10.9 mostram que a medida que quantidade de dados incertos aumenta nas restrições, o impacto no valor da função objetivo é grande. Nota-se que a influência maior está na variação de \mathfrak{D} (em \mathbb{J}_a), pois ao fixar um valor para \mathfrak{D} e variar a perturbação em q_i , tem-se que o valor da função objetivo continua o mesmo.

No caso em que \mathfrak{D} assume uma variação de 20%, tem-se que para nenhuma perturbação em q_i ($\varepsilon = 0\%$), o resultado é o mesmo de UBUL-M, sem incerteza. Todavia, para a primeira variação, isto é, $\varepsilon = 0,5\%$, a função objetivo atinge o valor de 31 ambulâncias, tanto para o Cenário 1 quanto para os Cenários 2 e 3, não importando o aumento no valor de ε .

Por outro lado, ao fixar o valor relacionado a perturbação de q_i (em ε) e variar a quantidade de dados incertos em \mathbb{J}_a (em \mathfrak{D}), tem-se um impacto maior no valor da função objetivo. Observe como o número de ambulâncias quase quadruplica ao passar de $\mathfrak{D} = 8\%$ para $\mathfrak{D} = 10\%$ para $\varepsilon \in [0,5,10]$.

Para uma melhor visualização dos resultados nas Tabelas 10.8 e 10.9, as Figuras 5 e 6, respectivamente, trazem o comportamento da função objetivo (número de ambulâncias usadas) pela variação em ε e \mathfrak{D} . Nota-se claramente que só ocorre um aumento no valor da função objetivo quando se varia o número de dados incertos.

Outros testes foram realizados variando \mathfrak{D} entre 20% e 100% e ε entre 10% e 100%, porém os mesmos resultados foram encontrados quando para $\mathfrak{D} = 20\%$, por isso eles não foram apresentados neste trabalho.

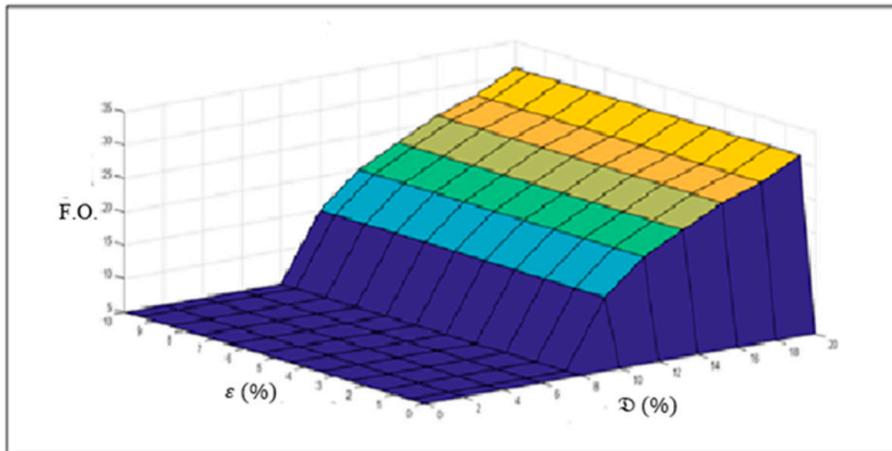


Figura 5 Variação na função objetivo para os resultados na Tabela 10.8, Cenário 1

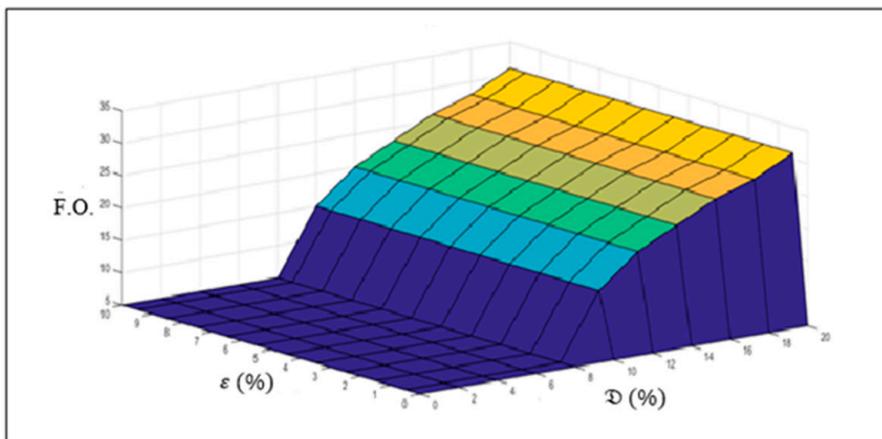


Figura 6 Variação na função objetivo para os resultados na Tabela 9, Cenários 2 e 3.

5 CONCLUSÕES

O presente trabalho investiga o problema de localização de instalações com aplicação em serviços de emergência. O foco do estudo foi um modelo matemático desenvolvido por Mohaymany et al. (2012), denominado UBUL, para determinar a localização de ambulâncias e estações (pontos de atendimento) com um limite de probabilidade de indisponibilidade, minimizando os custos de instalação. A partir desse modelo, fez-se a proposta de uma modificação, resultando no modelo UBUL-M, o qual foi comparado com a literatura. Outro modelo, denominado UBUL-

-R, foi proposto neste trabalho com base nas técnicas de otimização robusta ao considerar a incerteza em dados da matriz de restrições. Similarmente ao UBUL, o UBUL-M retornou bons resultados para as instâncias de teste, impondo o uso de menos ambulâncias e garantindo o atendimento de toda a demanda. Já o modelo incerto apresentou resultado pior que o modelo UBUL-M, como era esperado.

Os resultados comparativos mostraram que o modelo UBUL-M abona a superestimação das ambulâncias, podendo conseguir um número menor de ambulâncias, satisfazendo toda a demanda e respeitando o nível mínimo de confiança. O modelo UBUL-M demandou a instalação de 425 ambulâncias no total, para a implementação feita no CPLEX, enquanto a do GUROBI solicitou 408 unidades. Por outro lado, dentre os modelos da literatura usados para comparação, o pior deles exigiu 490 unidades. Na administração pública (e privada), essa diferença é crucial e permite melhor uso dos recursos. O tempo total utilizando o CPLEX para o UBUL-M foi de 6,98 horas para resolver todas as instâncias, enquanto o do GUROBI limitou-se a 6,75 horas, dado um tempo de limite de uma hora para cada instância. Como neste estudo as decisões são de nível estratégico, que são de longo prazo, esse tempo de otimização é aceitável.

Ao comparar o modelo UBUL-R com o modelo UBUL-M, notou-se que, quando há um aumento no tempo de atendimento das ambulâncias, o modelo com solução robusta apresenta resultado pior (requer mais ambulâncias) do que o modelo original, sem incerteza. Os resultados mostraram que, para um número razoavelmente pequeno de parâmetros considerados incertos, o valor da função objetivo mais do que sextuplicou.

Analisando o tempo de otimização pelos pacotes de otimização, conclui-se que esse tempo pode influenciar no processo de tomada de decisão, de forma que uma proposta de trabalho futuro engloba o estudo de heurísticas. Apesar de não garantirem a solução ótima, uma boa heurística pode retornar soluções próximas ou iguais à do modelo inteiro, mas gastando bem menos tempo computacional. Um estudo comparativo entre diferentes abordagens de otimização robusta também é interessante do ponto de vista prático e teórico.

Por fim, é claro o reconhecimento e o estudo de problemas que permitam melhorar a área de saúde. Soluções para problemas dessa natureza contribuem para um bem que transcende a área acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem às agências de fomento CNPq, CAPES e FAPEG.

REFERÊNCIAS

ALEMD.; MORABITO R. Production planning in furniture settings via robust optimization. *Computers and Operations Research*, v. 39, p. 139-150, 2012.

- ARENALES, A. et al. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Campus, 2007.
- BATTA, R.; MANNUR, N. R. Covering-location models for emergency situations that require multiple response units. **Management Science**, Maryland, v. 36, p. 16-23, 1990.
- BEN-TAL A.; NEMIROVSKI A. Robust solutions of Linear Programming problems contaminated with uncertain data. **Mathematical Programming**, Nova York, v. 88, n. 3, p. 411-424, 2000. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/PL00011380>>. Acesso em: 25 jul. 2016.
- BERTSIMAS D.; SIM M. The price of robustness. **Operations Research**, v. 52, p. 35-53, 2004.
- BORRAS, F. **Nuevos modelos probabilísticos de localización de servicios de emergencias**. Tese (Doutorado) – Miguel Hernandez de Elche, San Juan, 2000.
- BORRAS, F.; PASTOR, J. T. The ex-post evaluation of the minimum local reliability level: Na enhanced probabilistic location set covering model. **Annals of Operations Research**, v. 111, p. 51-74, 2002.
- CHURCH, R. L.; REVELLE, C. S. The maximal covering location problem. **Papers of the Regional Science Association**, v. 32, p. 101-118, 1974.
- GALVAO, R. D.; MORABITO, R. Emergency service systems: The use of the hypercube queuing model in the solution of probabilistic location problems. **International Transactions in Operational Research**, v. 15, p. 525-549, 2008.
- GENDREAU, M.; LAPORTE, G.; SEMET, F. Solving an ambulance location model by tabu search. **Location Science**, v. 5, n. 2, p. 75-88, 1997.
- GOLDBERG, J. B. Operations research models for the deployment of emergency services vehicles. **EMS Management Journal**, San Diego, v. 1, n. 1, p. 20-39, 2004.
- HAKIMI, S.L. Optimum location of switching centers and the absolute centers and the medians of a graph. **Operations Research**, v. 12, n. 3, p. 450-459, 1964.
- HAKIMI, S. L. Optimum distribution of switching centers in a communication network. **Operations Research**, v. 13, n. 3, p. 462-475, 1965.
- HOGAN, K.; REVELLE, C. S. Concepts and applications of backup coverage. **Management Science**, Nova York, v. 34, p. 1434-1444, 1986.
- MOHAYMANY, A. S. et al. Linear upper-bound unavailability set covering models for locating ambulances: application to Tehran rural roads. **European Journal of Operational Research**, London, v. 222, n. 1, p. 263-272, 2012.
- MUNHOZ J. R.; MORABITO R. Optimization approaches to support decision making in the production planning of a citrus company: a Brazilian case study. **Computers and Electronics in Agriculture**, v. 107, p. 45-57, 2014.
- NARASIMHAN, S.; PIRKUL, H.; SCHILLING, D. Capacitated emergency facility siting with multiple levels of backup. **Annals of Operations Research**, v. 40, p. 323-337, 1992.
- NOGUEIRA, L. C. **Um estudo para redução do tempo de resposta do SAMU de Belo Horizonte através da realocação das bases de operação**. 2011. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

PAIVA R. P. O.; MORABITO R. Planejamento hierárquico da produção em usinas de açúcar e álcool: modelagem de otimização robusta. *Produção*, v. 24, n. 3, p. 644-663, 2014.

REVELLE, C. S.; EISELT, H. A.; DASKIN, M. S. Bibliography for some fundamental problem categories in discrete location science. *European Journal of Operational Research*, London, v. 184, p. 817-848, 2008.

SERRA, D. *The pq -median problem: location and districting of hierarchical facilities*. 1989. Ph. D. Dissertation, Department of Geography and Environmental Engineering, John Hopkins University, Baltimore, 1989.

SILVA, V. L.; SUCENA, M. P. *Localização de facilidades: estudo de caso aplicado à escolha adequada de aeroporto para a minimização dos custos logísticos de distribuição de produtos farmacológicos*. 2009. Disponível em: <http://cbitumetrorec.gov.br/monografia/2009/trabalhos/artigos/planejamento/2_246_AC.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2016.

SOYSTER A. L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, v. 21, p. 1154-1157, 1973.

TOREGAS, C.; SWAIN, R.; REVALLE, C.; BERGMAN, L. The location of emergency service facilities. *Operations Research*, v. 19, p. 1363-1373, 1971.