

14

CAPÍTULO

ESTUDO NUMÉRICO E COMPUTACIONAL DE UM ABSORVEDOR DINÂMICO DE VIBRAÇÕES COM CARACTERÍSTICA NÃO LINEAR

Purcina, Alcione Borges¹;
Borges, Romes Antonio²;

¹ Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Regional Catalão/
UFG

² Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Regional Catalão/
UFG

* email: alcyone.borges@hotmail.com

Resumo: Vibrações indesejáveis podem causar danos e, até mesmo a destruição de máquinas e estruturas. Com o advento da computação científica, busca-se cada vez mais obter ferramentas para a atenuação de vibrações indesejadas em vários tipos de sistemas. Um dispositivo que tem sido bastante utilizado é o Absorvedor Dinâmico de Vibrações (ADVs), que podem ter características lineares ou não lineares. ADVs são dispositivos mecânicos que são sintonizados para vibrar em amplitudes elevadas, absorvendo parcial ou totalmente a energia vibratória do sistema. O presente trabalho tem como finalidade estudar um absorvedor dinâmico de vibrações com características não lineares, avaliando a contribuição da consideração das não linearidades no sentido de melhorar a eficiência de tal dispositivo. Assim, é feito um estudo do comportamento do sistema através da aplicação do método de Runge-Kutta de quarta ordem e, desta forma, determinar a contribuição do ADV não linear para o melhor funcionamento do sistema em questão.

Palavras-chave: Sistemas Mecânicos; Absorvedor Dinâmico de Vibração Não Linear, Método de Runge-Kutta

Purcina, Alcione Borges; Borges, Romes Antonio;

"ESTUDO NUMÉRICO E COMPUTACIONAL DE UM ABSORVEDOR DINÂMICO DE VIBRAÇÕES COM CARACTERÍSTICA NÃO LINEAR", p. 199-209 . In: Seminário de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação da Regional Catalão (2. : 2014 : Goiás) **Coletânea Interdisciplinar em Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação - Volume 4 : Ciências Exatas e Tecnológicas**. Anais [livro eletrônico] / organizado por Adriana Freitas Neves, Idelvone Mendes Ferreira, Maria Helena de Paula, Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos. São Paulo: Blucher, 2015. ISBN: 978-85-8039-115-2, DOI 10.5151/978859788580391152-V4_Cap14

1. Introdução

Vibrações são fenômenos indesejáveis, pois podem ocasionar danos, falhas e por vezes a destruição de máquinas e estruturas. Atualmente, verifica-se que o estudo das vibrações é de fundamental importância para a Engenharia. Análise de vibrações permite conhecer, melhorar e aperfeiçoar sistemas mecânicos em termos de qualidade, durabilidade e produtividade (SAYED; HAMED; AMER, 2011).

De uma forma geral, as vibrações podem ser classificadas quanto à existência ou não de excitação: vibrações livres ou forçadas. As vibrações livres são movimentos que surgem

quando o sistema mecânico é retirado de sua condição de repouso por um conjunto de condições iniciais (deslocamentos ou velocidades aplicadas ao sistema), ficando em seguida livre de forças externas. As vibrações forçadas são causadas por movimentos que resultam da atuação, ao sistema mecânico, de forças externas que podem exibir natureza harmônica, periódica, transitória ou aleatória.

As vibrações podem ser lineares e não lineares. As vibrações lineares são aquelas que ocorrem em um sistema cujos componentes atuam linearmente. Já nas vibrações não lineares um ou mais componentes do sistema não se comportam linearmente (RAO, 2008).

Vale mencionar que, durante vários anos, a análise da dinâmica clássica baseada na teoria linear foi considerada suficiente para a compreensão das características vibratórias de praticamente todas as estruturas projetadas. No entanto, com a modernização das estruturas e o emprego de materiais inovadores e mais flexíveis, as não linearidades tornaram-se mais ativas, provocando o surgimento de vibrações com características não lineares (SILVA, 2006).

Para a resolução dos sistemas lineares prevalecem o princípio da superposição e os métodos matemáticos disponíveis para seu estudo, os quais se encontram desenvolvidos e consolidados. Já os métodos para análise dos sistemas não lineares são bem menos conhecidos, de difícil aplicação e alguns se encontram somente parcialmente desenvolvidos. Entretanto, o conhecimento acerca destes sistemas é significativamente proveitoso, uma vez que todos os sistemas vibratórios tendem a comportar-se não linearmente com o aumento da amplitude de oscilação (RODOVALHO; COSTA, 2013).

As não linearidades podem ser consideradas no modelo do sistema dinâmico de muitas maneiras. Sua origem pode ser devido à geometria do sistema ou do tipo de material, ou associada com a presença de forças não lineares ou com a configuração física do sistema. Qualquer componente das equações do movimento como, por exemplo, os termos inerciais, os termos que descrevem forças restauradoras elásticas e inelásticas, os termos dissipativos, os termos que descrevem a excitação externa e até mesmo as condições de contorno do sistema, podem ser afetados por algum tipo de não linearidade (BORGES, 2008).

Segundo Steffen Jr e Rade (2001), uma das formas mais eficazes de se atenuar vibrações indesejadas em uma dada estrutura é através dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações (ADVs). Um absorvedor dinâmico de vibração clássico consiste em uma massa acoplada por meio de uma mola e um amortecedor a um dado sistema, concedendo a ele um novo grau de liberdade (g.d.l.). Esse sistema é então sintonizado para vibrar com amplitudes mais elevadas, absorvendo, assim, parcial ou totalmente a energia vibratória no ponto de acoplamento (KORONEV; REZNIKOV, 1993).

Os ADVs podem ser classificados em ADVs Passivos, ASVs Adaptativos e Ativos. Os passivos são projetados de forma a minimizar vibrações em uma determinada frequência, atuando somente sobre a frequência de excitação para o qual foi projetado. Os ADVs adaptativos são aqueles cujos parâmetros físicos de inércia, rigidez e amortecimento podem ser variados de forma controlada proporcionando a sintonização desejada. Já os ativos são capazes de aplicar forças contrárias ao movimento em questão no sistema principal conforme a necessidade.

Os ADVs podem ter características lineares ou não lineares. Contudo, nos últimos anos, é crescente o interesse em se estudar os ADVs com características não lineares, devido a sua maior robustez quando comparado com o absorvedor linear, fundamentada no fato do ADV linear funcionar satisfatoriamente somente na sua frequência de sintonização (BORGES,

2008). Nesse sentido, a seguir, será estudado um absorvedor dinâmico de vibrações com característica não linear, avaliando a contribuição das não linearidades diante da necessidade de melhorar a eficiência de tal dispositivos na atenuação de vibrações.

2. Absorvedor dinâmico de vibrações não linear

Considere o sistema vibratório de dois graus de liberdade (g.d.l.), com amortecimento, onde será introduzido o conceito de Absorvedor Dinâmico de Vibrações (ADVs) não linear, cujo modelo é mostrado na Figura 1.

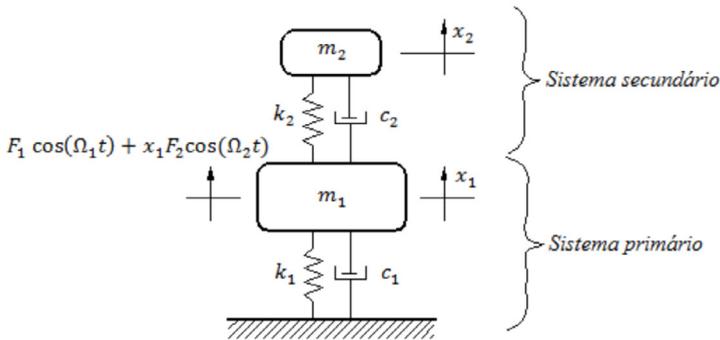


Figura 1. Sistema de 2 g.d.l. – Modelo do Absorvedor Dinâmico de Vibrações Não Linear

Deseja-se, a partir do subsistema formado por (m_2, k_2, c_2) , atenuar os níveis de vibração da massa principal, representada na figura 1 por m_1 . A este subsistema composto pela massa m_2 , pela mola k_2 e pelo amortecimento c_2 , dá-se no nome de Absorvedor Dinâmico de Vibração.

Neste sistema, a coordenada x_1 representa o deslocamento da massa principal (massa m_1) com relação à base, a coordenada x_2 representa o deslocamento da massa secundária (massa m_2) com relação à massa principal. Este sistema vibratório é composto por molas com características não lineares e possui amortecimento. A massa principal é excitada por uma força do tipo:

$$F(t) = F_1 \cos(\Omega_1 t) + x_1 F_2 \cos(\Omega_2 t) \quad (1)$$

Aplicando a 2ª lei de Newton nas duas massas separadamente, escreve-se as equações de movimento do sistema como sendo:

$$\begin{cases} F_1 \cos(\Omega_1 t) + x_1 F_2 \cos(\Omega_2 t) - k_{11}x_1 - k_{12}x_1^2 - k_{13}x_1^3 - c_1\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_1x_1^2 \\ -c_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_{21}(x_1 - x_2) - k_{22}(x_1 - x_2)^2 - k_{23}(x_1 - x_2)^3 = m_1\ddot{x}_1 \\ -k_{21}(x_2 - x_1) - k_{22}(x_2 - x_1)^2 - k_{23}(x_2 - x_1)^3 - c_3(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2\ddot{x}_2 \end{cases} \quad (2)$$

onde m_1 e m_2 são massas do sistema primário e secundário, respectivamente; k_{11} e k_{21} são rigidez lineares; c_1 e c_2 são coeficientes de amortecimento do sistema primário e secundário, respectivamente, c_3 é o coeficiente de amortecimento acoplado; Ω_1 e Ω_2 são frequências de excitação; x_1 e x_2 são deslocamentos do sistema principal e secundário, respectivamente, \dot{x}_j e \ddot{x}_j são derivadas de x_j e t o tempo.

A partir de manipulações algébricas na eq.(2) e assumindo não linearidades fracas e pequeno amortecimento, obtém-se:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 - \varepsilon \alpha_1 x_1^2 + \varepsilon \alpha_2 x_1^3 - \varepsilon \xi_1 \dot{x}_1 - \varepsilon \xi_2 \dot{x}_1 x_1^2 - \varepsilon \xi_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \varepsilon \alpha_3 x_2 \\ -\varepsilon \alpha_4 (x_1 - x_2)^2 - \varepsilon \alpha_5 (x_1 - x_2)^3 + \varepsilon F_1 \cos(\Omega_1 t) + \varepsilon x_1 F_2 \cos(\Omega_2 t) \\ \ddot{x}_2 = -\omega_2^2 (x_2 - x_1) - \varepsilon \beta_1 (x_2 - x_1)^2 - \varepsilon \beta_2 (x_2 - x_1)^3 - \varepsilon \xi_4 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (3)$$

onde ω_j ($j = 1,2$) são frequências naturais; α_i ($i = 1,2$) e β_j são parâmetros não lineares, f_j são amplitudes de força; ξ_s ($s = 1, \dots, 4$) são coeficientes de amortecimento, dadas por:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k_{11} + k_{21}}{m_1}, & \alpha_1 &= \frac{k_{12}}{m_1}, & \alpha_2 &= \frac{k_{13}}{m_1}, & \xi_1 &= \frac{c_1}{m_1}, & \xi_2 &= \frac{c_2}{m_1}, \\ \xi_3 &= \frac{c_3}{m_1}, & \alpha_3 &= \frac{k_{21}}{m_1}, & \alpha_4 &= \frac{k_{22}}{m_1}, & \alpha_5 &= \frac{k_{23}}{m_1}, & F_j &= \frac{f_j}{m_1}, \\ \omega_2^2 &= \frac{k_{21}}{m_2}, & \xi_4 &= \frac{c_3}{m_2}, & \beta_1 &= \frac{k_{22}}{m_2} & \text{e} & \beta_2 &= \frac{k_{23}}{m_2}. \end{aligned}$$

3. Resultados Numéricos

O comportamento do sistema principal e do absorvedor, dado pela eq. (3), é analisado implementando o Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem, no software Matlab. Os valores dos parâmetros utilizados para o sistema principal (sem absorvedor) são: $\xi_1 = 0.05$, $F_1 = 0.6$, $F_2 = 0.3$, $\alpha_1 = 0.03$ e $\alpha_2 = 0.04$. E nos casos com absorvedor foram os seguintes: $\xi_1 = 0.05$, $\xi_2 = 0.05$, $\xi_3 = 0.05$, $F_1 = 0.6$, $F_2 = 0.3$, $\alpha_1 = 0.03$, $\alpha_2 = 0.04$, $\alpha_3 = 0.04$, $\alpha_4 = 0.04$, $\alpha_5 = 0.04$, $\beta_1 = 0.05$ e $\beta_2 = 0.05$.

Nesta análise foram considerados alguns casos de ressonância, sendo que o grau de uma ressonância neste caso, depende da não linearidade da estrutura. Tem-se então equações com não linearidades quadráticas e cúbicas que podem possuir ressonância interna $\omega_1 \cong n\omega_2$, $n = 1, 2$ e 3 . Será analisado o caso onde frequência em que o parâmetro oscilante varia com valores próximos à frequência natural ($\Omega_1 \cong \omega_1$), a frequência com a qual o

parâmetro oscilante varia é duas vezes a frequência natural do sistema ($\Omega_2 \cong 2\omega_1$) e o caso onde se tem uma combinação destes dois casos.

Nesse sentido, a Fig. 2 (a) apresenta a resposta no domínio do tempo para o sistema, sem absorvedor e com absorvedor, em ressonância simultânea $\Omega_1 \cong \omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$, isto é, ressonância dada pela combinação de duas outras, e seus respectivos planos de fase, sendo a Figura 2 (b) para a massa principal e a Figura 2 (c) plano de fase para a massa com absorvedor acoplado. Na figura 2 (b) observa-se que o sistema principal é estável, já as oscilações do sistema com absorvedor tem ciclo limite, que corresponde a trajetória fechada que aparecem nos planos de fase do sistema não linear, e apresenta um comportamento caótico (Figura 2 (c)).

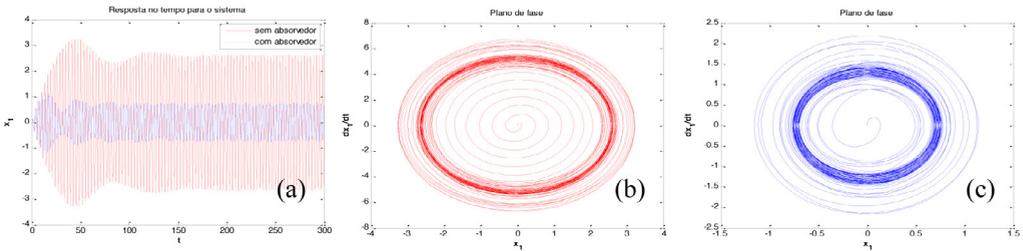


Figura 2. (a) Resposta no tempo para o sistema em ressonância simultânea $\Omega_1 \cong \omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$, (b) plano de fase para a massa principal e (c) plano de fase para a massa com absorvedor

Desta maneira, destaca-se que o sistema com absorvedor começa a ter um comportamento instável, porém a inserção deste dispositivo, leva a uma redução na amplitude do sistema em questão.

A fig. 3 (a) mostra a resposta no tempo para o sistema, sem absorvedor e com absorvedor, em ressonância simultânea (combinação de duas outras), isto é, com $\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$. Nota-se que, para este caso, a inserção do absorvedor proporciona uma atenuação significativa na amplitude da resposta do sistema em questão.

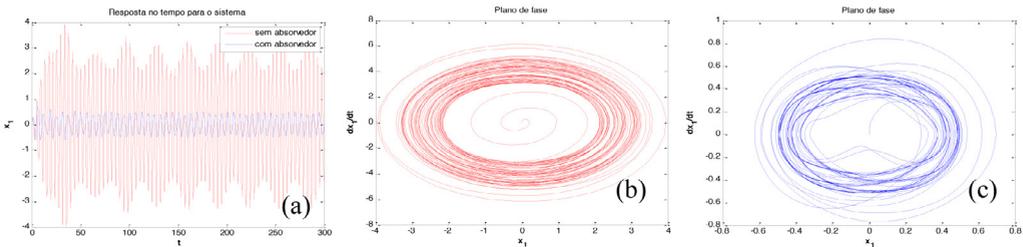


Figura 3. (a) Resposta no tempo para o sistema em ressonância simultânea $\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$ (b) plano de fase para a massa principal e (c) plano de fase para a massa com absorvedor

A fig. 4 (a) mostra a resposta no tempo para o sistema, sem absorvedor e com absorvedor, em ressonância simultânea dada também pela combinação de duas outras frequências, isto é, com $\Omega_1 \cong \omega_1$, $\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$.

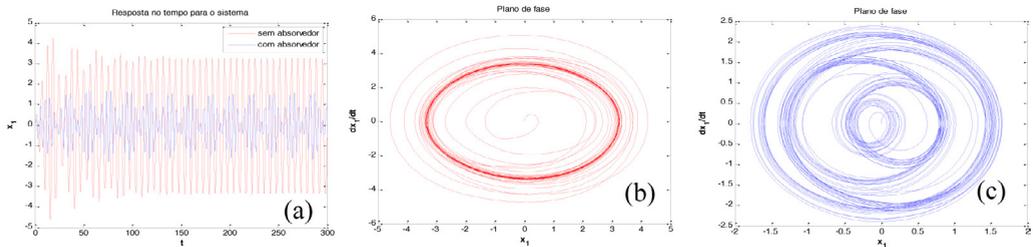


Figura 4. (a) Resposta no tempo para o sistema em ressonância simultânea $\Omega_1 \cong \omega_1$, $\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$ (b) plano de fase para a massa principal e (c) plano de fase para a massa com absorvedor

Nesta figura, também se observa que as oscilações do sistema e do absorvedor tem ciclo limite com caos dinâmico aumentado. Nestes casos, Figuras (3) e (4), também observa-se que o sistema com absorvedor tem comportamento instável, porém, como já ocorreu em casos anteriores, houve um ganho na diminuição da amplitude de vibração do sistema quando comparado com sistema sem absorvedor.

4. Conclusão

Neste trabalho, estudou-se um absorvedor dinâmico de vibrações com características não lineares, verificando a contribuição das não linearidades para melhorar a eficiência de tal dispositivo na atenuação de vibrações. Inicialmente, encontrou-se a resposta para o sistema em estudo no domínio do tempo, que por sua vez é um método de perturbação, que se mostrou bastante eficiente na resolução do sistema não linear. Posteriormente, foi feito um estudo do comportamento do sistema através da aplicação do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Pode-se observar que, para ambos os casos estudados, o absorvedor se mostrou bastante eficiente na diminuição das amplitudes de vibração do sistema. Foi verificado também que a não linearidade, possui grande influência na amplitude de vibração do sistema pois, com a variação da mesma, obteve-se resultados cada vez mais satisfatórios no que diz respeito à atenuação de vibrações indesejadas, apesar de aumentar a instabilidade do sistema. Neste caso, é necessário que se meça tal não linearidade de forma a se ter resultados mais satisfatórios.

5. Agradecimentos

Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás – FAPEG, ao CNPq e ao Programa de Pós-graduação em Modelagem e Otimização pelo apoio financeiro.

Numerical and Computational Study of a Dynamic Vibration Absorber with Nonlinear Features

Abstract: Undesirable vibrations may cause damage and even destruction of machines and structures. With the advent of scientific computing, is seeking increasingly get tools to attenuate undesired vibrations in various types of the systems. A device that has been widely used is the dynamic vibration absorber (DVAs) which may to have linear or non-linear characteristics, are mechanical devices that are tuned to vibrate at high amplitudes, absorbing partially or completely the vibrational energy of the system. This work aims studying a dynamic vibration absorber with nonlinear characteristics by assessing the contribution of the consideration of the nonlinearities in order to improve the efficiency of this device. Therefore, a study is made of the behavior of the system through the application of Runge-Kutta method of fourth order and thus determining the contribution of the nonlinear DVA to improve the functioning of the system in question.

Keywords: Mechanical Systems; Dynamic Nonlinear Vibration Absorber; Runge-Kutta Method

Referências bibliográficas

- BORGES, R. A. **Contribuição ao Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações não-lineares.** 2008. 154f. Dissertação (Doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia, 2008.
- KORONEV, B. G., REZNIKOV, L. M. **Dynamic Vibration Absorbers: Theory and Technical Applications,** John Wiley & Sons Ltd., Chichester, UK, 1993.
- RAO, S. S.; MARQUES, A. S.; LIMA JUNIOR, J. J. de. **Vibrações Mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. Cap. 1, p. 1-47.
- RODOVALHO, L. F. F.; COSTA, T. N. da. **Modelagem e Projeto Ótimo de Estruturas Dinâmicas: Abordagem Determinística e Estocástica.** 2013. 124f. Dissertação (Bacharelado) - Universidade Federal de Goiás, Curso de Matemática Industrial, Catalão, 2013.

SAYED, M.; HAMED, Y. S.; AMER, Y. A. **Vibration Reduction and Stability of Non-Linear System Subjected to External and Parametric Excitation Forces under a Non-Linear Absorber**. Int. J. Contemp. Math. Sciences, v. 6, n. 22, 2011, p. 1051 – 1070.

SILVA, D. G. da. **Vibrações Ressonantes Não-Lineares em Estruturas Tipo Viga Sob Excitação Paramétrica e Combinada**. 2006. 345f. Dissertação (Doutorado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2006.

STEFFEN JR, V; RADE, D. A. **Dynamic Vibration Absorber**; Encyclopedia of Vibration, Academic Press, ISBN 0-12-227085-1, p. 9-26, 2001.